Finite Element Method for PDE

2dayclean

2025/09/11

Contents

1 Introduction

1.1 Elements of function spaces

1.1.1 Spaces of continuous functions

자연수 집합 $\mathbb{N}$과 자연수 n에 대해, $\mathbb{N}^n$의 원소 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$를 **multi-index**라고 하고,

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- $\not{0} = (0, \cdots, 0)$
- $D^\alpha := \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$

과 같은 notation을 정의한다.

이제 $\Omega \subseteq_{\text{open}} \mathbb{R}^n$에 대해, $C^k(\Omega)$는 Ω에서 $D^\alpha u$가($|\alpha| \le k$) continuous한 집합이다. 특히, Ω가 bounded라면, $C^k(\bar{\Omega})$는 모든 $D^\alpha u$를 continuous하게 $\bar{\Omega}$로 확장할 수 있는 u를 의미한다. 즉, C^k-확장이 가능한 u이다. 이에 대해, 다음과 같이 norm을 정의해줄 수 있다.

- $\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$

  특히, $\|u\|_{C^0(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$이다.

  또한, $\|u\|_{C^1(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)| + \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in \Omega} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|$

Exercise. 이 norm이 정말로 norm임을 확인하라.

또한, $\operatorname{supp} u := \operatorname{cl}\{\, x \in \Omega \mid u(x) \neq 0 \,\}$을 의미한다. $C^k(\Omega)$ 중에서 그 support가 bounded되어 있는 것들(즉, compactly supported)한 것은 $C_0^k(\Omega)$라고 한다. 당연히, $C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \ge 0} C_0^k(\Omega)$으로 정의된다.

1.1.2 Space of integrable functions

Lp space에는 다음과 같은 norm이 있다.

- $L_p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$
- $\|u\|_{L_p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$
- $L_\infty(\Omega)$: essentially bounded된 functions.
- $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} := \operatorname{ess.sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$

특히, L^2는 매우 중요한데, Hilbert space이기 때문이다.

- $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$
- Inner product : $(u, v)_{L_2(\Omega)} := \int_\Omega u(x) v(x) dx$

자명히, Cauchy-Schwartz inequality가 성립한다.

1.1.3 Sobolev space

부분적분에 의해, $u \in C^k(\Omega)$와 $v \in C_0^\infty(\Omega)$에 대해 다음이 성립함을 확인하자.

$$\int_\Omega D^\alpha u(x) \cdot v(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha v(x)dx$$

만일, u가 locally integrable on Ω라면...

Definition

함수 u가 locally integrable하다는 것은 u가 모든 bounded $\omega \in \Omega$ with $\bar{\omega} \in \Omega$에서 L_1이라는 것이다.

그렇다면, u에 대응하는 w_α가 존재하여 다음을 만족한다면 w_α를 **weak derivative**로 정의할 수 있을 것이다.

$$\int_\Omega w_\alpha v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha v dx$$

이는 DuBoids Reymond's lemma에 의해 유일하게 존재한다.

Lemma

만일 locally integrable w가 모든 $v \in C_0^\infty$에 대해 $\displaystyle\int_\Omega wvdx = 0$이라면, $w = 0$ a.e.이다.

Example

$u(x) = (1 - |x|)_+$ on $\mathbb{R}^1$의 weak derivative는 다음과 같다.

$$w(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Definition 1.1

Sobolev space of order k는 다음과 같이 정의된다.

$$W_p^k(\Omega) := \{\, u \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \le k \,\}$$

즉, L_p인 함수들 중에 약미분이 모두 C^k인 것이다.

여기서의 norm은 다음과 같이 정의된다.

- $\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$
- $\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$
- $|u|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$

  따라서, $\|u\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{j \le k} |u|_{W_p^j(\Omega)}^p \right)^{1/p}$
- $|u|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| = k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$

  따라서, $\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{j \le k} |u|_{W_\infty^j(\Omega)}$

마찬가지로 $W_2^k(\Omega)$는 중요하다. Hilbert space이기 때문이다. 이를 $H^k(\Omega)$라고 쓴다.

특히, $H_0^1(\Omega)$는 $C_0^\infty(\Omega)$의 $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$에 의한 closure이다. 즉,

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ on } \Omega \right\}$$

Proposition 1.2

(Poincare-Friedrichs inequality) Ω가 bounded open subset of $\mathbb{R}^n$이고 충분히 매끄러운 boundary를 갖는다고 하자. 그리고, $u \in H_0^1(\Omega)$일 때, constant $c_\star(\Omega)$가 있어서 u와 무관하게,

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \le c_\star \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx$$

가 되게 할 수 있다.

Proof. 간단하게, $\Omega = (a,b) \times (c,d)$라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(a,y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi \\ &= \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x,y)|^2 dxdy &= \int_a^b \int_c^d \left| \int_a^x \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) d\xi \right|^2 dydx \\ &\le \int_a^b \int_c^d (x-a) \int_a^x \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi dydx \\ &\le \int_a^b (x-a) dx \int_c^d \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, y) \right|^2 d\xi dy \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right|^2 dxdy \end{aligned}$$

마찬가지로,

$$\int_\Omega |u(x,y)|^2 dxdy \le \frac{1}{2}(d-c)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right|^2 dydx$$

가 성립한다. 이제,

$$c_\star = \left[\frac{2}{(d-c)^2} + \frac{2}{(b-a)^2} \right]^{-1}$$

이므로,

$$\int_\Omega |u(x,y)|^2 dxdy \le c_\star \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dxdy$$

이다. □ □