

# Nonlinear dynamics and chaos

2dayclean

2025/11/04

## Contents

<b>1</b>	<b>Flows on the Line</b>	<b>3</b>
1.1	Flows on the line . . . . .	3
1.2	Autonomous system . . . . .	3
1.3	Fixed points and its stability . . . . .	4
1.3.1	Population - growth . . . . .	5
1.3.2	Linear stability analysis . . . . .	5
1.4	Existence and Uniqueness . . . . .	5
1.4.1	Impossibility of oscillation . . . . .	6
1.5	As a Potential . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Bifurcation</b>	<b>7</b>
2.1	Bifurcation . . . . .	7
2.1.1	As an Inverse function theorem . . . . .	7
2.1.2	AS a Taylor series . . . . .	7
2.2	Saddle-Nodoe Bifurcation . . . . .	7
2.3	Normal Form Theory . . . . .	8
2.4	Transcritical Bifurcation . . . . .	8
2.5	Pitcfork Bifurcation . . . . .	9
2.5.1	Supercritical Pitchfork . . . . .	10
2.5.2	Subcritical Pitchfork . . . . .	10
2.5.3	Example : moving bead on a rotating hoop . . . . .	10
2.5.4	Nondimensionalization . . . . .	10
2.5.5	Phase plane analysis . . . . .	11
2.6	Insect Outbreak . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Flows on the circle</b>	<b>11</b>
3.1	Uniform oscillator . . . . .	12
3.2	Nonuniform oscillator . . . . .	12
3.3	Ghost and Bottleneck . . . . .	12
3.4	Overdamped pendulum . . . . .	13
3.5	Synchronization of fireflies . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Linear systems</b>	<b>14</b>
4.1	Simple harmonic oscilator . . . . .	14
4.2	Phase portraits . . . . .	15
4.3	Stability . . . . .	15
4.4	Linear systems . . . . .	15
4.4.1	Two distinct real eigenvalues . . . . .	15

4.4.2	Two distinct imaginary eigenvalues . . . . .	16
4.4.3	Equal eigenvectors . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Phase Portraits</b>	<b>16</b>
5.1	Linearization . . . . .	16
5.2	Population dynamics . . . . .	17
5.3	Conservative System . . . . .	17
5.3.1	Double-well potential . . . . .	18
5.3.2	Reversible systems . . . . .	18
5.4	Periodicity . . . . .	18
5.4.1	Cylindrical phase space . . . . .	18
5.4.2	Quasiperiodicity . . . . .	19
5.5	Poincare Index Theory . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Limit cycle</b>	<b>20</b>
6.1	Gradient system . . . . .	21
6.2	Lyapunov functions . . . . .	21

# 1 Flows on the Line

## 1.1 Flows on the line

Flows on the line이란  $\dot{x} = f(x)$ 와 같은 one-dimensional dynamical system을 의미하며, 이를 **flow** 혹은 **vector field**라고 부른다.

### Example

$\dot{x} = \sin(x)$ 의 해는 어떻게 주어지는가?

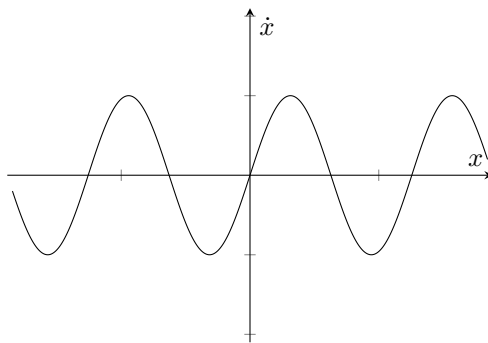
다음과 같이 변수분리법을 사용할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \implies t = \int \csc(x) dx + C = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

따라서, initial condition  $x(0) = x_0$ 이 주어지면,

$$t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \right|$$

와 같이 쓸 수 있다. 그러나 대체 이 해는 어떻게 생겼는가?  $x = x(t)$  꼴로 explicit하게 알 방법이 없다. Qualitative 분석을 위하여 우리는 다음과 같은  $x - \dot{x}$  plot을 이용할 수 있다.



$\dot{x} = 0$ 인 점에서는 흐름이 없고,  $\dot{x} > 0$ 인 점에서는  $x$ 가 증가하는 방향으로 흐를 것이고(flow to right),  $\dot{x} < 0$ 인 점에서는  $x$ 가 감소하는 방향으로 흐를 것이다(flow to left). 이를 이용하면 qualitative하게 해를 분석할 수 있을 것이다. (do it yourself.)

## 1.2 Autonomous system

$$\dot{x} = f(x)$$

만일  $x(t)$ 가  $x(0) = x_0$ 인 solution이라면,  $x(t - t_0)$  with  $x(t_0) = x_0$  역시 이 system의 해일 것이다.

### Proof

$t' := t - t_0$ 으로 두자. 그러면,

$$\frac{dx}{dt'}(t') = \frac{dx}{dt}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(x(t'))$$

가 되고  $x(t' = 0) = x(t = t_0) = x_0$ 이 되므로,  $x(t - t_0)$  역시 해이고 따라서 일반성을 잃지 않고  $t_0 = 0$ 을 가정할 수 있다.  $\square$

### 1.3 Fixed points and its stability

$$f(x^*) = 0$$

점  $x^*$ 를 flow의 fixed point라고 하며, critical point, equilibrium point, 혹은 steady-state라고 부르기도 한다.

**Note** : What is the difference between equilibrium and steady-state?

공통적으로는 두 상태 모두 time-invariant하다는 것이다. 그러나, **equilibrium**은  $\nabla f = 0$ , 즉 공간적으로도 uniform한 상황을 의미하고, **steady-state**는 공간적으로는 uniform하지 않을 수도 있다.

Fixed point의 stability는 다음과 같이 구분할 수 있다.

1.  $x^*$  is **stable** (혹은 *asymptotically Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로는 모두 고정점을 향할 때. 즉,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 > 0 \text{ with } |x^* - x_0| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0.$$

2.  $x^*$  is **unstable** : some arbitrary small perturbation이 시간이 지남에 따라 grow할 때. 즉, stable하지 않는 모든 경우.

3.  $x^*$  is **neutrally-stable** (혹은 *Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로가 계속해서 고정점 근처에 있을 때. 즉,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

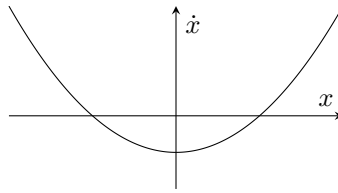
이를 좀 더 “연속” 적이게 쓰면 다음과 같다.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

#### Example

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

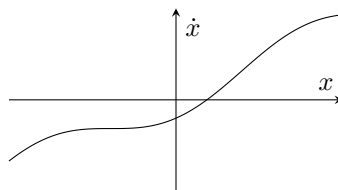
고정점은  $x^* = 1, -1$ 이고  $x = 1$ 에서 unstable,  $x = -1$ 에서 stable하다.



#### Example

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

고정점은 하나 존재하고, 여기서 unstable하다.



## 1.3.1 Population - growth

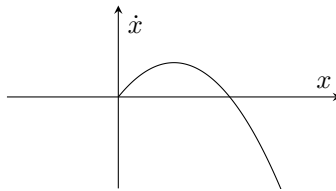
다양한 비선형 생물 시스템 중 ecosystem에 대한 연구가 제일 많이 이루어져 있고, 다루기가 상대적으로 간단하다.

$$\dot{N} = \beta N - \delta N = rN$$

여기서  $N$ 은 population,  $\beta, \delta$ 는 각각 birth rate, death rate,  $r$ 은 growth rate이다. 이 때,  $r > 0$ 이면 이 시스템은 성장하고,  $r < 0$ 이면 decay한다. 이 미분방정식의 해는 당연히  $N(t) = N_0 e^{rt}$ 일 것이다. 즉,  $r > 0$ 이면 계속해서 population이 늘어나 결국 발산한다. 그러나 현실에서는 이러한 일이 일어나지 않는다.

**More Realistic Model** :  $r = \frac{\dot{N}}{N}$ 은 상수가 될 수 없다. 일반적으로  $N$ 이 커질수록 overcrowding/competition/resource limiting에 의해  $r$ 이 줄어들 것이다.  $r = 0$ 이 되는  $N$ 을  $K$ 라고 쓰고, **Carrying capacity**라고 부르면 좋을 것이다. 즉,  $N > K$ 이면  $\dot{N} < 0$ 이 된다.

가장 간단한 모델로  $\frac{\dot{N}}{N} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ 를 생각할 수 있다. 그러면,  $\dot{N} = rN - \frac{r}{K}N^2$ 이므로, 다음과 같은 plot을 얻을 수 있다. 즉, 간단하게 분석할 수 있다.



## 1.3.2 Linear stability analysis

Stability를 qualitative하게 분석해보자.

우선, **Perturbation**을  $y(t) := x(t) - x^*$ 와 같이 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) \\ &= \dot{x} = f(x) = f(x^* + y) \\ &= f(x^*) + f'(x^*)y + \frac{f''(x^*)}{2}y^2 + \dots \\ &= f'(x^*)y + O(y^2) \end{aligned}$$

가 된다.

**Big-Oh Notation** : 함수  $g(y)$ 가  $g(y) = O(h(y))$  as  $y \rightarrow 0$ 이라는 것은, 상수  $K < \infty$ 가 있어서

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{g(y)}{h(y)} \right| < K$$

인 것이다.

따라서, 우리는  $\dot{y} \simeq f'(x^*)y$ 와 같이  $x^*$  근방에서의 linearization을 사용할 수 있다. 이로부터,  $y = y_0 e^{f'(x^*)t}$ 이므로,  $f'(x^*) > 0$ 이면 시간에 따라 diverge하고  $f'(x^*) < 0$ 이면 시간에 따라 converge한다. 즉,  $f'$ 의 sign은 stability를 의미하며,  $f'$ 의 크기는 수렴이 얼마나 빠른지 그 time scale을 의미한다. 특히,  $\tau := \frac{1}{|f'(x^*)|}$ 를 characteristic time-scale이라고 하며 이는 convergence rate과 관련이 있다.

이 방법은  $f'(x^*) \neq 0$ 에서만 유효하다. 이러한 fixed point를 **hyperbolic**하다고 하며, hyperbolic하지 않은 점은 다른 방법으로 분석해야 한다.

## 1.4 Existence and Uniqueness

주어진 미분방정식의 해는 유일하게 존재하는가?

공학 혹은 물리 문제에서 해가 만일 존재하지 않으면 ill-posed되어있을 가능성이 높다. (유일하지 않아도 마찬가지로이다.) 그러나 수학적으로는 꽤 중요한 문제이다. 예를 들어,  $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, x(0) = 0$ 이라는 미분방정식은 자명히  $x(t) \equiv 0$ 이라는 solution을 갖는다. 그러나,  $x(t) = \pm \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$  역시 주어진 방정식의 solution이며, 마찬가지로,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq t_0 \end{cases}$$

역시 solution이 된다. 이는 주어진 미분방정식의 해가 unique하지 않고 심지어 infinitely 많이 있음을 시사한다. (time-invariant하므로 위의 함수가 해가 된다.) 수학적으로는 다음과 같은 조건이 제시된다.

### Proposition 1.1

$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ 에 대해,

- 만일  $f$ 가  $x_0$ 을 포함하는 구간  $R$ 에서 continuous하다면 어떤  $\tau$ 가 존재하여 interval  $I = (-\tau, \tau)$ 에서 해가 존재한다.
- 만일  $f'$ 가 동일한 구간  $R$ 에서 continuous하다면 그 해는 유일하다.

그러나 이 해가 globally 존재하는지는 알 수 없다. 예를 들어,  $\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$ 의 해는  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서만 유일하게 존재한다.

#### 1.4.1 Impossibility of oscillation

Line에서 정의된 Time-invariant system  $\dot{x} = f(x)$ 에서는 oscillation이 절대 일어날 수 없다. 따라서, trajectory는 다음의 두 가능성만을 갖는다.

1. Trajectory는 fixed point로 approach한다.
2. Trajectory는  $\pm\infty$ 로 diverge한다.

## 1.5 As a Potential

Flow on the line  $\dot{x} = f(x)$ 는 늘 적절한  $V$ 를 생각하여  $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$ 가 될 수 있게 할 수 있다. 이러한  $V$ 는  $V(x) = -\int f(x)dx + V_0$ 으로 주어지며, 보통 potential은  $V_0$ 은 중요하지 않고 임의적이다. 이렇게 Potential로 해석하고 나면 다음과 같은 물리적 함의를 갖는다. Trajectory 위에서의 potential  $V(x) = V(x(t))$ 는,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \left(-\frac{dV}{dx}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

이므로 늘 trajectory를 따라서 potential은 monotonically 감소해야만 한다. 또, 자명히  $\frac{dV}{dx}(x^*) = 0$ 인  $x^*$ 는 fixed point이다. linear approach에서와 같은 방법으로,

1.  $V$ 의 local minima : **stable** fixed point
2.  $V$ 의 local maxima : **unstable** fixed point

임을 알 수 있다.

## 2 Bifurcation

### 2.1 Bifurcation

Parameter  $r$ 에 의존하는 system  $\dot{x} = f_r(x) = f(x, r)$ 을 생각하자. 그러면, 이 dynamical system의 fixed point는  $r$ 에 의존하여 결정될 것이고, 이는  $f(x^*(r), r) = 0$ 과 같이 표현될 것이다. 만일, 특정한  $r$ 에서 Structural behaviour가 크게 바뀐다면 이  $r$ 을  $r_c$ 라고 하고 그 때의  $(x_c, r_c)$ 를 bifurcation point라고 부른다. ( $r_c$ 는 bifurcation parameter) 만일  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) \neq 0$ 이라면 그 point는 structurally stable할 것이므로, 반드시  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_c, r_c) = 0$ 인 non-hyperbolic point에서만 bifurcation이 생긴다.

#### 2.1.1 As an Inverse function theorem

특히,  $\dot{x} = f(x, r)$ 의 equilibria는  $f$ 의 영점, 즉  $f(x, r) = 0$ 에서 나타날 것이다. 그런데 만일  $(x_0, r_0)$ 에서  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, r_0)} \neq 0$ 이라면, 그 근방에서  $f(x^*(r), r) = 0$ 으로 매끄럽게 나타날 것이다. 즉, 전혀 bifurcation이 일어나지 않는다. 그러므로, bifurcation이 일어나기 위해서는 non-hyperbolic할 필요가 있다.

#### 2.1.2 AS a Taylor series

테일러 전개로도 같은 이유를 찾을 수 있다.  $(x_0, r_0)$  근방에서의 Taylor series를 생각해보자.

$$0 = f(x^*(r), r) = f(x_0, r_0) + (x^* - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, r_0)} + (r - r_0) \frac{\partial f}{\partial r}|_{(x_0, r_0)} + \dots$$

이것이  $x^* = x^*(r)$ 로 풀리기 위해서는 당연히  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, r_0)} \neq 0$ 이어야만 한다. 따라서, Bifurcation이 일어나는 지점에서는,

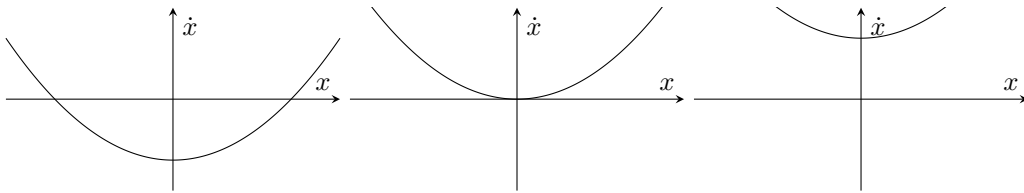
1.  $f = 0$  (Fixed point 조건)
2.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  (Non-hyperbolic 조건)

이를 모두 만족해야한다.

### 2.2 Saddle-Nodoe Bifurcation

**Prototypical Example :**  $\dot{x} = r + x^2$

이 그래프는  $r$ 에 따라서 다양하게 나타난다. 가장 큰 특징은  $r < 0$ 에서의 두 고정점이  $r = 0$ 에서 하나로 합쳐졌다가



$r > 0$ 에서는 사라진다는 것이다. 이러한 bifurcation을 saddle-node라고 부른다. 특히,  $\dot{x} = r + x^2$ 와  $\dot{x} = r - x^2$ 는 사실 같은 plot인데,  $x \rightarrow -x, r \rightarrow -r$ 의 변환을 적용하면,

$$\begin{aligned} -\dot{x} &= -r + x^2 \\ \dot{x} &= r - x^2 \end{aligned}$$

그 형태가 똑같아지기 때문이다. 이 form ( $\dot{x} = r - x^2$ )를 saddle-node bifurcation의 **normal form**이라고 하며, saddle-node bifurcation이 일어나는 구간에서는 local하게 늘  $\dot{x} = r - x^2$ 로 표현할 수 있다.

## 2.3 Normal Form Theory

다음과 같은 테일러 전개에서 시작하자.

$$\begin{aligned}\dot{x} = f(x, r) &= f(x^*, r_c) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x} + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (r - r_c)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dots\end{aligned}$$

특히, 첫 두 항은 Bifurcation에 대해 0이 된다. 따라서,

$$\dot{x} = (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(x^3)$$

와 같이 쓸 수 있다. 이로부터, saddle-node bifurcation은  $\frac{\partial f}{\partial r} \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$ 을 요구함을 알 수 있다. 또한, 다음과 같은 변수변환을 통해 normal form으로 바꿀 수 있다.

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \dots$$

$$X := -b(x - x^*)$$

$$R := -ab(r - r_c)$$

$$\dot{X} = R - X^2 + O(X^3)$$

심지어, 테크닉을 이용해 higher order term을 없앨 수도 있다.

$$\dot{x} = r - x^2 + ax^3 + O(x^4)$$

이와 같이 cubic term을 상정하자. 그리고,  $x =: X + bX^4$ 와 같이 정의하자. 그러면,

$$X = x - bX^4 = x - b(x - bX^4)^4 = x - bx^4 + O(x^7)$$

이므로,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (1 - 4bx^3 + \dots)\dot{x} = (1 - 4bx^3 + \dots)(r - x^2 + ax^3 + \dots) \\ &= (1 - 4b(X + bX^4) + \dots)(r - (X + bX^4)^2 + a(X + bX^4)^3 + \dots) \\ &= r - X^2 - 4brX^3 + aX^3 + O(X^4) \\ &= r - X^2 + (a - 4br)X^3 + O(X^4)\end{aligned}$$

가 되어,  $b = \frac{a}{4r}$ 을 대입하면  $\dot{X} = r - X^2 + O(X^4)$ 를 얻는다.

## 2.4 Transcritical Bifurcation

만일, 어떤 fixed point  $x^*$ 가 모든  $r$ 에 대해  $f(x^*, r) = 0$ 이면,  $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r) = 0$ 이 모든  $k$ 에 대해 참일 것이다.

### Example

$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ 의 경우에,  $N = 0$ 이 parameter와 관계 없이 늘 fixed point가 된다.

테일러 전개를 통해 또 식을 조작해보자.

$$\begin{aligned}f(x, r) &= f(x^*, r_c) + (x - x^*) \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x^*, r_c)} + (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r}|_{(x^*, r_c)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*, r_c)} + \frac{1}{2} (r - r_c)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}|_{(x^*, r_c)} + (x - x^*)(r - r_c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}|_{(x^*, r_c)} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(x^*, r_c)} + (x - x^*)(r - r_c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}|_{(x^*, r_c)} + \dots\end{aligned}$$

따라서, Transcritical bifurcation이 일어날 조건이 다음과 같음을 알 수 있다.



- $f(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial r}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, r_c) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x^*, r_c) = 0$

### Example

$\dot{x} = r \ln x + x - 1 : x^* = 1$ 이 모든  $r$ 에 대해 fixed point이다.

$u = x - 1 (|u| \ll 1)$ 로 두면,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{x} = r \ln(u + 1) + u \\ &= r \left[ u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \dots \right] + u \\ &= (r + 1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3)\end{aligned}$$

이제  $u = av$ 로 두면,

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{1}{a}\dot{u} \\ &= \frac{1}{a} \left[ (r + 1)av - \frac{1}{2}ra^2v^2 + O(v^3) \right] \\ &= (r + 1)v - \frac{1}{2}rav^2 + O(v^3)\end{aligned}$$

이므로,  $a \leftarrow \frac{2}{r}$ 로 넣으면,

$$\dot{v} = (r + 1)v - v^2 + O(v^3)$$

이고,  $X \leftarrow v, R \leftarrow r + 1$ 로 두면,

$$\dot{X} = RX - X^2 + O(X^3)$$

가 성립한다.  $R \neq 0$ 에 대해,  $y := X + bX^k$ 로 두면 higher order term을 없앨 수 있다.

Physics에는 laser라는 좋은 예시가 있다.

$$\begin{aligned}\dot{n} &= (\text{gain}) - (\text{loss}) = G \cdot n \cdot N - k \cdot n \\ N(t) &= N_0 - \alpha n\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned}\dot{n} &= Gn(N_0 - \alpha n) - kn \\ &= (GN_0 - k)n - G\alpha n^2\end{aligned}$$

## 2.5 Pitchfork Bifurcation

Pitchfork bifurcation은 굉장히 ideal한 상황으로, 다음과 같은 odd symmetry가 필요하다 :  $f(-x, r) = -f(x, r)$ . 이 경우에는,  $x \rightarrow -x$ 에 대해 invariant하다. 따라서,

- $f(0, r) \equiv 0$  for all  $r$ 이고,  $x^* = 0$ 은 trivial한 fixed point이다. 따라서,  $\frac{\partial^k f}{\partial r^k}(0, r_c) = 0$ 이다.
- $f$ 가 odd하므로, second derivative (짝수-번) 역시 odd하다.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, r_c) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, r_c) = \dots = 0$$

Pitchfork bifurcation은 다음과 같은 Taylor expansion을 갖는다.

$$f(x, r) = (x - x^*)(r - r_c) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial r}(x^*, r_c) + \frac{1}{3!}(x - x^*)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x^*, r_c) + \dots$$

따라서, 중요한 것은  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ 의 부호이다.

### 2.5.1 Supercritical Pitchfork

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 0$ 인 경우, *supercritical*하고, *normal form*은  $\dot{x} = rx - x^3$ 이다.

- $r < 0$ 인 경우 :  $rx - x^3$ 은 계속해서 감소하며,  $x = 0$  근처에서 exponentially decay한다 :  $\dot{x} = rx$ 로부터,  $x = x_0 e^{rt}$ 이기 때문이다.
- $r = 0$ 인 경우 :  $\dot{x} = -x^3$ 이므로, algebraically decay한다.
- $r > 0$ 인 경우 :  $|x| \ll 1$ 에서  $rx$ 가 dominant하므로, stable한 fixed point 둘이 생기고  $x = 0$ 에서는 unstable해진다.

이는 secondary 상변이에서 일어나는 현상이다. (Ising model for magnetization)

### 2.5.2 Subcritical Pitchfork

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} > 0$ 인 경우, *subcritical*하고, *normal form*은  $\dot{x} = rx + x^3$ 이다.

그러나 이 경우에는  $r > 0$ 에서 본질적으로 불안정하므로,  $-x^5$ 를 통해 '눌러'줘야한다. 즉,  $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$ 을 생각하면, subcritical bifurcation과 saddle-node bifurcation이 모두 일어난다. 또, 그래프를 잘 관찰하면 Hysteresis의 이유를 알 수 있다.

### 2.5.3 Example : moving bead on a rotating hoop

반지름  $r$ 인 hoop를 따라서 bead가 움직일 수 있고, 이 hoop가 각속도  $\omega$ 를 가지고  $z$ -축을 회전축으로 하여 회전하고 있다고 하자. 그러면, 이 bead의 움직임을 기술하는 방정식은 다음과 같이 세울 수 있다.

$$mr\ddot{\phi} = -b\dot{\phi} - mg \sin(\phi) + mr\omega^2 \sin(\phi) \cos(\phi)$$

만일 friction이 매우 크다면, 즉  $|mr\ddot{\phi}| \ll |b\dot{\phi}|$ 인 조건에서는(overdamping) 식이 다음과 같이 바뀐다.

$$b\dot{\phi} = mr\omega^2 \sin(\phi) \cos(\phi) - mg \sin(\phi) = mg \sin(\phi) \left( \frac{r\omega^2}{g} \cos(\phi) - 1 \right)$$

따라서,  $\sin(\phi) = 0$ 이 되는  $\phi^*$ 는  $\phi^* = 0$ 과  $\phi^* = \pi$ 이다. 분석을 용이하게 하기 위해,  $\gamma = \frac{r\omega^2}{g}$ 라고 놓았다. 그러면, Supercritical pitchfork이 일어나게 된다.

### 2.5.4 Nondimensionalization

식을 nondimensionalization하기 위해,  $\tau = \frac{t}{T}$ 로 설정하였다. 그러면,

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tau}$$

이고,  $\dot{\phi} = \frac{1}{T} \frac{d\phi}{d\tau}$ 이 되고  $\ddot{\phi} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2}$ 이 된다. 우리는  $\phi_T$  혹은  $\phi_{TT}$ 가 Order 1, 그러니까  $O(1 = 10^0)$ 이길 바라고 있다. 우선, 식에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\frac{r}{gT^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{b}{mgT} \frac{d\phi}{d\tau} - \sin(\phi) + \frac{r\omega^2}{g} \sin(\phi) \cos(\phi)$$

$\sin(\phi)$ 가  $O(1)$ 이므로,  $\frac{b}{mgT}$  역시  $O(1)$ 이길 바라고 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{b}{mgT} &= 1 \\ T &= \frac{b}{mg} \end{aligned}$$

여야만 한다. 그러면,

$$\epsilon = \frac{r}{gT^2} = \frac{rm^2g}{b^2}$$

이고, 이 값이 1보다 매우 작을 때가 overdamping이 일어나는 것이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{d^2\phi}{d\tau^2} &= -\frac{d\phi}{d\tau} - \sin(\phi) + \gamma \sin(\phi) \cos(\phi) \\ \gamma &:= \frac{r\omega^2}{g} \\ \epsilon &:= \frac{rm^2g}{b^2} \end{aligned}$$

이다.

### 2.5.5 Phase plane analysis

다음과 같이, 2nd order ODE를 1st order ODE 2개로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon \ddot{\phi} &= -\dot{\phi} + f(\phi) \\ \Omega &:= \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} \end{aligned}$$

로부터,

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \Omega \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{\epsilon}(f(\phi) - \Omega) \end{cases}$$

만일  $f(\phi)$ 와  $\Omega$ 의 차이가 커서  $f(\phi) - \Omega$ 가  $O(1)$ 이라면,  $\dot{\Omega}$ 는  $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \gg 1$ 이다. 따라서,  $\Omega$ 는 빠르게 변화하여  $f(\phi) - \Omega = O(\epsilon)$ 까지 줄어든다. 즉, 그 때는  $\epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} = 1$ 의 order의  $\dot{\Omega}$ 를 갖게 된다. (Quasi-steady-state)

## 2.6 Insect Outbreak

TBD

## 3 Flows on the circle

Circle,  $S^1$  위에서의 flow는 oscillation이 일어날 수 있다. ( $[0, 2\pi]/(0 = 2\pi)$ 이므로...)

### 3.1 Uniform oscillator

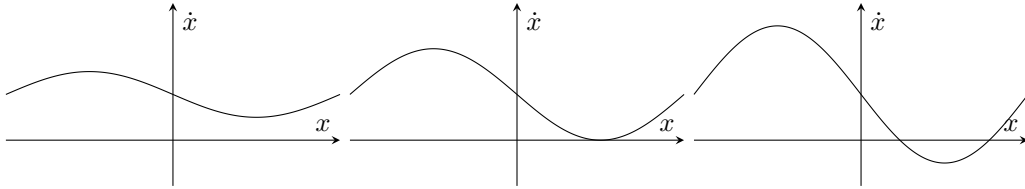
$$\dot{\theta} = \omega$$

상수 각속도  $\omega$ 에 대해,  $\theta = \omega t + \theta_0$ 이 되므로, oscillation이 일어나고 period는  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 이다. 만일 두 명이 원형 트랙을 각각 주기  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ 를 가지고 돌고 있다면 ( $T_1 < T_2$ ), 둘의 위상차  $\phi = \theta_1 - \theta_2$ 는  $\dot{\phi} = \omega_1 - \omega_2 > 0$ 이고, overtaking의 주기는 다음과 같다.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{1/T_1 - 1/T_2}$$

### 3.2 Nonuniform oscillator

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin(\theta)$$



각각  $a < \omega, a = \omega, a > \omega$ 인 경우이다.  $a = \omega, \theta = \frac{\pi}{2}$ 에서 Saddle-node bifurcation이 일어남을 확인할 수 있다. 특히,  $a < \omega$ 일 때의 oscillation의 period를 다음과 같이 계산해보자.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= f(\theta) = \omega - a \sin(\theta) \\ T &= \int_0^T dt = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{f(\theta)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} \end{aligned}$$

따라서,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega + a}\sqrt{\omega - a}} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$$

라고 할 수 있다. 즉, 주기가  $T \sim (a_c - a)^{-1/2}$ 의 속도로 발산한다.

### 3.3 Ghost and Bottleneck

$\dot{x} = r + x^2$ 에 대해, bottleneck이 되는 주기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_{bn} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1}(x)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

특히,  $\dot{\theta} = \omega - a \sin(\theta)$ 에서  $\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$ 로 놓으면, 다음과 같이 saddle node의 normal form으로 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega - a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \\ &= \omega - a \cos(\phi) \\ &= \omega - a \left[1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \dots\right] = (\omega - a) + \frac{1}{2}a\phi^2 + O(\phi^4) \end{aligned}$$

이제,  $x = \frac{1}{2}a\phi$ 와  $r = \frac{1}{2}a(\omega - a)$ 로 놓으면,

$$\dot{x} = \frac{1}{2}a\dot{\phi} = r + x^2 + O(x^4)$$

따라서, 주기는  $T \simeq \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{a}\sqrt{\omega - a}} \simeq \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$ 이다.

### 3.4 Overdamped pendulum

길이가  $L$ 인 줄에 질량  $m$ 의 구가 매달려 있고, 반시계 방향으로  $\Gamma$ 의 torque를 받는다고 하자. 그러면, 다음과 같은 torque balance 식을 세울 수 있다.

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\sin(\theta) = \Gamma$$

만일  $b$ 가 크다면,  $mL\ddot{\theta}$ 는 잠간의 transient 후에 무시할 수 있다. 그러면,

$$\begin{aligned} b\dot{\theta} &= \Gamma - mgL\sin(\theta) \\ \frac{b}{mgL}\dot{\theta} &= \left(\frac{\Gamma}{mgL}\right) - \sin(\theta) \end{aligned}$$

이므로,  $\tau \equiv \frac{t}{t_0} = \frac{mgL}{b}t$ 로 놓으면,  $\gamma = \frac{\Gamma}{mgL}$ 을 얻는다. 그러면,

$$\theta' = \gamma - \sin(\theta)$$

이다.

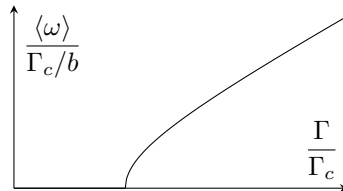
만일  $\gamma > 1$ 이면, applied torque가 충분히 커서 oscillation이 일어난다. 이 때, period는,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

average frequency는  $\sqrt{\gamma^2 - 1}$ 이고,

$$\begin{aligned} \langle \omega \rangle &= \frac{1}{t_0} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{mgL}{b} \sqrt{\gamma^2 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{\Gamma^2 - (mgL)^2}}{b} = \frac{\Gamma_c \sqrt{(\Gamma/\Gamma_c)^2 - 1}}{b} \end{aligned}$$

이다. ( $\Gamma_c := mgL$ ) 만일  $\gamma = 1$ 이면,  $\frac{\pi}{2}$ 에서 torque balance가 이뤄진다. 반대로,  $\gamma < 1$ 이면, net rotation이 일어나지 않아  $\langle \omega \rangle = 0$ 이다.



### 3.5 Synchronization of fireflies

반딧불이의 natural (no stimulus) phase를  $\theta(t)$ , frequency를  $\omega$ 라고 할 때, 반딧불이에게 Phase가  $\Theta$ 이고 frequency가  $\Omega$ 인 flash를 비춰준다고 하자. 둘 다 phase가 0이 될 때 빛나며,  $\dot{\Theta} = \Omega$ 이다.

**Modelling.**

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta)$$

여기서  $A$ 는 반딧불이의 resetting strength이다. 그러면, phase difference  $\phi = \Theta - \theta$ 는 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin(\phi)$$

그러면,  $\tau = At$ 이고  $\mu = \frac{\Omega - \omega}{A}$ 로 놓으면,  $\mu$ 에 따라 분석할 수 있다. *Entrainment*는  $-1 \leq \frac{\Omega - \omega}{A} \leq 1$ 일 때만 일어난다. 즉,

$$\omega - A \leq \Omega \leq \omega + A$$

에서 일어난다.

## 4 Linear systems

이번 절의 목표는 다음을 해결하는 것이다.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

즉,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 를 해결할 것이다. 이는, 앞으로 다음과 같은 2계 미분방정식을 다룰 수 있음을 의미한다.

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x})$$

$y := \dot{x}$ 라고 정의하고, 다음과 같은 두 개의 1계 미분방정식을 생각하면 충분하기 때문이다.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= F(x, y) \end{cases}$$

특히, 분석을 위하여 다음과 같은 용어를 사용한다.

- Fixed point :  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$
- Closed orbits :  $T > 0$ 이 있어서  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$  for all  $t$ .

### 4.1 Simple harmonic oscillator

다음과 같은 simple harmonic oscillator를 생각하자.

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

그러면, 이는 다음과 같은 연립 방정식으로 바꿀 수 있다.

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\omega^2 x$$

특히,  $\frac{dv}{dx} = \frac{\dot{v}}{\dot{x}} = -\frac{\omega^2 x}{v}$ 로부터,  $v dv + \omega^2 x dx = 0$ 이고, 양변을 적분하면  $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constant}$ 를 얻게 된다. 이는 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 합이므로, simple harmonic oscillator에서는 energy가 보존됨을 의미한다.

## 4.2 Phase portraits

이 절에서는  $\dot{x} = Ax$ 를 생각하자. 여기서,  $A = \text{diag}(a, -1)$ 이다. 그러면, 이는 다음과 같은 해를 갖는다.

$$\mathbf{x}(t) = x_0 e^{at} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_0 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이로부터,  $a$ 의 범위에 따라 여러가지 phase portrait을 생각할 수 있다.

1.  $a < 0, a \neq -1$  : 이 경우  $a < -1$ 이면  $x$ 축으로 더 빠르게 감소하며  $-1 < a < 0$ 이면  $y$ 축으로 더 빠르게 감소한다. 따라서, 이 두 경우 모두 **Stable node**를 갖는다.
2.  $a = -1$  : 이 경우 두 방향 모두로 동일한 속도로 감소한다. 즉, **star**를 갖는다.
3.  $a = 0$  : 이 경우  $x$ 방향으로는 움직이지 않는다. 즉,  $y = 0$ 이 **line of attractor**가 된다.
4.  $a > 0$  : 이 경우  $x$ 방향으로는 발산하며  $y$ 방향으로는 0으로 수렴한다. 즉, **saddle**을 갖는다.

특히, Fixed point로 향하게 되는, 즉  $t \rightarrow \infty$ 일 때  $x(t) \rightarrow x^*$ 인 초기값  $x_0$ 을 **stable manifold**라고 한다. 반대로,  $t \rightarrow -\infty$ 일 때  $x(t) \rightarrow x^*$ 인 초기값  $x_0$ 을 **unstable manifold**라고 한다.

## 4.3 Stability

Fixed point  $\mathbf{x}^*$ 에 대해, 그 stability는 다음과 같이 분류할 수 있다.

1. **Attracting** :  $\mathbf{x}^*$  근방의 trajectory가 전부  $\mathbf{x}^*$ 로 수렴하는 경우. 즉,

$$\exists \delta > 0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

2. **Lyapunov Stable** :  $\mathbf{x}^*$  근방의 trajectory가 전부  $\mathbf{x}^*$ 와 가까운 경우. 즉,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$$

특히,  $\mathbf{x}^*$ 가 Attracting이고 Lyapunov인 경우 **asymptotically stable**하다고 하고,  $\mathbf{x}^*$ 가 Lyapunov이지만 attracting이 아닌 경우 **neutrally stable**하다고 한다. 당연히, attracting도 Lyapunov도 아닌 경우 unstable하다고 한다.

## 4.4 Linear systems

다음과 같은 linear system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= bx + dy \end{cases}$$

이는  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 라고 쓸 수 있다. 이 때,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 이고  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 이다. 이제, solution이  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  꼴이라고 하자. 그러면,  $\dot{\mathbf{x}} = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = A e^{\lambda t} \mathbf{v}$ 로부터,  $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ 를 구하면 된다. 즉,  $\det(A - \lambda I) = 0$ 을 풀면 되고, 다시 말해 다음과 같은 Characteristic polynomial  $\phi_A$ 의 해를 구하면 충분하다.

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

여기서  $\tau = \text{tr}(A)$ 이고,  $\Delta = \det(A)$ 이다.

### 4.4.1 Two distinct real eigenvalues

이 경우, 두 개의 eigenvalue  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 구할 수 있고, 그에 대응하는 linearly independent한 eigenvector  $v_1, v_2$ 가 존재한다. 따라서, 해는  $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2$ 이고,  $\lambda$ 의 부호에 맞추어 stable/unstable node 혹은 saddle을 결정하면 된다.

#### 4.4.2 Two distinct imaginary eigenvalues

이 경우, 두 개의 eigenvector  $v_1, v_2$ 는 서로 complex conjugate 관계이며( $A$ 가 real matrix이므로) 따라서 해는  $\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\omega t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\omega t)$ 가 된다. 여기서  $\alpha = \frac{\tau}{2}$ 이고,  $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2}$ 이다.

1.  $\text{Re}(\lambda) = \alpha < 0$  즉,  $\tau < 0$  : decaying하는 spiral을 만들게 되며, stable spiral을 이룬다.
2.  $\text{Re}(\lambda) = \alpha = 0$  ( $\tau = 0$ ) : center를 이룬다.
3.  $\text{Re}(\lambda) = \alpha > 0$  즉,  $\tau > 0$  : growing하는 spiral을 만들게 되며, unstable spiral을 이룬다.

#### 4.4.3 Equal eigenvectors

이 경우, 다시 두 개의 case로 나눌 수 있다.

1. Case 1. Two independent eigenvectors  $v_1, v_2$  : 이 경우, 모든 방향이 eigenvector가 되므로 반드시 star이다.
2. Case 2. Only one eigenvector  $v_1$  : 이 경우, generalized eigenvector  $(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$ 을 찾아야 한다. 특히, 그 phase portrait은 degenerated node를 이루게 된다.

## 5 Phase Portraits

일반적인 Nonlinear system을 분석하기 위해서는, 우선 다음과 같은 용어를 정의해야 한다.

- **x - nullcline** :  $\dot{x} = 0$ 인 curve.
- **y - nullcline** :  $\dot{y} = 0$ 인 curve.

당연히,  $x$ -nullcline과  $y$ -nullcline의 교점이 바로 fixed point가 된다.

### Theorem 5.1

System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 에 대해, 만일  $\mathbf{f}$ 가  $\mathcal{C}^1$ 이라면, 이 system의 해는 유일하게 존재한다.

이로 인해, 두 trajectory는 절대로 intersect할 수 없다. 따라서, closed orbit이 있다면 내부와 외부는 서로 영향을 줄 수 없다.

### 5.1 Linearization

Linearization함으로써 어느정도 비선형 시스템을 분석할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

이와 같은 시스템에 대해, Perturbation이  $u = x - x^*, v = y - y^*$ 라면, 다음과 같은 linearization을 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= f(x, y) = f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \dots \\ \dot{v} = \dot{y} &= g(x, y) = g(x^* + u, y^* + v) \\ &= g(x^*, y^*) + u \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) + \dots \end{aligned}$$



따라서, 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

즉, Jacobian matrix가 바로 linearization이다.

## 5.2 Population dynamics

시간  $t$ 에서의 토끼의 개체수를  $x(t)$ , 양의 개체수를  $y(t)$ 라고 하자. 특히, 개체수이므로  $x, y \geq 0$ 이어야만 한다. 둘의 성장은 기본적으로 Logistic model을 따르지만, 둘의 competition에 의해 추가적인 term이 붙는다고 모델링하자.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3-x) - 2xy \\ \dot{y} = y(2-y) - xy \end{cases}$$

특히, 토끼가 양보다 더 빨리 성장하지만 토끼와 양의 경쟁은 양이 더 유리함( $2xy$ 와  $xy$ )을 확인하자. 이 모델로부터,  $(0,0), (3,0), (0,2), (1,1)$ 이 바로 fixed point이다. Jacobian은 다음과 같이 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-2y-x \end{bmatrix}$$

따라서, 이와 phase portrait을 이용하여 분석하면  $(0,0)$ 은 unstable node,  $(3,0)$ 과  $(0,2)$ 는 stable node,  $(1,1)$ 은 saddle 이 된다.

값에 따라서, competitive exclusion과 coexistence가 결정됨을 확인하자.

## 5.3 Conservative System

힘이 만일 속도에 의존하지 않는다면, 뉴턴의 운동 법칙에 의해 운동 방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{x} = F(x)$$

특히,  $F(x) = -\frac{dV}{dx}$ 인  $V$ 가 있을 것이고 따라서 이 경우에는

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x) \\ m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} &= 0 \\ \dot{x} \left( m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x) \right) &= 0 \end{aligned}$$

에너지가 보존된다.

### Definition 5.2

비선형 시스템  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 에 대해, 만일  $E$ 가 real-valued이고 continuous한 function이며, open set에서 constant하지 않다면,  $E$ 를 **Energy**라고 한다. 이 때, energy는 trajectory를 따라서  $\frac{dE}{dt} = 0$ 이다.

만일 어떤 시스템에 결부된 에너지가 있다면, 그 시스템은 **Conservative system**이다. 특히, conservative system에는 attractor나 repeller가 존재할 수 없다. 만일  $\mathbf{x}^*$ 가 attractor여서 basin  $D$ 를 갖는다면,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 \in D &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \\ &\implies \lim_{t \rightarrow \infty} E(\mathbf{x}(t)) = E(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

따라서, Basin 전체에서  $E$ 가 constant한데, 이는 정의에 모순이다.

### 5.3.1 Double-well potential

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

이 시스템은 보존적이며, 세 fixed point  $(\pm 1, 0), (0, 0)$ 을 갖는다.

특히, nonlinear center를 갖는데, "다시 돌아오는 부메랑"인 **homoclinic orbit**을 갖는다.

### 5.3.2 Reversible systems

만일 어떤 시스템이  $t \rightarrow -t, y \rightarrow -y$ 에 대해 invariant하다면 그 시스템을 **Reversible**하다고 한다. 이 조건을 만족하기 위해서는,  $f$ 는  $y$ 에 odd여야 하며  $g$ 는  $y$ 에 even이어야 한다. 그러면,

$$\begin{aligned} y \rightarrow -y &\implies \begin{cases} \dot{x} &= f(x, -y) \\ -\dot{y} &= g(x, -y) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \dot{x} &= -f(x, y) \\ \dot{y} &= -g(x, y) \end{cases} \\ &\implies (t \rightarrow -t) \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases} \end{aligned}$$

이므로, reversible하게 된다. 즉,  $(x(t), y(t))$ 가 solution이라면,  $(x(-t), -y(-t))$  역시 solution이 된다.

#### Example 5.3

모든 conservative system은 reversible하다. 다음과 같은 conservative system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= F(x) \end{cases}$$

여기서  $y$ 는  $y$ 에 odd하며  $F(x)$ 는  $y$ 에 무관하므로  $y$ 에 even하다. 따라서, reversible하다.

## 5.4 Periodicity

### 5.4.1 Cylindrical phase space

phase variable  $x, y$  중에  $x$ 가 periodic한 경우,  $(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$ 처럼 생각할 수 있고, 따라서 periodic해진다. 다음과 같은 예시를 생각해 보자.

#### Example

$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$ 인 pendulum without damping을 생각해 보자. 그러면,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ 로 두고,  $\tau = \omega t = \frac{t}{T}$ 로 두면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

그러면, 이 flow는 다음과 같은 이유로 reversible하다.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v & \text{odd in } v \\ \dot{v} = -\sin(\theta) & \text{even in } v \end{cases}$$

fixed point는  $n \in \mathbb{Z}$ 에 대해  $(n\pi, 0)$ 이다. 또, Jacobian은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

그러면,  $(2k\pi, 0)$ 에 대해  $\tau = 0, \Delta = 1$ 이므로 linear center이다. 즉, reversible하고 linear center이므로 nonlinear center를 갖게 된다.

또한,  $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos(\theta)$ 가 시간에 대해 변하지 않으므로 conservative system이다.  $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos(\theta)$ 에 대해,  $E = -1$ 인 점이 neutrally stable한 점,  $-1 < E < 1$ 이 nonlinearly circular한 trajectory,  $E = 1$ 이 heteroclinic orbit,  $E > 1$ 이 계속해서 도는 trajectory이다. 그러나, 이를 cylindrical phase space로 접게 되면 heteroclinic orbit이었던 것이 homoclinic하게 바뀐다.

### 5.4.2 Quasiperiodicity

다음과 같은 uncoupled oscillator를 생각해보자.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 \end{cases}$$

그러면,  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ 라는 phase space에서의 trajectory는 slope  $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ 을 갖는다.

1.  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ 인 경우, 모든 trajectory는 closed orbit이다.  $\theta_1$ 이  $q$ 번 도는 동안  $\theta_2$ 가  $p$ 번 돌아 정확히 같은 자리로 복귀하기 때문이다.
2.  $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{Q}$ 인 경우, trajectory는 절대 close되지 않는다. 이를 **Quasiperiodicity**라고 하며, torus를 trajectory가 densely cover한다. 즉, 모든 점에 대해 trajectory가 그 점의 arbitrarily small neighborhood를 지난다.

## 5.5 Poincaré Index Theory

**Index** of closed curve  $C$ 란,  $C$ 를 vector field가 몇 번 휘감는지 그 winding number를 measure한 것이다. 즉, 주어진 v.f.  $\mathbf{f}$ 에 대해 closed curve를  $\mathbb{Z}$ 로 보내는 mapping이다. 다음과 같은 vector field를 생각해보자.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

특히,  $C$ 는 simple closed curve여야 하며,  $C$ 는 fixed point를 지나서는 안 된다. 그러면,  $x$ 축 양의 방향과 vector field가 이루는 각은 다음과 같아야만 한다.

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan^{-1} \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

(특히  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ 이면  $\phi$ 가 정의되지 않는다.)  $\mathbf{x}$ 가  $C$  주위를 돌면,  $\mathbf{f}$ 가 smooth하고  $C$  역시 연속이므로  $\phi$ 는 연속적으로 변해야만 한다. 또한, 한 바퀴를 돌 때  $\dot{\mathbf{x}}$ 는 동일하므로,  $\phi$ 는  $2n\pi$ 만큼 변할 것이다. ( $n \in \mathbb{Z}$ ) 한 바퀴 도는 동안에 변하는 각도를  $[\phi]_C$ 라고 두면, index of curve w.r.t.  $\mathbf{f}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$I_c := \frac{1}{2\pi} [\phi]_C \in \mathbb{Z}$$

이를 구하기 위해, curve  $C$ 가 parameter  $s$ 에 대해 parametrization되어 있다고 하자. 즉,  $\mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))$ 라고 하자. ( $s_0 \leq s \leq s_1$ ) 그러면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \tan(\phi) &= \sec^2 \phi \dot{\phi} = \frac{f^2 + g^2}{f^2} \dot{\phi} \\ &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{g(x(s), y(s))}{f(x(s), y(s))} \right] = \frac{f\dot{g} - g\dot{f}}{f^2} \end{aligned}$$

이므로,

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{f\dot{g} - g\dot{f}}{f^2 + g^2}$$

가 성립한다. 여기서  $\dot{f} = \frac{df}{ds}, \dot{g} = \frac{dg}{ds}$ 이다. 그러므로,

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{f\dot{g} - g\dot{f}}{f^2 + g^2} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$$

그러나 이 값을 구하는 것은 너무 어려우므로, 그림을 그려서 구할 수 있다. 만일 **Node, spiral, degenerated node, star, center**라면 작은 curve에서 index는 +1이고, **saddle**인 경우에는 index가 -1이다.

이 index의 성질은 다음과 같다.

1. curve  $C$ 와  $C'$ 가 homotopic하고 homotopy가 fixed point를 지나지 않는다면,  $I_C = I_{C'}$ 이다.

proof. curve가 continuously 변화할 때  $[\phi]_C$ 와  $I_C$  역시 연속적으로 변화해야 한다. 그런데,  $I_C \in \mathbb{Z}$ 이므로  $I_C$ 는 constant해야만 한다.

2.  $C$ 가 만일 fixed point를 갖지 않는다면,  $I_C = 0$ 이다.

proof.  $f$ 가 smooth하므로  $f, \phi$ 는 아주 작은  $C'$ 에서 거의 constant해야 한다. 즉,  $[\phi]_{C'} = 0$ 이므로 property 1에 의해  $I_C = I_{C'} = 0$ 이다.

3.  $I_C$ 는  $t \rightarrow -t$ 에 대해 invariant하다.

proof. 모든 각이  $\phi \mapsto \phi + \pi$ 여야 한다. 그러므로,  $[\phi]_C$ 는 바뀌지 않는다. 즉, stability는 index와 무관하다.

4. 만일  $C$ 가 trajectory라면,  $I_C = +1$ 이다.

따라서, index of point  $\mathbf{x}^*$ 는  $\mathbf{x}^*$ 를 둘러싼 작은 closed curve  $C$ 에 대해 (no other f.p. : 즉, isolated f.p.여야 한다.)  $I_{\mathbf{x}^*} = I_C$ 로 정의하면 이 정의는 well-defined이다.

#### Theorem 5.4

만일 closed curve  $C$  안에 isolated fixed point  $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$ 이 있으면,

$$I_C = \sum_{k=1}^n I_k = I_1 + \dots + I_n$$

이다. 여기서  $I_k = I_{\mathbf{x}_k^*}$ 이다.

#### Corollary 5.5

따라서, closed orbit 안에 fixed point가 몇 개가 있든지  $\sum I_k = +1$ 이다. 즉, 모든 closed orbit은 적어도 하나의 f.p.를 에워싸야 한다. 만일 정확히 하나라면, 그 고정점은 saddle일 수 없다.

## 6 Limit cycle

**Limit cycle**은 isolated closed orbit을 말한다. 선형인 경우 center라면 not isolate이다. 즉, 선형에서는 limit cycle이 나타날 수 없다. 이는  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 에서  $\mathbf{x}(t)$ 가 periodic하면  $c\mathbf{x}(t)$ 도 periodic해야하기 때문이다. ( $c \neq 0$ )

예시 :  $\dot{r} = r(1 - r^2), \dot{\theta} = 1$ 인 경우.

예시 2 : van der Pol oscillator :  $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ 인 경우,  $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$ 가 일종의 damping과 pumping을 한다.

## 6.1 Gradient system

**Gradient system**은 다음을 만족하는 potential function  $V \in C^1$ 가 존재하는 경우이다.

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$$

그러면, closed orbit은 gradient system에서 나타날 수 없다.

*Proof.*  $C$ 가 주기  $T$ 를 갖는 closed orbit이라고 가정하자. 그러면,

$$0 = \Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt = \int_0^T (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = - \int_0^T \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 dt \leq 0$$

이다. 따라서,  $C$ 에서  $\dot{\mathbf{x}} \equiv 0$ 이고 다시 말해 closed orbit이 아니라 fixed point여야만 한다.  $\square$

모든 1-D system은 grad system이다.  $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$ 에서, oscillation이 일어나지 않는다.

그러나, 대부분의 2-D system은 grad system이 아니다. **Gradient system criterion**은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \dot{y} &= g(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial y}\end{aligned}$$

로부터,  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ 여야하므로,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ 여야만 한다.

## 6.2 Lyapunov functions

**Lyapunov function**은 potential function의 generalization이다.

### Definition 6.1

$V(\mathbf{x})$ 가 **global Lyapunov function**이라는 것은 다음을 만족한다는 것이다.

1.  $V(\mathbf{x}) > 0$  for all  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ ,  $V(\mathbf{x}^*) = 0$ . 즉,  $V$ 는 positive definite.
2.  $\frac{dV}{dt} < 0$  for all  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ ,  $\frac{dV}{dt}(\mathbf{x}^*) = 0$ . 즉,  $\frac{dV}{dt}$ 는 negative definite.

그러면, trajectory는  $\mathbf{x}^*$ 로 “flows downhill” 한다. 즉,  $\mathbf{x}^*$ 는 globally asymptotically stable하다.

특히, 만일  $\frac{dV}{dt}$ 가 negative semidefinite하다면,  $\mathbf{x}^*$ 는 그저 globally stable하다. 즉, limit cycle이 존재할 수 있다. 그러나, 실제로 이러한  $V$ 를 찾는 것은 어렵다.

### Example

다음과 같은 system을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3 \end{cases}$$

그러면,  $V(\mathbf{x}) = x^2 + ay^2$ 라고 가정해보자. ( $a > 0$ ).  $V$ 는 positive definite이고

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} = 2x(-x - 2y^2) + 2ay(xy - y^3) \\ &= -2x^2 + (2a - 4)xy^2 - 2ay^4\end{aligned}$$

로부터,  $a = 2$ 라고 두면,  $\frac{dV}{dt} = -2x^2 - 4y^4 < 0$  unless  $x = y = 0$ 이다. 즉,  $V$ 는 global Lyapunov function이다.