

# Friedberg Solution

2dayclean

2026/01/08

## 1 벡터공간

### 1.1 개론

### 1.2 벡터공간

#### Problem 1.

- (a) 참. 공리 (VS3)에 의해 모든 벡터 공간에는 영벡터가 존재한다.
- (b) 참. (a)와 같은 이유로 존재하며, 실제로 영벡터는 유일하다.
- (c) 거짓.  $x = 0$ 인 경우,  $1x = 2x = 0$ 이지만  $1 \neq 2$ 이다.
- (d) 거짓.  $a = 0$ 인 경우,  $0x = 0y$ 지만  $x \neq y$ 인  $x, y$ 가 존재할 수 있다.
- (e) 참. 그 둘을 본질적으로 같다고 할 수 있다. 이는 추후에 나오는 선형사상과 차원을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.
- (f) 거짓.  $m \times n$  행렬은  $m$ 개의 행과  $n$ 개의 열로 이루어져 있다.
- (g) 거짓.  $x + 1$ 과  $x^2 + x + 1$ 의 합은  $x^2 + 2x + 2$ 이다.
- (h) 거짓.  $x + 1$ 과  $-x + 1$ 은 차수가 둘 다 1이지만, 그 합은 2이고 차수가 0이다.
- (i) 참. 다항식  $f$ 의 leading coefficient가  $a_n$ 이라고 하면,  $cf$ 의 leading coefficient는  $ca_n$ 이고 이는 0이 아니다. 이는 임의의 체  $\mathbb{F}$ 에서도 성립한다.
- (j) 참. 이는 동형사상을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.
- (k) 참. 함수의 같음을 정의하는 방법이다.

**Problem 2.** 벡터공간  $M_{3 \times 4}(F)$ 의 영벡터는  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

**Problem 3.**  $M_{13} = 3, M_{21} = 4, M_{22} = 5$ .

**Problem 4.**

(a)  $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{bmatrix}$$

$$(e) 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$$

$$(f) -x^3 + 7x^2 + 4$$

$$(g) 10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$$

$$(h) 3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$$

**Problem 5.** (a)  $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  (b) 자명.

**Problem 6.** 문제 5와 유사하므로 생략.

**Problem 7.** 문제 1의 (k)를 사용한다.  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 3$ ,  $g(0) = 1$ ,  $g(1) = 1 + 4 - 2 = 3$ 이므로  $f$ 와  $g$ 가  $S$ 에서의 함수값이 모두 일치한다. 즉,  $f = g$ 이다. 또한,  $h(0) = 2$ ,  $h(1) = 6$ 인데  $(f+g)(t)$ 와  $S$ 에서의 함수값이 모두 일치하므로  $f+g = h$ 이다.

**Problem 8.** 임의의 벡터  $x, y$ 와 임의의 스칼라  $a, b$ 에 대해,

$$(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y \quad (\text{VS8})$$

$$= (ax + bx) + (ay + by) \quad (\text{VS7})$$

$$= ax + (bx + ay) + by \quad (\text{VS2})$$

$$= ax + ay + bx + by \quad (\text{VS1}), (\text{VS2})$$

**Problem 9.** 따름정리 1. (VS3)을 만족하는 벡터 0은 유일하다.

*proof)* (VS3)을 만족하는 벡터  $0, 0'$ 을 고려하자. 그러면, (VS3)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

즉,  $0$ 과  $0'$ 은 동일한 벡터이다. 따라서, 영벡터는 유일하다.  $\square$

따름정리 2. (VS4)를 만족하는 벡터  $y$ 는 유일하다.

*proof)* 주어진  $x$ 에 대해,  $x + y = 0$ 이고  $x + z = 0$ 이라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + (x + z) \\ &= (y + x) + z \\ &= 0 + z = z \end{aligned}$$

즉,  $y = z$ 이다. 따라서, 역벡터는 유일하다.  $\square$

정리 1.2(3) 모든 스칼라  $a$ 에 대해  $a0 = 0$ 이다.

*proof)* 스칼라  $a$ 에 대해,  $a0 = a(0+0) = a0+a0$ 이다. 즉,  $a0+0 = a0 = a0+a0$ 이다. 정리 1.1에 의해,  $0 = a0$ 이다.  $\square$

**Problem 10.**  $V = \{f : R \rightarrow R \mid f\text{는 미분가능}\}$ 이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 가장 먼저,  $f, g \in V$ 와  $c \in \mathbb{R}$ 에 대해  $f + g \in V$ 이고  $(cf) \in V$ 인지 확인해야 한다. (연산에 대한 닫힘) 다시 말해 미분가능한 함수의 합 역시 미분가능하고, 미분가능한 함수의 스칼라배 역시 미분가능한지 보여야 한다. 이는 잘 알려진 내용이므로 생략한다. (자세한 정의는 미분적분학이나 해석학 교재를 참고하라.)

(VS1) 모든  $f, g \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$ 으로  $f + g = g + f$ 이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 교환법칙이 사용되었다.

(VS2) 모든  $f, g, h \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$ 으로  $(f + g) + h = f + (g + h)$ 이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS3) 함수 0을 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $0(x) = 0$ 으로 정의하면  $(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$ 으로 늘  $f + 0 = 0 + f = f$ 이다. 또한,  $0(x) = 0$ 은 미분가능하므로  $0 \in V$ 이다.

(VS4) 함수  $f \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $g(x) = -f(x)$ 로 정의하면  $g$ 는 미분가능하고, 자명히  $f + g = 0$ 이다.

(VS5) 함수  $f \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$ 으로  $1f = f$ 이다.

(VS6) 실수  $a, b \in \mathbb{R}$ 와 함수  $f \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = (a(bf))(x)$ 이다. 따라서,  $(ab)f = a(bf)$ 이다. 이 증명에서는 실수의 곱에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS7) 실수  $a \in \mathbb{R}$ 와 함수  $f, g \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $(a(f + g))(x) = a((f + g)(x)) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$ 이다. 따라서,  $a(f + g) = af + ag$ 이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

(VS8) 실수  $a, b \in \mathbb{R}$ 와 함수  $f, g \in V$ 에 대해, 모든  $x \in \mathbb{R}$ 에서  $((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af + bf)(x)$ 이다. 따라서,  $(a+b)f = af + bf$ 이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다.  $\square$

**Problem 11.** 영벡터만을 벡터로 갖는  $V = \{0\}$ 이 벡터공간임을 보이자.

(cl)  $0 + 0 = 0$ 이고, 임의의 상수  $c \in F$ 에 대해  $c0 = 0$ 으로 연산에 대해 닫혀 있다.

(VS1) 원소가 0 뿐이므로  $0 + 0 = 0 + 0 = 0$ 이다.

(VS2) 원소가 0 뿐이므로  $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$ 이다.

(VS3) 원소가 0 뿐이므로  $0 + 0 = 0$ 에서 0이 항등원이다.

(VS4) 원소가 0 뿐이고,  $0 + 0 = 0$ 에서 0의 역원이 0이다.

(VS5) 정의에 의해  $1 \cdot 0 = 0$ 이다.

(VS6) 스칼라  $a, b$ 에 대해  $(ab)0 = 0 = a0 = a(b0)$ 이다.

(VS7) 스칼라  $a$ 에 대해  $a(0 + 0) = a0 = 0 = 0 + 0 = a0 + a0$ 이다.

(VS8) 스칼라  $a, b$ 에 대해  $(a + b)0 = 0 = 0 + 0 = a0 + b0$ 이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다.  $\square$

**Problem 12.** 짹함수(even function)들의 집합이 벡터공간임을 보이자. 사실, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로, (VS1), (VS2), (VS5 - 8)은 증명할 필요가 없다. 따라서, (cl) : 연산에 대한 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 짹함수  $f, g$ 와 실수  $c \in \mathbb{R}$ 에 대해  $f + g$ 와  $cf$ 가 짹함수임을 보이면 충분하다. 먼저,  $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ 로부터  $f + g$ 는 짹함수이다. 또한,  $(cf)(-x) = cf(-x) = cf(x) = (cf)(x)$ 로부터  $cf$ 는 짹함수이다.

(VS3) 영함수  $0(x) = 0$ 이 짹함수임을 보이면 충분하다.  $0(-x) = 0 = 0(x)$ 에서  $0$ 은 짹함수이다.

(VS4) 짹함수  $f$ 에 대해  $g(x) = -f(x)$ 로 정의된  $g$ 가 짹함수임을 보이면 충분하다.  $g(-x) = -f(-x) = -f(x) = g(x)$ 에서  $g$ 는 짹함수이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다.  $\square$

**Problem 13.**  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ 만 가지고도 이 덧셈에 대해 주어진 집합이 벡터공간이 되지 않음을 보일 수 있다. 이 공간의 영벡터의 역할을 하는 벡터를 우선 찾아보자. 영벡터를  $(x, y)$ 라고 하면,  $(a, b) + (x, y) = (a + x, by) = (a, b)$ 가 되어야 한다. 따라서,  $x = 0$ 이고  $y = 1$ 이어야 한다. 즉, 이 공간에서는  $(0, 1)$ 이 영벡터이다. 이제,  $(1, 0)$ 의 역벡터를 찾아보자. 만일  $(x, y)$ 가  $(1, 0)$ 의 역벡터라면,  $(1, 0) + (x, y) = (1x, 0y) = (x, 0)$ 가 영벡터여야만 한다. 다시 말해,  $(x, 0) = (0, 1)$ 이어야만 하는데,  $0 \neq 1$ 이므로 (두번째 좌표) 어떤  $(x, y)$ 도 역벡터가 될 수 없다. 따라서, 이 공간은 벡터 공간이 아니다.  $\square$

**Problem 14.** 스칼라가  $\mathbb{R}$ 로 제한된 상태이므로, 주어진 공간이 실수 상수곱에 대해 벡터공간 공리를 만족하는지 보이면 된다. 그런데, 주어진 공간은 이미 스칼라를  $\mathbb{C}$ 로 택했을 때 벡터 공간 공리를 만족하고,  $\mathbb{R}$ 은  $\mathbb{C}$ 의 부분집합이므로  $\mathbb{C}$ 에서 모두 만족한다면  $\mathbb{R}$ 에서도 만족하게 된다. 따라서, 주어진 공간은  $\mathbb{R}$ -벡터공간이다.  $\square$

**Problem 15.** 이 경우 '닫혀 있음'이 보장되지 않는다. 예를 들어,  $i \in \mathbb{C}$ 와  $(1, 1, \dots, 1) \in V$ 를 생각하자. 그러면  $i(1, 1, \dots, 1) = (i, i, \dots, i)$ 인데, 이러한 벡터는 주어진 공간  $V$ 에 존재하지 않는다. (각 좌표가 실수가 아니기 때문) 따라서, 상수곱에 대해 닫혀있지 않으므로, 주어진 공간은  $\mathbb{C}$ -벡터공간이 아니다.  $\square$

**Problem 16.** 각 entry가 전부 실수인  $m \times n$ -행렬들을 모아놓은 공간은 이미  $\mathbb{R}$ -벡터공간이다.  $\mathbb{Q}$ 는  $\mathbb{R}$ 의 부분집합이므로, 문제 14에서와 동일한 논리에 의해 주어진 공간은  $\mathbb{Q}$ -벡터공간이다.  $\square$

**Problem 17.** 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS5)를 만족하지 못하게 된다.  $1(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ 으로부터  $a_2 \neq 0$ 인 경우에  $1v = v$ 를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다.  $\square$

**Problem 18.** 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS1)을 만족하지 못하게 된다.  $(1, 0) + (2, 0) = (1 + 4, 0) = (5, 0)$ 이지만, 순서를 바꾼  $(2, 0) + (1, 0) = (2 + 2, 0) = (4, 0)$ 과 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다.  $\square$

**Problem 19.** 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS8)을 만족하지 못하게 된다.  $a = 2, b = 3, v = (1, 1)$ 이라고 하자. 그러면  $(a + b)v = 5v = (5, 1/5)$ 이지만,  $av = (2, 1/2), bv = (3, 1/3)$ 이고 둘의 합은  $(5, 5/6)$ 으로 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다.  $\square$

**Problem 20.** 문제 12와 마찬가지로, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로 (cl) : 연산에 대해 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 함수  $f, g \in V$ 와 실수  $c \in \mathbb{R}$ 을 생각하자.  $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ 이므로  $f + g$  또한  $x = 1$ 에서 0을 갖는다. 따라서  $f + g \in V$ 이다. 또한,  $(cf)(1) = cf(1) = c0 = 0$ 에서  $cf$  또한  $x = 1$ 에서 0을 갖는다. 따라서  $cf \in V$ 이다.

(VS3) 영함수  $0(x) = 0$ 이  $x = 1$ 에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데,  $0(1) = 0$ 이다. 따라서,  $0 \in V$ 이다.

(VS4) 함수  $f \in V$ 에 대해,  $g(x) = -f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데,  $g(1) = -f(1) = -0 = 0$ 이다. 따라서,  $g \in V$ 이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다.  $\square$

**Problem 21.** 곱공간이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 임의의 벡터  $(v, w), (v', w') \in Z$ 와 스칼라  $c \in F$ 에 대해,  $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ 에서,  $v + v' \in V$ 이고  $w + w' \in W$ 임은  $V, W$ 가 벡터 공간이라는 사실(그러므로 달혀 있다는 사실)로부터 자동으로 얻어진다. 따라서,  $(v, w) + (v', w') \in Z$ 이다. 마찬가지로  $c(v, w) = (cv, cw)$ 에 대해  $cv \in V$ 이고  $cw \in W$ 이므로  $c(v, w) \in Z$ 이다.

(VS1) 임의의 벡터  $(v, w), (v', w') \in Z$ 에 대해,  $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') = (v' + v, w' + w) = (v', w') + (v, w)$ 이므로 (VS1)이 성립한다. 이는  $V, W$  각각이 벡터 공간이라는 사실로부터 얻어진다.

(VS2) 임의의 벡터  $(v, w), (v', w'), (v'', w'') \in Z$ 에 대해,  $((v, w) + (v', w')) + (v'', w'') = ((v + v') + v'', (w + w') + w'') = (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) = (v, w) + ((v', w') + (v'', w''))$ 이므로 (VS2)가 성립한다. 마찬가지로,  $V, W$ 가 (VS2)를 만족하기 때문이다.

(VS3)  $V$ 의 항등원과  $W$ 의 항등원을 각각  $0_V, 0_W$ 라고 하자. 그러면  $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$ 이므로  $(0_V, 0_W)$ 는 영벡터이다.

(VS4)  $(v, w) \in Z$ 에 대해,  $v \in V, w \in W$ 의 역벡터를 각각  $x \in V, y \in W$ 라고 하자. 그러면  $(v, w) + (x, y) = (v+x, w+y) = (0_V, 0_W)$ 이므로  $(x, y) \in Z$ 는  $(v, w)$ 의 역벡터이다.

(VS5)  $1(v, w) = (1v, 1w) = (v, w)$ 이므로 (VS5)가 만족된다.

(VS6) 스칼라  $a, b$ 와  $(v, w) \in Z$ 에 대해,  $(ab)(v, w) = ((ab)v, (ab)w) = (a(bv), a(bw)) = a(bv, bw) = a(b(v, w))$ 이므로 (VS6)이 만족된다.

(VS7) 스칼라  $a$ 와  $(v, w), (v', w') \in Z$ 에 대해,  $a((v, w) + (v', w')) = a(v + v', w + w') = (a(v + v'), a(w + w')) = (av + av', aw + aw') = (av, aw) + (av', aw') = a(v, w) + a(v', w')$ 이므로 (VS7)이 만족된다.

(VS8) 스칼라  $a, b$ 와  $(v, w) \in Z$ 에 대해,  $(a+b)(v, w) = ((a+b)v, (a+b)w) = (av + bv, aw + bw) = (av, aw) + (bv, bw) = a(v, w) + b(v, w)$ 이므로 (VS8)이 만족된다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다.  $\square$

**Problem 22.** 각 entry에는 0 혹은 1만이 자리할 수 있다. 따라서, 총  $mn$ -개의 entry에 0 또는 1을 채워넣는 방법의 수이므로,  $2^{mn}$ 개의 matrix가 존재한다.

## 1.3 부분공간

**Problem 1.**

(a) 거짓.  $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, 1) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ 을 생각하고,  $W$  위에 덧셈과 상수곱을 다음과 같이 정의하자.  $(x, 1) + (x', 1) = (x + x', 1), c(x, 1) = (cx, 1)$ . 그러면  $W$ 는 그 자체로 벡터공간이며, 집합으로는  $V$ 의 부분집합이지만, 둘의 구조가 다르므로 부분공간은 아니다.

(b) 거짓. 공집합은 벡터공간 공리 중 영벡터를 포함해야한다는 (VS3)을 만족하지 않는다. 따라서, 공집합은 그 자체로 벡터 공간이 아니다.

(c) 참.  $\{0\}$ 은 모든 벡터 공간  $V$ 의 부분 공간이고,  $V$ 가 점공간이 아니므로  $W = \{0\} \neq V$ 로 두면 충분하다.

(d) 참. 정리 1.4에 의해 부분공간의 교집합은 늘 부분공간이다.

- (e) 참. 대각행렬은 대각 성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬이다. 따라서, 대각 성분  $n$ 개만이 0이 아닌 값을 가질 수 있다.
- (f) 거짓. 정사각행렬의 대각합은 대각성분의 곱이 아니라 합이다.
- (g) 거짓. 둘은 '같은' 공간이 아니다.

**Problem 2.** (a)  $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ , 대각합 :  $-4 - 1 = -5$  (b)  $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$  (c)  $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  (d)  $\begin{bmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \\ -8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ , 대각합  
 $: 10 - 4 + 6 = 12$  (e)  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  (f)  $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$  (g)  $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$  (h)  $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ , 대각합 :  $-4 + 1 + 5 = 2$

**Problem 3.**  $A = (A_{ij})$ ,  $B = (B_{ij})$ 로 놓고,  $C = (C_{ij}) = (aA + bB)^t$ 라고 하자. 그러면,  $C_{ij} = (aA + bB)_{ji}$ 이고 (전치행렬의 정의)  $(aA + bB)_{ji} = aA_{ji} + bB_{ji}$ 이다. 따라서,  $C_{ij} = aA_{ji} + bB_{ji}$ 이다. 또한,  $(aA^t + bB^t)_{ij} = a(A^t)_{ij} + b(B^t)_{ij} = aA_{ji} + bB_{ji}$ 이다. 따라서,  $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$ 이다.  $\square$

**Problem 4.**  $A = (A_{ij})$ 로 두자. 그러면  $[(A^t)^t]_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}$ 이므로,  $(A^t)^t$ 의  $(i, j)$ -성분은  $A$ 의  $(i, j)$ -성분이다. 따라서,  $(A^t)^t = A$ 이다.  $\square$

**Problem 5.** 문제 3에 의해,  $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t$ 이다. 그리고, 문제 4에 의해  $(A^t)^t = A$ 이므로,  $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ 이다. 즉,  $A + A^t$ 는 전치행렬과 동일하므로 대칭행렬이다.  $\square$

**Problem 6.**  $\text{tr}(aA + bB) = \sum_{i=1}^n (aA + bB)_{ii} = \sum_{i=1}^n (aA_{ii} + bB_{ii}) = a \sum_{i=1}^n A_{ii} + b \sum_{i=1}^n B_{ii} = a \text{tr}(A) + b \text{tr}(B)$ .  $\square$

**Problem 7.** 대각행렬  $D = (D_{ij})$ 를 생각하자. 그러면,  $i \neq j$ 이면  $D_{ij} = 0$ 이다. 따라서,  $(D^t)_{ij} = D_{ji}$ 에 대해,  $i \neq j$ 이면  $D_{ji} = 0 = D_{ij}$ 이고,  $i = j$ 이면  $D_{ji} = D_{ii} = D_{ij}$ 이다. 따라서,  $D^t = D$ 이므로  $D$ 는 대칭행렬이다.  $\square$

### Problem 8.

- (a) (a)  $(0, 0, 0) \in W_1 : a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ 이므로  $a_1 = 0 = 3a_2, a_3 = 0 = -a_2$ 이다.  
(b) 덧셈에 대한 닫힘 :  $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in W_1$ 에 대해, 둘의 합  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ 을 조사하자.  
 $(a_1 + b_1) = 3a_2 + 3b_2 = 3(a_2 + b_2)$ 이고,  $(a_3 + b_3) = -a_2 + -b_2 = -(a_2 + b_2)$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.  
(c) 상수곱에 대한 닫힘 :  $(a_1, a_2, a_3) \in W_1$ 과  $c \in \mathbb{R}$ 에 대해, 상수곱  $(Ca_1, ca_2, ca_3)$ 을 조사하자.  $ca_1 = c(3a_2) = 3(ca_2)$ 이고  $ca_3 = c(-a_2) = -(ca_2)$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.
- 따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.
- (b) (a)  $(0, 0, 0) \in W_2 : a_1 = 0, a_3 = 0$ 이므로  $a_1 = a_3 + 2$ 를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.
- (c) (a)  $(0, 0, 0) \in W_3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 이므로,  $2 * 0 - 7 * 0 + 0 = 0$ 이다.  
(b) 덧셈에 대한 닫힘 :  $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in W_2$ 에 대해, 둘의 합을 조사하자.  $2(a_1 + b_1) - 7(a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = (2a_1 - 7a_2 + a_3) + (2b_1 - 7b_2 + b_3) = 0 + 0$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.  
(c) 상수곱에 대한 닫힘 :  $(a_1, a_2, a_3) \in W_3$ 과  $c \in \mathbb{R}$ 에 대해, 상수곱을 조사하자.  $2(ca_1) - 7(ca_2) + (ca_3) = c(2a_1 - 7a_2 + a_3) = c0 = 0$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.
- 따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.
- (d) (c)와 같은 이유로, 주어진 공간은 부분공간이다.

- (e) (a)  $(0, 0, 0)$  in  $W_5 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 이므로,  $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \neq 1$ 이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.
- (f) (a) 덧셈에 대한 닫힘 :  $(\sqrt{3}, \sqrt{5}, 0), (0, \sqrt{6}, \sqrt{3}) \in W_6$ 에 대해, 둘의 합인  $(\sqrt{3}, \sqrt{5} + \sqrt{6}, \sqrt{3}) = (a_1, a_2, a_3)$ 은  $5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 15 - 3(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 + 18 = -6\sqrt{30} \neq 0$ 이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

**Problem 9.**

- $W_1 \cap W_3 : a_1 = 3a_2, a_3 = -a_2$ 와 동시에  $2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0$ 을 만족하는 점들을 찾으면 충분하다.  $a_2 = k$ 로 놓으면,  $a_1 = 3k, a_3 = -k$ 이고,  $2(3k) - 7(k) - (k) = -2k = 0$ 으로부터,  $k = 0$ 만이 주어진 공간의 원소이다. 따라서,  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이다.
- $W_1 \cap W_4 :$ 마찬가지로,  $a_2 = k$ 로 놓으면  $a_1 = 3k, a_3 = -k$ 이고,  $(3k) - 4k + k = 0$ 이므로 모든  $k \in \mathbb{R}$ 에 대해  $(3k, k, -k)$ 가 주어진 조건을 만족한다. 즉,  $W_1 \cap W_4 = W_1$ 이다.
- $W_3 \cap W_4 : 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0$ 으로부터  $a_3 = -2a_1 + 7a_2$ 이고,  $a_1 - 4a_2 - a_3 = 0$ 으로부터  $a_3 = a_1 - 4a_2$ 이다. 이 두 식을 연립하면,  $-2a_1 + 7a_2 = a_1 - 4a_2$ , 즉  $3a_1 = 11a_2$ 를 얻는다.  $a_1 = 11k$ 로 놓으면,  $a_2 = 3k$ 이고  $a_3 = 11k - 12k = -k$ 이다. 즉,  $\{(11k, 3k, -k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R}\}$ 이  $W_3 \cap W_4$ 이다.

**Problem 10.** 먼저,  $W_1$ 이 부분공간임을 보이자. 이는 정리 1.3으로부터, (1) 영벡터의 존재성 (2) 덧셈에 대한 닫힘 (3) 상수곱에 대한 닫힘을 보이면 충분하다.

1.  $(0, 0, \dots, 0)$ 은  $0 + 0 + \dots + 0 = 0$ 을 만족하므로 영벡터가 존재한다.
2.  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in W_1$ 에 대해, 합을 조사하면 된다.  $(a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = 0 + 0 = 0$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.
3.  $(a_1, \dots, a_n) \in W_1$ 과  $c \in F$ 에 대해, 상수곱을 조사하면 된다.  $(ca_1) + \dots + (ca_n) = c(a_1 + \dots + a_n) = c0 = 0$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

그러나  $W_2$ 는 부분공간이 아니다.  $(1, 0, \dots, 0)$ 은  $W_2$ 의 원소이지만, 그 두 배인  $(2, 0, \dots, 0)$ 은  $W_2$ 의 원소가 아니다. 따라서  $W_2$ 는 부분공간이 아니다.  $\square$

**Problem 11.** 주어진 공간은 덧셈에 대해 닫혀 있지 않다.  $n = 2$ 인 경우,  $x^2 + x$ 와  $-x^2 + x$ 는 모두  $W$ 의 원소이지만 둘의 합인  $2x$ 는 차수가 1이므로  $W$ 의 원소가 아니다.  $\square$

**Problem 12.** 정리 1.3을 이용하자.

1. 영행렬  $0 \in M_{m \times n}(F)$ 에 대해,  $i > j$ 라면  $0_{ij} = 0$ 이므로 영행렬은 상삼각행렬이다.
2. 두 상삼각행렬  $A, B$ 에 대해,  $i > j$ 라면  $A_{ij} = B_{ij} = 0$ 이다. 따라서, 둘의 합인  $A + B$  역시  $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 + 0 = 0$ 이므로 상삼각행렬이다.
3. 상삼각행렬  $A$ 와 스칼라  $c \in F$ 에 대해,  $i > j$ 라면  $A_{ij} = 0$ 이다. 따라서, 상수곱인  $cA$  역시  $(cA)_{ij} = cA_{ij} = c0 = 0$ 이므로 상삼각행렬이다.

따라서,  $m \times n$  상삼각행렬의 집합은  $M_{m \times n}(F)$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 13.** 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수  $0 \in \mathcal{F}(S, F)$ 에 대해,  $0(s_0) = 0$ 이므로 영벡터를 포함한다.
2. 두 함수  $f, g \in \mathcal{F}(S, F)$ 에 대해,  $f(s_0) = g(s_0) = 0$ 이라고 하자. 그러면 둘의 합은  $(f + g)(s_0) = f(s_0) + g(s_0) = 0 + 0 = 0$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

3. 함수  $f \in \mathcal{F}(S, F)$ 와  $c \in F$ 에 대해,  $f(s_0) = 0$ 이라고 하자. 그러면 상수곱은  $(cf)(s_0) = c(f(s_0)) = c0 = 0$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은  $\mathcal{F}(S, F)$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 14.** 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 0이 아닌 값을 가지는 점이 존재하지 않는다. 즉, 유한개의 점에서만 함숫값이 0이므로  $\mathcal{C}(S, F)$ 의 원소이다.
2. 두 함수  $f, g \in \mathcal{C}(S, F)$ 에 대해,  $f$ 가 0을 갖지 않는 점의 집합을  $S(f)$ 라고 하자. 그러면 조건에 의해  $S(f)$ 와  $S(g)$ 는 유한집합이다.  $S(f+g) \subseteq S(f) \cup S(g)$ 이므로,  $S(f+g)$ 는 유한집합이다. 따라서,  $f+g \in \mathcal{C}(S, F)$ 이다.
3. 함수  $f \in \mathcal{C}(S, F)$ 에 대해,  $S(f)$ 는 유한집합이다. 0이 아닌 스칼라  $c \in F$ 에 대해,  $S(cf) = S(f)$ 이므로  $cf \in \mathcal{C}(S, F)$ 이다.

따라서,  $\mathcal{C}(S, F)$ 는  $\mathcal{F}(S, F)$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 15.** 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 자명히 미분가능하다.
2. 두 함수  $f, g$ 가 미분가능하다면  $f+g$ 도 미분가능하다. 따라서 합에 대해 닫혀 있다.
3. 함수  $f$ 가 미분가능할 때, 스칼라  $c \in \mathbb{R}$ 에 대해  $cf$ 도 미분가능하다. 따라서 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은  $C(\mathbb{R})$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 16.** 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 자명히  $n$ -번 미분 가능하고  $n$ 계 도함수가 연속이다.
2. 두 함수  $f, g$ 가  $n$ -번 미분 가능하고  $n$ 계 도함수가 연속이라면,  $f+g$  또한 그러함이 잘 알려져 있다. (문제 15와 마찬가지로, 미분적분학이나 해석학을 참고하라.)
3. 이 역시 미분적분학이나 해석학에 의해, 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 17.** ( $\Rightarrow$ ) 만일  $W$ 가  $V$ 의 부분공간이라면,  $W$ 는 영벡터를 포함하므로  $W \neq \emptyset$ 이다. 또한, 정리 1.3에 의해 상수곱과 덧셈에 대해 닫혀 있다. ( $\Leftarrow$ ) 우선 주어진 공간이 상수곱과 합에 대해 닫혀 있으므로 영벡터의 존재성만 보이면 충분하다.  $W \neq \emptyset$ 이므로  $w \in W$ 가 있고, 상수곱에 대해 닫혀 있으므로  $0w = 0 \in W$ 이다. 정리 1.3에 의해,  $W$ 는  $V$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 18.** ( $\Rightarrow$ ) 문제 17과 동일하게 증명된다. ( $\Leftarrow$ ) 정리 1.3에 의해, 주어진 공간이 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있음을 확인하면 충분하다.  $a = 1$ 로 놓으면, 임의의 두 벡터  $x, y \in W$ 에 대해  $x+y \in W$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다. 이제,  $y = 0$ 으로 놓으면, 임의의 벡터  $x \in W$ 와  $a \in F$ 에 대해  $ax \in W$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.  $\square$

**Problem 19.** ( $\Rightarrow$ )  $W_1 \cup W_2$ 가  $V$ 의 부분공간이라고 놓자. 결론을 부정하여,  $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ 와  $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ 이 존재한다고 하자. 그러면  $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ 이다. 만일  $w_1 + w_2 \in W_1$ 이라면,  $w_1 + w_2 - w_1 = w_2 \in W_1$ 이므로 모순이다. 마찬가지로,  $w_1 + w_2 \in W_2$ 라면,  $w_1 + w_2 - w_2 = w_1 \in W_2$ 이므로 모순이다. 따라서,  $W_1 \subseteq W_2$ 이거나  $W_2 \subseteq W_1$ 이어야만 한다. ( $\Leftarrow$ ) 역은 자명하다. 만일  $W_1 \subseteq W_2$ 라면  $W_1 \cup W_2 = W_2$ 이므로 부분공간이다.  $\square$

**Problem 20.** 수학적 귀납법을 사용한다. ( $n = 1$ ) 자명하다. (Induction step)  $n = k$ 에서 성립함을 가정하고,  $n = k+1$ 에서 성립함을 보이자.  $a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k + a_{k+1} w_{k+1} = (a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k) + a_{k+1} w_{k+1}$ 이고,  $a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k \in W$

는 가정에 의해 참이다.  $W$ 는 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있으므로,  $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + a_{k+1}w_{k+1} \in W$ 이다. 따라서, 임의의  $n$ 에 대해 성립한다.  $\square$

**Problem 21.** 정리 1.3을 이용하자.

1. 모든 항이 0인 수열  $a_n = 0$ 은 수렴하는 수열이다.
2. 두 수렴하는 수열의 합 역시 수렴한다. 이는 미적분학이나 해석학에서 확인할 수 있다.
3. 수렴하는 수열의 상수곱 역시 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열의 집합은  $V$ 의 부분공간이다.  $\square$

**Problem 22.** 문제 18을 이용하자.

1. 우함수의 집합은 부분공간이다.
  - (a) 영함수  $0(t)$ 은 우함수이다.  $0(-t) = 0 = 0(t)$ 이기 때문이다.
  - (b) 두 우함수  $f, g$ 와 스칼라  $c \in F_2$ 에 대해,  $cf + g$ 가 우함수임을 보이자.  $(cf + g)(-t) = cf(-t) + g(-t) = cf(t) + g(t) = (cf + g)(t)$ 이므로 우함수이다.
2. 기함수의 집합은 부분공간이다.
  - (a) 영함수  $0(t)$ 은 기함수이다.  $0(-t) = 0 = -0 = -0(t)$ 이기 때문이다.
  - (b) 두 기함수  $f, g$ 와 스칼라  $c \in F_2$ 에 대해,  $cf + g$ 가 기함수임을 보이자.  $(cf + g)(-t) = cf(-t) + g(-t) = c(-f(t)) + (-g(t)) = -(cf(t) + g(t)) = -(cf + g)(t)$ 이므로 기함수이다.

따라서, 우함수의 집합과 기함수의 집합은 각각 부분공간이 된다.  $\square$

**Problem 23.** 문제 18을 이용하자.

- (a) 우선,  $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ 에 대해  $w_1 + 0 \in W_1 + W_2$ 이고  $0 + w_2 \in W_1 + W_2$ 이므로  $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$ 이다. 영벡터는  $0 = 0 + 0$ 이므로  $W_1 + W_2$ 는 영벡터를 포함한다. 이제,  $v_1 + v_2, w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ 와  $c \in F$ 에 대해,  $c(v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = (cv_1 + w_1) + (cv_2 + w_2) \in W_1 + W_2$ 이므로,  $W_1 + W_2$ 는 부분공간이다.  $\square$
- (b) 어떤 부분공간  $S$ 가  $W_1, W_2$ 를 포함한다고 하자. 그러면  $S$ 는 덧셈에 대해 닫혀 있으므로,  $w_1 \in W_1 \subseteq S$ 와  $w_2 \in W_2 \subseteq S$ 에 대해  $w_1 + w_2 \in S$ 이다. 따라서, 모든  $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ 에 대해  $w_1 + w_2 \in S$ 이다. 즉,  $W_1 + W_2 \subseteq S$ 이다.  $\square$

**Problem 24.**  $W_1 \cap W_2$ 은  $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 이고  $a_n = 0$ 인 벡터들을 포함하므로 오로지 영벡터만이 포함된다. 따라서,  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이다. 임의의  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in F^n$ 에 대해,  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0) + (0, 0, \dots, 0, a_n) \in W_1 + W_2$ 이다. 따라서,  $F^n = W_1 \oplus W_2$ 이다.  $\square$