Математический анализ

Крицков Леонид Владимирович.

Глава 1. Теория числовых рядов.

§1 Понятие числового ряда, его сходимость.

$$\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}: \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

Опр. Числовой ряд (1) сходится к числу S, называемому его суммой, если

$$\exists \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} u_n}_{\text{(N-ная) частичная сумма } S_N} = S$$

Опр. Если $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$ не существует, то говорят, что ряд (1) расходится.

Примеры:

① $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}; \; q \neq 1; \quad S_n = n, \; q = 1$$

а) Если $|q| < 1$, то ряд сходится: и его сумма $\frac{1}{1-q}$

б) Если $|q| > 1$, то ряд расходится, ~~т.к. числитель беск~~ $S_n \to \infty$ и ряд расходится

в) $q = 1$, ряд расходящийся

г) Если $q = -1$, то числитель неопределён, предела не сущ-ет.

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_N = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{N(N+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$\to 1$ при $N \to \infty$

③ $\underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}_{S_n} + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{n!} \cdot x^n, \text{ где } \theta \in (0;1)$$

? Сумма ряда : e^x, $\forall x$

$$e^x - S_n = R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{n!} \cdot x^n$$

$$|R_n(x)| \underset{x>0}{=} \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \leq \frac{e^x}{n!} x^n \to 0, \ n \to \infty$$

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\theta x}}{n!} |x|^n \leq \frac{|x^*|^n}{n!} \to 0$$

$\boxed{Th}$ Критерий Коши

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall n \geq N, \ p \in \mathbb{N}: \ \left|\sum\limits_{k=N+1}^{N+p} u_k\right| < \varepsilon$

Док-во следует из опр. и критерия Коши сходимости посл.

$$\left|S_{N+p} - S_N\right| < \varepsilon$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N+p} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n\right|$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} u_n\right|$$

Следствие: Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ (2)

Пример: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

гармонический ряд

расходится.

$\underset{0}{!} = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sin^2 n \, n^3}$ — расх

$\underset{0}{!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Замечание 1. Отбрасывание любого конечного числа слагаемых не влияет на сходимость.

Замечание 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ ← слож. двух сх. рядов дают сходящийся ряд

$\alpha\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ ← умн. сх. ряда на число даёт сходящийся ряд.

§2 Ряды с неотрицательными слагаемыми

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n, \; p_n \geq 0 \quad (3)$

$S_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$

$S_{n+1} = S_n + p_{n+1} \geq S_n$

$\Rightarrow \{S_n\}$ не убывает

$\boxed{Th}$ Числовой ряд (3) сходится $\Leftrightarrow$ посл-ть его числовых сумм ограничена (ограничена сверху)

2.1 Признаки сравнения

$\boxed{Th}$ Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ (миноранта), $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ (мажоранта), где $p_k, p_k' \geq 0$

Пусть кроме того выполнено: $p_k \leq c_0 p_k'$, где $c_0 > 0$

Тогда а) Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится

б) Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ расходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится.

Док-во:

а) Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$ сходится. Тогда по Th 2 $\{S_n'\}$ огран. сверху. и

$S_n \leq c_0 S_n' \Rightarrow \{S_n\}$ огр. сверху $\Rightarrow$ ч.т.д.

(от противного)

б) Пусть утверждение неверно. Тогда по пункту а первый ряд тоже должен быть сходящимся. => Ч.Т.Д.

Замечание: выполнение неравенства $p_k \le C_0 p_k'$ можно требовать не для всех, а только для номеров больших какого-то K.

Пример:

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится из-за $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $(p>2)$ ~~p∈N~~ сходится из-за $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\boxed{Th}$ (Признак сравнения в предельной форме)

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, $p_k \geqslant 0$, $p_k' \geqslant 0$

Пусть кроме того, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L > 0$

Тогда они сходятся и расходятся одновременно.

Док-во:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall k \geq N: \left|\frac{p_k}{p_k'} - L\right| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < \frac{p_k}{p_k'} < L + \varepsilon$

$! \; \varepsilon = \frac{L}{2} \quad \exists N:$

$$\frac{L}{2} < \frac{p_k}{p_k'} < \frac{3L}{2} \quad \forall k \geq N$$

$$\frac{L}{2} \cdot p_k' < p_k < \frac{3L}{2} p_k'$$

Если одно сх, то и другое,
Если одно расх, то и другое.

$p_k = \frac{1}{k}$, $p_k' = \frac{1}{k^2}$

$\boxed{Th}$ 5 (еще один признак сравнения)

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, $p_k, p_k' \geq 0$

Пусть, кроме того, $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}$, $\forall k \geq k_0$,

Тогда выполнены условия Th 3.

Док-во:
$$\left.\begin{aligned} \frac{p'_{k+1}}{p'_{k_0}} &\geq \frac{p_{k+1}}{p_{k_0}} \\ \frac{p_{k_0+2}}{p_{k_0+1}} &\leq \frac{p'_{k_0}+2}{p'_{k_0}+1} \\ \frac{p_{n+1}}{p_n} &\leq \frac{p'_{n+1}}{p_n} \end{aligned}\right\} \quad \frac{p_{n+1}}{p_{k_0}} \leq \frac{p'_{n+1}}{p'_{k_0}}$$

$$p_{n+1} \leq \frac{p_{k_0}}{p'_{k_0}} \cdot p'_{n+1} \qquad \forall n \geq k_0.$$

О поведении част. сумм гармон. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

а) $\ln(1+t) < t \quad, \forall t > 0$

б) $t = \frac{1}{k} \qquad \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \ \forall k$

$$\ln(1+t) = t + \underset{t\to 0}{\underline{O}}(t^2).$$

$$|t - \ln(1+t)| \leq C \cdot t^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Bigl(\underbrace{\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{\leq C\cdot \frac{1}{k^2}}\Bigr) - \text{сходится (Th 3)}$$

$$\gamma + o(1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = S_n - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = S_n - \ln(n+1)$$

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \ln(n+1) + \gamma + \underset{n\to\infty}{o(1)} \Rightarrow S_n = \ln n + \gamma + o(1), \ n \to \infty$$

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\to 0}$$

$\gamma = 0{,}577\ldots$ – константа Эйлера – Маскерони

2.2 Признаки Даламбера и Коши

Th 6 (признак Коши) $\left(\sqrt[k]{p_k}\right)$

I Если $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ $\forall k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $p_k \geq 0$ сходится

Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$, то ряд расходится.

II Пусть $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} \equiv L$. Если $L < 1$, то сходится

$L > 1$, то расходится.

Док-во:

I: $\sqrt[k]{p_k} \leq q \Rightarrow p_k \leq q^k$, $q < 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходимость ряда по Th 3

$\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \Rightarrow p_k \geq 1 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ряд расходится.

II: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0$: $\forall k > k_0$ $L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$. $\forall k > k_0$

Если $L < 1$, то возьмём ε так, чтобы $L + \varepsilon < 1$, тогда $\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$

Свели задачу к I пункту. $\Rightarrow$ ряд сходится

Если $L > 1$, то возьмём ε так, чтобы $L - \varepsilon > 1$, тогда $\sqrt[k]{p_k} > L - \varepsilon > 1$

Свели задачу к I пункту $\Rightarrow$ ряд расходится.

Замечание 1.

Если $L = 1$, то данный признак не дает однозначного ответа.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - расх $\qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ - сх.

$\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \to 1 \qquad \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \to 1$

Замечание 2.

Если $L = \infty$, то (3) расходится.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0$: $\forall k > k_0$ $\sqrt[k]{p_k} \geq \varepsilon$ $\quad [\varepsilon = 1]$

Замечание 3.

Утв-е справедливо, и в случае, если $L = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{p_k}$

Если $L = \infty$, то $\exists \{k_n\}: \sqrt[k_n]{p_{k_n}} \to +\infty$

Для $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 : \forall n > n_0 : \sqrt[k_n]{p_{k_n}} \geq \varepsilon = 1 \Rightarrow p_{k_n} \geq 1 \Rightarrow$

Вся посл-ть не явл. беск. малой.

Если $L > 1$, то есть подп-ть $\{k_n\}$ $\sqrt[k_n]{p_{k_n}} \to L \Rightarrow p_{k_n} > \underbrace{L - \varepsilon}_{>1}$ $\forall n >$

Если $L < 1$, то правее $L + \varepsilon < 1$ расположено не более чем конечное число переменных наших посл.-ти $\Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{p_k} \leq L + \varepsilon$

$\boxed{Th}$ 7 (Признак Даламбера) $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)$

I Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$, то (3) сходится

Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$, то (3) расходится

II Пусть $\exists \lim\limits_{k \to \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$. Тогда

Если $L < 1$ – (3) сход

$L > 1$ – (3) расход.

Док-во:

I $\frac{p_{k+1}}{p_k} = q = \frac{q^{k+1}}{q^k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сход, если $q < 1 \Rightarrow Th_3$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ с

Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, то $p_{k+1} \geq p_k \Rightarrow \{p_k\}$ возр $\Rightarrow$ нарушено необх. усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расходится

II $L > 1$, $L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$. Выберем $\varepsilon > 0$ $L - \varepsilon \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (3) расходится

$L > 1$, Выберем $L + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ (3) сходится.

Замечание 1:

$L = 1$

аналогично предыдущему

Замечание 2

$L = \infty$

аналогично предыдущему.

Замечание 3.

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{p_{k+1}}{p_k}.$$

Если $L<1$, то ряд сходится.

Для $\varepsilon>0$: $L+\varepsilon<1$ $\exists k_0 : \forall k>k_0$ правее $L+\varepsilon$ расположено не более чем конечное число элементов $\cancel{\sqrt[k]{p_k}}$ $\frac{p_{k+1}}{p_k}$, значит $\exists k_0 : \forall k>k_0 :$ $\frac{p_{k+1}}{p_k} \le L+\varepsilon<1$

Значит (3) сходится

Если $L>1$, проблема... , поэтому:

Признак Коши сильнее признака Даламбера

Пример:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^k}{2^{k+1}} \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{3+(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} \cdot \frac{2^{k+1}}{3+(-1)^k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3+(-1)^{k+1}}{3+(-1)^{k}} -$$

$k=2n$: $\to \frac{1}{4}$; $k=2n+1$: $\to 1$

Признак Даламбера молчит:

$$\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{3+(-1)^k}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[k]{\frac{3+(-1)^k}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

Признак Коши говорит, что ряд (3) сходящийся.

Докажем, что если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, то $\exists \lim \sqrt[k]{p_k} = L$

Док-во:

$$\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\underbrace{\frac{p_k}{p_{k-1}}}_{a_k}\cdot\underbrace{\frac{p_{k-1}}{p_{k-2}}}_{a_{k-1}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{p_2}{p_1}}_{a_2}\cdot\underbrace{\frac{p_1}{1}}_{a_1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = L \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \ln a_k = \ln L = B. \qquad \ln a_k = b_k$$

Лемма: Если $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = B$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k} = B$

Док-во: $$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_k}{k} - B = \frac{(b_1-B)+(b_2-B)+\ldots+(b_k-B)}{k} \ominus$$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists k_0 : \forall k>k_0 :$ $|b_k - B|<\varepsilon$

$$\ominus \frac{(b_1-B)+(b_2-B)+\ldots+(b_{k_0-1}-B)}{k} + \frac{(b_{k_0}-B)+\ldots+(b_k-B)}{k}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{b_1+\ldots+b_k}{k} - B\right| \le \underbrace{\frac{|b_1-B|+|b_2-B|+\ldots+|b_{k_0-1}-B|}{k}}_{\le \frac{k_0\cdot M}{k}} + \underbrace{\frac{|b_{k_0}-B|+\ldots+|b_k-B|}{k}}_{<\varepsilon}$$

лист

$M = \sup |b_k - B|$

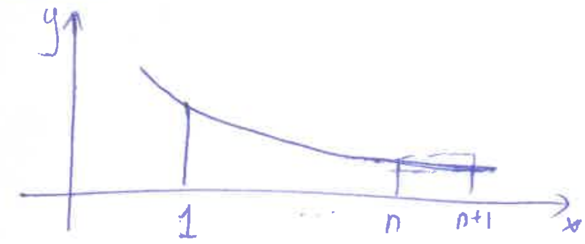
выберем $k_1 \ge k_0 : \frac{k_0 M}{k} < \varepsilon, \quad \forall k \ge k_1$

(2.3) Интегральный признак

Пусть $y = f(x)$, $x \ge 1$. Пусть $f(x)$ неотрицательна и монотонно не возрастает

$\boxed{\text{Th}}$ 8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$

Док-во:



$f(n) \ge f(n+1) \quad \forall n$

$$f(n) \ge \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge f(n+1)$$ (сторона прям = 1)

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \ge \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge \sum_{n=1}^{N} f(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \ge \int_1^{N+1} f(x)\,dx \ge \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f(n+1)}_{S_{N+1} - f(1)}$$

$\Leftarrow$ Если $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_1^{N+1} f(x)\,dx$ огран, то $\{S_{N+1}\}$ огр сверху.

Согласно Th2 отсюда следует сходимость ~~интеграла~~ ряда

$\Rightarrow$ Если интеграл расходится, то в силу того, что $f(x)$ неотрицательна

$\int\limits_1^{N+1} f(x)\,dx \to +\infty \quad \{S_N\}$ – б. больше $\Rightarrow$ ряд расходится

§3. От перемены мест слагаемых...

Пример: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ сходится к $\ln 2$

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \;\Rightarrow\; \exists \lim S_{2n} = A$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}.$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots +\right.$$

ч сумма гарм. ряда

$$= S_{2n} - S_n =$$

гарм. ряда

$$= \ln 2n + \gamma + \bar{o}(1)\ (n \to \infty) - \ln n - \gamma - \bar{o}(1) = \ln 2 + \bar{o}(1)$$

§ 3.1 Абсолютная и условная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

Th 9 Если $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Док-во: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сход $\forall \varepsilon > 0\ \exists N.\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}: \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_n| < \varepsilon$

Т.к. $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|$, что по критерию Коши сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Опр 1. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ наз-ся абсолютно сходящимся, если сходится $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Опр. 2 Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ наз-ся условно сходящимся, если сам ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ рас

3.2 Перестановка слагаемых абсолютно сход. ряд

Th 10 (Коши):

$\forall$ перестановка абсолютно сходящегося ряда сходится, причем к той же сумме, что и эта перестановка образует также ~~условно~~ абсолютно сходящийся ряд.

Док-во:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S$$

$u_1' + u_2' + \ldots + u_n' + \ldots$ – перестановка

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 : \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{k=N+1}^{N+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall p \in \mathbb{N})$$

$\boxed{u_1}, \boxed{u_2}, \ldots, \boxed{u_{N_0}}, u_{N_0+1}, \ldots$ (выделенные окажутся в опр. местах).

$\ldots, \Box, \ldots, \Box, \ldots, \Box, \ldots$ – слагаемые перестановки

Здесь $\exists N'$, что до него уместятся все $u_1, \ldots, u_N$

$$\forall n \geq N': \left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - S \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - S - \sum_{k=1}^{N_0} u_k + \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| \leq \sum_{k=N+1}^{N_0+p} |u_k| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Для док-ва абс сходимости перестановки достаточно повторить рассуждения выше для пары рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k|$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k'|$

(3.3) Перестановка слагаемых условно сходящегося ряда.

$\boxed{\text{Th}}$ " (Римана).

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится условно, то $\forall L \in \mathbb{R}$ $\exists$ перестановка ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, сходящаяся к L.

Док-во:

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$

неотр слагаемые — отр слагаемые

$p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ $\quad$ $-q_1, -q_2, \ldots, -q_n, \ldots$

$(p_i \geq 0 \ \forall i \in \mathbb{N})$ $\quad$ $(q_i > 0 \ \forall i \in \mathbb{N})$

Наблюдения:

1) эти последовательности обе бесконечны

2) Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$ явл. расходящимися, а значит их част суммы $\to +\infty$)

Рассмотрим $\forall$ частичную сумму S_n ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. $S_n = P_n - Q_n$

P_n — сумма всех неотр слагаемых в S_n; Q_n — сумма всех модулей отр слагаемых в S_n

$\{S_n\}$ сходится, т.е. $\{P_n - Q_n\}$ сход.

Однако $\{P_n + Q_n\} \to +\infty$

$P_n + Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n}|u_k|$

посл. част сумм этих рядов $\{P_n\}$, $\{Q_n\} \to +\infty$

Отбор проводим так:

1) складываем p_i до тех пор, пока сумма не превзойдет L.

2) потом вычитаем q_i до тех пор, пока сумма не станет меньше L.

и т.д.

Воспользуемся тем, что $\{p_k\} \to 0$, $\{q_k\} \to 0$ (в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$)

Для частичных сумм построенной перестановки верно:

$|p_1 + \ldots + p_{n_1} - L| \leq p_{n_1}$, $\quad |p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - L| \leq p_{n_1}$

$|p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} - L| \leq q_{m_1}$ $\Longrightarrow$ частичные суммы перестановки сходятся к L

Замечание:

Простой модификацией алгоритма можно доказать, что $\exists$ перестановка, ~~дающ~~ дающая расходящийся ряд.

Если в построении менять L через каждые 2 шага, то пер. ряда будет иметь сходящуюся по част. сумму $\to +\infty$.

§4. Умножение сходящихся рядов

$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots)(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots)$

$\boxed{\text{Th}}$ 12 Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из слагаемых $u_k v_l$, $k, l = 1, 2, \ldots$, занумерованных в любом порядке, сходится абсолютно, и его сумма равна произведению сумм исходных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

Док-во: $u_n v_l = \omega_m$ – некая исчерпывающая нумерация произведений.

Докажем, что этот ряд сходится абсолютно.

По $\boxed{\text{Th}}$ 9 дост. док-ть сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\omega_n|$

Пусть S_n - частичная сумма этого ряда $S_n \equiv \sum\limits_{n=1} |\omega_n|$ и докажем, что $\{S_n\}$ ограничена сверху.

$S_n = |\omega_1| + \ldots + |\omega_n|$

$\omega_n = u_k v_l$, тогда среди всех u_j, участвующих в этих ω_n выберем u_j с max номером (это u_{n_0})

аналогично v_j (это v_{m_0})

Тогда $S_n = |\omega_1| + \ldots + |\omega_n| \le \underbrace{(|u_1| + \ldots + |u_{n_0}|)}_{\text{част. с. } S^u_{n_0} \text{ сход ряда}} \underbrace{(|v_1| + \ldots + |v_{m_0}|)}_{\text{част. с. } S^v_{m_0} \text{ сход. ряда}}$

огр. сверху $\qquad = \qquad$ огр. сверху

Таким образом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n$ сходится (к W) при любой перестановке его слагаемых

$\lightning$

Рассмотрим такую перестановку слагаемых этого ряда при которой в последовательности частичных сумм встречаются выражения:

$$u_1v_1,\ (u_1+u_2)(v_1+v_2);\ (u_1+u_2+u_3)(v_1+v_2+v_3),\ldots$$

Эти выражения образуют подп-ты част. сумм, сходящуюся к W.

Однако:
$$\left.\begin{array}{l} u_1,\ u_1+u_2,\ldots \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = U \\ v_1,\ v_1+v_2,\ldots \to \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = V \end{array}\right\} \Rightarrow W = UV$$

Пример:

Возьмём два сходящихся ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, $u_k = v_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ (из признака Лейбница следует, что они сх.) [усл. сходящиеся]

$$\underbrace{u_1v_1}_{a_1} + \underbrace{(u_1v_2+u_2v_1)}_{a_2} + \underbrace{(u_1v_3+u_2v_2+v_3u_1)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_2+u_nv_1)}_{a_n} + \ldots$$

Покажем, что этот ряд расходится

$$a_n = (-1)^{n+1}\Big(\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\cdot(n-1)}}}_{\geq \frac{2}{n+1}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot 2}}}_{\geq \frac{2}{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}}_{\geq \frac{2}{n+1}}\Big) \geq (-1)^{n+1}\frac{2n}{n+1} \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{k(n+1-k)} \leq \frac{n+1}{2}$$

$\Rightarrow$ построенный ряд расходится

$\boxed{Th}$ 13. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сход. абс., а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (произв. рядов по правилу Коши) сходится, и его сумма равна произведению ~~рядов~~ сумм этих рядов.

$$(u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots)(v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots) = \underbrace{u_1v_1}_{a_1} + \underbrace{u_1v_2+u_2v_1}_{a_2} + \ldots = UV$$

Док-во:

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} a_m = \ldots\ldots = u_1\cdot\overbrace{(v_1+v_2+\ldots+v_n)}^{V_n} + u_2\overbrace{(v_1+v_2+\ldots+v_{n-1})}^{V_{n-1}} + \ldots +$$

$$+ u_n\underbrace{(v_1)}_{V_1} = \left\{ V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} V;\ V - V_n \underset{n\to\infty}{=} \alpha_n \to 0 \right\} = u_1(V-\alpha_n) +$$

$$+ u_2(V-\alpha_{n-1}) + \ldots + u_n(V-\alpha_1) = \underbrace{(u_1+u_2+\ldots+u_n)}_{\to U \text{ при } n\to\infty}V - \underbrace{(u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_n\alpha_1)}_{\text{докажем, что } \to 0 \text{ при } n\to\infty}$$

$$u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_n\alpha_1 = u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_{n+1-N}\alpha_N) + (u_{n+2-N}\alpha_{N+1} + \ldots + u_n$$

лист:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists N: \quad \forall n \geq N \quad : \quad |\alpha_n| < \varepsilon_1 \quad \cancel{\forall n \geq 2N}$$

$$\forall n \geq 2N \quad : \quad |u_{n+2-N}| + |u_{n+3-N}| + \ldots + |u_N| < \varepsilon_1$$

$$\exists M > 0: \quad |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_m| \leq M \quad \forall m$$

$$|\alpha_m| \leq M \quad \forall m$$

$$\Rightarrow \quad |u_1\alpha_n + \ldots + u_n\alpha_1| \leq \varepsilon_1 \cdot M + M \cdot \varepsilon_1 = 2M\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$$

§5 Сходимость произвольных числовых рядов

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$! Th 9 $\Rightarrow$ Если ряд сх. абс, то и исх ряд тоже.

5.1 Преобразование Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} b_k$$

$u_k = a_k b_k$ $\begin{cases} a_1 + \ldots + a_n = S_n \\ a_n = S_n - S_{n-1}; \forall n \geq 2 \\ a_1 = S_1 - S_0 \end{cases}$

("договоримся, что 0)

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k_1=n}^{n+p-1} S_{k_1} b_{k_1+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k b_k - \sum_{k_1=n}^{n+p-1} (S_k \cdot b_{k+1}) =$$

$$= S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

Это и есть преобразование Абеля сумм.

5.2 Признаки Абеля

$\boxed{\text{Th}}$ 14 (признак Дирихле - Абеля)

Рассм. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$.

Пусть: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет огран. пос.-ть част. сумм

2) $\{v_n\} \searrow$ к 0, тогда ряд сходится.

Док-во:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}$$

[$\{S_n\}$ - част сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$]

Пусть $M > 0$: $|S_n| \leq M$ $\forall n$

Для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n \geq N : |v_n| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k| |v_k - v_{k+1}| + |S_{n+p}| |v_{n+p}| + |S_n| |v_{n+1}| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (v_k - v_{k+1}) + M v_{n+p} + M v_{n+1} = 2 M v_{n+1} < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} < \varepsilon$$

$\boxed{\text{Th}}$ 15 (второй признак Абеля)

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$. Пусть:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

2) $\{v_n\}$ монотонная и ограничена

Тогда ряд сходится.

Док-во:

Если 2 v, то $\exists$ предел. Обозначим его V. (Пусть $V = \lim_{n \to \infty} v_n$ $\{v_n\} \downarrow$)

Тогда $\{v_n - V\}$ - монотонно убывающая и $\to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n (v_n - V)}_{\text{укладывается в Th 14}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n V}_{\text{сходится по усл.}} \leftarrow \text{сходится}$$

Замечание:

В условии Th 14 и 15 монотонность посл $\{v_n\}$ можно требовать с какого-то номера.

Опр: Посл-ть $\{v_n\}$ наз-ся посл. с ограниченными изменениями, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ сходится

Верно следующее:

1) Если $\{v_n\}$ имеет огр. изменение, то она сходится.

Док-во: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(v_k - v_{k+1})$ сход., $\sum\limits_{k=1}^{N}(v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{N+1}$ – сходится

$\Rightarrow \{v_n\}$ – сходится.

2) Если $\{v_n\}$ монотонна и ограничена, то она имеет ограниченное изм-

Док-во: как и в п. 1

3) Из сходимости $\{v_n\}$ вообще говоря не следует, что $\{v_n\}$ имеет огр. изменение.

4) ∃ Любая ~~сумма~~ посл-ть с огр. изменением явл. разностью двух монотонных посл-тей таких что они одного х-ра роста.

Учитывая док-ва к Th 14 и Th 15 условие монотонности посл-ти $\{v_n\}$ можно ослабить и получится 2 новых утв-я.

Th 14' Пусть для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ имеет огр посл-ть част. сумм.

2) $\{v_n\}$ имеет огр. изменение и явл. бесконечно малой,

Тогда ряд сходится

Th 15' Пусть для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

2) $\{v_n\}$ имеет огр. изменение

Тогда ряд сходится.

5.3 Признак Лейбница

Рассмотрим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$, где $b_n \geq 0$

Th 16

Если посл-ть $\{b_n\}$ монотонно $\to 0$, то ряд сходится.

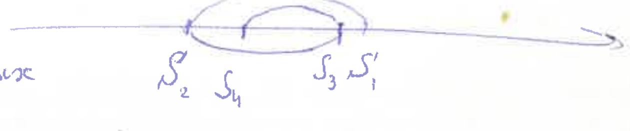
Док-во:

1 вариант) $u_n = (-1)^{n+1}$

$v_n = b_n$

в силу Th 14 ✓

2 вариант) $b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n+1} b_n = S_n$



посл-ть $\{[S_{2k}, S_{2k-1}]\}$ явл. посл-тью вложенных стягивающихся сегментов.

Обознач. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Кроме того, $|S_n - S| \leq b_n$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha} \qquad b_n = \frac{1}{n^\alpha} \downarrow 0 \quad \Rightarrow \text{в силу Th 14 ряд сходится } (\alpha > 0$$

$$(\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(Nx)) \cdot 2\sin\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} +\right.$$

$$\left. + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \sin(N+\tfrac{1}{2})x - \sin(N-\tfrac{1}{2})x\right) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$\Rightarrow |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos Nx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \equiv C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}, \quad \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

признак сравнения: $\alpha > 1 \Rightarrow$ ряд сходится абсолютно

? $0 < \alpha \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos^2 nx}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1+\cos 2nx}{2n^\alpha} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n^\alpha}}_{\to +\infty} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos 2nx}{2n^\alpha} \to$$

сходится условно

§6. Бесконечные произведения.

$$v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n \cdot \ldots \equiv \prod_{n=1}^{\infty} v_n \quad (1)$$

Опр. Бесконечное произведение (1) сходится к $P \neq 0$, если $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} P$

Если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$, то говорят, что беск. произв. (1) расходится к 0.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad P_n = \frac{1}{n!} \to 0$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, то (1) расходится

Заметим, что $\quad v_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$

Если $\exists P \neq 0$; $P_n \to P$, то $v_n \to 1$

Th 17 (необходимое усл-е сходимости)

Если беск. произв (1) сходится, то $\{v_n\} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Т.к. отбрасывание конечного числа v_n не влияет на его сходимость, начиная с некоторого n_0: $v_n \geq \frac{1}{2}$ $(n \geq n_0)$, можно считать, что в беск произв все $v_n > 0$.

Пример 1

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

част пр-е: $\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k}$ => част произведение: $P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}\left(\frac{x/2^n}{\sin \frac{x}{2^n}}\right)$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \text{формула Виета.}$$

$x = \frac{\pi}{2}$

Пример 2.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_n \equiv \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx =$$

$I_0 = \frac{\pi}{2}$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$I_1 = 1$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2} \cdot I_0$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3} = \frac{(2k)(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3} \cdot I_1$$

$$\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} = \frac{(2k+1)(2k-1)^2(2k-3)^2 \cdot \ldots \cdot 3^2}{2k^2 (2k-2)^2 \cdot\ldots\cdot 2^2} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \cdot \frac{2k^2(2k-2)^2\cdot\ldots\cdot 2^2}{(2k+1)(2k-1)^2(2k-3)^2\cdot\ldots\cdot 3^2}$$

$$I_n \equiv \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, dx = I_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} < \frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$$

Так как

$\ln P_n = \ln v_1 + \ln v_2 + \ln \ldots + \ln v_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$

$\boxed{Th}$ 18 Пусть $v_n > 0$ $\forall n$.
Тогда бесконечное произведение (1) сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln$

$\boxed{Th}$ 19 Пусть $v_n \geq 1$ $\forall n$
Тогда беск. произв. (1) сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$

Док-во:
$\Rightarrow$ $\{Th\ 17\}$ $v_n \to 1$ Для ряда $\sum\limits_{n=1} \ln v_n$ из неотр. слагаемых ($v_n \geq 1$)
выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln v_n}{v_n - 1} = 1$
По признаку сравнения сход. ряд $\sum\limits_{n=1} (v_n - 1)$
$\Leftarrow$ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$ сх. $\Rightarrow$ $v_n \to 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln v_n}{v_n - 1} = 1 \xRightarrow[\text{ср-я}]{\text{пр-к}}$

$\Longrightarrow$ сход. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$

$\boxed{Th}$ 20 Пусть $v_n > 0$ $\forall n$. Положим $v_n = 1 + u_n$ $\forall n$
1) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится
Тогда беск пр-е сход $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится
2) Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится
Тогда беск пр-е сходится $\Leftrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

Док-во:
В условиях Th 20 $u_n \to 0$, $n \to +\infty$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$ $\qquad \ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$

$\Updownarrow$

$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2}(1 + o(1))$, $n \to \infty$

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n)$ есть сумма сходящегося ряда из u_n и ряда $\sum\limits_{n=1} \frac{u_n^2}{2}(1+o(1))$ из неотр слагаемых, которые при $n\to\infty$ эквивалентны слагаемым ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{2}$

п.2 доказывается аналогично

Повторим слегка

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Абсолютная сходимость

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| - \text{сход.}\right)$

$\Downarrow$

безусловная сходимость

Условная сходимость

$\left(\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ \text{сход}\end{array}\right)$

Беск. произв.-ия $\prod_{n=1}^{\infty}(v_n)$

Абсолютная сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$ сх. абсолютно

Условная сходимость

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$ сх. условно

§ 7. Элементы теории двойных рядов.

$\{a_{kl}\}_{k\geq 1,\, l\geq 1}$ - мн-во чисел из $\mathbb{R}$, т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n}, & \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots, & a_{2n}, & \dots \\ \dots & & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots, & a_{nn}, & \dots \\ \dots & & & & & \end{bmatrix}$$

$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ ← двойной ряд (1)

Опр Двойной ряд (1) сходится к числу S, если пос-ть $\{S_{mn}\}$ его частичных сумм сходится к S при независимом стремлении m, n к ∞

$$S_{mn} \equiv \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0, n_0 \in N$

$\forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad : \quad |S_{mn} - S| < \varepsilon$) пояснение, что такое незав. стремление

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$. -(так называемый повторный ряд)?

$A_k \equiv \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ - строчные суммы

Если $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ - сходится, то это означает сходимость повторного ряда (2)

3) $\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$

$A_l' \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}$ - столбцовая сумма

$\sum\limits_{l=1}^{\infty} A_l'$ сход – означает сходимость (3).

(4) $\sum\limits_{r=1}^{\infty} a_r'$ – линейно упорядоченный ряд (переименовали элементы «все»).

$\boxed{Th}_{21}$ (необх. условие сходимости дв. ряда)

Если дв. ряд (1) сходится, то $a_{mn} \to 0$ при независимом стремлении m, n к ∞.

Док-во: $a_{mn} = \underset{\searrow S}{S_{mn}} + \underset{\searrow S}{S_{m-1,n-1}} - \underset{\searrow S}{S_{m,n-1}} - \underset{\searrow S}{S_{m-1,n}} \to 0$

$a_{mn} \to 0$.

ч.т.д.

$\boxed{Th}$ 22

Пусть дв. ряд (1) сходится к S, а также сходятся все строчные суммы A_k, $k \geq 1$. Тогда повт. ряд (2) сходится, причем к той же сумме S.

Док-во: т.к. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0; n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall m > m_0, \ \forall n > n_0 \quad |S_{mn} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$

$S_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}$

Зафиксируем m и рассмотрим для всех $\forall n \geq n_0$ $(n \to \infty)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)}_{A_k} \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}}_{A_k} - S\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится к S.

!но обратное гарантировано не всегда!

Примеры:

①
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

Ряд $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится

$S_{mn} = 0$, если m четно, а n – любое, если m нечетно, а n – чет

$S_{mn} = a_{mn}$ если m, n – нечетно

$a_{mn} \to 0$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right)$

Ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right)$ – все расходится

② $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \end{bmatrix}$

$S_{mm} = 1$

$S_{m-1,m} = 0$

Дв. ряд расходится

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{kl} = \begin{cases} 1, & l=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{kl} = 0$

Они то сход

$\boxed{\text{Th}}$ 23 (критерий сходимости дв. рядов с неотр. слаг.)

Дв. ряд с неотрицательными слагаемыми сходится $\Leftrightarrow$ Мн-во $\{S^*_{mn}\}_{m,n}$ ограничено (сверху)

Док-во: $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall m \geq m_0, \forall n \geq n_0$

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon \Leftrightarrow S - \varepsilon < S_{mn} < S + \varepsilon$$

В этой оценке не участвуют: $S_{1n}, \dots, S_{m_0-1,n}$, $\forall n$

$S_{m,1}, \dots, S_{m,n_0-1}$ $\forall m$

$k \leq m_0 - 1$

$S_{k,n} \leq S_{m_0,n} < S + \varepsilon$

$(n \geq n_0)$

$S_{k,n} \leq S_{m_0,n} \leq S_{m_0 n_0} < S + \varepsilon$

$(n < n_0)$

т.е.

$\forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq n_0$

$S - \varepsilon < S_{mn} < S + \varepsilon$

$\Leftarrow$ $\{S_{mn}\}$ огр. сверху $\Rightarrow \exists S = \sup\limits_{m,n \geq 1} S_{mn}$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 : \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} :$ ~~$S_{m_0 n_0}$~~ $S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S$

$\forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad S_{mn} \geq S_{m_0 n_0}$, но

$$S_{mn} \leq S$$

Значит, $S - \varepsilon < S_{mn} \leq S \implies S - \lim\limits_{n,m\to\infty} S_{mn}$

ч.т.д.

$\boxed{\text{Th}}$ 24 Если дв. ряд $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|$ сходится, то дв. ряд $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ сходится.

Док-во:

Рассм. $p_{kl} = \frac{1}{2}(a_{kl} + |a_{kl}|)$

$q_{kl} = \frac{1}{2}(|a_{kl}| - a_{kl})$

Заметим, что 1) $p_{kl}, q_{kl} \geq 0$

2) $p_{kl}, q_{kl} \leq |a_{kl}|$

Значит, частичные суммы $\sum\limits_{k,l} p_{kl}$, $\sum\limits_{k,l} q_{kl}$ огр. сверху част. суммами сходящегося ряда $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}| \implies \{\text{Th } 23\}$ эти ряды сходятся

$p_{kl} - q_{kl} = a_{kl}$

$\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ сходится

Опр: Дв. ряд (1) наз-ся абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|$.

$\boxed{\text{Th}}$ 25 Если хотя бы 1 из четырех рядов сходится абсолютно, то абсолютно сходятся и все остальные ряды, причем к той же сумме.

$\left(\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sim S_1 ; \quad \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sim S_2 ; \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} \sim S_3 ; \quad \sum\limits_{r=1}^{\infty} a_r' \sim S_4 \right.$

Док-во: I) $a_{mn} \geq 0 \quad \forall m,n$

Сходимость 1-ого $\implies$ Сходимость 2-ого и $S_2 = S_1$

Воспользуемся Th 22, т.к. все строчные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{N}$

$\sum\limits_{n=1}^{N} a_{mn} \leq \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{n=1}^{N} a_{mn} \leq Const$, а следовательно, они сх-ся, Таким образом, второй ряд сходится к S_1

Сходимость 2-ого ряда => сходимость 1-ого ряда и $S_1 = S_2$

$$\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{N} a_{mn}\right) \le \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \le S_2$$ => 1-ый ряд сходится по Th 22.

=> $S_1 = S_2$

Сходимость 1-ого ряда => сходимость 4-ого ряда и $S_4 = S_1$

$$\sum_{r=1}^{R} a_r' \le \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{mn} \le Const$$ => 4-ый ряд сходится к S_4

Среди $a_1', \dots, a_R'$ найдем такие M, N, которые явл-ся максимальным N строки и N столбца, где они расположены в $\{a_{mn}\}$.

Из неравенства вытекает, что $S_4 \le S_1$

Докажем, что $S_1 \le S_4$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{mn} \le \sum_{r=1}^{R} a_r' \le S_4$$

$\exists R$: среди $a_1', \dots, a_R'$ есть все слагаемые этой двойной суммы => $S_1 \le S_4$

Значит $S_1 = S_4$.

Сходимость 4ого ряда => сходимость 1-ого ряда и $S_1 = S_4$

Повторим рассуждение предыдущего шага, поменяв вместе его пункты

! Для 3-его ряда обоснования проводятся аналогично.

II) $a_{mn} \in \mathbb{R}$:

$$p_{mn} = \frac{a_{mn} + |a_{mn}|}{2}, \quad q_{mn} = \frac{-a_{mn} + |a_{mn}|}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 \le p_{mn} \le |a_{mn}| \\ 0 \le q_{mn} \le |a_{mn}| \end{aligned}\right\} \quad p_{mn} - q_{mn} = a_{mn}$$

Докажем, например, абс сходимость 2-ого ряда $\Rightarrow$ абс сх-ть 1-ого ряда и $S_1 = S_2$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mn}| \Rightarrow \begin{cases}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \text{ сход. к } P \\ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \text{ сход к } Q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn} \text{ сход к } P \\ \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn} \text{ сход к } Q\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty}(p_{mn}-q_{mn}) \text{ сход к } P-Q \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}p_{mn} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}, \text{ и}$$

при этом $|a_{mn}| = p_{mn} + q_{mn} \Rightarrow \sum_{m,n=1}^{\infty}|a_{mn}|$ сход.

Глава 2. Функциональные посл-ти и ряды

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — Будем предполагать, что все $f_n(x)$ / все $u_n(x)$ являются функциями, ~~определенными~~ заданными на некотором общем мн-ве $X \subset \mathbb{R}$ ($X \subset \mathbb{C}$)

§8. Различные виды сходимости.

Пусть $x_0 \in X$: $\{f_n(x_0)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сход. к. $S(x_0)$ — ~~поточе~~ поточечная сходимость.

Все $x_0 \in X$, в кот. есть поточечная сходимость — мн-во (область) сходимости

Пример 1:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$, $|a_n| \le M$ $(\forall n)$ Тогда этот степенной ряд сх-ся при $\forall x \in (-1;1)$

Пример 2

$f_n(x) = x^n$, $\{f_n(x)\} \to \begin{cases} 0, & \text{если } |x|<1 \\ 1, & \text{если } x=1\end{cases} \equiv f(x)$

$(-1;1]$ - область сх-ти

$f_n(x) \in C^{\infty}$, $f(x)$ разрывна в т. $x=1$

Опр: $\{f_n(x)\}$ равномерно на X сходится к $f(x)$, если $\forall \varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n \ge N$ $\forall x \in X$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Опр: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ наз. равномерно сходящимся на X, если посл-ть $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм равномерно сходится на X

Зам. 1 Равномерная сходимость на X подразумевает сходимость в $\forall$ точке $x_0 \in X$. Из поточечной сх-ти, вообще говоря, не следует равномерная сходимость

лист 1[?]

Из примера 2: $\underbrace{\{x^n\}}_{f(x)} \to 0 \quad \forall x \in (-1;1)$

Докажем, что в примере 2 на $(-1;1)$ нет равном. сходимости.

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N: \exists n \geq N \quad \exists x \in (-1;1): |x^n| \geq \varepsilon$

$n = N \quad x = 1 - \frac{1}{N} \Rightarrow (1-\frac{1}{N})^N \to \frac{1}{e} \Rightarrow$ при $N \geq N_0$ $(1-N^{-1})^N \geq \frac{1}{3}$

Зам. 2 Из равном. сх-ти на X следует равномерная сходимость на $\forall$ подмн-ве $X_1 \subset X$

Зам 3 Равном. сх-ть $\{f_n(x)\}$ на X к $f(x)$ равносильна

$$\exists \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

следует из опр-я

"$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n \geq N \quad \underbrace{\forall x \in X: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\exists \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}$"

Обозначение: Если равн. сх-ся, то пишут $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$

на мн-ве X: $\left(\{f_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$$

$\boxed{\text{Th}}_{26}$ (критерий Коши)

I) $\{f_n(x)\} \rightrightarrows$ на $X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на $X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \forall n \geq N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$

Док-во: (I) $(\Rightarrow)$ $\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}$

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in X$

($\Leftarrow$) При фиксированном $x \in X$ условие Коши означает, что в этой точке
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x)$

Отсюда $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \xRightarrow[p\to\infty]{} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$
$\forall p$ $\qquad \forall x \in X$

Следствие: Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на X, то $\{u_n(x)\} \rightrightarrows 0$ на X

Док-во достаточно в усл-ии взять $p = 1$.

§9 Признаки равномерной сходимости

9.1 Признак Вейерштрасса

Th 27. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определена на X и известно, что $|u_n(x)| \leq b_n$ $\forall n, \forall x \in X$, причем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X

Док-во: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon \qquad \forall x \in X$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ - сходится $\xRightarrow[\text{для беск. рядов}]{\text{к. Коши}}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \ \forall n \geq N: \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k < \varepsilon$ (no Th 26)

Зам Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ на $0 \leq x \leq 1$ ряд сходится равномерно.
этот ряд является знакочередующимся, сходящимся при $\forall x \in [0; 1]$ по признаку Лейбница: $|S_N - S| \leq \left|(-1)^{N+1} \frac{x^N}{N}\right| \leq \frac{1}{N} \quad \forall x$

9.2 Признаки Абеля (Харди):

Th 28 Пусть функ. ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot v_n(x)$, $x \in X$
Пусть выполнены условия:
1) част. суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно ограничены на X
$|S_N(x)| \leq C \quad \forall N \in \mathbb{N}, \ \forall x \in X$

2) $\{v_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$, $\{v_n(x)\} \downarrow 0$ для $\forall$ фикс $x \in X$

Тогда рассмотренный функ. ряд сходится равномерно на X.

Док-во:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \boxed{S_k(x)}\,(\underbrace{v_k(x) - v_{k+1}(x)}_{\geqslant 0}) + \boxed{S_{n+p}}(x)\,v_{n+p}(x) - \boxed{S_n}(x)\,v_{n+1}(x)$$

$\boxed{}$ - огр. по модулю единой константой.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|\cdot(\underbrace{v_k(x)-v_{k+1}(x)}_{\geqslant 0}) + |S_{n+p}(x)|\cdot \underbrace{v_{n+p}(x)}_{\geqslant 0} +$$

$$+ |S_n(x)|\,\underbrace{v_{n+1}(x)}_{\geqslant 0} \leqslant C\cdot(v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x) + v_{n+2}(x) - v_{n+3}(x) + \ldots + v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)) + C\,v_{n+p}(x) + C\,v_{n+1}(x) = 2C\,v_{n+1}(x)$$

$\Big\}$ $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N: \forall n \geqslant N \;\; \forall x \in X$ $|v_{n+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2C}$ $\boxed{Th\,26}$

$\boxed{Th}$ 29 Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$, $x\in X$.

Пусть выполнены условия:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X,

2) $\{v_n(x)\}$ равномерно огр на X, $\{v_n(x)\}\downarrow$ для $\forall x \in X$

Тогда рассматриваемый функ. ряд сходится равномерно на X.

Док-во: Док-во основано на преобразовании $u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x)$.

Это соотношение остается верным, если вместо $S_k(x)$ использовать

$$\tilde S_k(x) = S_k(x) - S(x) \qquad u_k(x) = \tilde S_k(x) - \tilde S_{k-1}(x)$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |\tilde S_k(x)|\,(\underbrace{v_k(x)-v_{k+1}(x)}_{\geqslant 0}) + |\tilde S_{n+p}(x)|\,|v_{n+p}(x)| +$$

$$+ |\tilde S_n(x)|\cdot|v_{n+1}(x)| \leqslant \varepsilon(v_{n+1}(x) - v_{n+p}(x)) + \varepsilon M + \varepsilon M \leqslant 4\varepsilon M$$

$\forall x \in X$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow Th\,2$

$\exists$ $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N: \forall n \geqslant N$ ~~$v_n(x) \leqslant M$~~ $\forall x\in X$ $|\tilde S_n(x)| < \varepsilon$ $\quad \exists M>0:$

$$|v_n(x)| \leqslant M \quad \forall n,\ \forall x \in X.$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ на $[a, 2\pi - a]$, $a>0$, $a<\pi$

по $\boxed{Th}$ 28 $\left|\sum_{n=1}^{N} \cos(nx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}$ $\quad \left(\frac{a}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \pi - \frac{a}{2}\right)$

$v_n(x) = \frac{1}{n} \downarrow 0$ и равномерно по $x \in \mathbb{R}$ (т.к. от x не зав.)

Замечание: Вместо монотонных посл-ей $\{v_n(x)\}$ можно в $\boxed{Th}$ 28-29 использовать последовательности с равномерно ограниченным изменением на X: $\{v_n(x)\}$; $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x) - v_{n+1}(x)| \rightrightarrows$ на X

Заметим, что такие ф. посл.-ти удовлетворяют свойствам:

а) если $\{v_n(x)\}$ - Р.О.И. на X, то она $\rightrightarrows$ на X

б) если $\{v_n(x)\}$ - монотонно не возрастает на X и $\rightrightarrows$ на X, то она Р.О.И.

в Th 28-29 можно заменить условие монотонности на равн. огр. изм.

9.3 Признак Дини

Поточная сх-ть $\Rightarrow$ Равномерная сх-ть

$\boxed{Th}$.30 (пр-к. Дини)

Пусть ф. посл-ть $\{f_n(x)\}$ задана на $X \subset \mathbb{R}$.

Пусть при этом:

1) X - компакт

2) $\{f_n(x)\}$ монотонна на X

3) $\{f_n(x)\}$ непрерывна на X

4) $\{f_n(x)\} \to f(x)$ для $\forall x \in X$ и $f(x)$ непр на X

Тогда: $\{f_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$

Док-во: считаем, что $\{f_n(x)\} \downarrow$ на X

Предположим, что сх-ть к $f(x)$ неравномерная на X

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}: \exists n \geq N \quad \exists x \in X \quad f_n(x) - f(x) = |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Таким образом можно указать такую посл-ть точек $\{x_n\}$ $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$

Т.к. $\{x_n\} \subset X$ и X - компакт, то $\exists \{x_{n_k}\} \to x_0 \in X$

~~не успела записать часть :С~~ $\quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \geq m$:

$\delta_m(x_{n_k}) - \delta(x_{n_k}) \geq f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) > \varepsilon$

Пусть в этом пер-ве $n_k \to \infty$ $x_{n_k} \to x_0$

$\Rightarrow f_m(x_0) - f(x_0) \geq \varepsilon$

Таким образом $\exists \varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{N}$ $f_m(x_0) - f(x_0) \geq \varepsilon$, т.е.

$\{f_m(x_0)\} \not\to f(x_0)$ – противоречие.

$\boxed{Th}$ 30' (признак Дини)

Пусть ф. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ задан на X

Пусть при этом 1) X – компакт

2) $u_n(x) \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$

3) $u_n(x) \in C(X)$ (непр на X)

4) ряд сходится в $\forall$ т. $x \in X$ к непр функции $S(x)$ на X

Тогда функц. ряд сходится равномерно на X.

<u>Зам</u> Все условия Th 30 (30') существенны для вывода.

1) $f_n(x) = x^n \underset{[0;1]}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

нет равном сх-ти

2) $f_n(x) = x^n \underset{(0,1)}{\longrightarrow} f(x) \equiv 0$

! нет равном. сх-ти

3) $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ $\underset{[0;1]}{\longrightarrow} f(x) = 0$

! нет равном. сх-ти

4) $f_n(x) = \begin{cases} \sin(n\pi x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

! нет равном сх-ти.

§10 Функциональные св-ва функц. последовательностей и рядов

$$\{f_n(x)\} \to f(x), \quad x \in X \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in X \qquad (2)$$

Если доказано свойство для (1), то т.к. $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, то аналог. свойство верно для (2)

Если доказано свойство для (2), то т.к. $f_1(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) = f(x)$, то аналогичное свойство верно для (1)

10.1 Переход к пределу $(x \to x_0)$

Пусть точка a является предельной для X.

$\boxed{\text{Th}}$ 31 Пусть ф. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на X к $S(x)$ и $\forall n \in N \ \exists \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n$

Тогда 1) числ. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

2) $\exists \lim\limits_{x\to a} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Замечание: $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$

Док-во: (критерий Коши) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N, \forall p \in N \ \forall x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Downarrow \ x \to a$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies \text{числ. ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ - сходится}$$

(обозн. сумма $= b$)

Рассмотрим:

$$S(x) - b = S(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) + \sum_{n=1}^{N} u_n(x) - b + \sum_{n=1}^{N} b_n - \sum_{n=1}^{N} b_n =$$

$$= \left(S(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right) + \left(\sum_{n=1}^{N} (u_n(x) - b_n)\right) + \left(b - \sum_{n=1}^{N} b_n\right)$$

Для $\forall \varepsilon > 0$ выберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы:

$$\underbrace{\left| b - \sum_{n=1}^{N} b_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}}_{\text{сходимость числ. ряда}}, \quad \underbrace{\left| S(x) - \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in X}_{\text{равномерная сходимость ф. ряда на } X}$$

Тогда $\exists \delta > 0 : \quad |x-a| < \delta, \ x \in X \qquad |u_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3N} \qquad \forall n = 1, \ldots, N$

Из нер-ва треугольника и тождества: $|S(x) - b| < \varepsilon$

$\boxed{Th}$ 31': Пусть ф. посл-ть $\{f_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n$

Тогда: 1) $\{b_n\}$ сходится

2) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

$\boxed{Th}$ 32: Пусть a - предельная точка для X и $a \in X$

Пусть функц. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на X сходится к $S(x)$ и для $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n(x)$ непрерывна в точке a. Тогда $S(x)$ непрерывна в т. a.

10.2 Интегрируемость

$\boxed{Th}$ Пусть ф. пос-ть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на $X = [a; b]$,

и $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x)$ интегрируема на $[a, b]$ $(f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b])$

Тогда $f(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Док-во:

1) Для $\varepsilon = 1$ $\exists N$: ~~$(\forall n \geq N)$~~ $|f_N(x) - f(x)| \leq 1$ $\forall x \in [a, b]$

$$\underbrace{f_N(x) - 1}_{\text{огр функция}} \leq f(x) \leq \underbrace{f_N(x) + 1}_{\text{огр функция}}$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ - огр на $[a, b]$

2) $\forall$ разбиения $[a, b]$ - суммы Дарбу: $S(f) = \sum\limits_{k=1}^{m} \sup\limits_{x \in [x_{k-1}; x_k]} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$

$$s(f) = \sum_{k=1}^{m} \inf_{x \in [x_{k-1}; x_k]} f(x) \ (x_k - x_{k-1})$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists!$ разбиение $S(f) - s(f) < \varepsilon$

Рассмотрим разность $\forall x', x'' \in [x_{k-1}; x_k]$ для постоянного k

$$f(x') - f(x'') = \left(f(x') - f_n(x')\right) + \left(f_n(x') - f_n(x'')\right) + \left(f_n(x'') - f(x'')\right)$$

Тогда $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N: \quad n=N:$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \forall x\in[a,b]$$

Значит

$$f(x')-f(x'')=\underbrace{f(x')-f_n(x')}_{>-\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ <\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}+f_n(x')-f_n(x'')+\underbrace{f_n(x'')-f(x'')}_{>-\frac{\varepsilon}{2(b-a)};\ <\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(x')-f(x'')|}_{\text{отклонение значений } f(x) \text{ друг от друга на } [x_{k-1};x_k]}<\underbrace{|f_N(x')-f_N(x'')|}_{\text{отклонение значений } f_N(x) \text{ друг от друга на } [x_{k-1};x_k]}+\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\exists \sup \quad x', x''\in[x_{k-1};x_k]$

$$\sup_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)-\inf_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)\le\sup_{x\in[x_{k-1};x_k]} f_N(x)-\inf_{x\in[x_{k-1};x_k]} f_N(x)+\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Умножим на (x_k-x_{k-1}) и сложим по всем k

$$\Rightarrow S(f)-s(f)\le S(f_N)-s(f_N)+\varepsilon$$

в силу интегрируемости $f_N(x)$ $\exists$ такое разбиение $[a,b]$. $S(f_N)-s(f_N)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ для этого разбиения: $S(f)-s(f)<2\varepsilon \Rightarrow f(x)\in\mathcal{R}[a,b]$

3) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N \quad \forall n\ge N \quad \forall x\in[a,b]: \quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$-\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<f_n(x)-f(x)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \Big|\int_a^b \dots dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}\le\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \Rightarrow \exists\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

10.3 Дифференцируемость

Дифф-ть $y=f(x)$ на (a,b)

$\Leftrightarrow$ дифф-ть $y=f(x)$ в $\forall$т. $x\in(a,b)$

т.е. $\exists f'(x)$ в $\forall x\in(a,b) \qquad f(x)\in\mathcal{D}(a,b)$

Th 34 Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $X=(a,b)$ такова, что:

1) $f_n(x)\in\mathcal{D}(a,b) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) $\{f_n'(x)\}\rightrightarrows$ на X

3) $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0\in(a,b)$

Тогда: 1) $\{f_n(x)\} \rightrightarrows$ на (a,b) к пределу $f(x)$

2) $f(x) \in \mathcal{D}(a,b)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$

Док-во:

1) Докажем требуемое по критерию Коши:

$$f_{n+p}(x) + f_n(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x) + \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right) - \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right) =$$

$$= \Big(\underbrace{\left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right)}_{F(x)} - \underbrace{\left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right)}_{F(x_0)}\Big) + \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right) \overline{\overline{\text{Th Лагранжа}}}$$

$\exists \xi$ между x_0 и x

$$= \left(f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)\right)(x - x_0) + \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right)$$

В силу условия (2): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall p \quad \forall \xi \in (a,b): \ |f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

В силу условия (3): $|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Фикс. $\forall x \in (a,b)$. Рассмотрим все h: $x + h \in (a,b)$ для h получится некоторый интервал I

$$\frac{1}{h}\left[f_n(x+h) - f_n(x)\right] \equiv \varphi_n(h)$$

$$\exists \lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = f_n'(x)$$

Рассмотрим: $\varphi_{n+p}(h) - \varphi_n(h) = \frac{1}{h}\left[f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)\right] - \frac{1}{h}\left[f_n(x+h) - f_n(x)\right]$

$$= \frac{1}{h}\Big[\underbrace{f_{n+p}(x+h) - f_n(x+h)}_{F(x+h)}\Big] - \frac{1}{h}\Big[\underbrace{f_{n+p}(x) - f_n(x)}_{F(x)}\Big] = [\text{Th Лагранжа}] \ \left(\exists \xi \text{ между } x \text{ и } x+h\right)$$

$$= F'(\xi)\cdot h = \frac{1}{h}\left[f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)\right]\cdot h$$

Т.к. $\{f_n'(x)\} \xrightarrow{\text{на } (a,b)}$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall \xi \in (a,b)$:

$\underbrace{|\varphi_{n+p}(h) - \varphi_n(h)|}_{\forall h \in I} = |f_{n+p}'(\xi) - f_n'(\xi)| < \varepsilon$. Следовательно $\{\varphi_n(h)\} \underset{\text{на } h \in I}{\rightrightarrows}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}}_{=\varphi_n(h)} \overset{\text{равн. сх-ть}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\lim_{h\to 0} \varphi_n(h) =$$

$$\exists \lim_{h\to 0} \varphi_n(h) = f_n'(x) \qquad = \lim_{h\to\infty} f_n'(x)$$

предел $\exists$ по условию

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

$\boxed{\text{Th}}$ 35 (о существовании первообразной)

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на (a,b) и $\forall n \in N$. $f_n(x)$ имеет первообразные, и при этом $\{f_n(x)\} \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда $f(x)$ также имеет первообразную

Обозначим $\varphi_n(x)$ – какая-то первообразная функции $f_n(x)$.

$\varphi_n'(x) = f_n(x) \quad \forall x \in (a,b)$. Тогда из условия Th 35:

а) $\{\varphi_n'(x)\} \overset{(a,b)}{\rightrightarrows} f(x)$ б) $\varphi_n(x) \in \mathcal{D}(a,b)$

Перейдем от $\varphi_n(x)$ к следующей первообразной: $\psi_n(x) \equiv \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)$ $(x_0 \in (a,b))$

$\psi_n'(x) = f_n(x)$

$\Rightarrow \{\psi_n(x)\}$ образует нулевую посл-ть при $x = x_0$.

Применим Th 34 к $\{\psi_n(x)\}$ на (a,b) когда $\{\psi_n(x)\} \rightrightarrows \psi(x)$ и $\psi'(x) = f(x)$

$\{f_n(x)\}$ в классе непрерывных функций $C(X)$

Тогда переход к пределу не выходит за $C(X)$

Если рассм. предел явл. равномерным пределом на X.

§11 Сходимость в среднем

$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, $f_n(x) \in \mathcal{R}[a,b]$

Опр. $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0$

Зам Если $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем на $[a,b]$, то она сходится в среднем на $\forall [c,d] \subset [a,b]$.

$\boxed{\text{Th}}$ 34 Если $\{f_n(x)\} \xrightarrow{[a,b]} f(x)$, то $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ сходится в среднем

Док-во:

Рассмотрим:

$$\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\,dx \le \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} (f_n(x)-f(x))^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{\int_a^b dx}_{b-a} \Rightarrow \text{левая часть} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

Пример 1:

Сх-ть в среднем $\not\Rightarrow$ Равном. сходимость

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x) & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

$f_n(\frac{1}{2n}) = 1$

$$\{f_n(x)\} \to f(x) \equiv 0$$

$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = f_n(\frac{1}{2n}) = 1 \Rightarrow$ сх-ть не равномерная на $[0,1]$

$$\int_0^1 (f_n(x)-f(x))^2\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \underbrace{\sin^2(\pi n x)}_{\le 1}\,dx \le \frac{1}{n} \to 0$$ Есть сходимость в среднем на $[0;1]$

Пример 2

Поточечная сх-ть $\not\Rightarrow$ сх-ть в среднем.

$$f_n(x) = \begin{cases} n e^{-nx} & 0 < x \le 1 \\ 0 & 0 = 0 \end{cases}$$

$f_n(0) \to 0$ $\quad \underset{x\in(0;1]}{f_n(x)} = \frac{n}{(e^x)^n} \to 0 \quad (e^x > 1) \quad \Rightarrow \{f_n(x)\} \xrightarrow[{[0;1]}]{} f(x) \equiv 0$

$$\int_0^1 (f_n(x))^2\,dx + \int_0^1 n^2 e^{-2nx}\,dx = \frac{n^2}{2n} e^{-2nx}\Big|_1^0 = \frac{n}{2}(1-e^{-2n}) \to \infty$$

Пример 3

Сх-ть в среднем $\not\Rightarrow$ сходимость в $\forall$ точке.

$I_1 = [0,1]$, $[0;\frac{1}{2}] \equiv I_2$, $[\frac{1}{2};1] \equiv I_3$, $[0;\frac{1}{4}] \equiv I_4$, $[\frac{1}{4};\frac{1}{2}] \equiv I_5$,

$[\frac{1}{2};\frac{3}{4}] \equiv I_6$, $[\frac{3}{4};1] \equiv I_7$, ...

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n \\ 0, & x \in [0;1] \setminus I_n \end{cases}$$

$$\int_0^1 (f_n(x)-f(x))^2\,dx = \int_{I_n} 1 = |I_n| \to 0$$

$\{f_n(x)\}$ сх-ся в среднем к 0

Однако эта посл-ть не сходится ни в одной точке $x_0 \in [0,1]$

Th 37 Пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathcal{R}[a,b]$ и она сходится в среднем к $f(x) \in \mathcal{R}[a,b]$.

Тогда $$\int_a^b f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

Док-во:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \ \le$$

$V = M_n$ - ми пр-во $\quad (f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$

$$|(f,g)|^2 \le (f,f)(g,g)$$

$$\left(\int_a^b fg\,dt\right)^2 \le \int_a^b f^2dt \cdot \int_a^b g^2 dt$$

$$\le \sqrt{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \cdot \int_a^b 1\,dx} = \sqrt{\underbrace{\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx}_{\to 0}} \cdot \sqrt{b-a} \to 0$$

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \to 0$$

§12 Равностепенная непрерывность. Теорема Арцела.

Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a,b]$ и $|f_n(x)| \le C \quad \forall x \in [a;b],\ \forall n$,

то следует ли отсюда, что $\exists \{f_{n_k}(x)\} \rightrightarrows$ на $[a,b]$.

Опр: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется равностепенно непрерывной на $[a,b]$, если

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ . \ \forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$

Зам: Равностепенные непрерывные последовательности состоят из равномерно непрерывных на $[a,b]$ ф-ий (по Th. Кантора экв. непрерывности на $[a,b]$)

Th 38. (достат. условие равностепенной непр-ти)

Пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathcal{D}[a,b]$ и $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на $[a,b]$.

Тогда $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a,b]$.

Док-во:

$$f_n(x') - f_n(x'') = f'(\xi)(x' - x'') \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| \le C \cdot |x' - x''| < C\delta = \varepsilon$$