Оглавление

Глава 1

Теория числовых рядов

1.1 Понятие числовых рядов

$$\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} : u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

Определение 1. *Числовой ряд (1) сходится к числу S, называется его суммой, если* $\exists \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} u_n = S$.

(N-ая) частичная сумма: $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n$

Определение 2. *Если* $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ *не существует, то говорят, что ряд (1) расходится.*

Пример 1. *в разработке.*

Теорема 1 (Критерий Коши)**.**

Числовой ряд сходится $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N, p \in \mathbb{N} : \left|\sum\limits_{k=N+1}^{N+p} u_k\right| < \varepsilon$

Доказательство. Следует из опр и критерия Коши сходимости последвательности.

$$|S_{N+p} - S_N| = \left|\sum_{n=1}^{N+p} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n\right| < \varepsilon$$

□

Следствие 1. *Если ряд (1) сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Пример 2.

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ *гармонический ряд расходится.*
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{sin^2 n * n^3}$ *- расходится.*
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Замечание 1. *Отбрасывание любого конечного числа слагаемых не влияет на сходимость.*

Замечание 2.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ - *сложение двух сходящихся рядов дают сходящийся ряд.*
- $\alpha(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ - *умножение ряда на число дает сходящийся ряд.*

1.2 Ряды с неотр. слагаемыми

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \qquad p_n \geq 0 \qquad (3)$$

$S_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$

$S_{n+1} = S_n + p_{n+1} > S_n$

$\Rightarrow \{S_n\}$ не убывает

Теорема 2. *Числовой ряд (3) сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть его числовых сумм ограничена(ограничена сверху).*

1.2.1 Признаки сравнения

Теорема 3. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *– миноранта,* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ *– мажоранта, где* $p_k, p'_k \geq 0$.
Пусть кроме того выполнено: $p_k \leq c_0 p'_k$, *где* $c_0 > 0$. *Тогда:*

1. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ *сходится, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится.*
2. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ *расходится, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *расходится.*

Доказательство.

1. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится. Тогда по теореме 2 $\{S'_n\}$ ограничена сверху и $S_n \leq c_0 S'_n \Rightarrow \{S_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow$ ЧТД.
2. Пусть утверждение неверно. Тогда по пункту 1 первый ряд тоже должен быть сходящимся - противоречие.

$\square$

Замечание 3. *В разработке.*

Теорема 4 (Признак сравнения в предельной форме)**.**
Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p'_k$, $p_k \geq 0, p'_k \geq 0$, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} \equiv L > 0 \Rightarrow$ *они сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall k\geq N:\left|\frac{p_k}{p'_k}-L\right|<\varepsilon\Leftrightarrow L-\varepsilon<\frac{p_k}{p'_k}<L+\varepsilon$$

$$!\varepsilon=\frac{L}{2}\ \exists N:\forall k\geq N:\ \frac{L}{2}<\frac{p_k}{p'_k}<\frac{3L}{2}\Leftrightarrow\underline{\frac{L}{2}p'_k<p_k}=$$

$$=\underline{p_k<\frac{3L}{2}p'_k}\quad \text{(Если одно сходится/расходится, то и другое.)}$$

$$p_k=\frac{1}{k},p'_k=\frac{1}{k^2}$$

□

Теорема 5 (ещё один признак сравнения)**.**
Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k,\sum\limits_{k=1}^{\infty}p'_k,\qquad p_k,p'_k\geq 0u\frac{p_{k+1}}{p_k}<\frac{p'_{k+1}}{p'_k}\forall k\geq k_0$ *Тогдав выполнены условия теоремы 2.*

1.2.2 Признаки Даламбера и Коши

Теорема 6 (признак Коши)**.**

1. *Если* $\sqrt[k]{p_k}<q<1\ \forall k$*, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k,\ p_k\geqslant 0$ *сходится.*
   Если $\sqrt[k]{p_k}\geqslant 1$*, то ряд расходится.*
2. *Пусть* $\exists\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}\equiv L$*. Если* $L<1$*, то ряд сходится. Если* $L>1$*, то расходится.*

Доказательство.

1. $\sqrt[k]{p_k}\leqslant q\Rightarrow p_k\geqslant q^k,\ q<1$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k$ сходится $\Rightarrow$ сходимость ряда по теореме 3.
   $\sqrt[k]{p_k}\geqslant 1\Rightarrow$ нарушенно необходимое условие $\Rightarrow$ ряд расходится.
2. $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0:\forall k>k_0\quad L-\varepsilon<\sqrt[k]{p_k}<L+\varepsilon$.
   Если $L<1$, то возьмем ε так, чтобы $L+\varepsilon<1$, тогда $\sqrt[k]{p_k}<L+\varepsilon<1$. Задача сведена к 1 пункту $\Rightarrow$ ряд сходится.
   Если $L>1$, то возьмем ε так чтобы $L-\varepsilon>1$ тогда $\sqrt[k]{p_k}>L-\varepsilon>1\Rightarrow$ свели задачу к 1 пункту $\Rightarrow$ ряд расходится.

□

Замечание 4. *Если* $L=1$*, то данный признак не дает однозначного ответа.*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\textit{расх}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\textit{сх}$$

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\to 1\qquad\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}\to 1$$

Замечание 5. *Если* $L=\infty$*, то ряд (3) расходится.*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k_0:\ \forall k>k_0\ \sqrt[k]{p_k}\geqslant\varepsilon$$

Замечание 6. *Утверждение срраведливо и в случае, если* $L = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{p_k}$

Теорема 7 (Признак Даламбера $\frac{p_{k+1}}{p_k}$).

1. *Если* $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$, *то (3) сходится.*
   Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$, *то (3) расходится.*
2. *Пусть* $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} \equiv L$. *Если* $L < 1$, *то (3) сходится. Если* $L > 1$, *то (3) расходится.*

Доказательство.

1. $\frac{p_{k+1}}{p_k} = q : \frac{q^{k+1}}{q^k}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, если $q < 1 \Rightarrow$ по теореме 3 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится.
   $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1$, то $p_k + 1 \geqslant p_k \Rightarrow \{p_k\}$ возрастает $\Rightarrow$ нарушено необходимое условие сходимости $\Rightarrow$ расходится.
2. $L > 1,\ L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon,\ \forall k \geqslant k_0$ Выберем $\varepsilon > 0\ \ L - \varepsilon > 1 \Rightarrow$ (3) расходится.
   $L < 1$, выберем $L + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ (3) сходится.

□

Замечание 7. $L = 1$ *- аналогично предыдущему.*

Замечание 8. $L = \infty$ *- аналогично предыдущему.*

Замечание 9.

Лемма 1. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k} = b$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{b_n}{k} - b = \frac{(b_1 - b) + (b_2 - b) + \ldots + (b_k - b)}{k} = \left| \forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 : \forall k > k_0\ |b_k - b| < \varepsilon \right| =$$

$$= \frac{(b_1 - b) + (b_2 - b) + \ldots + (b_{k_0-1} - b)}{k} + \frac{(b_{k_0} - b) + \ldots + (b_k - b)}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k} - k \right| \leqslant \frac{|b_1 - b| + \ldots + |b_{k_0-1} - b|}{k} + \frac{|b_{k_0} - b| + \ldots + |b_k - b|}{k} =$$

$$= \left| M = sup|b_k - b| \right| = \frac{k_0 * M}{k} + \varepsilon$$

выберем $k_1 \geqslant k_0 :\ \frac{k_0 M}{k} < \varepsilon,\ \forall k > k_1$ □

1.2.3 Интегральный признак

Пусть $y = f(x),\ x \geqslant 1$. Пусть f(x) неотрицательна и монотонно не возрастает.

Теорема 8. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$ *сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится* $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$

Доказательство. В разработке.

□

1.3 Бесконечные произведения

$$v_1 * v_2 * ... * v_n * ... = \prod_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (1)$$

Определение 3. *Бесконечное произведение (1) - сходится к числу $P \neq 0$, если $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} v_k \to P$ $(n \to \infty)$. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$, то говорят, что бесконечное произведение (1) расходится к 0.*
Если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, то (1) расходится.
Заметим что $v_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$. Если $\exists P \neq 0 : P_n \to P$ то $v_n \to 1$

Теорема 9. *Необходимое условие сходимости Если бесконечное произведение* (1) *сходится, то $v_n \to 1(n \to \infty)$.*

Доказательство. Т.к отбрасывание конечного числ v_n не влияет на его сходимость и, начиная с некоторого $n_0 : v_n >= \frac{1}{2}(n \geq n_0)$, можно считать, что в бесконечных произведениях все $v_n > 0$. □

Пример 3.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} * (...)} * ... = \frac{2}{\pi}$$

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = 4sin\frac{x}{4}cos\frac{x}{4}cos\frac{x}{2} = ... = 2sin\frac{x}{2^n}cos\frac{x}{2^n}cos\frac{x}{2^{n-1}} * ... * cos\frac{x}{2}$$

$\prod\limits_{k=1}^{\infty} cos\frac{x}{2^k} \Rightarrow$ *частичное произведение* $P_n = \frac{sinx}{2^n sin\frac{x}{2^n}} = \frac{sinx}{x} * \frac{\frac{x}{2^n}}{sin\frac{x}{2^n}} \to \frac{sinx}{x}$

$\prod\limits_{k=1}^{\infty} cos\frac{x}{2^k} = \frac{sinx}{x} \Rightarrow \prod\limits_{k=1}^{\infty} cos\frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ *формула Виета*

Пример 4. *Валиис*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1} x d(-cosx) = -sin^{n-1}x * cosx +$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx * (n-1)sin^{n-2}x \cos x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2 x) * sin^{n-2} x dx =$$
$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4} = \frac{(2k-1)(2k-3)...1}{2k(2k-2)...2} I_0$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3} = \frac{2k(2k-2)...2}{(2k+1)(2k-1)...3} I_1$$

$$\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} = \frac{(2k+1)(2k-1)^2(2k-3)^2 * ... * 3^2}{(2k)^2(2k-2)^2 * ... * 2^2} * \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)(2k-1)^2 * ... * 3^2}{(2k)^2(2k-2)^2 * ... * 2^2} * \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}$$

Докажем, что $\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \to 1(k \to \infty)$

$$1 < \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} < \frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$$

Так как $\ln P_n = \ln v_1 + ... + \ln v_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ln(v_n)$

Теорема 10. *Пусть* $v_n > 0 \forall n$ *Тогда бесконечное произведение(1) сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln v_n$

Теорема 11. *Пусть* $v_n \geq 1 \forall n$ *Тогда бесконечное произведение(1) сходится* $\Leftrightarrow$ *сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$

Доказательство. $\Rightarrow$ т.17 $v_n \to 1$ Для ряда $\sum\limits_{n=1} \infty \ln v_n$ из неотриц. слагаемых($v_n \geq 1$) выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln v_n}{v_n - 1} = 1$ По пр-ку сравнения сход. ряд. $\sum\limits_{n=1} \infty (v_n - 1)$
$\Leftarrow$ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$ сх. $\Rightarrow v_n \to 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln v_n}{v_n - 1} = 1 \Rightarrow$ по признаку сравнения $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$ □

Теорема 12. *Пусть* $v_n > 0 \forall n$ *Положим* $v_n = 1 + u_n \forall n$

1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится. Тогда бесконечное произведение сходится* $\Leftrightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ *сзрдится.*
2. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ *сходится. Тогда бесконечное произведение (1) сходится* $\Leftrightarrow$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится.*

Доказательство. В условиях т. 20: $u_n \to 0, n \to \infty$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln 1 + u_n$

$$\ln 1 + u_n = u_n - \frac{u_n}{2} + o(u_n^2), n \to \infty$$

□

Глава 2

Функциональные последоавтельности и ряды.

$\{f_n x\}_{n=1}^{\infty}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Будем предпологать, что все $f_n(x)$ / все $u_n(x)$ являются функциями, определенными на некотором общем множестве $XC\mathbb{R}$

2.1 Различные виды схоимости

Пусть $x_0 \in \mathbb{X} : \{f_n(x_0)\} \to_{n\to\infty} f(x_0)$ - Поточечная сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ сходится к } S(x_0)\text{- Поточечная сходимость.}$$

Пример 5. *В разработке.*

Пример 6. *В разработке.*

Определение 4. $\{f_n(x)\}$ *равномерно на* X *сходится к* $f(x)$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 5. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n()x$ *называется равномерно сходящимся на* X*, если посл-ть* $\{S_n(x)\}$ *его част. сумм. равномерно сходятся на* X*.*

Замечание 10. *Равномерная сходимость на* X *подразумевает сходимость в* $\forall$ *точке* $x_0 \in X$ *Из поточечной сходимости, вообще говоря, не следует равномерная сходимость. Из примера 2:* $\{x^n\} \to 0 \forall x \in (-1, 1)$

Доказательство. Докажем, что на $(-1, 1)$ нет равномерной сходимости:

$$\exists \varepsilon \geq 0 \forall N \ \exists n \geq N \exists x \in (-1, 1) : |x^n| \geq \varepsilon$$

$$n = N \quad x = 1 - \frac{1}{N} \Rightarrow (1 - \frac{1}{N}) \to \frac{1}{e} \Rightarrow \text{При} N \geq N_0 : \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \geq \frac{1}{3}$$

□

Замечание 11. *Из равномерное схожимости на X следует равномерная сходимость на $\forall$ подмножестве $X_1 c X$*

Замечание 12. *Равномерная сходимость $\{f_n(x)\}$ на X к $f(x)$ равносильная*

$$\exists lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Обозначение 1.

$$\{f_n(x)\} \to^{\to^X} f(x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to^{\to^X} S(x)$$

Теорема 13 (Критерий Коши)**.**

$$I. \{f_n(x)\} \to^{\to} на X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{X} : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
$$II. \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to^{\to} на X \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{X} : \left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right| < \varepsilon$$

Доказательство. В разработке. □

Следствие 2. *В разработке.*

2.2 Признак равномерной сходимости

2.2.1 Признак вейерштрасса

Теорема 14. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *определен на* $\mathbb{X}$ *и известно, что* $|u_n(x)| \leq b_N \forall n$