Nonlinear dynamics and chaos

2dayclean

2025/09/16

Contents

1 Flows on the Line

1.1 Flows on the line

Flows on the line이란 $\dot{x} = f(x)$와 같은 one-dimensional dynamical system을 의미하며, 이를 **flow** 혹은 **vector field**라고 부른다.

Example

$\dot{x} = \sin(x)$의 해는 어떻게 주어지는가?

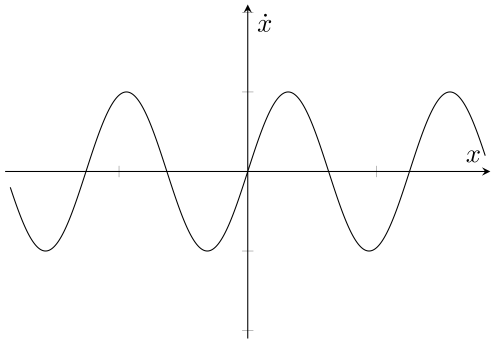
다음과 같이 변수분리법을 사용할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \Longrightarrow t = \int \csc(x)dx + C = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

따라서, initial condition $x(0) = x_0$이 주어지면,

$$t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$$

와 같이 쓸 수 있다. 그러나 대체 이 해는 어떻게 생겼는가? $x = x(t)$ 꼴로 explicit하게 알 방법이 없다. Qualitive한 분석을 위하여 우리는 다음과 같은 $x - \dot{x}$ plot을 이용할 수 있다.



$\dot{x} = 0$인 점에서는 흐름이 없고, $\dot{x} > 0$인 점에서는 x가 증가하는 방향으로 흐를 것이고(flow to right), $\dot{x} < 0$인 점에서는 x가 감소하는 방향으로 흐를 것이다(flow to left). 이를 이용하면 qualititive하게 해를 분석할 수 있을 것이다. (do it yourself.)

1.2 Autonomous system

$$\dot{x} = f(x)$$

만일 $x(t)$가 $x(0) = x_0$인 solution이라면, $x(t - t_0)$ with $x(t_0) = x_0$ 역시 이 system의 해일 것이다.

Proof

$t' := t - t_0$으로 두자. 그러면,

$$\frac{dx}{dt'}(t') = \frac{dx}{dt}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(x(t'))$$

가 되고 $x(t' = 0) = x(t = t_0) = x_0$이 되므로, $x(t - t_0)$ 역시 해이고 따라서 일반성을 잃지 않고 $t_0 = 0$을 가정할 수 있다. □

1.3 Fixed points and its stability

$$f(x^*) = 0$$

점 x^*를 flow의 fixed point라고 하며, critical point, equilibrium point, 혹은 steady-state라고 부르기도 한다.

> ***Note*** *: What is the difference between equilibirum and steady-state?*
> 공통적으로는 두 상태 모두 time-invariant하다는 것이다. 그러나, **equilibrium**은 $\nabla f = 0$, 즉 공간적으로도 uniform한 상황을 의미하고, **steady-state**는 공간적으로는 uniform하지 않을 수도 있다.

Fixed point의 stability는 다음과 같이 구분할 수 있다.

1. x^* is **stable** (혹은 *asymptotically Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로는 모두 고정점을 향할 때. 즉,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 > 0 \text{ with } |x^* - x_0| < \delta, \lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*| = 0.$$

2. x^* is **unstable** : some arbitary small perturbation이 시간이 지남에 따라 grow할 때. 즉, stable하지 않는 모든 경우.

3. x^* is **neutrally-stable** (혹은 *Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로가 계속해서 고정점 근처에 있을 때. 즉,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

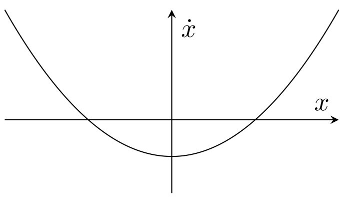
   이를 좀 더 "연속"적이게 쓰면 다음과 같다.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

Example

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

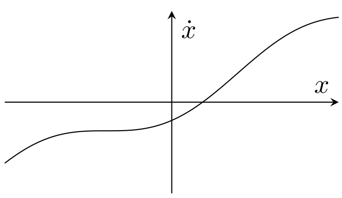
고정점은 $x^* = 1, -1$이고 $x = 1$에서 unstable, $x = -1$에서 stable하다.



Example

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

고정점은 하나 존재하고, 여기서 unstable하다.



1.3.1 Population - growth

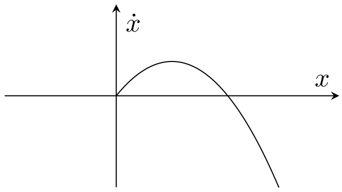
다양한 비선형 생물 시스템 중 ecosystem에 대한 연구가 제일 많이 이루어져 있고, 다루기가 상대적으로 간단하다.

$$\dot{N} = \beta N - \delta N = rN$$

여기서 N은 population, β, δ는 각각 birth rate, death rate, r은 growth rate이다. 이 때, $r > 0$이면 이 시스템은 성장하고, $r < 0$이면 decay한다. 이 미분방정식의 해는 당연히 $N(t) = N_0 e^{rt}$일 것이다. 즉, $r > 0$이면 계속해서 population이 늘어나 결국 발산한다. 그러나 현실에서는 이러한 일이 일어나지 않는다.

More Realistic Model : $r = \dfrac{\dot{N}}{N}$은 상수가 될 수 없다. 일반적으로 N이 커질수록 overcrowding/competition/resource limiting에 의해 r이 줄어들 것이다. $r = 0$이 되는 N을 K라고 쓰고, **Carrying capacity**라고 부르면 좋을 것이다. 즉, $N > K$이면 $\dot{N} < 0$이 된다.

가장 간단한 모델으로 $\dfrac{\dot{N}}{N} = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$를 생각할 수 있다. 그러면, $\dot{N} = rN - \dfrac{r}{K}N^2$이므로, 다음과 같은 plot을 얻을 수 있다. 즉, 간단하게 분석할 수 있다.



1.3.2 Linear stability analysis

Stability를 qualititive하게 분석해보자.

우선, **Perturbation**을 $y(t) := x(t) - x^*$와 같이 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) \\ &= \dot{x} = f(x) = f(x^* + y) \\ &= f(x^*) + f'(x^*)y + \frac{f''(x^*)}{2}y^2 + \cdots \\ &= f'(x^*)y + O(y^2)\end{aligned}$$

가 된다.

Big-Oh Notation : 함수 $g(y)$가 $g(y) = O(h(y))$ as $y \to 0$이라는 것은, 상수 $K < \infty$가 있어서

$$\lim_{y\to 0}\left|\frac{g(y)}{h(y)}\right| < K$$

인 것이다.

따라서, 우리는 $\dot{y} \simeq f'(x^*)y$와 같이 x^* 근방에서의 linearization을 사용할 수 있다. 이로부터, $y = y_0 e^{f'(x^*)t}$이므로, $f'(x^*) > 0$이면 시간에 따라 diverge하고 $f'(x^*) < 0$이면 시간에 따라 converge한다. 즉, f'의 sign은 stability를 의미하며, f'의 크기는 수렴이 얼마나 빠른지 그 time scale을 의미한다. 특히, $\tau := \dfrac{1}{|f'(x^*)|}$를 characteristic time-scale이라고 하며 이는 convergence rate과 관련이 있다.

이 방법은 $f'(x^*) \neq 0$에서만 유효하다. 이러한 fixed point를 **hyperbolic**하다고 하며, hyperbolic하지 않은 점은 다른 방법으로 분석해야 한다.

1.4 Existence and Uniqueness

주어진 미분방정식의 해는 유일하게 존재하는가?

공학 혹은 물리 문제에서 해가 만일 존재하지 않으면 ill-posed되어있을 가능성이 높다. (유일하지 않아도 마찬가지이다.) 그러나 수학적으로는 꽤 중요한 문제이다. 예를 들어, $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, x(0) = 0$이라는 미분방정식은 자명히 $x(t) \equiv 0$이라는 solution을 갖는다. 그러나, $x(t) = \pm \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$ 역시 주어진 방정식의 solution이며, 마찬가지로,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq t_0 \end{cases}$$

역시 solution이 된다. 이는 주어진 미분방정식의 해가 unique하지 않고 심지어 infinitely 많이 있음을 시사한다. (time-invariant하므로 위의 함수가 해가 된다.) 수학적으로는 다음과 같은 조건이 제시된다.

Proposition 1.1

$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$에 대해,

- 만일 f가 x_0을 포함하는 구간 R에서 continuous하다면 어떤 τ가 존재하여 interval $I = (-\tau, \tau)$에서 해가 존재한다.
- 만일 f'가 동일한 구간 R에서 continuous하다면 그 해는 유일하다.

그러나 이 해가 globally 존재하는지는 알 수 없다. 예를 들어, $\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$의 해는 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서만 유일하게 존재한다.

1.4.1 Impossibility of oscillation

Line에서 정의된 Time-invariant system $\dot{x} = f(x)$에서는 oscillation이 절대 일어날 수 없다. 따라서, trajectory는 다음의 두 가능성만을 갖는다.

1. Trajectory는 fixed point로 approach한다.
2. Trajectory는 $\pm\infty$로 diverge한다.

1.5 As a Potential

Flow on the line $\dot{x} = f(x)$는 늘 적절한 V를 생각하여 $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$가 될 수 있게 할 수 있다. 이러한 V는 $V(x) = -\int f(x)dx + V_0$으로 주어지며, 보통 potential은 V_0은 중요하지 않고 임의적이다. 이렇게 Potential로 해석하고 나면 다음과 같은 물리적 함의를 갖는다. Trajectory 위에서의 potential $V(x) = V(x(t))$는,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \left(-\frac{dV}{dx}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

이므로 늘 trajectory를 따라서 potential은 monotonically 감소해야만 한다. 또, 자명히 $\frac{dV}{dx}(x^*) = 0$인 x^*는 fixed point이다. linear approach에서와 같은 방법으로,

1. V의 local minima : **stable** fixed point
2. V의 local maxima : **unstable** fixed point

임을 알 수 있다.

2 Bifurcation

2.1 Bifurcation

Parameter r에 의존하는 system $\dot{x} = f_r(x) = f(x,r)$을 생각하자. 그러면, 이 dynamical system의 fixed point는 r에 의존하여 결정될 것이고, 이는 $f(x^*(r), r) = 0$과 같이 표현될 것이다. 만일, 특정한 r에서 Structural behaviour가 크게 바뀐다면 이 r을 r_c라고 하고 그 때의 (x_c, r_c)를 bifurcation point라고 부른다. (r_c는 bifurcation parameter) 만일 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) \neq 0$이라면 그 point는 structurally stable할 것이므로, 반드시 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) = 0$인 non-hyperbolic point에서만 bifurcation이 생긴다.

2.1.1 As an Inverse function theorem

특히, $\dot{x} = f(x,r)$의 equilibria는 f의 영점, 즉 $f(x,r) = 0$에서 나타날 것이다. 그런데 만일 (x_0, r_0)에서 $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,r_0)} \neq 0$이라면, 그 근방에서 $f(x^*(r), r) = 0$으로 매끄럽게 나타날 것이다. 즉, 전혀 bifurcation이 일어나지 않는다. 그러므로, bifurcation이 일어나기 위해서는 non-hyperbolic할 필요가 있다.

2.1.2 AS a Taylor series

테일러 전개로도 같은 이유를 찾을 수 있다. (x_0, r_0) 근방에서의 Taylor series를 생각해보자.

$$0 = f(x^*(r), r) = f(x_0, r_0) + (x^* - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,r_0)} + (r - r_0)\frac{\partial f}{\partial r}|_{(x_0,r_0)} + \cdot$$

이것이 $x^* = x^*(r)$로 풀리기 위해서는 당여닣 $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,r_0)} \neq 0$이어야만 한다. 따라서, Bifurcation이 일어나는 지점에서는,

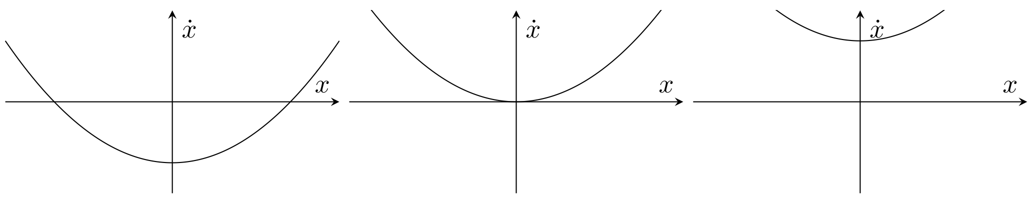
1. $f = 0$ (Fixed point 조건)
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ (Non-hyperbolic 조건)

이를 모두 만족해야한다.

2.2 Saddle-Nodoe Bifurcation

Prototypical Example : $\dot{x} = r + x^2$

이 그래프는 r에 따라서 다양하게 나타난다. 가장 큰 특징은 $r < 0$에서의 두 고정점이 $r = 0$에서 하나로 합쳐졌다가



$r > 0$에서는 사라진다는 것이다. 이러한 bifurcation을 saddle-node라고 부른다. 특히, $\dot{x} = r + x^2$와 $\dot{x} = r - x^2$는 사실 같은 plot인데, $x \to -x$, $r \to -r$의 변환을 적용하면,

$$-\dot{x} = -r + x^2$$
$$\dot{x} = r - x^2$$

그 형태가 똑같아지기 때문이다. 이 form ($\dot{x} = r - x^2$)를 saddle-node bifurcation의 **normal form**이라고 하며, saddle-node bifurcation이 일어나는 구간에서는 local하게 늘 $\dot{x} = r - x^2$로 표현할 수 있다.

2.3 Normal Form Theory

다음과 같은 테일러 전개에서 시작하자.

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x,r) &= f(x^*, r_c) + (x - x^*)\frac{\partial f}{\partial x} + (r - r_c)\frac{\partial f}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{2}(x - x^*)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r - r_c)^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cdots\end{aligned}$$

특히, 첫 두 항은 Bifurcation에 대해 0이 된다. 따라서,

$$\dot{x} = (r - r_c)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}(x - x^*)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(x^3)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이로부터, saddle-node bifurcation은 $\frac{\partial f}{\partial r} \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$을 요구함을 알 수 있다. 또한, 다음과 같은 변수변환을 통해 normal form으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \cdots \\ X &:= -b(x - x^*) \\ R &:= -ab(r - r_c) \\ \dot{X} &= R - X^2 + O(X^3)\end{aligned}$$

심지어, 테크닉을 이용해 higher order term을 없앨 수도 있다.

$$\dot{x} = r - x^2 + ax^3 + O(x^4)$$

이와 같이 cubic term을 상정하자. 그리고, $x =: X + bX^4$와 같이 정의하자. 그러면,

$$X = x - bX^4 = x - b(x - bX^4)^4 = x - bx^4 + O(x^7)$$

이므로,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (1 - 4bx^3 + \cdots)\dot{x} = (1 - 4bx^3 + \cdots)(r - x^2 + ax^3 + \cdots) \\ &= (1 - 4b(X + bX^4) + \cdots)(r - (X + bX^4)^2 + a(X + bX^4)^3 + \cdots) \\ &= r - X^2 - 4brX^3 + aX^3 + O(X^4) \\ &= r - X^2 + (a - 4br)X^3 + O(X^4)\end{aligned}$$

가 되어, $b = \frac{a}{4r}$을 대입하면 $\dot{X} = r - X^2 + O(X^4)$를 얻는다.

2.4 Transcritical Bifurcation

만일, 어떤 fixed point x^*가 모든 r에 대해 $f(x^*, r) = 0$이면, $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r) = 0$이 모든 k에 대해 참일 것이다.

Example

$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$의 경우에, $N = 0$이 parameter와 관계 없이 늘 fixed point가 된다.