Nonlinear dynamics and chaos

2dayclean

2025/11/07

Contents

1 Flows on the Line

1.1 Flows on the line

Flows on the line이란 $\dot{x} = f(x)$와 같은 one-dimensional dynamical system을 의미하며, 이를 **flow** 혹은 **vector field**라고 부른다.

Example

$\dot{x} = \sin(x)$의 해는 어떻게 주어지는가?

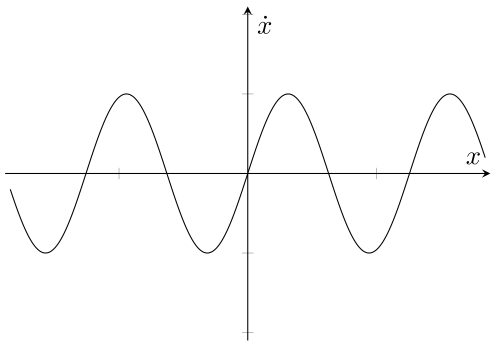
다음과 같이 변수분리법을 사용할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \Longrightarrow t = \int \csc(x)dx + C = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

따라서, initial condition $x(0) = x_0$이 주어지면,

$$t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$$

와 같이 쓸 수 있다. 그러나 대체 이 해는 어떻게 생겼는가? $x = x(t)$ 꼴로 explicit하게 알 방법이 없다. Qualitive한 분석을 위하여 우리는 다음과 같은 $x - \dot{x}$ plot을 이용할 수 있다.



$\dot{x} = 0$인 점에서는 흐름이 없고, $\dot{x} > 0$인 점에서는 x가 증가하는 방향으로 흐를 것이고(flow to right), $\dot{x} < 0$인 점에서는 x가 감소하는 방향으로 흐를 것이다(flow to left). 이를 이용하면 qualititive하게 해를 분석할 수 있을 것이다. (do it yourself.)

1.2 Autonomous system

$$\dot{x} = f(x)$$

만일 $x(t)$가 $x(0) = x_0$인 solution이라면, $x(t - t_0)$ with $x(t_0) = x_0$ 역시 이 system의 해일 것이다.

Proof

$t' := t - t_0$으로 두자. 그러면,

$$\frac{dx}{dt'}(t') = \frac{dx}{dt}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(x(t'))$$

가 되고 $x(t' = 0) = x(t = t_0) = x_0$이 되므로, $x(t - t_0)$ 역시 해이고 따라서 일반성을 잃지 않고 $t_0 = 0$을 가정할 수 있다. □

1.3 Fixed points and its stability

$$f(x^*) = 0$$

점 x^*를 flow의 fixed point라고 하며, critical point, equilibrium point, 혹은 steady-state라고 부르기도 한다.

> ***Note*** *: What is the difference between equilibirum and steady-state?*
> 공통적으로는 두 상태 모두 time-invariant하다는 것이다. 그러나, **equilibrium**은 $\nabla f = 0$, 즉 공간적으로도 uniform한 상황을 의미하고, **steady-state**는 공간적으로는 uniform하지 않을 수도 있다.

Fixed point의 stability는 다음과 같이 구분할 수 있다.

1. x^* is **stable** (혹은 *asymptotically Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로는 모두 고정점을 향할 때. 즉,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 > 0 \text{ with } |x^* - x_0| < \delta, \lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*| = 0.$$

2. x^* is **unstable** : some arbitary small perturbation이 시간이 지남에 따라 grow할 때. 즉, stable하지 않는 모든 경우.

3. x^* is **neutrally-stable** (혹은 *Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로가 계속해서 고정점 근처에 있을 때. 즉,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

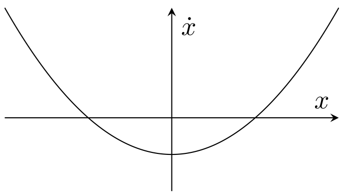
   이를 좀 더 "연속"적이게 쓰면 다음과 같다.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

Example

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

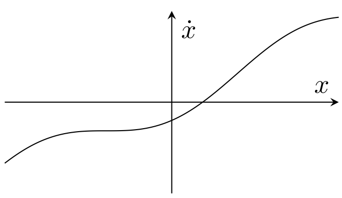
고정점은 $x^* = 1, -1$이고 $x = 1$에서 unstable, $x = -1$에서 stable하다.



Example

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

고정점은 하나 존재하고, 여기서 unstable하다.



1.3.1 Population - growth

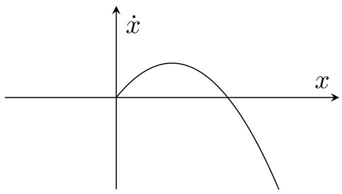
다양한 비선형 생물 시스템 중 ecosystem에 대한 연구가 제일 많이 이루어져 있고, 다루기가 상대적으로 간단하다.

$$\dot{N} = \beta N - \delta N = rN$$

여기서 N은 population, β, δ는 각각 birth rate, death rate, r은 growth rate이다. 이 때, $r > 0$이면 이 시스템은 성장하고, $r < 0$이면 decay한다. 이 미분방정식의 해는 당연히 $N(t) = N_0 e^{rt}$일 것이다. 즉, $r > 0$이면 계속해서 population이 늘어나 결국 발산한다. 그러나 현실에서는 이러한 일이 일어나지 않는다.

More Realistic Model : $r = \dfrac{\dot{N}}{N}$은 상수가 될 수 없다. 일반적으로 N이 커질수록 overcrowding/competition/resource limiting에 의해 r이 줄어들 것이다. $r = 0$이 되는 N을 K라고 쓰고, **Carrying capacity**라고 부르면 좋을 것이다. 즉, $N > K$이면 $\dot{N} < 0$이 된다.

가장 간단한 모델으로 $\dfrac{\dot{N}}{N} = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$를 생각할 수 있다. 그러면, $\dot{N} = rN - \dfrac{r}{K}N^2$이므로, 다음과 같은 plot을 얻을 수 있다. 즉, 간단하게 분석할 수 있다.



1.3.2 Linear stability analysis

Stability를 qualititive하게 분석해보자.

우선, **Perturbation**을 $y(t) := x(t) - x^*$와 같이 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{d}{dt}(x(t) - x^*)\\ &= \dot{x} = f(x) = f(x^* + y)\\ &= f(x^*) + f'(x^*)y + \frac{f''(x^*)}{2}y^2 + \cdots\\ &= f'(x^*)y + O(y^2)\end{aligned}$$

가 된다.

Big-Oh Notation : 함수 $g(y)$가 $g(y) = O(h(y))$ as $y \to 0$이라는 것은, 상수 $K < \infty$가 있어서

$$\lim_{y\to 0}\left|\frac{g(y)}{h(y)}\right| < K$$

인 것이다.

따라서, 우리는 $\dot{y} \simeq f'(x^*)y$와 같이 x^* 근방에서의 linearization을 사용할 수 있다. 이로부터, $y = y_0 e^{f'(x^*)t}$이므로, $f'(x^*) > 0$이면 시간에 따라 diverge하고 $f'(x^*) < 0$이면 시간에 따라 converge한다. 즉, f'의 sign은 stability를 의미하며, f'의 크기는 수렴이 얼마나 빠른지 그 time scale을 의미한다. 특히, $\tau := \dfrac{1}{|f'(x^*)|}$를 characteristic time-scale이라고 하며 이는 convergence rate과 관련이 있다.

이 방법은 $f'(x^*) \neq 0$에서만 유효하다. 이러한 fixed point를 **hyperbolic**하다고 하며, hyperbolic하지 않은 점은 다른 방법으로 분석해야 한다.

1.4 Existence and Uniqueness

주어진 미분방정식의 해는 유일하게 존재하는가?

공학 혹은 물리 문제에서 해가 만일 존재하지 않으면 ill-posed되어있을 가능성이 높다. (유일하지 않아도 마찬가지이다.) 그러나 수학적으로는 꽤 중요한 문제이다. 예를 들어, $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, x(0) = 0$이라는 미분방정식은 자명히 $x(t) \equiv 0$이라는 solution을 갖는다. 그러나, $x(t) = \pm\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$ 역시 주어진 방정식의 solution이며, 마찬가지로,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \left(\frac{2}{3}(t-t_0)\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq t_0 \end{cases}$$

역시 solution이 된다. 이는 주어진 미분방정식의 해가 unique하지 않고 심지어 infinitely 많이 있음을 시사한다. (time-invariant하므로 위의 함수가 해가 된다.) 수학적으로는 다음과 같은 조건이 제시된다.

Proposition 1.1

$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$에 대해,

- 만일 f가 x_0을 포함하는 구간 R에서 continuous하다면 어떤 τ가 존재하여 interval $I = (-\tau, \tau)$에서 해가 존재한다.
- 만일 f'가 동일한 구간 R에서 continuous하다면 그 해는 유일하다.

그러나 이 해가 globally 존재하는지는 알 수 없다. 예를 들어, $\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$의 해는 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서만 유일하게 존재한다.

1.4.1 Impossibility of oscillation

Line에서 정의된 Time-invariant system $\dot{x} = f(x)$에서는 oscillation이 절대 일어날 수 없다. 따라서, trajectory는 다음의 두 가능성만을 갖는다.

1. Trajectory는 fixed point로 approach한다.
2. Trajectory는 $\pm\infty$로 diverge한다.

1.5 As a Potential

Flow on the line $\dot{x} = f(x)$는 늘 적절한 V를 생각하여 $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$가 될 수 있게 할 수 있다. 이러한 V는 $V(x) = -\int f(x)dx + V_0$으로 주어지며, 보통 potential은 V_0은 중요하지 않고 임의적이다. 이렇게 Potential로 해석하고 나면 다음과 같은 물리적 함의를 갖는다. Trajectory 위에서의 potential $V(x) = V(x(t))$는,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \left(-\frac{dV}{dx}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

이므로 늘 trajectory를 따라서 potential은 monotonically 감소해야만 한다. 또, 자명히 $\frac{dV}{dx}(x^*) = 0$인 x^*는 fixed point이다. linear approach에서와 같은 방법으로,

1. V의 local minima : **stable** fixed point
2. V의 local maxima : **unstable** fixed point

임을 알 수 있다.

2 Bifurcation

2.1 Bifurcation

Parameter r에 의존하는 system $\dot{x} = f_r(x) = f(x, r)$을 생각하자. 그러면, 이 dynamical system의 fixed point는 r에 의존하여 결정될 것이고, 이는 $f(x^*(r), r) = 0$과 같이 표현될 것이다. 만일, 특정한 r에서 Structural behaviour가 크게 바뀐다면 이 r을 r_c라고 하고 그 때의 (x_c, r_c)를 bifurcation point라고 부른다. (r_c는 bifurcation parameter) 만일 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) \neq 0$이라면 그 point는 structurally stable할 것이므로, 반드시 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) = 0$인 non-hyperbolic point에서만 bifurcation이 생긴다.

2.1.1 As an Inverse function theorem

특히, $\dot{x} = f(x, r)$의 equilibria는 f의 영점, 즉 $f(x, r) = 0$에서 나타날 것이다. 그런데 만일 (x_0, r_0)에서 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,r_0)} \neq 0$이라면, 그 근방에서 $f(x^*(r), r) = 0$으로 매끄럽게 나타날 것이다. 즉, 전혀 bifurcation이 일어나지 않는다. 그러므로, bifurcation이 일어나기 위해서는 non-hyperbolic할 필요가 있다.

2.1.2 AS a Taylor series

테일러 전개로도 같은 이유를 찾을 수 있다. (x_0, r_0) 근방에서의 Taylor series를 생각해보자.

$$0 = f(x^*(r), r) = f(x_0, r_0) + (x^* - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,r_0)} + (r - r_0)\frac{\partial f}{\partial r}|_{(x_0,r_0)} + \cdot$$

이것이 $x^* = x^*(r)$로 풀리기 위해서는 당여넣 $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,r_0)} \neq 0$이어야만 한다. 따라서, Bifurcation이 일어나는 지점에서는,

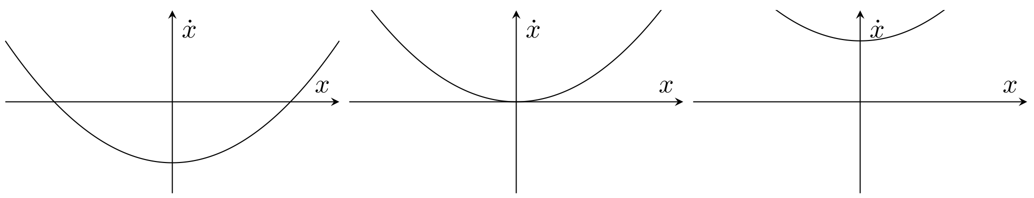
1. $f = 0$ (Fixed point 조건)
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (Non-hyperbolic 조건)

이를 모두 만족해야한다.

2.2 Saddle-Nodoe Bifurcation

Prototypical Example : $\dot{x} = r + x^2$

이 그래프는 r에 따라서 다양하게 나타난다. 가장 큰 특징은 $r < 0$에서의 두 고정점이 $r = 0$에서 하나로 합쳐졌다가



$r > 0$에서는 사라진다는 것이다. 이러한 bifurcation을 saddle-node라고 부른다. 특히, $\dot{x} = r + x^2$와 $\dot{x} = r - x^2$는 사실 같은 plot인데, $x \to -x$, $r \to -r$의 변환을 적용하면,

$$-\dot{x} = -r + x^2$$
$$\dot{x} = r - x^2$$

그 형태가 똑같아지기 때문이다. 이 form ($\dot{x} = r - x^2$)를 saddle-node bifurcation의 **normal form**이라고 하며, saddle-node bifurcation이 일어나는 구간에서는 local하게 늘 $\dot{x} = r - x^2$로 표현할 수 있다.

2.3 Normal Form Theory

다음과 같은 테일러 전개에서 시작하자.

$$\dot{x} = f(x,r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*)\frac{\partial f}{\partial x} + (r - r_c)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}(x - x^*)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r - r_c)^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cdots$$

특히, 첫 두 항은 Bifurcation에 대해 0이 된다. 따라서,

$$\dot{x} = (r - r_c)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}(x - x^*)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(x^3)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이로부터, saddle-node bifurcation은 $\frac{\partial f}{\partial r} \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$을 요구함을 알 수 있다. 또한, 다음과 같은 변수변환을 통해 normal form으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \cdots \\
X &:= -b(x - x^*) \\
R &:= -ab(r - r_c) \\
\dot{X} &= R - X^2 + O(X^3)
\end{aligned}$$

심지어, 테크닉을 이용해 higher order term을 없앨 수도 있다.

$$\dot{x} = r - x^2 + ax^3 + O(x^4)$$

이와 같이 cubic term을 상정하자. 그리고, $x =: X + bX^4$와 같이 정의하자. 그러면,

$$X = x - bX^4 = x - b(x - bX^4)^4 = x - bx^4 + O(x^7)$$

이므로,

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= (1 - 4bx^3 + \cdots)\dot{x} = (1 - 4bx^3 + \cdots)(r - x^2 + ax^3 + \cdots) \\
&= (1 - 4b(X + bX^4) + \cdots)(r - (X + bX^4)^2 + a(X + bX^4)^3 + \cdots) \\
&= r - X^2 - 4brX^3 + aX^3 + O(X^4) \\
&= r - X^2 + (a - 4br)X^3 + O(X^4)
\end{aligned}$$

가 되어, $b = \frac{a}{4r}$을 대입하면 $\dot{X} = r - X^2 + O(X^4)$를 얻는다.

2.4 Transcritical Bifurcation

만일, 어떤 fixed point x^*가 모든 r에 대해 $f(x^*, r) = 0$이면, $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r) = 0$이 모든 k에 대해 참일 것이다.

Example

$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$의 경우에, $N = 0$이 parameter와 관계 없이 늘 fixed point가 된다.

테일러 전개를 통해 또 식을 조작해보자.

$$\begin{aligned}
f(x,r) &= f(x*, r_c) + (x - x^*)\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*,r_c)} + (r - r_c)\frac{\partial f}{\partial r}|_{(x^*,r_c)} \\
&+ \frac{1}{2}(x - x^*)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*,r_c)} + \frac{1}{2}(r - r_c)^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}|_{(x^*,r_c)} + (x - x^*)(r - r_c)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}|_{(x^*,r_c)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}(x - x^*)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*,r_c)} + (x - x^*)(r - r_c)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}|_{(x^*,r_c)} + \cdots
\end{aligned}$$

따라서, Transcritical bifurcation이 일어날 조건이 다음과 같음을 알 수 있다.

- $f(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial r}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x^*, r_c) = 0$

Example

$\dot{x} = r \ln x + x - 1 : x^* = 1$이 모든 r에 대해 fixed point이다.

$u = x - 1 (|u| << 1)$로 두면,

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= r \ln(u+1) + u \\ &= r \left[u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \cdots \right] + u \\ &= (r+1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3) \end{aligned}$$

이제 $u = av$로 두면,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{a}\dot{u} \\ &= \frac{1}{a}\left[(r+1)av - \frac{1}{2}ra^2v^2 + O(v^3) \right] \\ &= (r+1)v - \frac{1}{2}rav^2 + O(v^3) \end{aligned}$$

이므로, $a \leftarrow \frac{2}{r}$로 넣으면,

$$\dot{v} = (r+1)v - v^2 + O(v^3)$$

이고, $X \leftarrow v, R \leftarrow r + 1$로 두면,

$$\dot{X} = RX - X^2 + O(X^3)$$

가 성립한다. $R \not\equiv 0$에 대해, $y := X + bX^k$로 두면 higher order term을 없앨 수 있다.

Physics에는 laser라는 좋은 예시가 있다.

$$\begin{aligned} \dot{n} &= (\text{gain}) - (\text{loss}) = G \cdot n \cdot N - k \cdot n \\ N(t) &= N_0 - \alpha n \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \dot{n} &= Gn(N_0 - \alpha n) - kn \\ &= (GN_0 - k)n - G\alpha n^2 \end{aligned}$$

2.5 Pitcfork Bifurcation

Pitchfork bifurcation은 굉장히 ideal한 상황으로, 다음과 같은 odd symmetry가 필요하다 : $f(-x, r) = -f(x, r)$. 이 경우에는, $x \to -x$에 대해 invariant하다. 따라서,

- $f(0, r) \equiv 0$ for all r이고, $x^* = 0$은 trivial한 fixed point이다. 따라서, $\dfrac{\partial^k f}{\partial r^k}(0, r_c) = 0$이다.
- f가 odd하므로, second derivative (짝수-번) 역시 odd하다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, r_c) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, r_c) = \cdots = 0$$

Pitchfork bifurcation은 다음과 같은 Taylor expansion을 갖는다.

$$f(x, r) = (x - x^*)(r - r_c)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x^*, r_c) + \frac{1}{3!}(x - x^*)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, r_c) + \cdots$$

따라서, 중요한 것은 $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$의 부호이다.

2.5.1 Supercritical Pitchfork

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0$인 경우, supercritical하고, normal form은 $\dot{x} = rx - x^3$이다.

- $r < 0$인 경우 : $rx - x^3$은 계속해서 감소하며, $x = 0$ 근처에서 exponentially decay한다 : $\dot{x} = rx$로부터, $x = x_0 e^{rt}$이기 때문이다.
- $r = 0$인 경우 : $\dot{x} = -x^3$이므로, algebraically decay한다.
- $r > 0$인 경우 : $|x| \ll 1$에서 rx가 dominant하므로, stable한 fixed point 둘이 생기고 $x = 0$에서는 unstable해진다.

이는 secondary 상변이에서 일어나는 현상이다. (Ising model for magnetization)

2.5.2 Subcritical Pitchfork

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} > 0$인 경우, subcritical하고, normal form은 $\dot{x} = rx + x^3$이다.

그러나 이 경우에는 $r > 0$애서 본질적으로 불안정하므로, $-x^5$를 통해 '눌러'줘야한다. 즉, $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$을 생각하면, subcritical bifurcation과 saddle-node bifurcation이 모두 일어난다. 또, 그래프를 잘 관찰하면 Hysteresis의 이유를 알 수 있다.

2.5.3 Example : moving bead on a rotating hoop

반지름 r인 hoop를 따라서 bead가 움직일 수 있고, 이 hoop가 각속도 ω를 가지고 z-축을 회전축으로 하여 회전하고 있다고 하자. 그러면, 이 bead의 움직임을 기술하는 방정식은 다음과 같이 세울 수 있다.

$$mr\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg\sin(\phi) + mr\omega^2 \sin(\phi)\cos(\phi)$$

만일 friction이 매우 크다면, 즉 $\left|mr\ddot{\phi}\right| \ll \left|b\dot{\phi}\right|$인 조건에서는(overdamping) 식이 다음과 같이 바뀐다.

$$b\dot{\phi} = mr\omega^2 \sin(\phi)\cos(\phi) - mg\sin(\phi) = mg\sin(\phi)\left(\frac{r\omega^2}{g}\cos(\phi) - 1\right)$$

따라서, $\sin(\phi) = 0$이 되는 ϕ^*는 $\phi^* = 0$과 $\phi^* = \pi$이다. 분석을 용이하게 하기 위해, $\gamma = \dfrac{r\omega^2}{g}$라고 놓았다. 그러면, Supercritical pitchfork이 일어나게 된다.

2.5.4 Nondimensionalization

식을 nondimensionalization하기 위해, $\tau = \dfrac{t}{T}$로 설정하였다. 그러면,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d}{d\tau}$$

이고, $\dot{\phi} = \frac{1}{T}\frac{d\phi}{d\tau}$이 되고 $\ddot{\phi} = \frac{1}{T^2}\frac{d^2\phi}{d\tau^2}$이 된다. 우리는 ϕ_T 혹은 ϕ_{TT}가 Order 1, 그러니까 $O(1 = 10^0)$이길 바라고 있다. 우선, 식에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{r}{gT^2}\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{mgT}\frac{d\phi}{d\tau} - \sin(\phi) + \frac{r\omega^2}{g}\sin(\phi)\cos(\phi)$$

$\sin(\phi)$가 $O(1)$이므로, $\frac{b}{mgT}$ 역시 $O(1)$이길 바라고 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{b}{mgT} &= 1 \\ T &= \frac{b}{mg} \end{aligned}$$

여야만 한다. 그러면,

$$\epsilon = \frac{r}{gT^2} = \frac{rm^2g}{b^2}$$

이고, 이 값이 1보다 매우 작을 때가 overdamping이 일어나는 것이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{d^2\phi}{d\tau^2} &= -\frac{d\phi}{d\tau} - \sin(\phi) + \gamma\sin(\phi)\cos(\phi) \\ \gamma &:= \frac{r\omega^2}{g} \\ \epsilon &:= \frac{rm^2g}{b^2} \end{aligned}$$

이다.

2.5.5 Phase plane analysis

다음과 같이, 2nd order ODE를 1st order ODE 2개로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon\ddot{\phi} &= -\dot{\phi} + f(\phi) \\ \Omega &:= \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned}$$

로부터,

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{\epsilon}(f(\phi) - \Omega) \end{cases}$$

만일 $f(\phi)$와 Ω의 차이가 커서 $f(\phi) - \Omega$가 $O(1)$이라면, $\dot{\Omega}$는 $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \gg 1$이다. 따라서, Ω는 빠르게 변화하여 $f(\phi) - \Omega = O(\epsilon)$까지 줄어든다. 즉, 그 때는 $\epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} = 1$의 order의 $\dot{\Omega}$를 갖게 된다. (Quasi-steady-state)

2.6 Insect Outbreak

TBD

3 Flows on the circle

Circle, S^1 위에서의 flow는 oscillation이 일어날 수 있다. ($[0, 2\pi]/(0 = 2\pi)$이므로. . .)

3.1 Uniform oscillator

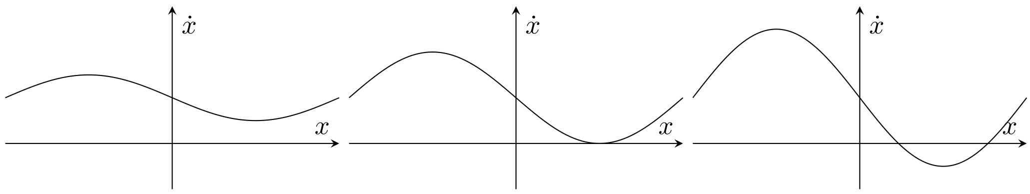
$$\dot{\theta} = \omega$$

상수 각속도 ω에 대해, $\theta = \omega t + \theta_0$이 되므로, oscillation이 일어나고 period는 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$이다. 만일 두 명이 원형 트랙을 각각 주기 $T_1 = \dfrac{2pi}{\omega_1}, T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$를 가지고 돌고 있다면 ($T_1 < T_2$), 둘의 위상차 $\phi = \theta_1 - \theta_2$는 $\dot{\phi} = \omega_1 - \omega_2 > 0$이고, overtaking의 주기는 다음과 같다.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{1/T_1 - 1/T_2}$$

3.2 Nonuniform oscillator

$$\dot{\theta} = \omega - a\sin(\theta)$$



각각 $a < \omega, a = \omega, a > \omega$인 경우이다. $a = \omega, \theta = \dfrac{\pi}{2}$에서 Saddle-node bifurcation이 일어남을 확인할 수 있다. 특히, $a < \omega$일 때의 oscillation의 period를 다음과 같이 계산해보자.

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= f(\theta) = \omega - a\sin(\theta) \\
T &= \int_0^T dt = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega - a\sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}
\end{aligned}$$

따라서,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega + a}\sqrt{\omega - a}} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$$

라고 할 수 있다. 즉, 주기가 $T \sim (a_c - a)^{-1/2}$의 속도로 발산한다.

3.3 Ghost and Bottleneck

$\dot{x} = r + x^2$에 대해, bottleneck이 되는 주기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_{bn} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}(x)|_{\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

특히, $\dot{\theta} = \omega - a\sin(\theta)$에서 $\theta = \phi + \dfrac{\pi}{2}$로 놓으면, 다음과 같이 saddle node의 normal form으로 만들 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \omega - a\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \\
&= \omega - a\cos(\phi) \\
&= \omega - a\left[1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \cdots\right] = (\omega - a) + \frac{1}{2}a\phi^2 + O(\phi^4)
\end{aligned}$$

이제, $x = \frac{1}{2}a\phi$와 $r = \frac{1}{2}a(\omega - a)$로 놓으면,

$$\dot{x} = \frac{1}{2}a\dot{\phi} = r + x^2 + O(x^4)$$

따라서, 주기는 $T \simeq \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{a}\sqrt{\omega - a}} \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$이다.

3.4 Overdamped pendulum

길이가 L인 줄에 질량 m의 구가 매달려 있고, 반시계 방향으로 Γ의 torque를 받는다고 하자. 그러면, 다음과 같은 torque balance 식을 세울 수 있다.

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin(\theta) = \Gamma$$

만일 b가 크다면, $mL\ddot{\theta}$는 잠깐의 transient 후에 무시할 수 있다. 그러면,

$$b\dot{\theta} = \Gamma - mgL\sin(\theta)$$
$$\frac{b}{mgL}\dot{\theta} = \left(\frac{\Gamma}{mgL}\right) - \sin(\theta)$$

이므로, $\tau \equiv \frac{t}{t_0} = \frac{mgL}{b}t$로 놓으면, $\gamma = \frac{\Gamma}{mgL}$을 얻는다. 그러면,

$$\theta' = \gamma - \sin(\theta)$$

이다.

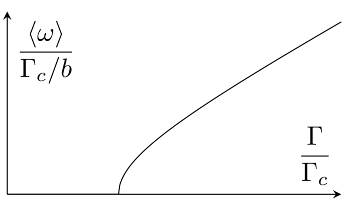
만일 $\gamma > 1$이면, applied torque가 충분히 커서 oscillation이 일어난다. 이 때, period는,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

average frequency는 $\sqrt{\gamma^2 - 1}$이고,

$$\begin{aligned}\langle\omega\rangle &= \frac{1}{t_0}\sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{mgL}{b}\sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{\Gamma^2 - (mgL)^2}}{b} = \frac{\Gamma_c\sqrt{(\Gamma/\Gamma_c)^2 - 1}}{b}\end{aligned}$$

이다. ($\Gamma_c := mgL$) 만일 $\gamma = 1$이면, $\frac{\pi}{2}$에서 torque balance가 이뤄진다. 반대로, $\gamma < 1$이면, net rotation이 일어나지 않아 $\langle\omega\rangle = 0$이다.



3.5 Synchronization of fireflies

반딧불이의 natural (no stimulus) phase를 $\theta(t)$, frequency를 ω라고 할 때, 반딧불이에게 Phase가 Θ이고 frequency가 Ω인 flash를 비춰준다고 하자. 둘 다 phase가 0이 될 때 빛나며, $\dot{\Theta} = \Omega$이다.

Modelling.

$$\dot{\theta} = \omega + A\sin(\Theta - \theta)$$

여기서 A는 반딧불이의 resetting strength이다. 그러면, phase difference $\phi = \Theta - \theta$는 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A\sin(\phi)$$

그러면, $\tau = At$이고 $\mu = \dfrac{\Omega - \omega}{A}$로 놓으면, μ에 따라 분석할 수 있다. *Entrainment*는 $-1 \le \dfrac{\Omega - \omega}{A} \le 1$일 때만 일어난다. 즉,

$$\omega - A \le \Omega \le \omega + A$$

에서 일어난다.

4 Linear systems

이번 절의 목표는 다음을 해결하는 것이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

즉, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\,(\mathbf{x})$를 해결할 것이다. 이는, 앞으로 다음과 같은 2계 미분방정식을 다룰 수 있음을 의미한다.

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

$y := \dot{x}$라고 정의하고, 다음과 같은 두 개의 1계 미분방정식을 생각하면 충분하기 때문이다.

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = F(x, y) \end{cases}$$

특히, 분석을 위하여 다음과 같은 용어를 사용한다.

- Fixed point : $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$
- Closed orbits : $T > 0$이 있어서 $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ forall t.

4.1 Simple harmonic oscilator

다음과 같은 simple harmonic oscillator를 생각하자.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

그러면, 이는 다음과 같은 연립 방정식으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

특히, $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\dot{v}}{\dot{x}} = -\dfrac{\omega^2 x}{v}$로부터, $vdv + \omega^2 x dx = 0$이고, 양변을 적분하면 $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 = \text{constant}$를 얻게 된다. 이는 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 합이므로, simple harmonic oscillator에서는 energy가 보존됨을 의미한다.

4.2 Phase portraits

이 절에서는 $\dot{x} = Ax$*를 생각하자. 여기서,* $A = diag(a, -1)$*이다.* 그러면, 이는 다음과 같은 해를 갖는다.

$$\mathbf{x}(t) = x_0 e^{at} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_0 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이로부터, a의 범위에 따라 여러가지 phase portrait을 생각할 수 있다.

1. $a < 0, a \neq -1$: 이 경우 $a < -1$이면 x축으로 더 빠르게 감소하며 $-1 < a < 0$이면 y축으로 더 빠르게 감소한다. 따라서, 이 두 경우 모두 **Stable node**를 갖는다.
2. $a = -1$: 이 경우 두 방향 모두로 동일한 속도로 감소한다. 즉, **star**를 갖는다.
3. $a = 0$: 이 경우 x방향으로는 움직이지 않는다. 즉, $y = 0$이 **line of attractor**가 된다.
4. $a > 0$: 이 경우 x방향으로는 발산하며 y방향으로는 0으로 수렴한다. 즉, **saddle**을 갖는다.

특히, Fixed point로 향하게 되는, 즉 $t \to \infty$일 때 $x(t) \to x^*$인 초기값 x_0을 **stable manifold**라고 한다. 반대로, $t \to -\infty$일 때 $x(t) \to x^*$인 초기값 x_0을 **unstable manifold**라고 한다.

4.3 Stability

Fixed point $\mathbf{x}^*$에 대해, 그 stability는 다음과 같이 분류할 수 있다.

1. **Attracting** : $\mathbf{x}^*$ 근방의 trajectory가 전부 $\mathbf{x}^*$로 수렴하는 경우. 즉,

$$\exists \delta > 0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \to \lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

2. **Lyapunov Stable** : $\mathbf{x}^*$ 근방의 trajectory가 전부 $\mathbf{x}^*$와 가까운 경우. 즉,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \to \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$$

특히, $\mathbf{x}^*$가 Attracting이고 Lyapunov인 경우 **asymptotically stable**하다고 하고, $\mathbf{x}^*$가 Lyapunov이지만 attracting이 아닌 경우 **neutrally stable**하다고 한다. 당연히, attracting도 Lyapunov도 아닌 경우 unstable하다고 한다.

4.4 Linear systems

다음과 같은 linear system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= bx + dy \end{cases}$$

이는 $\dot{\mathbf{x}} = A\dot{\mathbf{x}}$라고 쓸 수 있다. 이 때, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$이고 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$이다. 이제, solution이 $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ 꼴이라고 하자. 그러면, $\dot{\mathbf{x}} = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = Ae^{\lambda t}\mathbf{v}$로부터, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$를 구하면 된다. 즉, $\det(A - \lambda I) = 0$을 풀면 되고, 다시 말해 다음과 같은 Characteristic polynomial ϕ_A의 해를 구하면 충분하다.

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

여기서 $\tau = \text{tr}(A)$이고, $\Delta = \det(A)$이다.

4.4.1 Two distinct real eigenvalues

이 경우, 두 개의 eigenvalue λ_1, λ_2를 구할 수 있고, 그에 대응하는 linearly independent한 eigenvector v_1, v_2가 존재한다. 따라서, 해는 $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$이고, λ의 부호에 맞추어 stable/unstable node 혹은 saddle을 결정하면 된다.

4.4.2 Two distinct imaginary eigenvalues

이 경우, 두 개의 eigenvector v_1, v_2는 서로 complex conjugate 관계이며(A가 real matrix이므로) 따라서 해는 $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos(\omega t) + C_2 e^{\alpha t}\sin(\omega t)$가 된다. 여기서 $\alpha = \frac{\tau}{2}$이고, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2}$이다.

1. $\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha < 0$ 즉, $\tau < 0$: decaying하는 spiral을 만들게 되며, stable spiral을 이룬다.
2. $\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha = 0$ $(\tau = 0)$: center를 이룬다.
3. $\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha > 0$ 즉, $\tau > 0$: growing하는 spiral을 만들게 되며, unstable spiral을 이룬다.

4.4.3 Equal eigenvectors

이 경우, 다시 두 개의 case로 나눌 수 있다.

1. Case 1. Two independent eigenvectors v_1, v_2 : 이 경우, 모든 방향이 eigenvector가 되므로 반드시 star이다.
2. Case 2. Only one eigenvector v_1 : 이 경우, generalized eigenvector $(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$을 찾아야 한다. 특히, 그 phase portrait은 degenerated node를 이루게 된다.

5 Phase Portraits

일반적인 Nonlinear system을 분석하기 위해서는, 우선 다음과 같은 용어를 정의해야 한다.

- **x - nullcline** : $\dot{x} = 0$인 curve.
- **y - nullcline** : $\dot{y} = 0$인 curve.

당연히, x-nullcline과 y-nullcline의 교점이 바로 fixed point가 된다.

Theorem 5.1

System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$에 대해, 만일 $\mathbf{f}$가 $\mathcal{C}^1$이라면, 이 system의 해는 유일하게 존재한다.

이로 인해, 두 trajectory는 절대로 intersect할 수 없다. 따라서, closed orbit이 있다면 내부와 외부는 서로 영향을 줄 수 없다.

5.1 Linearization

Linearization함으로써 어느정도 비선형 시스템을 분석할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

이와 같은 시스템에 대해, Perturbation이 $u = x - x^*, v = y - y^*$라면, 다음과 같은 linearization을 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} = f(x, y) &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \cdots \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x, y) &= g(x^* + u, y^* + v) \\ &= g(x^*, y^*) + u\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) + v\frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) + \cdots \end{aligned}$$

따라서, 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

즉, Jacobian matrix가 바로 linearization이다.

5.2 Population dynamics

시간 t에서의 토끼의 개체수를 $x(t)$, 양의 개체수를 $y(t)$라고 하자. 특히, 개체수이므로 $x, y \geq 0$이어야만 한다. 둘의 성장은 기본적으로 Logistic model을 따르지만, 둘의 competition에 의해 추가적인 term이 붙는다고 모델링하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(3-x) - 2xy \\ \dot{y} &= y(2-y) - xy \end{cases}$$

특히, 토끼가 양보다 더 빨리 성장하지만 토끼와 양의 경쟁은 양이 더 유리함($2xy$와 xy)을 확인하자. 이 모델로부터, $(0,0), (3,0), (0,2), (1,1)$이 바로 fixed point이다. Jacobian은 다음과 같이 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-2y-x \end{bmatrix}$$

따라서, 이와 phase portrait을 이용하여 분석하면 $(0,0)$은 unstable node, $(3,0)$과 $(0,2)$는 stable node, $(1,1)$은 saddle 이 된다.

값에 따라서, competive exclusion과 coexistence가 결정됨을 확인하자.

5.3 Conservative System

힘이 만일 속도에 의존하지 않는다면, 뉴턴의 운동 법칙에 의해 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x} = F(x)$$

특히, $F(x) = -\dfrac{dV}{dx}$인 V가 있을 것이고 따라서 이 경우에는

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x) \\ m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} &= 0 \\ \dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)\right) &= 0 \end{aligned}$$

에너지가 보존된다.

Definition 5.2

비선형 시스템 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$에 대해, 만일 E가 real-valued이고 continuous한 function이며, open set에서 constant하지 않다면, E를 **Energy**라고 한다. 이 때, energy는 trajectory를 따라서 $\dfrac{dE}{dt} = 0$이다.

만일 어떤 시스템에 결부된 에너지가 있다면, 그 시스템은 **Conservative system**이다. 특히, conservative system 에는 attractor나 repeller가 존재할 수 없다. 만일 $\mathbf{x}^*$가 attractor여서 basin D를 갖는다면,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in D &\implies \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \\ &\implies \lim_{t\to\infty} E(\mathbf{x}(t)) = E(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

따라서, Basin 전체에서 E가 constant한데, 이는 정의에 모순이다.

5.3.1 Double-well potential

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

이 시스템은 보존적이며, 세 fixed point $(\pm 1, 0), (0, 0)$을 갖는다.

특히, nonlinear center를 갖는데, "다시 돌아오는 부메랑"인 **homoclinic orbit**을 갖는다.

5.3.2 Reversible systems

만일 어떤 시스템이 $t \to -t, y \to -y$에 대해 invariant하다면 그 시스템을 **Reversible**하다고 한다. 이 조건을 만족하기 위해서는, f는 y에 odd여야 하며 g는 y에 even이어야 한다. 그러면,

$$\begin{aligned} y \to -y \implies & \begin{cases} \dot{x} &= f(x, -y) \\ -\dot{y} &= g(x, -y) \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \dot{x} &= -f(x, y) \\ \dot{y} &= -g(x, y) \end{cases} \\ \implies & (t \to -t) \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases} \end{aligned}$$

이므로, reversible하게 된다. 즉, $(x(t), y(t))$가 solution이라면, $(x(-t), -y(-t))$ 역시 solution이 된다.

Example 5.3

모든 conservative system은 reversible하다. 다음과 같은 conservative system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= F(x) \end{cases}$$

여기서 y는 y에 odd하며 $F(x)$는 y에 무관하므로 y에 even하다. 따라서, reversible하다.

5.4 Periodicity

5.4.1 Cylindrical phase space

phase variable x, y 중에 x가 periodic한 경우, $(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$처럼 생각할 수 있고, 따라서 periodic해진다. 다음과 같은 예시를 생각해보자.

Example

$\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin(\theta) = 0$인 pendulum without damping을 생각해 보자. 그러면, $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$로 두고, $\tau = \omega t = \dfrac{t}{T}$로 두면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

그러면, 이 flow는 다음과 같은 이유로 reversible하다.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v & \text{odd in } v \\ \dot{v} = -\sin(\theta) & \text{even in } v \end{cases}$$

fixed point는 $n \in \mathbb{Z}$에 대해 $(n\pi, 0)$이다. 또, Jacobian은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

그러면, $(2k\pi, 0)$에 대해 $\tau = 0, \Delta = 1$이므로 linear center이다. 즉, reversible하고 linear center이므로 nonlinear center를 갖게 된다.

또한, $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos(\theta)$가 시간에 대해 변하지 않으므로 conservative system이다. $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos(\theta)$에 대해, $E = -1$인 점이 neutrally stable한 점, $-1 < E < 1$이 nonlinearly circular한 trajectory, $E = 1$이 heteroclinic orbit, $E > 1$이 계속해서 도는 trajectory이다. 그러나, 이를 cylindrical phase space로 접게 되면 heteroclinic orbit이었던 것이 homoclinic하게 바뀐다.

5.4.2 Quasiperiodicity

다음과 같은 uncoupled oscillator를 생각해보자.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \end{cases}$$

그러면, $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$라는 phase space에서의 trajectory는 slope $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$을 갖는다.

1. $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$인 경우, 모든 trajectory는 closed orbit이다. θ_1이 q번 도는 동안 θ_2가 p번 돌아 정확히 같은 자리로 복귀하기 때문이다.
2. $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$인 경우, trajectory는 절대 close되지 않는다. 이를 **Quasiperiodicity**라고 하며, torus를 trajectory가 densly cover한다. 즉, 모든 점에 대해 trajectory가 그 점의 arbitarily small neighborhood를 지난다.

5.5 Poincare Index Theory

Index of closed curve C란, C를 vector field가 몇 번 휘감는지 그 winding number를 measure한 것이다. 즉, 주어진 v.f. $\mathbf{f}$에 대해 closed curve를 $\mathbb{Z}$로 보내는 mapping이다. 다음과 같은 vector field를 생각해보자.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

특히, C는 simple closed curve여야 하며, C는 fixed point를 지나서는 안 된다. 그러면, x축 양의 방향과 vector field가 이루는 각은 다음과 같아야만 한다.

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan^{-1}\frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

(특히 $\dot{x} = \dot{y} = 0$이면 ϕ가 정의되지 않는다.) $\mathbf{x}$가 C 주위를 돌면, $\mathbf{f}$가 smooth하고 C 역시 연속이므로 ϕ는 연속적으로 변해야만 한다. 또한, 한 바퀴를 돌 때 $\dot{\mathbf{x}}$는 동일하므로, ϕ는 $2n\pi$만큼 변할 것이다. $(n \in \mathbb{Z})$ 한 바퀴 도는 동안에 변하는 각도를 $[\phi]_C$라고 두면, index of curve w.r.t. $\mathbf{f}$는 다음과 같이 정의된다.

$$I_c := \frac{1}{2\pi}[\phi]_C \in \mathbb{Z}$$

이를 구하기 위해, curve C가 parameter s에 대해 parametrization되어 있다고 하자. 즉, $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))$라고 하자. $(s_0 \leq s \leq s_1)$ 그러면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\tan(\phi) &= \sec^2\phi\dot{\phi} = \frac{f^2 + g^2}{f^2}\dot{\phi} \\ &= \frac{d}{ds}\left[\frac{g(x(s), y(s))}{f(x(s), y(s))}\right] = \frac{f\dot{g} - g\dot{f}}{f^2} \end{aligned}$$

이므로,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{f\dot{g} - g\dot{f}}{f^2 + g^2}$$

가 성립한다. 여기서 $\dot{f} = \frac{df}{ds}, \dot{g} = \frac{dg}{ds}$이다. 그러므로,

$$I_C = \frac{1}{2\pi}\oint_C d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s_1} \frac{f\dot{g} - g\dot{f}}{f^2 + g^2} ds = \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s_1} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$$

그러나 이 값을 구하는 것은 너무 어려우므로, 그림을 그려서 구할 수 있다. 만일 **Node, spiral, degenerated node, star, center**라면 작은 curve에서 index는 +1이고, **saddle**인 경우에는 index가 −1이다.

이 index의 성질은 다음과 같다.

1. curve C와 C'가 homotopic하고 homotopy가 fixed point를 지나지 않는다면, $I_C = I_{C'}$이다.

   proof. curve가 continuously 변화할 때 $[\phi]_C$와 I_C 역시 연속적으로 변화해야 한다. 그런데, $I_C \in \mathbb{Z}$이므로 I_C는 constant해야만 한다.

2. C가 만일 fixed point를 갖지 않는다면, $I_C = 0$이다.

   proof. f가 smooth하므로 f, ϕ는 아주 작은 C'에서 거의 constant해야 한다. 즉, $[\phi]_{C'} = 0$이므로 property 1에 의해 $I_C = I_{C'} = 0$이다.

3. I_C는 $t \to -t$에 대해 invariant하다.

   proof. 모든 각이 $\phi \mapsto \phi + \pi$여야 한다. 그러므로, $[\phi]_C$는 바뀌지 않는다. 즉, stability는 index와 무관하다.

4. 만일 C가 trajectory라면, $I_C = +1$이다.

따라서, index of point $\mathbf{x}^*$는 $\mathbf{x}^*$를 둘러싼 작은 closed curve C에 대해 (no other f.p. : 즉, isolated f.p여야 한다.) $I_{\mathbf{x}^*} = I_C$로 정의하면 이 정의는 well-defined이다.

Theorem 5.4

만일 closed curve C 안에 isolated fixed point $\mathbf{x}_1^*, \cdots, \mathbf{x}_n^*$이 있으면,

$$I_C = \sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + \cdots + I_n$$

이다,. 여기서 $I_k = I_{\mathbf{x}_k^*}$이다.

Corollary 5.5

따라서, closed orbit 안에 fixed point가 몇 개가 있든지 $\sum I_k = +1$이다. 즉, 모든 closed orbit은 적어도 하나의 f.p.를 에워싸야 한다. 만일 정확히 하나라면, 그 고정점은 saddle일 수 없다.

6 Limit cycle

Limit cycle은 isolated closed orbit을 말한다. 선형인 경우 center라면 not isolate이다. 즉, 선형에서는 limit cycle이 나타날 수 없다. 이는 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$에서 $\mathbf{x}(t)$가 periodic하면 $c\mathbf{x}(t)$도 periodic해야하기 때문이다. $(c \neq 0)$

예시 : $\dot{r} = r(1 - r^2), \dot{\theta} = 1$인 경우.

예시 2 : van der Pol oscillator : $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$인 경우, $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$가 일종의 damping과 pumping을 한다.

6.1 Gradient system

Gradient system은 다음을 만족하는 potential function $V \in C^1$가 존재하는 경우이다.

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$$

그러면, closed orbit은 gradient system에서 나타날 수 없다.

Proof. C가 주기 T를 갖는 closed orbit이라고 가정하자. 그러면,

$$0 = \Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt = \int_0^T (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = -\int_0^T \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 dt \le 0$$

이다. 따라서, C에서 $\dot{\mathbf{x}} \equiv 0$이고 다시 말해 closed orbit이 아니라 fixed point여야만 한다. □

모든 1-D system은 grad system이다. $\dot{x} = f(x) = -\dfrac{dV}{dx}$에서, oscillation이 일어나지 않는다.
그러나, 대부분의 2-D system은 grad system이 아니다. **Gradient system criterion**은 다음과 같다.

$$\dot{x} = f(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$\dot{y} = g(x,y) = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

로부터, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$여야하므로, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$여야만 한다.

6.2 Lyapunov functions

Lyapunov function은 potential function의 generalization이다.

Definition 6.1

$V(\mathbf{x})$가 **global Lyapunov function**이라는 것은 다음을 만족한다는 것이다.

1. $V(\mathbf{x}) > 0$ for all $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}^*$, $V(\mathbf{x}^*) = 0$. 즉, V는 positive definite.
2. $\dfrac{dV}{dt} < 0$ for all $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}^*$, $\dfrac{dV}{dt}(\mathbf{x}^*) = 0$. 즉, $\dfrac{dV}{dt}$는 negative definite.

그러면, trajectory는 $\mathbf{x}^*$로 "flows downhill"한다. 즉, $\mathbf{x}^*$는 globally asymptotically stable하다.

특히, 만일 $\dfrac{dV}{dt}$가 negative semidefinite하다면, $\mathbf{x}^*$는 그저 globally stable하다. 즉, limit cycle이 존재할 수 있다. 그러나, 실제로 이러한 V를 찾는 것은 어렵다.

Example

다음과 같은 system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - 2y^2 \\ \dot{y} &= xy - y^3 \end{cases}$$

그러면, $V(\mathbf{x}) = x^2 + ay^2$라고 가정해보자. $(a > 0)$. V는 positive definite이고

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} = 2x(-x - 2y^2) + 2ay(xy - y^3) \\ &= -2x^2 + (2a - 4)xy^2 - 2ay^4 \end{aligned}$$

로부터, $a = 2$라고 두면, $\dfrac{dV}{dt} = -2x^2 - 4y^4 < 0$ unless $x = y = 0$이다. 즉, V는 global Lyapunov function이다.

Example
다음과 같은 system을 생각하자.

$$\ddot{x} + (\dot{x})^3 + x = 0$$

에너지 함수 E를 다음과 같이 정의하면, 이는 positive-definite하고, $\dot{E}$는 negative semidefinite하다.

$$\begin{aligned} E(x, \dot{x}) &:= x^2 + \dot{x}^2 \\ \dot{E} &= 2x\dot{x} + 2\dot{x}\ddot{x} \\ &= 2x\dot{x} + 2\dot{x}(-x - \dot{x}^3) \\ &= -2\dot{x}^4 \leq 0 \end{aligned}$$

definite가 아니고 negative semi-definite하므로, closed orbit이 존재할 가능성이 있다. 그러므로, period T를 갖는 closed orbit이 있다고 가정하자.

$$0 = \Delta E = \int_0^T \dot{E} dt = -2 \int_0^T \dot{x}^4 dt \leq 0$$

따라서, $\dot{x} = 0$인 경우에만 가능한데, 이는 fixed point임을 의미한다. 따라서, closed orbit이 존재할 수 없다.

6.3 Bendixson criterion

다음과 같은 nonlinear system을 생각하자.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

(여기서 $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R})$) 이 때, 만일 $\nabla \cdot \mathbf{f} = \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \dot{y}}{\partial y}$이 region R에서 단 하나의 sign을 갖는다면, (constant sign) R에 전부가 놓여있는 (lying entirely) closed orbit은 존재하지 않는다.

proof. closed orbit C가 있어서 구역 $A \subset R$을 enclosing한다고 하자. 스토크스 정리에 의해,

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{f} dA = \oint_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$$

그런데, divergence가 늘 positive하거나 negative하므로 좌변은 0이 아니고, $\mathbf{n}$은 orbit에 늘 수직이므로 우변은 0이다. 따라서 모순. □

Example
다음과 같은 간단한 system을 생각하자.

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

이 경우, 다음과 같은 plane system으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y \end{cases}$$

그런데, $\nabla \cdot \mathbf{f} = -f(x)$에서 이것이 만일 constant sign을 가지고 있다면 closed orbit이 존재하지 않는다. 즉, positive damping이거나 negative damping인 경우에는 oscillation이 일어나지 않는다.

6.3.1 Dulac criterion

Bendixson criterion과 같은 조건에서, 만일 real-valued function g가 존재하여 $\nabla \cdot (g\mathbf{f})$가 one-sign을 가지면 closed orbit을 갖지 않는다. (증명도 동일한 방법을 쓴다.) 특히, $g = 1$이 Bendixson criterion이다.

Example

다음과 같은 system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(2-x-y) \\ \dot{y} &= y(4x-x^2-3) \end{cases}$$

그러면, $g = \dfrac{1}{xy}$로 놓으면 (x, y axis에서 정의되지 않는다.), 다음이 성립한다.

$$\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(4 - x - \frac{3}{x}\right) = -\frac{1}{y}$$

따라서, 각 사분면에는 closed orbit이 없다.

6.4 Poincare-Bendixson Theorem

2-Dimension에서만 성립하며, 더 높은 차원에는 counterpart가 존재하지 않는다.

Theorem 6.2

다음을 가정하자.

1. $R \subseteq U$가 $\mathbb{R}^2$에서 compact하다.
2. R 안에는 fixed point가 없다.
3. R에 갇혀서 빠져나오지 못하는 trajectory가 존재한다.

그러면, C는 closed orbit이거나 closed orbit으로 spiral하게 가까워진다. 즉, R에는 closed orbit이 존재한다.

따름정리 : R이 만일 compact trapping region이고 finitely many unstable isolated fixed point만을 갖는다면, R 안에는 closed orbit이 존재한다.

Theorem 6.3

$\mathbf{x}(t)$가 compact region R 안에 갇히게 되면, $\mathbf{x}(t)$는 다음 셋 중 하나로만 향할 수 있다.

1. Fixed point,
2. limit cycle,
3. cycle graph.

Example

다음과 같은 system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1-r^2) + \mu r \cos\theta \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

이 때, fixed point는 $r = 0$, 즉 원점에만 존재한다. 특히, $\mu = 0$이라면 $r = 1$에 stable limit cycle이 존재한다. 이제, $0 < \mu < 1$인 경우를 생각하자. 그러면,

1. $\dot{r} = r(1 - r^2 + \mu\cos\theta) \geq r(1 - r^2 - \mu)$로부터, $r^2 < 1 - \mu$이면 $\dot{r} > 0$이다. ($r \neq 0$) 즉, $0 < r < \sqrt{1-\mu}$에서 $\dot{r} > 0$이다. 이제, $r_{\min} = 0.99\sqrt{1-\mu}$라고 놓자. 그러면, $r = r_{\min}$에서 $\dot{r} > 0$이다.
2. $\dot{r} = r(1 - r^2 + \mu\cos\theta) \leq r(1 - r^2 + \mu)$로부터, $r^2 > 1 + \mu$이면 $\dot{r} < 0$이다. 즉, $r > \sqrt{1+\mu}$에서 $\dot{r} < 0$이다. 이제, $r_{\max} = 1.01\sqrt{1+\mu}$라고 놓자. 그러면, $r = r_{\max}$에서 $\dot{r} < 0$이다.

즉, $|\mu| < 1$이라면 늘 closed orbit이 존재한다.

6.5 Glycolytic Oscillation

Glycolysis란, glucose가 break down하여 에너지를 만드는 과정이다.

Sel'kov method. $(a, b > 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} &= b - ay - x^2 y \end{cases}$$

여기서 x는 ADP의 농도이고, y는 F6P의 농도이다. 특히, 다음이 성립한다.

- x - nullcline : $y = \dfrac{x}{a + x^2}$
- y - nullcline : $y = \dfrac{b}{a + x^2}$

이로부터, fixed point는 $x^* = b, y^* = \dfrac{b}{a + b^2}$에 존재한다.

이제 Trapping region을 결정하자. Trajectory의 slope은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\ &= \frac{b - ay - x^2 y}{-x + ay + x^2 y} \\ &= \frac{x - ay - x^2 y - x + b}{-x + ay + x^2 y} = -1 + \frac{b - x}{-x + ay + x^2 y} \end{aligned}$$

따라서, $x > b$이고 $y > \dfrac{x}{x^2 + a}$인 영역에서, $\dfrac{dy}{dx} < -1$이다. (이제 trapping region을 결정할 수 있다.)

다음과 같은 Jacobian matrix를 생각하자.

$$A = \begin{bmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -a - x^2 \end{bmatrix}$$

그러면, 고정점에서의 Jacobian은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} -1 + 2by^* & a + b^2 \\ -2by^* & -a - b^2 \end{bmatrix}$$

여기서 $\Delta = a + b^2 > 0$이고, $\tau = -\dfrac{b^4 + b^2(2a - 1) + a^2 + a}{a + b^2}$이다. $\tau > 0$인 경우에만 이 f.p가 repeller이다.

6.6 Lienard System

이번 절에서는 다음과 같은 system을 생각해보자.

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

이제, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$라고 하자. 그러면, 이전에는 다음과 같은 system을 통해 분석했다.

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y \end{cases}$$

Lienard의 경우엔, 다음과 같은 Lienard representation을 생각할 수 있다. $y := \dot{x} + F(x)$로부터, $\dot{y} = \ddot{x} + f(x)\dot{x} = -g(x)$이고,

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -g(x) \end{cases}$$

이러한 representation에서, 다음과 같은 내용을 생각할 수 있다.

Theorem 6.4

Lienard Theorem. 함수 f, g, F가 다음을 만족한다고 가정하자.

1. f, g는 C^1 함수이다.
2. g는 odd이며, $x > 0$에서 $g > 0$이다.
3. f는 even이며, 따라서 F는 odd이다.
4. F는 $x > 0$에서 단 하나의 근 $x = a$를 갖는다. 또한, $0 < x < a$에서 $F < 0$이고, $x > a$에서 $F > 0$이며 $F'(x) = f(x) \geq 0$이다. 즉, $x \to \infty$에서 $F \to \infty$.

그러면, Lienard system은 Lienard plane의 원점을 에워싸는 unique stable limit cycle을 갖는다.

다음과 같은 van der pol oscillator를 생각하자.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0; (\mu > 0)$$

그러면, $f(x) = \mu(x^2 - 1), F(x) = \mu(\frac{1}{3}x^3 - x)$이고 $g(x) = x$이다. 이 system은 Lienard theorem의 조건을 모두 만족하므로, unique stable limit cycle을 갖는다. 이 때, Lienard plane에서는 다음과 같은 식을 따른다.

$$\begin{cases} \dot{x} & = y - \mu(\frac{1}{3}x^3 - x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

특히, $\mu = 0$에서는 $\ddot{x} + x = 0$에서 harmonic oscillator이며, $\mu < 0$에서는, t를 $-t$로 변환하게 되면, system이 그대로 온존되므로 (μ의 부호 역할만 바뀜) stable limit cycle을 갖는다. 다시 원래 시간으로 돌리면, unstable limit cycle을 갖는다는 결론을 얻는다.

6.7 Relaxation Oscillation

다시 van der pol oscillator를 생각하되, $\mu \gg 1$이라고 하자.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

그러면, 이 시스템은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\ddot{x} + \mu F'(x)\dot{x} + g(x) = 0$$
$$\text{where } F(x) = \int_0^x s^2 - 1 ds = \frac{1}{3}x^3 - x$$

이제, $\omega = \dot{x} + \mu F(x)$로 놓으면 다음과 같은 Lienard plane 상의 운동을 얻는다.

$$\begin{cases} \dot{x} & = \omega - \mu F(x) \\ \omega & = -x \end{cases}$$

이 때, $y := \omega/\mu = \varepsilon\omega$와 같이 정의하자. 즉, $\varepsilon = \mu^{-1} \ll 1$이다. 이 변환에 의해 다음과 같은 두 종류의 system을 작성할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu y - \mu F(x) = \mu(y - F(x)) \\ \dot{y} &= -\dfrac{x}{\mu} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{y - F(x)}{\varepsilon} \\ \dot{y} &= -\varepsilon x \end{cases}$$

이를 분석하기 위하여, 다음과 같은 두 종류의 timescale을 생각하자.

1. Fast Timescale : $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$. 이 시스템은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{dx}{d\tau} = y - F(x)$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon^2 x$$

   이 시스템은 $y - F = O(1)$일 때 적합하다.

2. Slow Timescale : $\tau = \varepsilon t$. 이 시스템은 다음과 같이 나타난다.

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon^2}(y - F(x))$$
$$\frac{dy}{d\tau} = -x$$

   이 시스템은 $y - F = O(\varepsilon^2)$일 때 적합하다.

이제 각각의 속도에 대해서 생각해보자.

Case 1. $y - F(x) = O(1)$인 경우 : $\dot{x} = O(1/\varepsilon), \dot{y} = O(\varepsilon)$이므로, x가 빠르게 변화한다.

Case 2. $y - F(x) = O(\varepsilon^2)$인 경우 : 즉, nullcline 근처에 있는 경우. $\dot{x} = O(\varepsilon), \dot{y} = O(\varepsilon)$이므로, nullcline을 따라 천천히 이동한다. 특히, $\dfrac{dy}{d\tau} = -x$이므로, $x > 0$일 때 y는 위로 올라갈 수 없고, $x < 0$일 때 y는 아래로 내려갈 수 없다.

이제, Fixed point $(0, 0)$에 대해, 다음과 같이 Linear analysis를 하자.

$$A|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{F'(0)}{\varepsilon} & \dfrac{1}{\varepsilon} \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\varepsilon} & \dfrac{1}{\varepsilon} \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

이 때, $\tau = \dfrac{1}{\varepsilon}$이므로 매우 크고, $\Delta = 1$이므로 $(0, 0)$은 unstable node이다.

Oscillation의 주기도 구해보자. $y - F(x) = O(\varepsilon^2)$인 운동이 period를 결정하므로, $y \approx F(x)$에서 $\dot{y} \approx F'(x)\dot{x}$이고 $\dot{y} = -\varepsilon x$이다. 따라서, 그 근처에서 다음이 성립한다.

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\frac{\varepsilon x}{F'}$$

따라서, 주기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Period} &\approx 2\int_{t_A}^{t_B} dt = 2\int_{x_A}^{x_B} \frac{dt}{dx}dx \\ &= -2\int_{x}^{1} \frac{F'}{\varepsilon x}dx = \frac{2}{\varepsilon}\int_{1}^{2} \frac{x^2 - 1}{x}dx \end{aligned}$$

계산하면, Period $\approx \dfrac{1}{\varepsilon}(3 - 2\ln 2) = O(\mu)$이다.

First correction term : corner를 돌 때 걸리는 시간을 계산해야하며, 이는 $O(\varepsilon^{1/3})$이다.

6.8 Poincare Maps

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Poincare map을 정의하기 위해, S를 flow에 transverse한 (vector field가 S에 parallel하지 않은) $(n-1)$ - dimensional section의 surface라고 하자. 그러면, Poincare map P는 S의 한 점 $\mathbf{x}$으로부터 시작한 경로가 한 S로 돌아왔을 때 처음으로 intersect하게 되는 점 $P(\mathbf{x})$을 얻는 mapping이다. 이로부터, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \text{Fixed point of Poincare map} &\equiv \text{closed orbit of } S \\ \text{Stability of Fixed point} &\equiv \text{Stability of closed orbit} \end{aligned}$$

이제, 이를 분석하기 위하여 고정점 $\mathbf{x}^* \in S$에 대한 작은 perturbation $\mathbf{d}_k$를 생각하자. 그러면, $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}^* + \mathbf{d}_k$에 대해,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* \\ &= P(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}^* \\ &= P(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}_k) - \mathbf{x}^* \\ &= P(\mathbf{x}^*) + \nabla P(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}_k + \cdots - \mathbf{x}^* \\ \Rightarrow \mathbf{d}_{k+1} &= \nabla P(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}_k + O(\|\mathbf{d}_k\|^2) \end{aligned}$$

가 성립한다. 상황이 아주 간단해서, $(n-1) \times (n-1)$ - matrix $\nabla P(\mathbf{x}^*)$가 $n-1$개의 distinct한 eigenvalue λ_j $(j = 1, \cdots, n-1)$을 갖는다고 하자. 그리고, 그에 대응하는 eigenvector들을 $\mathbf{v}_j$라고 두면, 이는 S의 $\mathbf{x}^*$에서의 tangent space를 spanning하므로,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(k)} \mathbf{v}_j \\ \mathbf{d}_{k+1} &= \nabla P(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}_k \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(k)} \nabla P(\mathbf{x}^*)\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(k)} \lambda_j \mathbf{v}_j \\ &= \underbrace{\nabla P(\mathbf{x}^*) \cdots \nabla P(\mathbf{x}^*)}_{(k+1)-\text{times}} \mathbf{d}_0 \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a_j^{(0)} \lambda_j^{k+1} \mathbf{v}_j \end{aligned}$$

라고 할 수 있다. 즉, $k \to \infty$에 대해 $\|\mathbf{d}_k\| \to 0$가 성립하려면, $|\lambda_j| < 1$이어야만 한다. 만일 $|\lambda_j| > 1$인 j가 있다면, $\mathbf{v}_j$ 방향으로는 perturbation이 grow하고, $|\lambda_j| = 1$인 것은 periodic orbit의 bifurcation이다.

이러한 λ_j를 **Floquet multiplier** (characteristic multiplier)라고 한다.

6.8.1 Example

다음과 같은 system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

S를 이제 origin에서 각도 θ_0을 가지고 시작한 반직선이라고 하면, transverse한 submanifold일 것이다. 특히, $\dot{\theta} = 1$이므로, S로 돌아오는 시간은 $t = 2\pi$일 것이다.

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r^2)$$
$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int dt$$
$$\therefore r_1 = \left[1 + e^{-4\pi}(r_0^{-2} - 1)\right]^{-1/2} \equiv P(r_0)$$

이제, $P'(r^*) = P'(1) = e^{-4\pi} < 1$이므로 stable limit cycle을 갖는다.

만일 stability만 필요한 경우라면, ∇P만 간단하게 조사하면 충분하다. $r = 1 + \mu$라고 놓으면,

$$\underbrace{\dot{r}}_{=\dot{\mu}} = r(1-r^2) = (1+\mu)(1-(1+\mu)^2)$$
$$= (1+\mu)(-2\mu - \mu^2) = -2\mu + O(\mu^2)$$

가 성립한다. 따라서, $\mu(t) \simeq e^{-2t}\mu_0$이다. 즉, 시간이 2π 지난 후에, $\mu_1 = e^{-4\pi}\mu_0$이다. 따라서, stable하다고 결론지을 수 있다.

7 Bifurcation : Revisited