

# Nonlinear dynamics and chaos

2dayclean

2025/10/14

## Contents

<b>1</b>	<b>Flows on the Line</b>	<b>3</b>
1.1	Flows on the line . . . . .	3
1.2	Autonomous system . . . . .	3
1.3	Fixed points and its stability . . . . .	4
1.3.1	Population - growth . . . . .	5
1.3.2	Linear stability analysis . . . . .	5
1.4	Existence and Uniqueness . . . . .	5
1.4.1	Impossibility of oscillation . . . . .	6
1.5	As a Potential . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Bifurcation</b>	<b>7</b>
2.1	Bifurcation . . . . .	7
2.1.1	As an Inverse function theorem . . . . .	7
2.1.2	AS a Taylor series . . . . .	7
2.2	Saddle-Nodoe Bifurcation . . . . .	7
2.3	Normal Form Theory . . . . .	8
2.4	Transcritical Bifurcation . . . . .	8
2.5	Pitcfork Bifurcation . . . . .	9
2.5.1	Supercritical Pitchfork . . . . .	10
2.5.2	Subcritical Pitchfork . . . . .	10
2.5.3	Example : moving bead on a rotating hoop . . . . .	10
2.5.4	Nondimensionalization . . . . .	10
2.5.5	Phase plane analysis . . . . .	11
2.6	Insect Outbreak . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Flows on the circle</b>	<b>11</b>
3.1	Uniform oscillator . . . . .	12
3.2	Nonuniform oscillator . . . . .	12
3.3	Ghost and Bottleneck . . . . .	12
3.4	Overdamped pendulum . . . . .	13
3.5	Synchronization of fireflies . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Linear Systems</b>	<b>14</b>
4.1	Simple Harmonic Oscillator . . . . .	14
4.2	Phase portraits for simple cases . . . . .	14
4.3	Fixed points . . . . .	15
4.4	Classification of Linear system . . . . .	15
4.4.1	Case : Two complex roots . . . . .	16

---

4.4.2	Case : Equal roots . . . . .	16
4.4.3	Classification diagram of linear system fixed points . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Phase Portraits</b>	<b>16</b>
5.1	Existence and Uniqueness of solution . . . . .	17
5.2	Linearization of system . . . . .	17

# 1 Flows on the Line

## 1.1 Flows on the line

Flows on the line이란  $\dot{x} = f(x)$ 와 같은 one-dimensional dynamical system을 의미하며, 이를 **flow** 혹은 **vector field**라고 부른다.

### Example

$\dot{x} = \sin(x)$ 의 해는 어떻게 주어지는가?

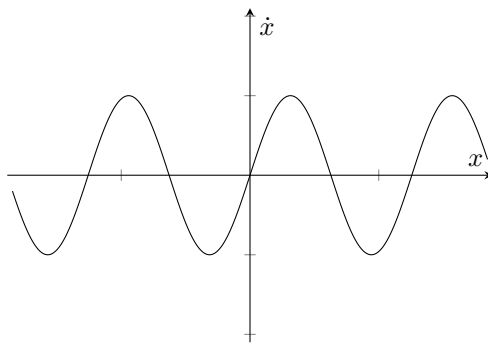
다음과 같이 변수분리법을 사용할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \implies t = \int \csc(x) dx + C = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

따라서, initial condition  $x(0) = x_0$ 이 주어지면,

$$t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \right|$$

와 같이 쓸 수 있다. 그러나 대체 이 해는 어떻게 생겼는가?  $x = x(t)$  꼴로 explicit하게 알 방법이 없다. Qualitative 분석을 위하여 우리는 다음과 같은  $x - \dot{x}$  plot을 이용할 수 있다.



$\dot{x} = 0$ 인 점에서는 흐름이 없고,  $\dot{x} > 0$ 인 점에서는  $x$ 가 증가하는 방향으로 흐를 것이고(flow to right),  $\dot{x} < 0$ 인 점에서는  $x$ 가 감소하는 방향으로 흐를 것이다(flow to left). 이를 이용하면 qualitative하게 해를 분석할 수 있을 것이다. (do it yourself.)

## 1.2 Autonomous system

$$\dot{x} = f(x)$$

만일  $x(t)$ 가  $x(0) = x_0$ 인 solution이라면,  $x(t - t_0)$  with  $x(t_0) = x_0$  역시 이 system의 해일 것이다.

### Proof

$t' := t - t_0$ 으로 두자. 그러면,

$$\frac{dx}{dt'}(t') = \frac{dx}{dt}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(x(t'))$$

가 되고  $x(t' = 0) = x(t = t_0) = x_0$ 이 되므로,  $x(t - t_0)$  역시 해이고 따라서 일반성을 잃지 않고  $t_0 = 0$ 을 가정할 수 있다.  $\square$

### 1.3 Fixed points and its stability

$$f(x^*) = 0$$

점  $x^*$ 를 flow의 fixed point라고 하며, critical point, equilibrium point, 혹은 steady-state라고 부르기도 한다.

**Note** : What is the difference between equilibrium and steady-state?

공통적으로는 두 상태 모두 time-invariant하다는 것이다. 그러나, **equilibrium**은  $\nabla f = 0$ , 즉 공간적으로도 uniform한 상황을 의미하고, **steady-state**는 공간적으로는 uniform하지 않을 수도 있다.

Fixed point의 stability는 다음과 같이 구분할 수 있다.

1.  $x^*$  is **stable** (혹은 *asymptotically Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로는 모두 고정점을 향할 때. 즉,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 > 0 \text{ with } |x^* - x_0| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0.$$

2.  $x^*$  is **unstable** : some arbitrary small perturbation이 시간이 지남에 따라 grow할 때. 즉, stable하지 않는 모든 경우.

3.  $x^*$  is **neutrally-stable** (혹은 *Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로가 계속해서 고정점 근처에 있을 때. 즉,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

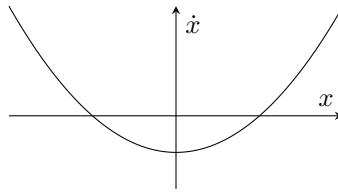
이를 좀 더 “연속” 적이게 쓰면 다음과 같다.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

#### Example

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

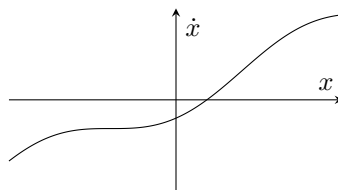
고정점은  $x^* = 1, -1$ 이고  $x = 1$ 에서 unstable,  $x = -1$ 에서 stable하다.



#### Example

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

고정점은 하나 존재하고, 여기서 unstable하다.



## 1.3.1 Population - growth

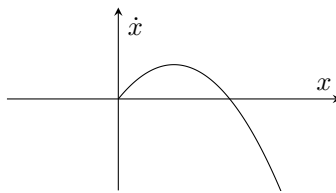
다양한 비선형 생물 시스템 중 ecosystem에 대한 연구가 제일 많이 이루어져 있고, 다루기가 상대적으로 간단하다.

$$\dot{N} = \beta N - \delta N = rN$$

여기서  $N$ 은 population,  $\beta, \delta$ 는 각각 birth rate, death rate,  $r$ 은 growth rate이다. 이 때,  $r > 0$ 이면 이 시스템은 성장하고,  $r < 0$ 이면 decay한다. 이 미분방정식의 해는 당연히  $N(t) = N_0 e^{rt}$ 일 것이다. 즉,  $r > 0$ 이면 계속해서 population이 늘어나 결국 발산한다. 그러나 현실에서는 이러한 일이 일어나지 않는다.

**More Realistic Model** :  $r = \frac{\dot{N}}{N}$ 은 상수가 될 수 없다. 일반적으로  $N$ 이 커질수록 overcrowding/competition/resource limiting에 의해  $r$ 이 줄어들 것이다.  $r = 0$ 이 되는  $N$ 을  $K$ 라고 쓰고, **Carrying capacity**라고 부르면 좋을 것이다. 즉,  $N > K$ 이면  $\dot{N} < 0$ 이 된다.

가장 간단한 모델로  $\frac{\dot{N}}{N} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ 를 생각할 수 있다. 그러면,  $\dot{N} = rN - \frac{r}{K}N^2$ 이므로, 다음과 같은 plot을 얻을 수 있다. 즉, 간단하게 분석할 수 있다.



## 1.3.2 Linear stability analysis

Stability를 qualitative하게 분석해보자.

우선, **Perturbation**을  $y(t) := x(t) - x^*$ 와 같이 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) \\ &= \dot{x} = f(x) = f(x^* + y) \\ &= f(x^*) + f'(x^*)y + \frac{f''(x^*)}{2}y^2 + \dots \\ &= f'(x^*)y + O(y^2) \end{aligned}$$

가 된다.

**Big-Oh Notation** : 함수  $g(y)$ 가  $g(y) = O(h(y))$  as  $y \rightarrow 0$ 이라는 것은, 상수  $K < \infty$ 가 있어서

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{g(y)}{h(y)} \right| < K$$

인 것이다.

따라서, 우리는  $\dot{y} \simeq f'(x^*)y$ 와 같이  $x^*$  근방에서의 linearization을 사용할 수 있다. 이로부터,  $y = y_0 e^{f'(x^*)t}$ 이므로,  $f'(x^*) > 0$ 이면 시간에 따라 diverge하고  $f'(x^*) < 0$ 이면 시간에 따라 converge한다. 즉,  $f'$ 의 sign은 stability를 의미하며,  $f'$ 의 크기는 수렴이 얼마나 빠른지 그 time scale을 의미한다. 특히,  $\tau := \frac{1}{|f'(x^*)|}$ 를 characteristic time-scale이라고 하며 이는 convergence rate과 관련이 있다.

이 방법은  $f'(x^*) \neq 0$ 에서만 유효하다. 이러한 fixed point를 **hyperbolic**하다고 하며, hyperbolic하지 않은 점은 다른 방법으로 분석해야 한다.

## 1.4 Existence and Uniqueness

주어진 미분방정식의 해는 유일하게 존재하는가?

공학 혹은 물리 문제에서 해가 만일 존재하지 않으면 ill-posed되어있을 가능성이 높다. (유일하지 않아도 마찬가지로 이다.) 그러나 수학적으로는 꽤 중요한 문제이다. 예를 들어,  $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, x(0) = 0$ 이라는 미분방정식은 자명히  $x(t) \equiv 0$ 이라는 solution을 갖는다. 그러나,  $x(t) = \pm \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$  역시 주어진 방정식의 solution이며, 마찬가지로,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq t_0 \end{cases}$$

역시 solution이 된다. 이는 주어진 미분방정식의 해가 unique하지 않고 심지어 infinitely 많이 있음을 시사한다. (time-invariant하므로 위의 함수가 해가 된다.) 수학적으로는 다음과 같은 조건이 제시된다.

### Proposition 1.1

$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ 에 대해,

- 만일  $f$ 가  $x_0$ 을 포함하는 구간  $R$ 에서 continuous하다면 어떤  $\tau$ 가 존재하여 interval  $I = (-\tau, \tau)$ 에서 해가 존재한다.
- 만일  $f'$ 가 동일한 구간  $R$ 에서 continuous하다면 그 해는 유일하다.

그러나 이 해가 globally 존재하는지는 알 수 없다. 예를 들어,  $\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$ 의 해는  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서만 유일하게 존재한다.

#### 1.4.1 Impossibility of oscillation

Line에서 정의된 Time-invariant system  $\dot{x} = f(x)$ 에서는 oscillation이 절대 일어날 수 없다. 따라서, trajectory는 다음의 두 가능성만을 갖는다.

1. Trajectory는 fixed point로 approach한다.
2. Trajectory는  $\pm\infty$ 로 diverge한다.

## 1.5 As a Potential

Flow on the line  $\dot{x} = f(x)$ 는 늘 적절한  $V$ 를 생각하여  $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$ 가 될 수 있게 할 수 있다. 이러한  $V$ 는  $V(x) = -\int f(x)dx + V_0$ 으로 주어지며, 보통 potential은  $V_0$ 은 중요하지 않고 임의적이다. 이렇게 Potential로 해석하고 나면 다음과 같은 물리적 함의를 갖는다. Trajectory 위에서의 potential  $V(x) = V(x(t))$ 는,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \left(-\frac{dV}{dx}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

이므로 늘 trajectory를 따라서 potential은 monotonically 감소해야만 한다. 또, 자명히  $\frac{dV}{dx}(x^*) = 0$ 인  $x^*$ 는 fixed point이다. linear approach에서와 같은 방법으로,

1.  $V$ 의 local minima : **stable** fixed point
2.  $V$ 의 local maxima : **unstable** fixed point

임을 알 수 있다.

## 2 Bifurcation

### 2.1 Bifurcation

Parameter  $r$ 에 의존하는 system  $\dot{x} = f_r(x) = f(x, r)$ 을 생각하자. 그러면, 이 dynamical system의 fixed point는  $r$ 에 의존하여 결정될 것이고, 이는  $f(x^*(r), r) = 0$ 과 같이 표현될 것이다. 만일, 특정한  $r$ 에서 Structural behaviour가 크게 바뀐다면 이  $r$ 을  $r_c$ 라고 하고 그 때의  $(x_c, r_c)$ 를 bifurcation point라고 부른다. ( $r_c$ 는 bifurcation parameter) 만일  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) \neq 0$ 이라면 그 point는 structurally stable할 것이므로, 반드시  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) = 0$ 인 non-hyperbolic point에서만 bifurcation이 생긴다.

#### 2.1.1 As an Inverse function theorem

특히,  $\dot{x} = f(x, r)$ 의 equilibria는  $f$ 의 영점, 즉  $f(x, r) = 0$ 에서 나타날 것이다. 그런데 만일  $(x_0, r_0)$ 에서  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, r_0)} \neq 0$ 이라면, 그 근방에서  $f(x^*(r), r) = 0$ 으로 매끄럽게 나타날 것이다. 즉, 전혀 bifurcation이 일어나지 않는다. 그러므로, bifurcation이 일어나기 위해서는 non-hyperbolic할 필요가 있다.

#### 2.1.2 AS a Taylor series

테일러 전개로도 같은 이유를 찾을 수 있다.  $(x_0, r_0)$  근방에서의 Taylor series를 생각해보자.

$$0 = f(x^*(r), r) = f(x_0, r_0) + (x^* - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, r_0)} + (r - r_0) \frac{\partial f}{\partial r}|_{(x_0, r_0)} + \dots$$

이것이  $x^* = x^*(r)$ 로 풀리기 위해서는 당연히  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, r_0)} \neq 0$ 이어야만 한다. 따라서, Bifurcation이 일어나는 지점에서는,

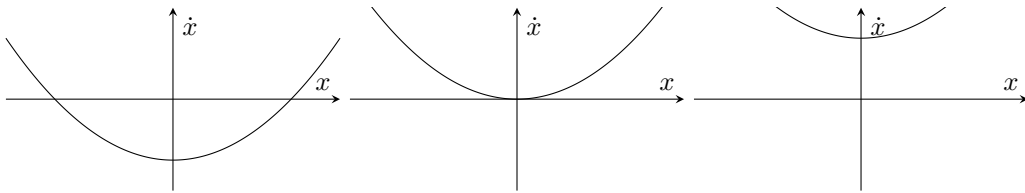
1.  $f = 0$  (Fixed point 조건)
2.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  (Non-hyperbolic 조건)

이를 모두 만족해야한다.

### 2.2 Saddle-Nodoe Bifurcation

**Prototypical Example :**  $\dot{x} = r + x^2$

이 그래프는  $r$ 에 따라서 다양하게 나타난다. 가장 큰 특징은  $r < 0$ 에서의 두 고정점이  $r = 0$ 에서 하나로 합쳐졌다가



$r > 0$ 에서는 사라진다는 것이다. 이러한 bifurcation을 saddle-node라고 부른다. 특히,  $\dot{x} = r + x^2$ 와  $\dot{x} = r - x^2$ 는 사실 같은 plot인데,  $x \rightarrow -x, r \rightarrow -r$ 의 변환을 적용하면,

$$\begin{aligned} -\dot{x} &= -r + x^2 \\ \dot{x} &= r - x^2 \end{aligned}$$

그 형태가 똑같아지기 때문이다. 이 form ( $\dot{x} = r - x^2$ )를 saddle-node bifurcation의 **normal form**이라고 하며, saddle-node bifurcation이 일어나는 구간에서는 local하게 늘  $\dot{x} = r - x^2$ 로 표현할 수 있다.

## 2.3 Normal Form Theory

다음과 같은 테일러 전개에서 시작하자.

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x, r) &= f(x^*, r_c) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x} + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r - r_c)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dots\end{aligned}$$

특히, 첫 두 항은 Bifurcation에 대해 0이 된다. 따라서,

$$\dot{x} = (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(x^3)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이로부터, saddle-node bifurcation은  $\frac{\partial f}{\partial r} \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$ 을 요구함을 알 수 있다. 또한, 다음과 같은 변수변환을 통해 normal form으로 바꿀 수 있다.

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \dots$$

$$X := -b(x - x^*)$$

$$R := -ab(r - r_c)$$

$$\dot{X} = R - X^2 + O(X^3)$$

심지어, 테크닉을 이용해 higher order term을 없앨 수도 있다.

$$\dot{x} = r - x^2 + ax^3 + O(x^4)$$

이와 같이 cubic term을 상정하자. 그리고,  $x =: X + bX^4$ 와 같이 정의하자. 그러면,

$$X = x - bX^4 = x - b(x - bX^4)^4 = x - bx^4 + O(x^7)$$

이므로,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (1 - 4bx^3 + \dots)\dot{x} = (1 - 4bx^3 + \dots)(r - x^2 + ax^3 + \dots) \\ &= (1 - 4b(X + bX^4) + \dots)(r - (X + bX^4)^2 + a(X + bX^4)^3 + \dots) \\ &= r - X^2 - 4brX^3 + aX^3 + O(X^4) \\ &= r - X^2 + (a - 4br)X^3 + O(X^4)\end{aligned}$$

가 되어,  $b = \frac{a}{4r}$ 을 대입하면  $\dot{X} = r - X^2 + O(X^4)$ 를 얻는다.

## 2.4 Transcritical Bifurcation

만일, 어떤 fixed point  $x^*$ 가 모든  $r$ 에 대해  $f(x^*, r) = 0$ 이면,  $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r) = 0$ 이 모든  $k$ 에 대해 참일 것이다.

### Example

$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ 의 경우에,  $N = 0$ 이 parameter와 관계 없이 늘 fixed point가 된다.

테일러 전개를 통해 또 식을 조작해보자.

$$\begin{aligned}f(x, r) &= f(x^*, r_c) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*, r_c)} + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r}|_{(x^*, r_c)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*, r_c)} + \frac{1}{2} (r - r_c)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}|_{(x^*, r_c)} + (x - x^*)(r - r_c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}|_{(x^*, r_c)} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*, r_c)} + (x - x^*)(r - r_c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}|_{(x^*, r_c)} + \dots\end{aligned}$$

따라서, Transcritical bifurcation이 일어날 조건이 다음과 같음을 알 수 있다.



- $f(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial r}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x^*, r_c) = 0$

### Example

$\dot{x} = r \ln x + x - 1 : x^* = 1$ 이 모든  $r$ 에 대해 fixed point이다.

$u = x - 1 (|u| \ll 1)$ 로 두면,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{x} = r \ln(u + 1) + u \\ &= r \left[ u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \dots \right] + u \\ &= (r + 1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3)\end{aligned}$$

이제  $u = av$ 로 두면,

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{a}\dot{u} \\ &= \frac{1}{a} \left[ (r + 1)av - \frac{1}{2}ra^2v^2 + O(v^3) \right] \\ &= (r + 1)v - \frac{1}{2}rav^2 + O(v^3)\end{aligned}$$

이므로,  $a \leftarrow \frac{2}{r}$ 로 넣으면,

$$\dot{v} = (r + 1)v - v^2 + O(v^3)$$

이고,  $X \leftarrow v, R \leftarrow r + 1$ 로 두면,

$$\dot{X} = RX - X^2 + O(X^3)$$

가 성립한다.  $R \neq 0$ 에 대해,  $y := X + bX^k$ 로 두면 higher order term을 없앨 수 있다.

Physics에는 laser라는 좋은 예시가 있다.

$$\begin{aligned}\dot{n} &= (\text{gain}) - (\text{loss}) = G \cdot n \cdot N - k \cdot n \\ N(t) &= N_0 - \alpha n\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}\dot{n} &= Gn(N_0 - \alpha n) - kn \\ &= (GN_0 - k)n - G\alpha n^2\end{aligned}$$

## 2.5 Pitchfork Bifurcation

Pitchfork bifurcation은 굉장히 ideal한 상황으로, 다음과 같은 odd symmetry가 필요하다 :  $f(-x, r) = -f(x, r)$ . 이 경우에는,  $x \rightarrow -x$ 에 대해 invariant하다. 따라서,

- $f(0, r) \equiv 0$  for all  $r$ 이고,  $x^* = 0$ 은 trivial한 fixed point이다. 따라서,  $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(0, r_c) = 0$ 이다.
- $f$ 가 odd하므로, second derivative (짝수-번) 역시 odd하다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, r_c) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, r_c) = \dots = 0$$

Pitchfork bifurcation은 다음과 같은 Taylor expansion을 갖는다.

$$f(x, r) = (x - x^*)(r - r_c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x^*, r_c) + \frac{1}{3!}(x - x^*)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, r_c) + \dots$$

따라서, 중요한 것은  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ 의 부호이다.

### 2.5.1 Supercritical Pitchfork

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0$ 인 경우, *supercritical*하고, *normal form*은  $\dot{x} = rx - x^3$ 이다.

- $r < 0$ 인 경우 :  $rx - x^3$ 은 계속해서 감소하며,  $x = 0$  근처에서 exponentially decay한다 :  $\dot{x} = rx$ 로부터,  $x = x_0 e^{rt}$ 이기 때문이다.
- $r = 0$ 인 경우 :  $\dot{x} = -x^3$ 이므로, algebraically decay한다.
- $r > 0$ 인 경우 :  $|x| \ll 1$ 에서  $rx$ 가 dominant하므로, stable한 fixed point 둘이 생기고  $x = 0$ 에서는 unstable해진다.

이는 secondary 상변이에서 일어나는 현상이다. (Ising model for magnetization)

### 2.5.2 Subcritical Pitchfork

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} > 0$ 인 경우, *subcritical*하고, *normal form*은  $\dot{x} = rx + x^3$ 이다.

그러나 이 경우에는  $r > 0$ 에서 본질적으로 불안정하므로,  $-x^5$ 를 통해 '눌러'줘야한다. 즉,  $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ 을 생각하면, subcritical bifurcation과 saddle-node bifurcation이 모두 일어난다. 또, 그래프를 잘 관찰하면 Hysteresis의 이유를 알 수 있다.

### 2.5.3 Example : moving bead on a rotating hoop

반지름  $r$ 인 hoop를 따라서 bead가 움직일 수 있고, 이 hoop가 각속도  $\omega$ 를 가지고  $z$ -축을 회전축으로 하여 회전하고 있다고 하자. 그러면, 이 bead의 움직임을 기술하는 방정식은 다음과 같이 세울 수 있다.

$$mr\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg \sin(\phi) + mr\omega^2 \sin(\phi) \cos(\phi)$$

만일 friction이 매우 크다면, 즉  $|mr\ddot{\phi}| \ll |b\dot{\phi}|$ 인 조건에서는(overdamping) 식이 다음과 같이 바뀐다.

$$b\dot{\phi} = mr\omega^2 \sin(\phi) \cos(\phi) - mg \sin(\phi) = mg \sin(\phi) \left( \frac{r\omega^2}{g} \cos(\phi) - 1 \right)$$

따라서,  $\sin(\phi) = 0$ 이 되는  $\phi^*$ 는  $\phi^* = 0$ 과  $\phi^* = \pi$ 이다. 분석을 용이하게 하기 위해,  $\gamma = \frac{r\omega^2}{g}$ 라고 놓았다. 그러면, Supercritical pitchfork이 일어나게 된다.

### 2.5.4 Nondimensionalization

식을 nondimensionalization하기 위해,  $\tau = \frac{t}{T}$ 로 설정하였다. 그러면,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tau}$$

이고,  $\dot{\phi} = \frac{1}{T} \frac{d\phi}{d\tau}$ 이 되고  $\ddot{\phi} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2}$ 이 된다. 우리는  $\phi_T$  혹은  $\phi_{TT}$ 가 Order 1, 그러니까  $O(1 = 10^0)$ 이길 바라고 있다. 우선, 식에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{r}{gT^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{mgT} \frac{d\phi}{d\tau} - \sin(\phi) + \frac{r\omega^2}{g} \sin(\phi) \cos(\phi)$$

$\sin(\phi)$ 가  $O(1)$ 이므로,  $\frac{b}{mgT}$  역시  $O(1)$ 이길 바라고 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{b}{mgT} &= 1 \\ T &= \frac{b}{mg} \end{aligned}$$

여야만 한다. 그러면,

$$\epsilon = \frac{r}{gT^2} = \frac{rm^2g}{b^2}$$

이고, 이 값이 1보다 매우 작을 때가 overdamping이 일어나는 것이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{d^2\phi}{d\tau^2} &= -\frac{d\phi}{d\tau} - \sin(\phi) + \gamma \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \gamma &:= \frac{r\omega^2}{g} \\ \epsilon &:= \frac{rm^2g}{b^2} \end{aligned}$$

이다.

### 2.5.5 Phase plane analysis

다음과 같이, 2nd order ODE를 1st order ODE 2개로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon \ddot{\phi} &= -\dot{\phi} + f(\phi) \\ \Omega &:= \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned}$$

로부터,

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{\epsilon}(f(\phi) - \Omega) \end{cases}$$

만일  $f(\phi)$ 와  $\Omega$ 의 차이가 커서  $f(\phi) - \Omega$ 가  $O(1)$ 이라면,  $\dot{\Omega}$ 는  $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \gg 1$ 이다. 따라서,  $\Omega$ 는 빠르게 변화하여  $f(\phi) - \Omega = O(\epsilon)$ 까지 줄어든다. 즉, 그 때는  $\epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} = 1$ 의 order의  $\dot{\Omega}$ 를 갖게 된다. (Quasi-steady-state)

## 2.6 Insect Outbreak

TBD

## 3 Flows on the circle

Circle,  $S^1$  위에서의 flow는 oscillation이 일어날 수 있다. ( $[0, 2\pi]/(0 = 2\pi)$ 이므로...)

### 3.1 Uniform oscillator

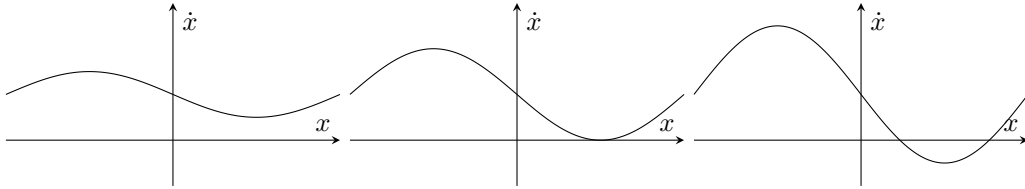
$$\dot{\theta} = \omega$$

상수 각속도  $\omega$ 에 대해,  $\theta = \omega t + \theta_0$ 이 되므로, oscillation이 일어나고 period는  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 이다. 만일 두 명이 원형 트랙을 각각 주기  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ 를 가지고 돌고 있다면 ( $T_1 < T_2$ ), 둘의 위상차  $\phi = \theta_1 - \theta_2$ 는  $\dot{\phi} = \omega_1 - \omega_2 > 0$ 이고, overtaking의 주기는 다음과 같다.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{1/T_1 - 1/T_2}$$

### 3.2 Nonuniform oscillator

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin(\theta)$$



각각  $a < \omega, a = \omega, a > \omega$ 인 경우이다.  $a = \omega, \theta = \frac{\pi}{2}$ 에서 Saddle-node bifurcation이 일어남을 확인할 수 있다. 특히,  $a < \omega$ 일 때의 oscillation의 period를 다음과 같이 계산해보자.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= f(\theta) = \omega - a \sin(\theta) \\ T &= \int_0^T dt = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} \end{aligned}$$

따라서,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega + a}\sqrt{\omega - a}} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$$

라고 할 수 있다. 즉, 주기가  $T \sim (a_c - a)^{-1/2}$ 의 속도로 발산한다.

### 3.3 Ghost and Bottleneck

$\dot{x} = r + x^2$ 에 대해, bottleneck이 되는 주기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_{bn} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}(x)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

특히,  $\dot{\theta} = \omega - a \sin(\theta)$ 에서  $\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$ 로 놓으면, 다음과 같이 saddle node의 normal form으로 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega - a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \\ &= \omega - a \cos(\phi) \\ &= \omega - a \left[1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \dots\right] = (\omega - a) + \frac{1}{2}a\phi^2 + O(\phi^4) \end{aligned}$$

이제,  $x = \frac{1}{2}a\phi$ 와  $r = \frac{1}{2}a(\omega - a)$ 로 놓으면,

$$\dot{x} = \frac{1}{2}a\dot{\phi} = r + x^2 + O(x^4)$$

따라서, 주기는  $T \simeq \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{a}\sqrt{\omega - a}} \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$ 이다.

### 3.4 Overdamped pendulum

길이가  $L$ 인 줄에 질량  $m$ 의 구가 매달려 있고, 반시계 방향으로  $\Gamma$ 의 torque를 받는다고 하자. 그러면, 다음과 같은 torque balance 식을 세울 수 있다.

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin(\theta) = \Gamma$$

만일  $b$ 가 크다면,  $mL\ddot{\theta}$ 는 잠간의 transient 후에 무시할 수 있다. 그러면,

$$\begin{aligned} b\dot{\theta} &= \Gamma - mgL\sin(\theta) \\ \frac{b}{mgL}\dot{\theta} &= \left(\frac{\Gamma}{mgL}\right) - \sin(\theta) \end{aligned}$$

이므로,  $\tau \equiv \frac{t}{t_0} = \frac{mgL}{b}t$ 로 놓으면,  $\gamma = \frac{\Gamma}{mgL}$ 을 얻는다. 그러면,

$$\theta' = \gamma - \sin(\theta)$$

이다.

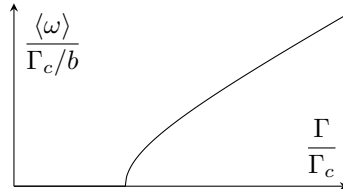
만일  $\gamma > 1$ 이면, applied torque가 충분히 커서 oscillation이 일어난다. 이 때, period는,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

average frequency는  $\sqrt{\gamma^2 - 1}$ 이고,

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \frac{1}{t_0} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{mgL}{b} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{\Gamma^2 - (mgL)^2}}{b} = \frac{\Gamma_c \sqrt{(\Gamma/\Gamma_c)^2 - 1}}{b} \end{aligned}$$

이다. ( $\Gamma_c := mgL$ ) 만일  $\gamma = 1$ 이면,  $\frac{\pi}{2}$ 에서 torque balance가 이뤄진다. 반대로,  $\gamma < 1$ 이면, net rotation이 일어나지 않아  $\langle \omega \rangle = 0$ 이다.



### 3.5 Synchronization of fireflies

반딧불이의 natural (no stimulus) phase를  $\theta(t)$ , frequency를  $\omega$ 라고 할 때, 반딧불이에게 Phase가  $\Theta$ 이고 frequency가  $\Omega$ 인 flash를 비춰준다고 하자. 둘 다 phase가 0이 될 때 빛나며,  $\dot{\Theta} = \Omega$ 이다.

**Modelling.**

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta)$$

여기서  $A$ 는 반딧불이의 resetting strength이다. 그러면, phase difference  $\phi = \Theta - \theta$ 는 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin(\phi)$$

그러면,  $\tau = At$ 이고  $\mu = \frac{\Omega - \omega}{A}$ 로 놓으면,  $\mu$ 에 따라 분석할 수 있다. *Entrainment*는  $-1 \leq \frac{\Omega - \omega}{A} \leq 1$ 일 때만 일어난다. 즉,

$$\omega - A \leq \Omega \leq \omega + A$$

에서 일어난다.

## 4 Linear Systems

이번 절의 목표는 다음을 해결하는 것이다.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

즉,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 을 해결할 것이다.

### 4.1 Simple Harmonic Oscillator

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

여기서  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 으로 놓으면  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ 이 된다. 이제, 이는 다음과 같은 선형시스템으로 옮길 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 x \end{cases}$$

따라서,  $\frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = -\frac{\omega^2 x}{v}$ 로부터,  $vdv + \omega^2 x dx = 0$ 이고, 이를 적분하면,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constant}$$

를 얻는다. 이는 에너지가 보존됨을 의미한다.

### 4.2 Phase portraits for simple cases

이 절에서는  $\dot{x} = Ax$ 를 생각하자. 여기서,  $A = \text{diag}(a, -1)$ 이다.

이는  $x(t) = x_0 e^{at}$ ,  $y(t) = y_0 e^{-t}$ 의 아주 간단한 (decoupled) 해를 갖는다. 따라서,

$$\mathbf{x} = x_0 e^{at} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_0 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다. 여기서,  $a$ 에 따라 다음과 같이 해와 고정점을 분류할 수 있다.

1.  $a < -1$  : 0 근처에서  $y$ 축에 평행하고  $\infty$  근처에서  $x$ 축에 평행한 phase portrait을 갖는다. 즉,  $(0, 0)$ 은 **stable node**이다.
2.  $a = -1$  : trajectory들이 전부 straight-line이다. 즉  $(0, 0)$ 은 **star**이다.

3.  $-1 < a < 0$  : 0 근처에서  $x$ 축에 평행하고  $\infty$  근처에서  $y$ 축에 평행한 phase portrait을 갖는다. 즉,  $(0, 0)$ 은 **stable node**이다.
4.  $a = 0$  :  $x$ 축이 **line of attractor**이다.
5.  $a > 0$  :  $y$ 는 decay하고  $x$ 는 diverge하므로,  $(0, 0)$ 은 **saddle point**이다.

**Definition 4.1**

**Stable manifold** : 시간을 정방향으로 돌릴 때, origin으로 수렴하는 모든 초기값들  $\mathbf{x}_0$ 을 모아둔 manifold이다.

**Unstable manifold** : 시간을 역방향으로 돌릴 때, origin으로 수렴하는 모든 초기값들  $\mathbf{x}_0$ 을 모아둔 manifold이다.

특히,  $t \rightarrow \infty$ 에서는 모두 unstable manifold로 수렴하고,  $t \rightarrow -\infty$ 에서는 unstable manifold로 수렴하는 것이 재미있다.

**4.3 Fixed points**

$x^*$ 가 고정점일 때,...

1. **Attracting Fixed point**란 다음을 만족하는 것이다.

$$\exists \delta > 0, \|x_0 - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)\| = 0$$

2. **Lyapunov stable point**란 다음을 만족하는 것이다.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x_0 - x^*\| < \delta \implies \|\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)\| < \varepsilon$$

특히, Lyapunov stable하지만 attracting하지 않으면 **neutrally stable**하다고 하며, 둘 다 만족하면 **asymptotically stable**하다고 한다. 주의 : *Attracting*하다고 해서 *Lyapunov*인 것은 아니다.

**4.4 Classification of Linear system**

당연히, 다음과 같은 linear system은 쉽게 해결할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

이는 대각화가능한 경우의 이야기이다. Eigendecomposition을 통해 다음을 얻는다.

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

$\lambda_1, \lambda_2$ 가 서로 다른 실수일 때 이가 성립하며, 이는  $v_1, v_2$ 를 축으로 하는 phase portrait을 생각하면 된다.

더 일반적으로, 다음과 같은 2-by-2 Cayley-Hamilton theorem을 사용하자.

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

이 때,  $\tau^2 > 4\Delta$ , 즉 실근이 두 개인 경우를 위에서 본 것이다.

#### 4.4.1 Case : Two complex roots

만일  $\tau^2 < 4\Delta$ 라면, 근은 다음과 같이 나타나게 된다.

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \alpha \pm j\omega \\ \alpha &= \frac{\tau}{2} \\ \omega &= \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2} \neq 0\end{aligned}$$

이 경우에는,  $A$ 가 real matrix이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}Av &= \lambda v \\ A\bar{v} &= \bar{\lambda}\bar{v}\end{aligned}$$

다시 말해 eigenvalue  $\lambda$ 에 대해  $\bar{\lambda}$  역시 eigenvalue가 된다. 그러면, 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{\lambda t} v + C_2 e^{\bar{\lambda} t} \bar{v} \\ &= K_1 e^{\alpha t} \cos(\omega t) + K_2 e^{\alpha t} \sin(\omega t)\end{aligned}$$

만일,  $\text{Re } \lambda < 0$ 이면, decaying하는 spiral(Stable spiral)이 얻어지고,  $\text{Re } \lambda > 0$ 이면, diverge하는 spiral(Unstable spiral)이 얻어진다. 특히,  $\text{Re } \lambda = 0$ 이면, decay하지도 grow하지도 않으므로,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 의 주기를 가지고 빙글빙글 돌게 된다. 즉, Lyapunov stable하지만 attracting하지 않는 수많은 원들이 생겨난다.

#### 4.4.2 Case : Equal roots

만일  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\tau}{2}$ 라면, 여러가지 case가 생긴다.

**Case 1** : Two independent eigenvectors :  $v_1, v_2$ . 사실 이러한 경우는  $A = \lambda I$ 가 전부이며, 늘 *Star*가 나온다.

**Case 2** : Only one eigenvector :  $v_1$ . 이 경우에는 나머지 하나를 generalized eigenvalue로써 다음과 같이 구해야 한다.

$$(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$$

그러면, 해는 다음처럼 나타난다.

$$x(t) = e^{\lambda t} [(C_1 + C_2 \alpha t)v_1 + C_2 v_2]$$

이 경우는 **Degenerate Node**가 나타난다.

#### 4.4.3 Classification diagram of linear system fixed points

TBD

## 5 Phase Portraits

일반적인 Nonlinear system에서는, closed orbit(limit cycle)이 나타날 수 있다. 선형 시스템에서는 center가 continuum of cycle이지만, 비선형 시스템에서는 isolated limit cycle이 나타날 수 있다.

### Definition 5.1

**x - Nullcline** :  $\dot{x} = 0$ 인 curve를 x-nullcline이라고 한다.

**y - Nullcline** :  $\dot{y} = 0$ 인 curve를 y-nullcline이라고 한다.



## 5.1 Existence and Uniqueness of solution

System  $\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ 에 대해,  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 가 존재하고 연속이라면,  $\tau > 0$ 이 있어서  $(-\tau, \tau)$ 에서 system을 만족하는 해가 있다.

**Corollary** : 따라서, 서로 다른 trajectory는 절대로 intersect하지 않는다. 또한, Fixed point와도 절대 유한한 시간 내에 닿을 수 없다. 게다가, 이로 인해 closed orbit이 있으면 그 안 영역과 그 밖 영역은 완전히 고립된다.

## 5.2 Linearization of system

다음과 같은 system을 linearization해보자.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

작은 deviation  $u = x - x^*, v = y - y^*$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= f(x, y) = f(x^* + u, y^* + v) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*, y^*)}u + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(x^*, y^*)}v \\ \dot{v} &\approx \frac{\partial g}{\partial x}|_{(x^*, y^*)}u + \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x^*, y^*)}v \end{aligned}$$

이므로, 따라서,

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Imaginary line에 eigenvalue가 놓이지 않는 경우, 즉 hyperbolic case에서는 다음과 같이 ‘Linearization을 통한 예측’을 할 수 있다.

Eigenvalue	Prediction	Qualitative dynamics	
Real, opposite sign	Saddle	Saddle	Exactly predicted (stability and type)
Real, same sign	Node	Node	
Complex Conjugation ( $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ )	Spiral	Spiral	
Real, equal value	Star of degenerate node	Node or Spiral	Stability prediction but not type
Pure imaginary	Center	Center, stable spiral or unstable spiral	Can't predict neither stability nor type
One or two zeros	Nonisolated fixed point	Various	