

Оглавление

1	Теория числовых рядов	2
1.1	Понятие числовых рядов	2
1.2	Ряды с неотр. слагаемыми	3
1.2.1	Признаки сравнения	3
1.2.2	Признаки Даламбера и Коши	4
1.2.3	Интегральный признак	5
1.3	Бесконечные произведения	5

Глава 1

Теория числовых рядов

1.1 Понятие числовых рядов

$$\{u_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R} : u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

Определение 1. Числовой ряд (1) сходится к числу S , называется его суммой, если $\exists \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n = S$.

(N -ая) частичная сумма: $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$

Определение 2. Если $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ не существует, то говорят, что ряд (1) расходится.

Пример 1. в разработке.

Теорема 1 (Критерий Коши).

$$\text{Числовой ряд сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N, p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Следует из опр и критерия Коши сходимости последовательности.

$$|S_{N+p} - S_N| = \left| \sum_{n=1}^{N+p} u_n - \sum_{n=1}^N u_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{N+p} u_n \right| < \varepsilon$$

□

Следствие 1. Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Пример 2.

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ гармонический ряд расходится.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 n \pi^3}$ - расходится.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Замечание 1. Отбрасывание любого конечного числа слагаемых не влияет на сходимость.

Замечание 2.

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ - сложение двух сходящихся рядов дают сходящийся ряд.
- $\alpha(\sum_{n=1}^{\infty} u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ - умножение ряда на число дает сходящийся ряд.

1.2 Ряды с неотр. слагаемыми

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad p_n \geq 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S_n &= p_1 + p_2 + \dots + p_n \\ S_{n+1} &= S_n + p_{n+1} > S_n \\ \Rightarrow \{S_n\} &\text{ не убывает} \end{aligned}$$

Теорема 2. Числовой ряд (3) сходится \Leftrightarrow посл-ть его числовых сумм ограничена (ограничена сверху).

1.2.1 Признаки сравнения

Теорема 3. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ - миноранта, $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ - мажоранта, где $p_k, p'_k \geq 0$.

Пусть кроме того выполнено: $p_k \leq c_0 p'_k$, где $c_0 > 0$. Тогда:

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится.
2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ расходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится.

Доказательство.

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится. Тогда по теореме 2 $\{S'_n\}$ ограничена сверху и $S_n \leq c_0 S'_n \Rightarrow \{S_n\}$ ограничена сверху \Rightarrow ЧТД.
2. Пусть утверждение неверно. Тогда по пункту 1 первый ряд тоже должен быть сходящимся - противоречие.

□

Замечание 3. В разработке.

Теорема 4 (Признак сравнения в предельной форме).

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \sum_{k=1}^{\infty} p'_k, p_k \geq 0, p'_k \geq 0, \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p'_k} \equiv L > 0 \Rightarrow$ они сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. В разработке.

□

Теорема 5 (ещё один признак сравнения). В разработке.

1.2.2 Признаки Даламбера и Коши

Теорема 6 (признак Коши).

1. Если $\sqrt[k]{p_k} < q < 1 \forall k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, $p_k \geq 0$ сходится.
Если $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$, то ряд расходится.
2. Пусть $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} \equiv L$. Если $L < 1$, то ряд сходится. Если $L > 1$, то расходится.

Доказательство.

1. $\sqrt[k]{p_k} \leq q \Rightarrow p_k \geq q^k$, $q < 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится \Rightarrow сходимость ряда по теореме 3.
 $\sqrt[k]{p_k} \geq 1 \Rightarrow$ нарушено необходимое условие \Rightarrow ряд расходится.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \forall k > k_0 \quad L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$.
Если $L < 1$, то возьмем ε так, чтобы $L + \varepsilon < 1$, тогда $\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$. Задача сведена к 1 пункту \Rightarrow ряд сходится.
Если $L > 1$, то возьмем ε так чтобы $L - \varepsilon > 1$ тогда $\sqrt[k]{p_k} > L - \varepsilon > 1 \Rightarrow$ свели задачу к 1 пункту \Rightarrow ряд расходится.

□

Замечание 4. Если $L = 1$, то данный признак не дает однозначного ответа.

$$\begin{array}{cc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \text{расх} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \text{сх} \\ \sqrt[k]{\frac{1}{k}} \rightarrow 1 & \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} \rightarrow 1 \end{array}$$

Замечание 5. Если $L = \infty$, то ряд (3) расходится.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \forall k > k_0 \quad \sqrt[k]{p_k} \geq \varepsilon$$

Замечание 6. Утверждение справедливо и в случае, если $L = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k}$

Теорема 7 (Признак Даламбера $\frac{p_{k+1}}{p_k}$).

1. Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$, то (3) сходится.
Если $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$, то (3) расходится.
2. Пусть $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} \equiv L$. Если $L < 1$, то (3) сходится. Если $L > 1$, то (3) расходится.

Доказательство.

1. $\frac{p_{k+1}}{p_k} = q : \frac{q^{k+1}}{q^k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, если $q < 1 \Rightarrow$ по теореме 3 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится.
 $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, то $p_{k+1} \geq p_k \Rightarrow \{p_k\}$ возрастает \Rightarrow нарушено необходимое условие сходимости \Rightarrow расходится.
2. $L > 1$, $L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$ Выберем $\varepsilon > 0 \quad L - \varepsilon > 1 \Rightarrow$ (3) расходится.
 $L < 1$, выберем $L + \varepsilon < 1 \Rightarrow$ (3) сходится.

□

Замечание 7. $L = 1$ - аналогично предыдущему.

Замечание 8. $L = \infty$ - аналогично предыдущему.

Замечание 9.

Лемма 1. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} = b$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{b_n}{k} - b &= \frac{(b_1 - b) + (b_2 - b) + \dots + (b_k - b)}{k} = \left| \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : \forall k > k_0 |b_k - b| < \varepsilon \right| = \\ &= \frac{(b_1 - b) + (b_2 - b) + \dots + (b_{k_0-1} - b)}{k} + \frac{(b_{k_0} - b) + \dots + (b_k - b)}{k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_k}{k} - b \right| \leq \frac{|b_1 - b| + \dots + |b_{k_0-1} - b|}{k} + \frac{|b_{k_0} - b| + \dots + |b_k - b|}{k} = \\ &= \left| M = \sup |b_k - b| \right| = \frac{k_0 * M}{k} + \varepsilon \end{aligned}$$

выберем $k_1 \geq k_0 : \frac{k_0 M}{k} < \varepsilon, \forall k > k_1$ □

1.2.3 Интегральный признак

Пусть $y = f(x)$, $x \geq 1$. Пусть $f(x)$ неотрицательна и монотонно не возрастает.

Теорема 8. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ сходится \Leftrightarrow сходится $\int_1^{\infty} f(x) dx$

Доказательство. В разработке. □

1.3 Бесконечные произведения

$$v_1 * v_2 * \dots * v_n * \dots = \prod_{n=1}^{\infty} v_n \quad (1)$$

Определение 3. Бесконечное произведение (1) - сходится к числу $P \neq 0$, если $P_n = \prod_{k=1}^n v_k \rightarrow P$ ($n \rightarrow \infty$). Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$, то говорят, что бесконечное произведение (1) расходится к 0.

Если $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, то (1) расходится.

Заметим что $v_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$. Если $\exists P \neq 0 : P_n \rightarrow P$ то $v_n \rightarrow 1$

Теорема 9. Необходимое условие сходимости Если бесконечное произведение (1) сходится, то $v_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).

Доказательство. Т.к отбрасывание конечного числ v_n не влияет на его сходимость и, начиная с некоторого $n_0 : v_n \geq \frac{1}{2}$ ($n \geq n_0$), можно считать, что в бесконечных произведениях все $v_n > 0$. □

Пример 3.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} * \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} * \dots = \frac{2}{\pi}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \dots = 2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}} * \dots * \cos\frac{x}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} \Rightarrow \text{частичное произведение } P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} * \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin x}{x}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{формула Вюета}$$

Пример 4. Валлис

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x * \cos x +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x * (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) * \sin^{n-2} x dx =$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2k(2k-2)\dots 2} I_0$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3} = \frac{2k(2k-2)\dots 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} I_1$$

$$\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} = \frac{(2k+1)(2k-1)^2(2k-3)^2 * \dots * 3^2}{(2k)^2(2k-2)^2 * \dots * 2^2} * \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)(2k-1)^2 * \dots * 3^2}{(2k)^2(2k-2)^2 * \dots * 2^2} * \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}$$

Докажем, что $\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty)$

$$1 < \frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} < \frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \rightarrow 1$$

Так как $\ln P_n = \ln v_1 + \dots + \ln v_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$$

Теорема 10. Пусть $v_n > 0 \forall n$ Тогда бесконечное произведение(1) сходится \Leftrightarrow сходится

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln v_n$$

Теорема 11. Пусть $v_n \geq 1 \forall n$ Тогда бесконечное произведение(1) сходится \Leftrightarrow сходится

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$$

Доказательство. \Rightarrow т.17 $v_n \rightarrow 1$ Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln v_n$ из неотриц. слагаемых ($v_n \geq 1$)

выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln v_n}{v_n - 1} = 1$ По пр-ку сравнения сход. ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$

\Leftarrow Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - 1)$ сх. $\Rightarrow v_n \rightarrow 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln v_n}{v_n - 1} = 1 \Rightarrow$ по признаку сравнения \Rightarrow сходится

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(v_n)$$

□

Теорема 12. Пусть $v_n > 0 \forall n$. Положим $v_n = 1 + u_n \forall n$

1. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Тогда бесконечное произведение сходится \Leftrightarrow ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится.
2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится. Тогда бесконечное произведение (1) сходится \Leftrightarrow ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Доказательство. В условиях т. 20: $u_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln 1 + u_n$

$$\ln 1 + u_n = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2), n \rightarrow \infty$$

□