

Partial Differential Equations

2dayclean

2025/12/11

Contents

1	Where PDEs come from	2
1.1	What is PDE	2
1.2	Homogeneity and Linearity of PDE	3
1.2.1	First order linear equations	4
1.3	Flows, Vibrations, and Diffusion	6
1.3.1	Simple transport	6
1.3.2	Vibrating string	6
1.3.3	Vibrating Drumhead	7
1.3.4	Diffusion	8
1.3.5	Heat Flow	8
1.3.6	Stationary waves and diffusions	8
1.4	Initial and Boundary conditions	8
1.5	Types of second order PDE	9
2	Waves and Diffusions	9
2.1	The wave equation	9
2.1.1	Initial Value Problem	10
2.1.2	General solution for wave equation	10
2.2	Causality and Energy	11
2.2.1	Causality	11
2.2.2	Energy	12
2.3	Diffusion equation	12
2.3.1	Uniqueness of solution	13
2.3.2	Stability of solution	14
2.4	Diffusion in the whole line	14
2.4.1	Physical interpretation of the fundamental solution	17
2.4.2	Heuristic approach to the general solution via the fundamental solution	18
2.4.3	Example of diffusion equation	18
2.5	Comparison of waves and diffusions	18
3	Reflections and Sources	19
3.1	Diffusion on the half-line	19
3.1.1	Zero Dirichlet boundary value problem	19
3.1.2	Zero Neumann boundary value problem	20
3.2	Reflection of waves	20
3.2.1	Zero Dirichlet boundary value problem	20
3.2.2	Dirichlet problem on a finite interval	21
3.3	Diffusion with a source	21

3.3.1	Diffusion with source on a half line	22
3.4	Wave with a source	23
3.4.1	Coordinate method	23
3.4.2	Green's theorem	24
3.4.3	Operator method	25
3.4.4	Wave with source on half-line	25
4	Boundary Problems	26
4.1	Separation of Variables, the Dirichlet Condition	26
4.1.1	Wave equation	26
4.1.2	Diffusion equation	27
4.2	Separation of Variables, the Neumann Condition	28
4.2.1	Mixed Boundary Condition	29
4.3	Separation of Variables, the Robin Condition	30
4.3.1	Derivation of solution	30
5	Fourier Series	32
5.1	Fourier coefficient	32
5.1.1	Fourier sine series	32
5.1.2	Fourier cosine series	33
5.1.3	Full Fourier Series	33
5.2	Even, Odd, Periodic and complex functions	34
5.2.1	Fourier series and Boundary conditions	35
5.2.2	Complex Form of Fourier Series	35
5.3	Orthogonality and General Fourier Series	36
5.3.1	Complex eigenvalue	38
5.4	Completeness	38
6	Harmonic Functions	41
6.1	Laplace equation	41
6.1.1	Laplace equation in the other systems	42
6.2	Rectangles and Cubes	42
6.3	Poisson's Formula	43
7	Green's identities and Green's Function	47
7.1	Green's First identity	47
7.2	Green's second identity	49
7.3	Green's Function	50
7.4	Green's functions : examples	51

1 Where PDEs come from

1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다. $(x, y, z, \dots, t, \dots)$ (2) 우리가 알고 싶어하는 함수 u 가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

Definition

PDE는 독립변수들과 미지의 함수 u , 그리고 u 의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

Example

PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1. $u_x + u_y = 0$ (transport equation), 더 일반적으로는, $u_x + yu_y = 0$ 이나 $u_x + a(x, y)u_y = 0$ 역시 transport equation 이라고 불립니다.
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace equation), $\nabla^2 u = 0$ 과 같이 쓰기도 합니다.
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Wave equation)
4. $u_t - u_{xx} = 0$ (Heat equation)

1.2 Homogeneity and Linearity of PDE

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를 $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = g(x, y)$ 라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를, $\mathcal{L}[u] = g$ 와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고, $\mathcal{L}[0] = 0$ 이 되도록 \mathcal{L} 을 조작할 수 있습니다. 이러한 \mathcal{L} 은 다음과 같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\rightarrow \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \dots)\end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을 $C^\infty(\Omega)$ 와 같이 쓰면, \mathcal{L} 은 일종의 operator가 됩니다.

Definition 1.1

Operator $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ 가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1. $\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2. $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히, \mathcal{L} 이 linear하다면, $\mathcal{L}[u] = 0$ 은 **homogeneous linear equation**이라고 하고, $\mathcal{L}[u] = g (g \neq 0)$ 은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

Example

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1. $u_x + u_y = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
4. $u_t - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Example

Transport equation의 일종인 $u_x + yu_y = 0$ 은 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ 로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는 $u_x + uu_y = 0$ 은 linear하지 않습니다.

Example

PDE $\cos(xy^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2 + y^2)$ 는 $\mathcal{L} = \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}$ 와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous 합니다.

Proposition 1.2

Superposition Principle : Linear한 \mathcal{L} 에 대해 u_1, u_2, \dots, u_n 이 $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution이라면, constants c_1, \dots, c_n 에 대해 $\sum_{i=1}^n c_i u_i$ 또한 $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

Example 1.3

$u = u(x, y)$ 에 대해, $u_{xx} = 0$ 의 해를 찾아 봅시다.

Recall : $u = u(x)$ 이고 $u'' = 0$ 이라면, $u(x) = c_1x + c_2$ 이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(u_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 &\implies u_x(x, y) = f(y) \\ &\implies u(x, y) = f(y)x + g(y)\end{aligned}$$

Example 1.4

$u = u(x, y)$ 에 대해, $u_{xx} + u = 0$ 의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$ 의 해가 $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 임을 recall하고 나면, $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$

Example 1.5

$u = u(x, y)$ 에 대해, $u_{xy} = 0$ 의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned}u_{xy} = 0 &\implies (u_x)_y = 0 \\ &\implies u_x(x, y) = g(x) \\ &\implies u(x, y) = \int g(x)dx + F(y) = G(x) + F(y)\end{aligned}$$

즉, 해는 $u(x, y) = G(x) + F(y)$ 와 같이 나타납니다.

1.2.1 First order linear equations

$u = u(x, y)$ 꼴의 함수에 대해, $au_x + bu_y = 0$ (*) 꼴의 transport equation이 주어져 있다고 합시다. 이 때, $a, b \neq 0$ 은 상수입니다. 그러면, $\mathcal{L} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ 인 1차 homogeneous linear equation인데, 이를 다음과 같은 두 가지 방법으로 풀어봅시다.

Geometric Method. 우선, $v = (a, b)$ 와 같이 표현합시다. 그러면, u 의 v 방향으로의 directional derivative는 $D_v(u) = \frac{1}{\|v\|}(au_x + bu_y)$ 이고, 주어진 미분방정식 (*)은 $u(x, y)$ 가 v 방향으로의 line에 대해 전부 constant함을 의미합니다. 그리고, v 방향을 가지는 직선은 $bx - ay = c$ 꼴입니다. $u(x, y)$ 의 값은 이 c 에만 의존하게 될 것이며, 따라서 arbitrary한 function f 에 대해 $u = f(c) = f(bx - ay)$ 가 됩니다.

Coordinate Method. 좌표계 (x', y') 를 잡아서 $au_x + bu_y = u_{x'}$ 와 같이 만들 수 있다면 문제가 아주 쉬워질 것입니다. 간단하게, $y' = bx - ay$, 그리고 $x' = ax + by$ 와 같이 좌표계를 설정합시다. (이는 Method 1에 전적으로 의존합니다.)

그러면, chain rule에 의하여,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x', y') &= \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'} \\ \frac{\partial}{\partial y}u(x', y') &= bu_{x'} - au_{y'}\end{aligned}$$

가 성립하고, 따라서 $u_{x'} = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 이제, $u = f(y') = f(bx - ay)$ 라고 쓸 수 있습니다.

Example

$$u_x + yu_y = 0$$

주어진 미분방정식은 $(1, y) \cdot \nabla u(x, y) = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 즉, u 의 (x, y) 점에서 $(1, y)$ 방향으로의 도함수가 0입니다. 따라서, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}$ 인 curve에서 constant하고, 이 curve는 $y = Ce^x$ 와 같이 나타납니다. 이제 u 의 값은 이 C 에 의해서만 결정되므로, $u(x, y) = f(C) = f(y \cdot e^{-x})$ 라고 쓸 수 있습니다.

Example

$$4u_x - 3u_y = 0, \text{ initial condition : } u(0, y) = y^3$$

주어진 미분방정식의 일반적인 해는 $u(x, y) = f(-3x - 4y)$ 입니다. 조건에 의해 $u(0, y) = f(-4y) = y^3$ 이므로, $f(\omega) = -\frac{\omega^3}{64}$ 이고, 따라서 $u(x, y) = \frac{1}{64}(3x + 4y)^3$ 입니다.

Example

$$au_x + bu_y + cu = 0$$

주어진 미분방정식에 대해 $x' = ax + by$ 와 $y' = bx - ay$ 를 통해 좌표 변환을 시행하면,

$$(a^2 + b^2)u_{x'}(x', y') + cu(x', y') = 0$$

을 얻습니다. 따라서, $u(x', y') = f(y') \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}x'\right]$ 이고, 최종적으로는

$$u(x, y) = f(bx - ay) \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right]$$

가 됩니다.

Example

$$u_x + 2xy^2u_y = 0$$

이젠 기계적으로 풀 수 있을 것 같습니다. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1}$ 인 curve는 $C = x^2 + \frac{1}{y}$ 처럼 나타나고, 따라서 $u = f(x^2 + \frac{1}{y})$ 가 됩니다.

Example

$$yu_x + xu_y = 0, \text{ initial condition : } u(0, y) = e^{-y^2}$$

마찬가지로, 결과만 쓰면 : $u(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$

이번에는 간단히 linear nonhomogeneous equation을 푸는 방법에 대해 알아보시다. 먼저, 다음과 같은 미분방정식을 생각합시다.

$$\begin{aligned}u_x + u_y + u &= e^{x+2y} \\ u(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

우선, nonhomogeneous에 대해 handle하는 법을 생각해봅시다.

Proposition 1.6

$\mathcal{L}[u] = g$ (*)와 같은 미분방정식을 생각합시다. 그리고, $u_0(x, y)$ 가 $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 general solution이고 $u_p(x, y)$ 가 $\mathcal{L}[u] = g$ 의 특정한 한 solution이라고 합시다. 그러면 $u_0 + u_p$ 는 늘 (*)의 solution이고, 이는 \mathcal{L} 의 linearity에 의해 자명합니다.

반면, v 가 (*)의 solution이라면, $\mathcal{L}[v - u_p] = 0$ 이므로 $v = u_p + u_0$ 입니다. 즉, 모든 solution은 $u_0 + u_p$ 꼴입니다.

이제, coordinate method를 이용합시다. 우선, 다음과 같이 좌표 변환을 수행합니다.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \implies 2u_{x'} + u = \exp\left(\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)$$

integrating factor method를 이용합시다. $e^{x'/2}$ 를 양변에 곱해주면,

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{1}{2}x'}u_{x'} + e^{\frac{1}{2}x'}u &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\ \frac{\partial}{\partial x'}(2e^{\frac{1}{2}x'}u) &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\ e^{\frac{1}{2}x'}u &= \frac{1}{4}e^{2x' - \frac{1}{2}y'} + f(y') \\ u(x', y') &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x'}f(y') \\ u(x, y) &= \frac{1}{4}e^{x+2y} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}f(x-y) \\ u(x, 0) &= \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}f(x) = 0 \\ (\therefore f(x) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}) \\ u(x, y) &= \frac{1}{4}\exp(x+2y) - \frac{1}{4}\exp(x-2y) \end{aligned}$$

이렇게 해를 얻을 수 있습니다.

1.3 Flows, Vibrations, and Diffusion

이 절에서는 다양한 물리적인 PDE를 유도하는 방법을 배웁니다.

1.3.1 Simple transport

$u(t, x)$ 를 x -방향으로 pipe를 따라 수평하게 흐르는 유체의 밀도라고 두면, flow의 속도 c 에 대해 다음이 성립할 것입니다.

$$\forall h > 0, u(x, t) = u(x + ch, t + h)$$

양변을 h 에 대해 미분한 후 $h = 0$ 을 대입하면, $u_t + cu_x = 0$ 을 얻습니다.

1.3.2 Vibrating string

$u(t, x)$ 를 시간 t 에 위치 x 에서의 줄의 수직한 변위라고 두고, 다음과 같은 몇가지 물리적인 가정을 합시다.

1. 줄은 uniform한 density ρ 를 갖습니다.
2. 줄은 완벽히 탄성적이어서 장력은 접선 방향으로만 작용합니다.
3. 줄에 걸리는 다른 힘은 없습니다.
4. 줄은 오로지 수직 방향으로만 진동합니다.

5. 진동의 진폭은 충분히 작습니다. (0에 가깝습니다.)

이제 시간 t 와 위치 x 에서의 줄에 걸리는 장력을 $T(x, t)$ 와 같이 두도록 합시다. 그러면, line segment $[x_0, x_1]$ 에 대해 걸리는 힘은 오로지 끝점에서의 장력 뿐입니다. 이제, 각각의 위치에서 힘을 분석합니다.

- x_0 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_0, t) \cos \theta_0 = T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_0, t) \sin \theta_0 = T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

- x_1 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

따라서, 합력은 다음과 같이 주어집니다.

- Horizontal (H) : $T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

- Vertical (V) : $T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

조건 (5)에서 $|u_x| \ll 1$ 이고 (거의 0) 따라서 $\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2} \simeq \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \simeq 1$ 입니다. 또, 조건 (4)에서 $(\mathbf{H}) = 0$ 이어야 함을 알 수 있습니다. 이로부터, $T(x_1, t) - T(x_0, t) = 0$ 이므로 $T := T(x, t)$ 를 constant라고 가정할 수 있습니다. (왜 T 가 time-invariant한가?) Vertical에서만 분석하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}) &\simeq T u_x(x_1, t) - T u_x(x_0, t) \simeq (\text{mass}) \times (\text{acceleration}) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt}(x, t) dx \\ &= \rho \int_{x_0}^{x_1} u_{tt}(x, t) dx \\ T u_{xx}(x_0, t) &= \rho u_{tt}(x_0, t) \end{aligned}$$

이제, $c = \sqrt{T/\rho}$ 와 같이 정의하면 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 이라는 wave equation을 얻을 수 있습니다.

1.3.3 Vibrating Drumhead

Drumhead 영역에서, $u(x, y, t)$ 를 위치 (x, y) 와 시간 t 에서 drumhead의 equilibrium position으로부터의 변위(displacement)로 씁시다. 그러면, 1D vibration과 마찬가지로, 작은 closed region D 에서 다음과 같은 식을 세울 수 있습니다.

$$F = \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

여기서 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 은 단순히 n 방향, 즉 outward unit normal vector로의 도함수를 의미합니다. 간단히,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_{\partial D} T \nabla u \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \iint_D \nabla \cdot (T \nabla u) dx dy \\ &= \iint_D T(u_{xx} + u_{yy}) dx dy \end{aligned}$$

처럼 나타낼 수 있습니다. 그러므로,

$$\iint_D T(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \iint_D \rho u_{tt} dx dy$$

가 임의의 영역 D 에서 성립합니다. 이는 곧, $\rho u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) = T\Delta u$ 임을 의미합니다. 마찬가지로의 방법으로, 3D case에서도 $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ 임을 알 수 있습니다.

1.3.4 Diffusion

얇은 관 안에 유체가 가득 찬 경우를 생각합시다. 이제, $u(x, t)$ 를 위치 x 와 시간 t 에서의 물질의 밀도라고 하고, 다음을 가정합니다.

1. 유체는 직접 흐르지 않습니다. 즉, Convection이 일어나지 않습니다.
2. 유체 안의 화학종에 대해, 그 화학종의 diffusion은 Fick's law를 따릅니다.

구간 $[x_0, x_1]$ 안에 담긴 유체의 총 질량은 다음과 같을 것입니다.

$$M(t; x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

따라서, 물질 보존 식에 의해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= k \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= k \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{1}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} k \frac{1}{x_1 - x_0} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] \\ \therefore u_t(x_0, t) &= k u_{xx}(x_0, t) \end{aligned}$$

인테, x_0 은 임의적이므로 $u_t = k u_{xx}$ 라고 쓸 수 있습니다.

마찬가지로, 3D Diffusion 역시 같은 방법으로 유도되어 $u_t = k \Delta u$ 라고 쓸 수 있습니다.

1.3.5 Heat Flow

공간 상의 물질에 대해, $u(x, y, z, t)$ 를 위치 (x, y, z) 와 시간 t 에서 물질의 온도라고 정의합시다. 그러면,

$$\begin{aligned} \iiint_D c \rho u dx dy dz &=: H(t) \\ \iiint_D c \rho u_t dx dy dz &= \iint_{\partial D} k (\nabla u \cdot n) dS = \iiint_D \nabla \cdot (k \nabla u) dx dy dz \end{aligned}$$

이므로, $c \rho u_t = \nabla \cdot (k \nabla u)$ 를 얻습니다. k 가 상수라면, $c \rho u_t = k \nabla^2 u$ 이므로 Diffusion eq.와 일치합니다.

1.3.6 Stationary waves and diffusions

말 그대로 steady-state인 상황입니다. $\Delta u = 0$ 을 Laplace equation이라고 합니다.

1.4 Initial and Boundary conditions

$u := u(\vec{x}, t)$ 에 대해, 다음과 같은 조건들을 생각할 수 있습니다.

1. Initial condition(I. C.) : Fixed t_0 에 대해, $u(\vec{x}, t_0) = \phi(\vec{x})$ 혹은 $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t_0) = \psi(\vec{x})$ 라고 합니다.

2. Boundary condition(B. C.)

- (a) Dirichlet B.C. : $u = g$ on ∂D 인 조건을 의미합니다.
- (b) Neumann B.C. : $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = g$ on ∂D 인 조건을 의미합니다.
- (c) Robin B.C. : $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ on ∂D 인 조건을 의미합니다. (Mixed condition)

1.5 Types of second order PDE

함수 $u = u(x, y)$ 에 대해, 모든 linear homogeneous second order PDE는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0$$

특히, $u_{xy} = u_{yx}$ 이므로 다음과 같은 symmetric matrix를 자연스럽게 생각할 수 있습니다.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이제, D 를 이용해 PDE를 세 가지로 분류할 수 있습니다.

1. Elliptic case : $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ($\det(D) < 0$)
이 경우에는 (적절한 변수변환을 통해) $u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$ 꼴로 바꿀 수 있습니다.
e.g.) Laplace equation, $u_{xx} + u_{yy} = 0$
2. Hyperbolic case : $\det(D) > 0$
이 경우에는 $u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0$ 꼴로 바꿀 수 있습니다.
e.g.) Wave equation, $u_{xx} - u_{yy} = 0$
3. Parabolic case : $\det(D) = 0$
이 경우에는 $u_{xx} + \dots = 0$ 꼴로 바꿀 수 있습니다.
e.g.) Heat equation, $u_{xx} - u_y = 0$

2 Waves and Diffusions

2.1 The wave equation

이 절에서 $u = u(x, t)$ 이고 Wave equation은 $u_{tt} = c^2 u_{xx} \dots (W)$ 로 쓴다.

Differential operator는 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 와 같이 주어지므로, $\mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$ 와 같이 factor out할 수 있다. 이는 wavefunction u 가 C^2 function이므로, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ 인 것으로부터 기인한다.

Method 1. Substitution.

안쪽의 operator를 먼저 치환해보자. 즉, $v := \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ 와 같이 정의하자. 그러면, 주어진 wave equation (W)는 $v_t - cv_x = 0$ 과 같이 주어진다. Transport equation의 해에 의해, v 는 다음과 같을 것이다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= h(x + ct) \\ u_t + cu_x &= h(x + ct) \end{aligned}$$

이 inhomogeneous transport equation을 해결하기 위하여 적절한 particular solution을 찾아야 한다. 그리고, 그것은,

$$\begin{aligned} f(s) &:= \frac{1}{2c} \int h(s) ds \\ u_p(x, t) &= f(x + ct) \end{aligned}$$

로 주어진다. 따라서,

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

와 같이 주어진다. 특히, h 는 임의로 정해진 함수이므로, f 역시 그렇다. 즉, 임의의 함수 f, g 에 대해 $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ 는 늘 (W)의 해가 된다. (C^2 이거만 하다면.)

Method 2. Coordinate change.

적절한 변수변환을 통해서도 파동방정식을 해결할 수 있다. 우선,

$$\xi := x + ct$$

$$\eta := x - ct$$

와 같은 변환을 생각하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = c \frac{\partial}{\partial \xi} - c \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

를 얻으며, 이로부터 $\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} = -2c \frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} = 2c \frac{\partial}{\partial \xi}$ 를 얻는다. 그러므로, (W)는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned}\left(-2c \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \left(2c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u &= 0 \\ u_{\xi \eta} &= 0\end{aligned}$$

이를 해결하면, $u = f(\xi) + g(\eta)$, 즉 $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ 이다.

2.1.1 Initial Value Problem

지금까지 해결한 것을 토대로 IVP를 풀어보자.

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{cases}$$

이는 간단하게 해결할 수 있다. 우선, $f(x) + g(x) = \phi(x)$, $cf'(x) - cg'(x) = \psi(x)$ 로부터,

$$\begin{aligned}f(s) &= \frac{1}{2} \phi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + \text{Const}_1 \\ g(s) &= \frac{1}{2} \phi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + \text{Const}_2 \\ \therefore u(x, t) &= f(x + ct) + g(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds\end{aligned}$$

를 얻는다.

2.1.2 General solution for wave equation

다음과 같은 Wave equation (W)를 생각하자.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \dots (W)$$

이는 다음과 같이 Factoring할 수 있다.

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 \dots (W)$$

이로부터, $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ 를 생각했었던 것처럼, 일반적인 Wave equation (WG)를 생각하자.

$$(a\partial_t + b\partial_x)(c\partial_t + d\partial_x)u = 0 \dots (WG)$$

특히, $ad \neq bc$ 조건이 있다면, 다음과 같은 좌표 변환을 생각할 수 있다.

$$1. \xi = dt - cx$$

$$2. \eta = bt - ax$$

Chain rule에 의해서, 다음이 성립한다.

$$1. \partial_t = d\partial_\xi + b\partial_\eta$$

$$2. \partial_x = -c\partial_\xi - a\partial_\eta$$

따라서, $(WG) = -(ad - bc)^2 \partial_\eta \partial_\xi u = 0$ 이고, 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$\begin{aligned} u &= f(\xi) + g(\eta) \\ &= f(dt - cx) + g(bt - ax) \end{aligned}$$

2.2 Causality and Energy

2.2.1 Causality

$$D'Alambert's Formula : u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

특히, $u(x, t)$ 는 $u(s, 0)$ 과 $u_t(s, 0)$ 에 의해 결정되는데, 이 때 s 의 범위는 다음과 같다 : $x - ct \leq s \leq x + ct$. 또한 $u(x, t_1) = \tilde{\phi}(x), u_t(x, t_2) = \tilde{\psi}(x)$ 을 생각하고 나면, $t' = t - t_1, u_t = u_{t'}$ 이므로, (x, t') coordinate에서 u 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{cases} u_{t't'} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \tilde{\phi}(x) \\ u_t(x, 0) &= \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

달랑베르 식에 의해,

$$u(x, t') = \frac{1}{2} [\tilde{\phi}(x + ct') + \tilde{\phi}(x - ct')] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct'}^{x+ct'} \tilde{\psi}(s) ds$$

이 성립한다. 이제, $t' = t - t_1$ 로 두면,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\tilde{\phi}(x + c(t - t_1)) + \tilde{\phi}(x - c(t - t_1))] + \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} \tilde{\psi}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [u(x + c(t - t_1), t_1) + u(x - c(t - t_1), t_1)] + \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} u_t(x, t_1) dx \end{aligned}$$

즉, (x_0, t_0) 에서의 정보는 오로지 $u(x, t)$ 에서 $x_0 - c(t - t_0) \leq x \leq x_0 + c(t - t_0)$ 의 정보만에 영향을 줄 수 있다. 이를 **인과성 원리**(Principle of Causality)라고 한다.

2.2.2 Energy

Constant한 density ρ 와 tension T 를 갖는 무한히 긴 string을 생각하자. ($c^2 = T/\rho$) 그러면 이 파동은 $\rho u_{tt} = T u_{xx}$, $-\infty < x < \infty$ 를 따르게 될 것이다. 이 때, 줄의 운동 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{KE} := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2(x, t) dx$$

이 적분이 수렴하길 원하므로, $\phi(x)$ 와 $\psi(x)$ 는 $-R \leq x \leq R$ 에서 vanish한다고 가정하자. 그러면, $u(x, t)$ 와 $u_t(x, t)$ 는 $-R - ct \leq x \leq R + ct$ 밖에서 vanish하므로, 문제 없이 잘 수렴한다. 이제,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{KE} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) dx \\ &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T u_t u_{xx} dx \\ &= T u_t u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} T u_{tx} u_x dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} T u_x^2 \right) dx \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{d}{dt} \left(\text{KE} + \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)^2 dx \right) = 0$$

이다. 따라서,

$$\text{PE} := \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

라고 정의하고, $E = \text{KE} + \text{PE}$ 라고 정의하면, 에너지 보존 식이 유도된다.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

2.3 Diffusion equation

이 절에서 $u = u(x, t)$ 이고 Diffusion equation은 $u_t = k u_{xx} \dots (D)$ 로 쓴다. (단, $k > 0$)

Theorem 2.1

Maximum Principle : $u = u(x, t)$ 가 (D)를 rectangle $R := \{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T \}$ 에서 만족시킨다면, u 는 최대값을 R 의 bottom, 즉 $\{ (x, 0) \mid 0 \leq x \leq l \}$ 에서 혹은 lateral side, 즉 $\{ (x, t) \mid x = 0 \text{ or } l, 0 \leq t \leq T \}$ 에서만 갖는다.

Remark. 위의 maximum principle은 u 가 R 의 interior나 top에서 최대값을 갖지 못함을 주장해주지 못한다. 그러므로, 이를 'weak' maximum principle이라고 부른다. 그에 대한 counterpart로, 'strong' maximum principle이 존재하고 이는 R 이 정말로 top과 interior에서 최대값이 갖지 못함을 주장한다.

Terminology. 위에서 언급한 R 의 bottom과 lateral side를 합쳐서 R 의 **Parabolic Boundary**라고 부른다. 반면, R 의 interior와 top을 합쳐서 R 의 **Parabolic Interior**라고 부른다.

Proof of weak Maximum Principle.

우선, u 가 R 의 interior point $p_0 = (x_0, t_0)$ 에서 maximum을 갖는다고 하자. 즉, $0 < x_0 < l$ 이고 $0 < t_0 < T$ 이다. 그러면,

$u_x(p) = 0$ 이고 $u_{xx}(p) \leq 0$ 이어야 하며, $u_t(p) = 0$ 일 것이다. 따라서, p 에서는,

$$0 = u_t(p) = ku_{xx}(p) \leq 0$$

로부터 반드시 $u_{xx} = 0$ 이어야만 한다. 반대로, 만일 함수 v 가 R 에서 $v_t < kv_{xx} \dots (*)$ 를 만족한다면, v 는 R 의 안점에서 maximum을 가질 수 없다. // 이제 M 을 u 의 parabolic boundary of R 에서의 최대값이라고 하자. u 가 연속이고 parabolic boundary는 그 정의에 의해 closed이므로 M 을 늘 찾을 수 있다. 임의의 양수 ϵ 에 대해, “perturbation” $v = u + \epsilon x^2$ 를 생각하자. 그러면,

$$v_t = u_t = ku_{xx} = k(v_{xx} - 2\epsilon) = kv_{xx} - 2k\epsilon < kv_{xx}$$

이므로 v 는 $(*)$ 을 만족한다. 따라서, v 는 R 의 interior에서는 maximum을 가질 수 없다. 이제, v 가 top에 속한 $p_1 = (x_1, t_1)$ 에서 maximum을 갖는다고 가정하자. 그러면, 자명히 $v_{xx}(p_1) \leq 0$ 이고,

$$v_t(p_1) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{v(x_1, t_1 + h) - v(x_1, t_1)}{h} \geq 0$$

이 성립한다. 따라서, $v_{xx} \leq 0 \leq v_t$ 이므로 $(*)$ 에 모순된다. 즉, v 는 R 의 parabolic interior에서는 maximum을 갖지 못한다. 또한, 자명히 parabolic boundary에서는 $v = u + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2$ 이므로,

$$u(x, t) = v(x, t) - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2 - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2$$

가 R 전체에서 성립한다. 그런데 ϵ 의 선택은 arbitrary하므로, u 는 R 에서 $u \leq M$ 이다.

2.3.1 Uniqueness of solution

다음과 같은 Dirichlet problem (\tilde{D}) 를 생각하자.

$$(\tilde{D}) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t) & 0 < x < l \text{ and } t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = g(t), u(l, t) = h(t) \end{cases}$$

그러면, (\tilde{D}) 의 solution은 유일하다. 이를 증명하기 위해, (\tilde{D}) 의 두 근 u_1, u_2 와 $w := u_1 - u_2$ 를 생각하자.

Method 1 : Maximum Principle

Maximum principle에 의해, $T > 0$ 에 대해 $R_T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 에서 w 의 최대값은 R_T 의 parabolic boundary에 놓여야 하고, 이는 자명히 0이다. 임의의 $T > 0$ 에 대해 성립하므로, $R_\infty := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t\}$ 에서의 최대값 역시 0이다. 마찬가지로, $-w = u_2 - u_1$ 역시 최대값이 0이고 이는 w 가 R_∞ 에서 $w \equiv 0$ 임을 의미한다. 즉, $u_1 = u_2$ 이다.

Method 2 : Energy.

간단한 수학적 trick을 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot w = (w_t - kw_{xx}) \cdot w = w_t \cdot w - kw_{xx} \cdot w \\ &= \frac{1}{2}(w^2)_t - k(w_x \cdot w)_x + kw_x^2 \end{aligned}$$

양변을 적분하면,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{1}{2}(w^2)_t dx - k \int_0^l (w_x \cdot w)_x dx + k \int_0^l w_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^l w^2 dx \right] - k [w_x \cdot w]_{x=0}^{x=l} + k \int_0^l w_x^2 dx \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_0^l w(x, t)^2 dx \right] &\leq 0 \\ 0 &\leq \int_0^l w(x, t)^2 dx \leq \int_0^l w(x, 0)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

따라서, $\int_0^l w(x, t)^2 dx = 0$ 이 모든 t 에 대해 성립하며, w 의 continuity에 의해 $0 < x < l, 0 \leq t$ 에서 $w \equiv 0$ 이다. 곧, $0 \leq x \leq l, t \leq 0$ 에서 $u_1 = u_2$ 이다.

2.3.2 Stability of solution

다음과 같은 식을 만족하는 u_i ($i = 1, 2$)를 생각하자.

$$\begin{cases} (u_i)_t - k(u_i)_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u_i(0, t) = u_i(l, t) = 0 & t > 0 \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x) & 0 < x < l \end{cases}$$

이제, $w = u_1 - u_2$ 로 놓으면 w 는 Initial condition으로 $w(x, 0) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$ 를 갖는다. Energy method에서 사용한 방법을 그대로 적용하면,

$$\begin{aligned} \int_0^l w(x, t)^2 dx &\leq \int_0^l w(x, 0)^2 dx; t > 0 \\ \int_0^l (u_1 - u_2)^2 dx &\leq \int_0^l (\phi_1 - \phi_2)^2 dx; t > 0 \end{aligned}$$

즉, $\|u_1 - u_2\|_2 \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_2$ 이다.

또다른 방법으로, maximum principle을 사용할 수 있다. $R_T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 에서,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) - u_2(x, t) &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \\ u_2(x, t) - u_1(x, y) &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| \end{aligned}$$

이므로, $\max_{0 \leq x \leq l} |u_1 - u_2| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1 - \phi_2|$ 가 성립한다. 즉, $\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty$ 이다.

2.4 Diffusion in the whole line

다음과 같은 Diffusion equation을 생각하자.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \dots (*) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

그러면, (*)를 만족하는 solution $u(x, t)$ 에 대해, 다음과 같은 성질들이 만족된다.

- 임의의 $y \in \mathbb{R}$ 에 대해, $v(x, t) := u(x - y, t)$ 역시 (*)의 solution이다.
pf. $v_t(x, t) = u_t(x - y, t)$ 이고, $v_{xx}(x, t) = u_{xx}(x - y, t)$ 이므로 v 역시 (*)의 solution이다.
- 임의의 u 의 derivative $u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, \dots$ 역시 (*)의 solution이다.
pf. u 가 smooth함을 가정하므로, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} (u_x)_t &= (u_t)_x = (ku_{xx})_x = k(u_x)_{xx} \\ (u_t)_t &= (ku_{xx})_t = k(u_t)_{xx} \end{aligned}$$

따라서, 임의의 derivative 역시 solution이 된다.

3. (*)의 solution의 linear combination 역시 (*)의 solution이 된다.

pf. 이는 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 가 linear하므로 자명하다.

4. 임의의 $g(y)$ 에 대해, 이 improper integral이 적절히 수렴하는 한 $v(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)g(y)dy$ 역시 (*)의 solution이 된다.

Note. 여기서 이 improper integral이 적절히 수렴한다는 것은, 다음이 만족된다는 것이다.

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &:= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x - y, t)g(y)dy \\ v_{xx}(x, t) &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x - y, t)g(y)dy \end{aligned}$$

pf. 다음에 의해 증명된다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &:= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R u(x - y, t)g(y)dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u(x - y_i, t)g(y_i)\Delta y \right] \end{aligned}$$

여기서 $\Delta y = \frac{2R}{n}$ 이고 $y_i = -R + i\Delta y$ 이다. 특히, g 가 아주 좋은 성질을 만족하고 있다고 가정하고 있고, v 가 solution의 sequence의 극한이므로 v 역시 solution이다.

5. (Dilation) 임의의 $a > 0$ 에 대해 $v(x, t) := u(\sqrt{a}x, at)$ 역시 (*)의 solution이다.

pf. 다음에 의해 성립한다.

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &:= au_t(\sqrt{a}x, at) \\ v_x(x, t) &:= \sqrt{a}u_x(\sqrt{a}x, at) \\ v_{xx}(x, t) &:= au_{xx}(\sqrt{a}x, at) \end{aligned}$$

이를 이용하여 다음과 같은 (DPI)를 만족하는 함수 $Q(x, t)$ 를 찾을 것이다.

$$(DPI) \begin{cases} Q_t = kQ_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t \\ Q(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

이 initial condition은 다음과 같은 sense에서 생각할 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow 0+} Q(x, t) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

특히, $Q(x, t)$ 는 $(x, t) \mapsto (\sqrt{a}x, at)$ 에 의해 invariant하다. 즉, $\tilde{Q}(x, t) = Q(\sqrt{a}x, at)$ 역시 (DPI)의 해가 된다. 해의 Uniqueness에 의하여, $Q(x, t) = \tilde{Q}(x, t) = Q(\sqrt{a}x, at)$ 이다. 따라서, $Q(x, t)$ 는 $\frac{x}{\sqrt{t}}$ 에 의존하는 함수이다. (similarity parameter)

따라서, $Q(x, t) := g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$ 와 같이 놓자. 그러면,

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \\ Q(x, t) &= g(p) \\ Q_t &= \frac{\partial}{\partial t} \left[g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \right] = -\frac{p}{2t} g'(p) \\ Q_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \right] = g'\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4kt}} \\ Q_{xx} &= g''(p) \frac{1}{4kt} \end{aligned}$$

따라서, Q 가 (*)를 만족한다면 g 는 $g''(p) + 2pg'(p) = 0$ 을 만족한다. 따라서,

$$\begin{aligned} g(p) &= C_1 \int_0^p e^{-q^2} dq + C_2 \\ Q(x, t) &= C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-q^2} dq + C_2 \end{aligned}$$

이제, initial condition에 의하여,

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) + \frac{1}{2}$$

라고 놓을 수 있다.

이제, $S(x, t) := \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t)$ 로 정의하자. Property (2)에 의해, S 역시 $S_t = kS_{xx}$ 를 만족한다. Initial condition $u(x, 0) = \phi(x)$ 에 대해, $u(x, t)$ 를 다음과 같이 정의하면 Property (4)에 의해 u 역시 $u_t = ku_{xx}$ 를 만족한다.

$$u(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi(y) dy$$

이제, 이 함수가 $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \phi(x)$ 를 만족함을 보일 것이다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x - y, t) \phi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial Q}{\partial y}(x - y, t) \phi(y) dy \\ &= -Q(x - y, t) \phi(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \end{aligned}$$

그런데, ϕ 는 빠르게 decay하는 함수이므로, $\phi(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) = 0$ 이고 $\phi(-\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \phi(y) = 0$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} Q(x - y, t) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-p^2} dp = 0 \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} Q(x - y, t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp = 0 \end{aligned}$$

을 만족하므로, 위의 부분적분에서 $y = -\infty, \infty$ 에서 limit이 stably 0이 된다.

$$\begin{aligned} \therefore u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0+} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \phi'(y) dy = \phi(x) - \phi(-\infty) = \phi(x) \end{aligned}$$

따라서, $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\phi(y)dy$ 는 주어진 미분방정식의 해가 된다.

Recall. S 는 explicit하게 다음이 된다.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp \right] \\ &= 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \end{aligned}$$

위의 Recall로부터,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - y)^2}{4kt} \right] \phi(y) dy$$

이러한 u 가 초기조건 $u(x, 0) = \phi(x)$ 를 갖는 diffusion equation의 해이다.

Proposition 2.2

$S(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ 는 **source function, Green's function, Fundamental solution, Gaussian** 또는 **Propagator of Diffusion equation**이라고 불리고, 다음과 같은 성질을 갖는다.

1. $S(x, t) \geq 0$ 이고 $S(x, t) = S(-x, t)$ 이다.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t) dx = 1$ 이다.
3. $x \neq 0$ 이면 $\lim_{t \rightarrow 0+} S(x, t) = 0$ 이고, $x = 0$ 이면, $\lim_{t \rightarrow 0+} S(x, t) = \infty$ 이다.

특히, $S(x, t)$ 의 $t \rightarrow 0+$ 에서의 극한을 Dirac delta라고 하며, $\delta(x) := \lim_{t \rightarrow 0+} S(x, t)$ 이다.

Definition 2.3

Dirac Delta distribution : Dirac delta δ 는 다음과 같은 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 에서 \mathbb{R} 로 가는 linear mapping으로 정의된다.

$$\delta[\phi] = \phi(0)$$

Heuristically, dirac delta를 $x \neq 0$ 에서 $\delta(x) = 0$ 이고 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$ 인 함수로 취급할 수 있다.

Dirac delta는 heaviside step function $Q(x, 0)$ 의 weak derivative로 생각될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, 0)\phi'(x)dx &= \int_0^{\infty} \phi'(x)dx \\ &= \phi(\infty) - \phi(0) = -\phi(0) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

2.4.1 Physical interpretation of the fundamental solution

초기에, $x = 0$ 에 1만큼의 heat을 가지고 있는 무한히 긴 막대기를 생각하자. 그러면, $x = 0$ 인 점은 계속해서 cooling 되고, rod 전체로 퍼져나갈 것이다. 특히, (1) 이 propagation의 속도는 무한히 빠르며 (2) 늘 $\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t)dx = 1$ 이므로, heat의 loss가 없다.

2.4.2 Heuristic approach to the general solution via the fundamental solution

$S(x, t)$ 는 당연히 다음과 같은 Diffusion equation의 solution이다.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & t > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

임의의 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (initial function)에 대해, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\phi(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\phi(y)dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \delta(x-y)\phi(y)dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \delta(x-y_i)\phi(y_i)\Delta y \end{aligned}$$

여기서 $\Delta y = \frac{2R}{N}$ 이고 $y_i = -R + i\Delta y$ 이다. 각 i 에 대해 $S(x - y_i, t)$ 는 초기조건이 $u(x, 0) = \delta(x - y_i)$ 인 solution

이므로, $\sum_{i=1}^N S(x - y_i, t)\phi(y_i)\Delta y$ 은 $u(x, 0) = \sum_{i=1}^N \delta(x - y_i)\phi(y_i)\Delta y$ 의 해가 된다. N 과 R 에 ∞ 로의 극한을 취하면, 이는

$\lim_R \lim_N \sum_{i=1}^N \delta(x - y_i)\phi(y_i)\Delta y = \phi(x)$ 를 초기조건으로 갖는 해가 된다.

2.4.3 Example of diffusion equation

다음의 Diffusion equation을 해결해보자.

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \\ u(x, 0) &= e^{-x} \end{aligned}$$

이 해는,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-y} dy \\ &= e^{-x+kt} \end{aligned}$$

2.5 Comparison of waves and diffusions

1. Propagation speed

- Wave : finite $\leq c$
- Diffusion : speed = ∞

2. Singularities for $t > 0$

- Wave : transported along characteristics, $(x_0 \pm ct, t)$ for every $t > 0$
- Diffusion : lost immediately (Consider S , the fundamental solution)

3. Well-posedness : both OK.

4. Well-posedness for $t < 0$

- Wave : Yes.

- Diffusion : No. Consider the following :

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \\ u(x, 0) &= S(x, 1) \end{aligned}$$

translation-invariance에 의해, $u(x, t) = S(x, t + 1)$ 은 solution이고, $u(0, t) = S(0, t + 1)$ 은 $t \rightarrow -1+$ 에서 $\rightarrow \infty$, 발산한다.

5. Maximum principle : Wave No, but Diffusion Yes.

6. Behavior as $t \rightarrow \infty$

- Wave : $u(x, t) \not\rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ in general.
- Diffusion : $u(x, t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, if $u(x, 0) = \phi(x)$ is integrable.

7. Information

- Wave : Transferred.
- Diffusion : Lost gradually.

3 Reflections and Sources

3.1 Diffusion on the half-line

3.1.1 Zero Dirichlet boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(DD) : \begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ v(x, 0) = \phi(x) & x > 0 \\ v(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

이는 **odd extension**을 사용하여 해결할 수 있다.

$$\phi_{\text{odd}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

따라서, $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy$ 는 solution이 되고, x 에 대해 odd하다. 따라서, $v(x, t) := u(x, t)$ on $x \geq 0, t > 0$ 으로 두면 v 는 (DD)의 solution이 된다. 특히, v 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy + \int_{-\infty}^0 S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} [S(x - y, t) - S(x + y, t)] \phi(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x + y)^2}{4kt}\right) \right\} \phi(y) dy \end{aligned}$$

Example : 만일 $\phi(x) = 1$ 이라면,

$$u(x, t) = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

3.1.2 Zero Neumann boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(DN) : \begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ w(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < \infty \\ w_x(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

이번에는 **even extension**을 사용하여 해결할 수 있다.

$$\phi_{\text{even}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ \phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

따라서, 해는 다음과 같다.

$$w(x, t) = \int_0^\infty [S(x-y, t) + S(x+y, t)] \phi(y) dy$$

Example : 만일 $\phi(x) = 1$ 이라면,

$$u(x, t) = 1$$

3.2 Reflection of waves

3.2.1 Zero Dirichlet boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(WD) : \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, -\infty < x < \infty \\ v(x, 0) = \phi(x), v_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < \infty \\ v(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

따라서, odd extension에 대해,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{odd}}(x+ct) + \phi_{\text{odd}}(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(y) dy$$

가 성립한다. 만일, $t > 0$ 이라면 explicit하게 다음을 얻을 수 있다.

1. Case 1 : $x > ct$, 즉 $x+ct > x-ct > 0$.

$$v = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

2. Case 2 : $0 < x \leq ct$, 즉 $x-ct < 0 \leq x+ct$.

$$v = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy$$

따라서, 일종의 "반사"가 일어남을 알 수 있다.

3.2.2 Dirichlet problem on a finite interval

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(WDF) : \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l \\ v(x, 0) = \phi(x), v_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

따라서, 다음과 같은 **extension**을 생각하자.

$$\phi_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ -\phi(-x) & -l < x < 0 \\ \text{period } 2l. \end{cases}$$

즉,

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{ext}}(x - ct) + \phi_{\text{ext}}(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{ext}}(y) dy$$

특히, $2l < x + ct < 3l, -l < x - ct < 0$ 에서는 다음과 같다.

$$v = \frac{1}{2} [-\phi(ct - x) + \phi(x + ct - 2l)] - \frac{1}{2l} \int_{x+ct-2l}^{ct-l} \psi(y) dy$$

3.3 Diffusion with a source

다음과 같은 'Source가 있는 diffusion equation'을 생각해 보자.

$$(DS) : \begin{cases} u_t - k u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, 다음과 같은 ODE에서의 Heuristic approach를 생각해 보자.

$$\text{ODE} : \begin{cases} u'(t) + A u(t) = f(t) \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

적분 인자(integrating factor)로부터, 다음과 같은 해를 얻는다.

$$u(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds + e^{-At} \phi$$

식을 관찰해봤을 때, homogeneous solution인 $e^{-At}\phi$ 로부터 (1) t 를 $t-s$ 로 바꾸고 (2) ϕ 를 nonhomogeneous term인 $f(s)$ 로 바꿔서 적분했음을 알 수 있다. (DS)에 대응하는 homogeneous equation (DSH)의 해는 다음과 같음을 우리는 알고 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t) \phi(y) dy$$

이를 일종의 operator가 적용된 것으로 생각하여, $\mathfrak{S}[\phi](t)$ 로 쓰자. 그러면, ODE를 통한 heuristic approach로부터, 다음이 (DS)의 해일 것이라고 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathfrak{S}[\phi](t) + \int_0^t \mathfrak{S}[f(-, s)](t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t) \phi(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

이제, 이 u 가 실제로 (DS)의 해가 됨을 보이자. Diffusion equation의 linearity에 의해, $\mathfrak{S}[\phi](t)$ 는 이미 (DSH)의 해이므로, 두번째 항이 zero initial condition $\phi = 0$ 을 갖는 (DS)의 해가 됨을 보이면 된다. 이제, $v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds$ 라고 하자. 그러면, $t > 0$ 에서,

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, 0)f(y, t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_t(x - y, t - s)f(y, s)dyds \end{aligned}$$

이고,

$$v_{xx} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(x - y, t - s)f(y, s)dyds$$

이므로, $v_t - v_{xx} = f(x, t)$ 이다. Initial condition의 경우에는,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds = 0$$

으로부터 확인할 수 있다. (엄밀히 : 이게 왜 성립할까?) 따라서, 다음과 같은 해를 우리가 얻는다.

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds$$

3.3.1 Diffusion with source on a half line

Case 1. Dirichlet boundary condition

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = f(x, t) & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ v(x, 0) = \phi(x) \\ v(0, t) = h(t) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, $V(x, t) = v(x, t) - h(t)$ 를 생각하면,

$$\begin{cases} V_t - kV_{xx} = f(x, t) - h'(t) \\ V(x, 0) = \phi(x) - h(0) =: \tilde{\phi}(x) \\ V(0, t) = 0 \end{cases}$$

이를 얻고, "odd extension"을 이용하여 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$\tilde{V}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\tilde{\phi}_{\text{odd}}(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s) \cdot (f(y, s) - h'(s))dyds$$

Case 2. Neumann boundary condition

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = f(x, t) & 0 < x < \infty \\ w(x, 0) = \phi(x) \\ w_x(0, t) = h(t) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, $W(x, t) = w(x, t) - xh(t)$ 를 생각하면,

$$\begin{cases} W_t - kW_{xx} = f(x, t) - xh'(t) \\ W(x, 0) = \phi(x) - xh(0) =: \tilde{\phi}(x) \\ W_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

3.4 Wave with a source

다음과 같은 source가 있는 wave equation을 생각하자.

$$(WS) = \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Theorem 3.1

(WS)는 다음과 같은 형태의 unique solution을 갖는다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s) dx + [\text{nonhomogeneous term}]$$

3.4.1 Coordinate method

이 문제를 해결하기 위해서는 non-homogeneous term만을 해결하면 된다. 다음과 같은 coordinate change를 생각하자.

$$\begin{cases} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{cases}$$

그러면, 주어진 식은 다음과 같이 바뀐다.

$$\begin{aligned} -4c^2 u_{\xi\eta} &= f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) = \tilde{f}(\xi, \eta) \\ u_{\xi} &= -\frac{1}{4c^2} \left(\tilde{F}(\xi, \eta) + g(\xi) \right) \end{aligned}$$

여기서, $g(\xi) = -\tilde{F}(\xi, \xi)$ 라고 두면,

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= -\frac{1}{4c^2} \left(\tilde{F}(\xi, \eta) + g(\xi) \right) \\ &= -\frac{1}{4c^2} \int_{\xi}^{\eta} \tilde{f}(\xi, \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \\ &=: h(\xi, \eta) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서, ξ 에 대한 적분을 함으로써 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= H(\xi, \eta) + k(\eta) \leftarrow k(\eta) = -H(\eta, \eta) \\ &= \int_{\eta}^{\xi} h(\tilde{\xi}, \eta) d\tilde{\xi} \\ &= -\frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} \int_{\tilde{\xi}}^{\eta} \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} \end{aligned}$$

점 $p_0 = (x_0, t_0)$ 에 대해, $\xi_0 = x_0 + ct_0, \eta_0 = x_0 - ct_0$ 이라고 하면, 다음과 같이 식을 예쁘게 만들 수 있다.

$$u(p_0) = \frac{1}{4c^2} \int_{\eta_0}^{\xi_0} \int_{\eta_0}^{\xi} \tilde{f}(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

주어진 영역에 대한 적분을 원래 domain으로 돌려보내면, 다음과 같은 최종적인 해를 얻을 수 있다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

최종적으로, 다음과 같은 (WS)의 해를 얻는다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

3.4.2 Green's theorem

함수 $u(x, t)$ 가 (WS)의 solution이라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f dx dt &= \iint_{\Delta} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt \\ &= \iint_{\Delta} (-c^2 u_x)_x - (-u_t)_t dx dt \\ &= \int_{\partial \Delta} (-u_t) dx + (-c^2 u_x) dt \\ &= \int_{L_0 \cup L_1 \cup L_2} -u_t dx - c^2 u_x dt \end{aligned}$$

여기서 L_0 은 $(x_0 - ct_0, 0)$ 에서 $(x_0 + ct_0, 0)$ 까지 잇는 line이며, L_1 은 $(x_0 + ct_0, 0)$ 에서 (x_0, t_0) 까지 잇는 line, L_2 는 (x_0, t_0) 에서 $(x_0 - ct_0, 0)$ 으로 돌아오는 line이다.

$$\begin{aligned} \int_{L_0} -u_t dx - c^2 u_x dt &= \int_{x-ct_0}^{x+ct_0} -u_t(x, 0) dx \\ &= - \int_{x-ct_0}^{x+ct_0} \psi(x) dx \end{aligned}$$

또,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} -u_t dx - c^2 u_x dt &= \int_{L_1} (-u_t)(-cdt) - c^2 u_x \left(-\frac{dx}{c}\right) \\ &= \int_{L_1} (cu_t) dt + (cu_x) dx \\ &= \int_{L_1} cdu = cu(x_0, t_0) - c\phi(x_0 + ct_0) \end{aligned}$$

이고,

$$\int_{L_2} -u_t dx - c^2 u_x dt = \int_{L_2} -cdu = -c\phi(x_0 - ct_0) + cu(x_0, t_0)$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f dx dt &= 2cu(x_0, t_0) - c[\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)] - \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s) ds \\ \therefore u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2} [\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)] + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f(x, t) dx dt \end{aligned}$$

를 얻고, 그러므로 solution은 unique하다.

3.4.3 Operator method

Recall : $u'' + A^2u = f, u(0) = \phi, u'(0) = \psi$ ($A \neq 0$)의 해는 다음과 같다.

$$u(t) = S'(t)\phi + S(t)\psi + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$S(t) = A^{-1} \sin(At)$$

특히, 다음을 얻을 수 있다.

1. $S(t)\psi$ 는 $u'' + A^2u = 0, u(0) = 0, u'(0) = \psi$ 의 해이다.
2. $S'(t)\phi$ 는 $u'' + A^2u = 0, u(0) = \phi, u'(0) = 0$ 의 해이다.
3. $\int_0^t S(t-s)f(s)ds$ 는 $u'' + A^2u = f, u(0) = u'(0) = 0$ 의 해이다.

따라서, (WS)를 다음과 같이 씌으로써 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) & \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (-c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u = f \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

자세히 보면, $u(t), \phi, \psi, f(t)$ 가 $u(x, t), \phi(x), \psi(x), f(x, t)$ 로 바뀌었으며, A 는 $ci \frac{\partial}{\partial x}$ 이다. 그러면, $\phi = 0, f = 0$ 의 해는, 다음과 같다.

$$\mathcal{S}\psi := \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy$$

또, $\psi = 0, f = 0$ 의 해는 다음과 같다.

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{S}(t) \right) \phi = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)]$$

이제, $\phi = \psi = 0$ 의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(x, s)ds &= \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s)dyds \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s)dyds \end{aligned}$$

3.4.4 Wave with source on half-line

$$(\star) = \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t) \\ v(x, 0) = \phi(x), v_t(x, 0) = \psi(x) \\ v(0, t) = h(t) \end{cases}$$

그러면, $0 < ct < x$ 에서는,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f dxdt$$

이다. 이제 $0 < x < ct$ 에서는, "반사"된 영역 D 에 대해,

$$\frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y)dy + \iint_D f(y, s)dyds$$

가 $h = 0$ 의 해일 것이고, 이제 $\phi = \psi = f = 0$ 의 해만 찾으려 한다.

Note. $v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$ 의 해 v 를 생각하자.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= M(x + ct) + N(x - ct) \\ v(x, 0) &= M(x) + N(x) = 0 \quad (x > 0) \\ v_t(x, 0) &= cM'(x) - cN'(x) = 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$x > 0$ 에서는 $M = N = 0$ 임을 알 수 있다. 이제,

$$v(0, t) = M(ct) + N(-ct) = N(-ct) = h(t)$$

로부터, $N(x) = h\left(-\frac{x}{c}\right)$ where $x < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서,

$$v(x, t) = N(x - ct) = h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

즉,

$$\frac{1}{2} [\phi(x + ct) - \phi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy + \iint_D f(y, s) dy ds + h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

이다.

4 Boundary Problems

4.1 Separation of Variables, the Dirichlet Condition

4.1.1 Wave equation

우선 다음과 같은 Dirichlet condition을 갖는 wave equation의 general solution을 구해보자.

$$(W) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

Separation of variable method를 이용하여, $u(x, t) = X(x)T(t)$ 라고 가정하자. 이를 Wave Equation에 대입하면, $XT'' = c^2 X''T$ 를 얻는다. 따라서, 양변을 $-c^2 XT$ 로 나누어 다음을 얻는다.

$$-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} =: \lambda$$

특히, 위 식에서 첫번째 변은 t 에 대한 함수이고 두번째 변은 x 에 대한 식이므로, $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ 이 되고 $\nabla \lambda = 0$ 이 되어 λ 는 상수이다. 게다가, $\lambda > 0$ case만 살펴봐도 충분하다. 따라서, $\beta > 0$ 에 대해 $\lambda = \beta^2$ 라고 가정하자. 그러면, λ 가 상수이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} T'' + c^2 \beta^2 T = 0 \\ X'' + \beta^2 T = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} T(t) = A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \\ X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \end{cases}$$

이제 Boundary Condition을 이용하자. $u(0, t) = u(l, t) = 0$ 이므로, $X(0)T(t) = 0$ 으로부터, $X(0) = C = 0$ 을 얻는다. 그리고, $X(l) = D \sin(\beta l) = 0$ 이므로, $\beta l = n\pi (n \in \mathbb{Z})$ 여야 하고 이는 $\beta = \frac{n\pi}{l}$ 으로 쓸 수 있음을 의미한다. 따라서, 주어진 Wave equation with Boundary condition은 다음과 같은 해를 갖게 된다.

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cdot \left[A \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right]$$

특히, $n < 0$ 인 경우에는 $n = -m$ for some $m \in \mathbb{N}$ 인데,

$$\sin\left(-\frac{m\pi}{l}x\right) \cdot \left[A \cos\left(-\frac{m\pi}{l}ct\right) + B \sin\left(-\frac{m\pi}{l}ct\right)\right] = \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \left[-A \cos\left(\frac{m\pi}{l}ct\right) + B \sin\left(\frac{m\pi}{l}ct\right)\right]$$

이므로 사실 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해서만 생각하면 충분하다. 이제, u_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$u_n(x, t) := \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right]$$

그러면, wave equation의 linearity에 의하여, 임의의 finite한 n 의 합에 대하여, $u(x, t) = \sum_n u_n(x, t)$ 역시 wave equation의 해가 된다. 이제, initial condition을 생각해보면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) [A_n \cdot 1 + B_n \cdot 0] = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[-\frac{n\pi}{l}c \cdot A_n \cdot 0 + \frac{n\pi}{l}c \cdot B_n \cdot 1\right] = \sum_n \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \psi(x) \end{aligned}$$

그런데, 유한한 합에 대해 위의 식이 성립하는 ϕ 와 ψ 는 너무나 드물 것이다. 따라서, finite sum을 infinite sum으로 바꿀 필요가 있다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right] \\ \phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

이러한 계수를 구하는 방법은 chapter 5에서 다룰 것이고, 특히 다음을 보일 것이다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum \cdots\right) = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum \cdots\right) = \sum \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdots \end{aligned}$$

4.1.2 Diffusion equation

이번에는 다음과 같은 diffusion equation의 일반해를 구해보자.

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 & 0 < x < l, 0 < t < \infty \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

마찬가지로 separated solution을 이용하자. $u(x, t) = X(x)T(t)$ 라면, $XT' = kX''T$ 이고, 따라서 상수 $\lambda > 0$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + k\lambda T = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X_n(x) = A_n \sin\left[\frac{n\pi}{l}x\right] \\ T(t) = C \exp[-\lambda kt] \end{cases}$$

따라서, 일반해는 다음과 같을 것이다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \phi(x) \end{aligned}$$

특히, $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 는 $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 라는 linear operator의 eigenfunction이고, eigenvalue로 $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 를 가짐을 주목하자.

Observation. 왜 $\lambda > 0$ 만을 다루도 되는지 Boundary condition과 연관지어 생각해보자. $X'' + \lambda X = 0$ with $X(0) = X(l) = 0$ 으로부터,

1. $\lambda = 0 : X'' = 0$ 이므로, $X(x) = Cx + D$ 이고, B.C로부터 $X \equiv 0$ on $(0, l)$.
2. $\lambda < 0 : \lambda = -\gamma^2$ 로부터, $(\gamma > 0)$ $X'' - \gamma^2 X = 0$ 이고, $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ 이다. B.C로부터, $X \equiv 0$ on $(0, l)$.

4.2 Separation of Variables, the Neumann Condition

특히, 다음과 같은 Zero Neumann Boundary Condition을 갖는 문제를 생각해보자.

$$(W) : \begin{cases} \text{W.E.} & u_{tt} = c^2 u_{xx} & (0 < x < l) \\ \text{I.C.} & u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & (0 < x < l) \\ \text{B.C.} & u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & \text{Zero Neumann B.C.} \end{cases}$$

$$(D) : \begin{cases} \text{D.E.} & u_t = k u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ \text{I.C.} & u(x, 0) = \phi(x) & (0 < x < l) \\ \text{B.C.} & u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & \text{Zero Neumann B.C.} \end{cases}$$

이제, $u(x, t) = X(x)T(t)$ 로부터, X 에 대해, $X'' + \lambda X = 0$ 를 얻고, $X'(0) = X'(l) = 0$ 이다.

Case 1. $\lambda > 0$ 인 경우. 즉, $\lambda = \beta^2$ 인 경우($\beta > 0$)에 대해 생각해보자.

$$\begin{aligned} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ X'(x) &= -\beta C \sin(\beta x) + \beta D \cos(\beta x) \end{aligned}$$

로부터, $X'(0) = \beta D = 0$ 에서 $D = 0$. $X'(l) = -\beta C \sin(\beta l) = 0$ 으로부터, $\beta l = n\pi$. 즉, $\beta = \frac{n\pi}{l}$ ($n \in \mathbb{N}$)를 얻는다. 따라서, 각 $n \in \mathbb{N}$ 에 대해, $X_n(x) = C \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 를 얻는다. 이제 T 를 찾자.

1. Wave equation : $T'' + c^2 \lambda T = 0$ 에서 ($\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$),

$$T_n(t) = A_n \cos\left[\frac{n\pi}{l}ct\right] + B_n \sin\left[\frac{n\pi}{l}ct\right]$$

2. Diffusion equation : $T' + k \lambda T = 0$ 에서,

$$T_n(t) = A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

Case 2. $\lambda = 0$ 인 경우. $X'' = 0$ 으로부터, $X(x) = Cx + D$ 이고, $X(x) = D$ 여야 한다. 이제 T 를 찾자.

1. Wave equation : $T'' = 0$ 에서 $T(t) = A + Bt$
2. Diffusion equation : $T' = 0$ 에서 $T(t) = A$

Case 3. $\lambda < 0$ 인 경우. 즉, $\lambda = -\gamma^2$ 인 경우($\gamma > 0$)에 대해 생각해보자. 그러면, $X'' - \gamma^2 X = 0$ 이므로, $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ 이다. 조건으로부터, $X'(0) = \gamma C - \gamma D = 0$ 에서 $C = D$ 이고, $X'(l) = \gamma C(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0$ 에서 $C = 0$ 이므로, $X \equiv 0$ 이 되어 무의미해진다.

이제, Case 1과 2를 합쳐보자.

1. Wave equation case :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (A + Bt) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

특히,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \psi(x) &= u_t(x, 0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\end{aligned}$$

2. Diffusion equation case :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\end{aligned}$$

특히,

$$\phi(x) = u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

4.2.1 Mixed Boundary Condition

이번에는 $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ 이라는 조건을 생각해보자. 우선, $u(x, t) = X(x)T(t)$ 를 놓으면, $X'' + \lambda X = 0$ 이고 $X(0) = X'(l) = 0$ 이다.

Case 1. $\lambda = \beta^2 > 0$ for some $\beta > 0$ 이라면, $X(x) = C \cdot \cos(\beta x) + D \cdot \sin(\beta x)$ 이다. $X(0) = C = 0$ 이고, $X'(l) = \beta D \cos(\beta l) = 0$ 에서 $\beta = \frac{(n+1/2)\pi}{l}$ ($n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$)이다.

Case 2. $\lambda = 0$ 인 경우 : $X(x) = Cx + D$ 에서 $X'(l) = C = 0$ 이고, $X(0) = D = 0$ 이다. 따라서, $X \equiv 0$ 이다.

Case 3. $\lambda = -\gamma^2 < 0$ 인 경우 : $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ 이다. $X(0) = C + D = 0$ 이므로 $C = -D$ 이고, $X'(l) = \gamma C(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})$ 으로부터, $C = D = 0$ 이므로 $X \equiv 0$ 이다.

따라서,

1. Wave equation case :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}ct\right] + B_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}ct\right] \right) \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]$$

특히,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right] \\ \psi(x) &= u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)\pi c}{l} B_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]\end{aligned}$$

2. Diffusion equation case :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{(n+1/2)\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]$$

특히,

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]$$

4.3 Separation of Variables, the Robin Condition

이 경우 Boundary condition은 다음과 같다.

$$u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = u_x(l, t) + a_l u(l, t) = 0$$

이 때, $a_0, a_l > 0$ 이면 energy가 퍼져나가는 것으로 생각할 수 있고, $a_0, a_l < 0$ 이면 에너지가 concentrate하는 것이다. 이제, $u(x, t) = X(x)T(t)$ 라고 두자. 그러면, $X'' + \lambda X = 0$ 이고 $X'(0) - a_0 X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0$ 을 풀면 된다.

Case 1. $\lambda = \beta^2 > 0$ for some $\beta > 0$ 인 경우. 그러면, $X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$ 인데, B.C.를 쓰면 다음을 얻는다.

- $x = 0$, no flux : $D = \frac{a_0}{\beta} C$
- $x = l$, no flux : 이 경우,

$$\left(\frac{a_0 a_l}{\beta} - \beta \right) C \sin(\beta l) + (a_0 + a_l) C \cos(\beta l) = 0$$

만일 $C = 0$ 이면 $X \equiv 0$ 이 된다. 그러므로, $C \neq 0$ 을 가정하자.

이제, $\cos(\beta l) \neq 0$ 이라고 하면,

$$\tan(\beta l) = \frac{(a_0 + a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$$

이 된다. 즉, 이 조건 하에서, X 는 다음과 같다.

$$X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) = C \left\{ \cos(\beta x) + \frac{a_0}{\beta} \sin(\beta x) \right\} \quad (1)$$

Case 2. $\lambda = 0$ 인 경우. $X'' = 0$ 에서 $X(x) = Cx + D$ 이다. 따라서, $(a_0 + a_l + a_0 a_l l)D = 0$ 을 얻는데, $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$ 인 경우에,

$$X(x) = Cx + D = D(a_0 x + 1)$$

Case 3. $\lambda = -\gamma^2 < 0$ 인 경우. ($\gamma > 0$) 이 경우에는 X 를 cosh와 sinh로 표현하는 것이 유리하다.

$$X(x) = C \cosh(\gamma x) + D \sinh(\gamma x)$$

에서, Case 1과 같은 이유로 다음을 얻는다.

$$X(x) = C \left(\cosh(\gamma x) + \frac{a_0}{l} \sinh(\gamma x) \right)$$

이 때,

$$\tanh(\gamma l) = -\frac{(a_0 + a_l)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_l}$$

라는 관계가 필요하다.

4.3.1 Derivation of solution

Separation of variable을 사용하기 위하여 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 로 두자. 그러면 X 는 다음과 같은 식을 만족해야만 한다.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - a_0 X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0 \end{cases}$$

이제, case를 나누어 풀이해 보자.

Case 1. $\lambda > 0$ 인 경우. 즉, $\lambda = \beta^2$ ($\beta > 0$)를 생각해보자. 그러면, general solution은 $X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$ 이고, $X'(x) = -\beta C \sin(\beta x) + \beta D \cos(\beta x)$ 이 된다. 따라서,

- $x = 0 : 0 = (\beta D - a_0 C)$ 로부터, $D = \frac{a_0}{\beta} C$.
- $x = l : 0 = (\beta D + a_l C) \cos(\beta l) + (-\beta C + a_l D) \sin(\beta l) = (a_0 + a_l) C \cos(\beta l) + \left(\frac{a_0 a_l}{\beta} - \beta \right) C \sin(\beta l)$ 특히, $C = 0$ 이면 $D = 0$ 이므로 $C \neq 0$ 을 가정하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\beta(a_0 + a_l) \cos(\beta l) &= (\beta^2 - a_0 a_l) \sin(\beta l) \\ \beta(a_0 + a_l) &= (\beta^2 - a_0 a_l) \tan(\beta l) \\ \tan(\beta l) &= \frac{\beta(a_0 + a_l)}{\beta^2 - a_0 a_l}\end{aligned}$$

을 만족해야만 한다. 이러한 조건을 만족하는 β 에 대해, solution은 $C(\cos(\beta l) + \frac{a_0}{\beta} \sin(\beta l))$ 이 된다.

이제 각각의 케이스를 따져보자.

- $a_0, a_l > 0$: 그러면, $y = \frac{(a_0 + a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$ 과 $y = \tan(\beta l)$ 의 교점이 바로 eigenvalue가 된다. (positive eigenvalue)
- $a_0 < 0 < a_l$ 이고 $a_0 + a_l > 0$: $\frac{(a_0 + a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$ 이 늘 0 이상이므로, $\beta = 0$ 에서의 기울기가 중요하다. 이 때, slope은 다음과 같이 나타난다.

$$f'(0) = \frac{a_0 + a_l}{-a_0 a_l}$$

– $\frac{a_0 + a_l}{-a_0 a_l} > l$ 인 경우. 즉, $a_0 + a_l > -a_0 a_l l$ 인 경우.

이 경우, 두 그래프가 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 에서 최초로 만난다. 그리고, 일반적으로는 $\beta = \beta_n \in \left(\frac{n\pi}{l}, \frac{(n+1/2)\pi}{l} \right)$ 에서 만난다. ($n = 0, 1, 2, \dots$)

– $\frac{a_0 + a_l}{-a_0 a_l} \leq l$ 인 경우. 즉, $a_0 + a_l \leq -a_0 a_l l$ 인 경우.

이 경우, 두 그래프가 $\beta \in \left(\frac{\pi}{l}, \frac{3\pi}{2l} \right)$ 에서 최초로 만난다. 그리고, 일반적으로는 $\beta = \beta_n \in \left(\frac{n\pi}{l}, \frac{(n+1/2)\pi}{l} \right)$, ($n = 1, 2, \dots$)에서 만난다.

Case 2. $\lambda = 0$ 인 경우. $X(x) = Cx + D$ 인 경우로, $C - a_0 D = 0$ 과 $C + a_l(Cl + D) = 0$ 으로부터 $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$ 을 얻는다. 즉, Case 1에서 $a_0 + a_l \leq -a_0 a_l l$ 인 경우에 한 근이 $\beta = 0$ 으로 갔던 것이다.

Case 3. $\lambda < 0$ 인 경우. 즉, $\lambda = -\gamma^2$ ($\gamma > 0$)를 생각해보자. 그러면, general solution을 이 경우에는 $X(x) = C \cosh(\gamma x) + D \sinh(\gamma x)$ 라고 쓸 수 있다. Boundary condition에 의하여, 다음을 만족해야만 한다.

$$\tanh(\gamma l) = -\frac{(a_0 + a_l)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_l}$$

또한, $X(x) = C \left(\cosh(\gamma x) + \frac{a_0}{\gamma} \sinh(\gamma x) \right)$ 이다. 이제, 각각의 케이스를 또 따져 보자.

- $a_0, a_l > 0$: 그러면, $-\frac{(a_0 + a_l)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_l} < 0$ 이므로 eigenvalue가 존재하지 않는다.
- $a_0 < 0 < a_l, a_0 + a_l > 0$: 마찬가지로, 초기 기울기가 중요하다. 따라서 다음과 같은 케이스를 나누자.
 - $a_0 + a_l \leq -a_0 a_l l$ 인 경우, 만족하는 $\gamma > 0$ 이 존재하지 않는다.
 - $a_0 + a_l < -a_0 a_l l$ 인 경우, 만족하는 $\gamma > 0$ 은 단 하나로 $(0, \sqrt{-a_0 a_l})$ 사이에 있다. 즉, Case 1에서 한 근이 음수로 간 것이다.

요약하면 다음과 같다.

1. $a_0, a_l > 0$ 인 경우 : positive eigenvalue만을 갖는다.
2. $a_0 < 0 < a_l, a_0 + a_l > 0$ 인 경우 :
 - (a) $a_0 + a_l > -a_0 a_l l$: positive eigenvalue만을 갖는다.
 - (b) $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$: Zero 그리고 positive eigenvalue들을 갖는다.
 - (c) $a_0 + a_l < -a_0 a_l l$: Negative one 그리고 positive eigenvalue들을 갖는다.

5 Fourier Series

5.1 Fourier coefficient

이번 절에서 ϕ 는 $[0, l]$ 에서 정의된 함수라고 하자.

5.1.1 Fourier sine series

구간 $0 < x < l$ (끝점을 무시하고)에서, ϕ 가 다음과 같은 형태라고 가정하자.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

이 때, A_n 을 찾기 위하여, 다음과 같은 내용을 살펴보자.

Observation. 만일 $n, m \in \mathbb{N}$ 이라면, 다음이 성립한다.

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \delta_{nm} \frac{l}{2}$$

이는 다음과 같이 증명할 수 있다. $n \neq m$ 이라면, $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ 에 의해,

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \int_0^l \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} \right]_{x=0}^{x=l} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin(n+m)\pi \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

가 성립한다. 만일 $n = m$ 이라면,

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right] dx = \frac{l}{2}$$

가 성립한다. 그러므로, 주어진 observation이 성립한다. □

다시, $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 로부터, 양변을 적분하여 다음과 같은 결론을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta_{nm} \frac{l}{2} = \frac{l}{2} A_m \\ \therefore A_m &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

5.1.2 Fourier cosine series

구간 $0 < x < l$ 에서 정의된 다음과 같은 ϕ 를 생각하자.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

마찬가지로, 다음과 같은 observation을 생각하자.

Observation. non-negative integers $n, m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ 에 대해,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

가 성립한다. 이에 대한 증명은 sine 함수에서와 정확하게 동일하다.

5.1.3 Full Fourier Series

이번에는, $\phi(x)$ 가 $[-l, l]$ 에서 정의된 함수라고 하자. 그러면, ϕ 를 다음과 같이 가정하자.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

이 경우에도, 다음과 같은 observation을 생각하자.

Observation. $n, m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ 에 대해, 다음이 성립한다.

1. $\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0$, if $n \neq m$
2. $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l$
3. $\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$, if $n \neq m$
4. $\int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l$
5. $\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$ even if $n = m$.

증명은 간단하다. (1)의 경우, even과 even의 곱이므로 even이고, $2 \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0$ 이므로 성립한다. (3)의 경우, odd와 odd의 곱이므로 even하고, (1)과 마찬가지로 0이 된다. 그리고, (5)의 경우, even과 odd의 곱이므로 odd하고, 범위가 $[-l, l]$ 이므로 0이다. (2), (4)의 경우에는, 둘 다 even하므로 간단하게 2배가 된다. \square

다시 돌아와서, $\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$ 인데, 다음과 같이 A_n, B_n 을 얻을 수 있다.

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n \in \mathbb{N}$$

Example

$\phi(x) \equiv 1$ on $[0, 1]$ 인 경우. ($l = 1$)

Fourier sine series : $A_n = 2 \int_0^1 \sin n\pi x dx$ 이고, 이 값은 n 이 odd일 때 $\frac{4}{n\pi}$, n 이 even일 때 0이다. 따라서, ϕ 의 fourier sine series는 다음과 같다.

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right)$$

Fourier cosine series : $A_n = 2 \int_0^1 \cos n\pi x dx$ 이고, 이 값은 $n \neq 0$ 이면 0, $n = 0$ 이면 2이다. 따라서, ϕ 의 fourier cosine series는 다음과 같다.

$$1 = 1 + 0 + 0 + \dots$$

5.2 Even, Odd, Periodic and complex functions

Definitions. $-\infty < x < \infty$ 에 정의된 함수 $\phi(x)$ 가 **periodic**하다는 것은, 어떤 $p > 0$ 이 있어서 $\phi(x + p) = \phi(x)$ 인 것이다. 특히, p -periodic function ϕ 에 대해 다음이 성립한다.

- $\phi(x + np) = \phi(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{Z}$
- $\int_a^{a+p} \phi(x) dx = \int_0^p \phi(x) dx$ for all $a \in \mathbb{R}$

만일, ϕ 가 length p 인 interval에 정의되어 있다면, 다음과 같은 **periodic extension**을 정의할 수 있다.

$$\phi_{\text{per}}(x) := \phi(x - p) \forall x \in (-\infty, \infty)$$

예를 들어, ϕ 가 $-l < x < l$ 에 정의된 함수라면, 그의 periodic extension은 $\phi_{\text{per}}(x) = \phi(x - 2lm)$ 으로 정의된다. ($-l < x - 2lm < l, m \in \mathbb{Z}$) 이를 통해, *Full Fourier Series*를 다시 보면,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} x + B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

으로부터, 이를 다음처럼 생각할 수 있다.

- Full Fourier series는 $(-l, l)$ 에 정의된 임의의 함수의 expansion이다.
- 그러므로, 이는 일종의 $2l$ - periodic function으로 생각할 수 있다.

Definition. Even function은 $\phi(-x) = \phi(x)$ 를 만족하는 것이고, Odd function은 $\phi(-x) = -\phi(x)$ 를 만족하는 것이다. 이러한 함수들은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

- 만일 ϕ 가 even function이라면, 다음이 성립한다.

$$1. \int_{-l}^l \phi(x) dx = 2 \int_0^l \phi(x) dx$$

$$2. \phi'(x) \text{와 } \int_0^x \phi(s) ds \text{는 odd function이다.}$$

- 만일 ϕ 가 odd function이라면, 다음이 성립한다.

1. $\phi(0) = 0$
2. $\int_{-l}^l \phi(x)dx = 0$
3. $\phi'(x)$ 와 $\int_0^x \phi(s)ds$ 는 even function이다.

- 일반적으로, 다음이 성립한다.

1. Even function과 Even function의 곱은 Even function이다.
2. Odd function과 Odd function의 곱은 Even function이다.
3. Even function과 Odd function의 곱은 Odd function이다.

따라서, 다음과 같은 **even extension**과 **odd extension**을 정의할 수 있다.

$$\phi_{\text{even}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ \phi(-x) & -l < x < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{\text{odd}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ 0 & x = 0 \\ -\phi(-x) & -l < x < 0 \end{cases}$$

5.2.1 Fourier series and Boundary conditions

Fourier sine series $\sum A_n \sin \frac{n\pi}{l}x$ 는 다음처럼 생각할 수 있다.

- 구간 $0 < x < l$ 에 정의된 임의의 함수의 expansion이다.
- whole line $-\infty < x < \infty$ 에 정의된 $2l$ - periodic *odd* function이다.

Fourier cosine series $\frac{1}{2}A_0 + \sum A_n \cos \frac{n\pi}{l}x$ 는 다음처럼 생각할 수 있다.

- 구간 $0 < x < l$ 에 정의된 임의의 함수의 expansion이다.
- whole line $-\infty < x < \infty$ 에 정의된 $2l$ - periodic *even* function이다.

따라서, 이러한 관찰을 바탕으로 다음처럼 주장할 수 있다.

Proposition 5.1

만일 ψ 가 $-\infty < x < \infty$ 에서 정의된 $2l$ - periodic odd(cf. even) function이라면, $\psi(x) = (\phi_{\text{odd}})_{\text{per}}$ (cf. $= (\phi_{\text{even}})_{\text{per}}$) 이고 $\phi(x) = \psi(x) \forall x \in (0, l)$ 으로 볼 수 있다.

5.2.2 Complex Form of Fourier Series

다음과 같은 L^2 - inner product를 생각하자.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \bar{g}(x) dx$$

그리고 나면, $\{e^{i\frac{n\pi}{l}x} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 는 orthonormal set이다. 따라서, $\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ 에 대해 각각의 coefficient는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_n &= \langle \phi, e^{i\frac{n\pi}{l}x} \rangle \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx \end{aligned}$$

5.3 Orthogonality and General Fourier Series

함수 f, g 가 $a \leq x \leq b$ 에 정의된 real-valued 실함수라고 하자. 그러면, 둘의 inner product는 다음과 같이 정의된다.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

특히, $\langle f, g \rangle = 0$ 이면 f 와 g 를 서로 **orthogonal**하다고 한다. 다음과 같은 관찰으로부터, 영함수를 제외하면 그 어떤 함수도 자기 자신과 직교하지 않는다.

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x)^2 \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$$

이제, 돌아가서, $X'' + \lambda X = 0$ 을 생각하자. 이는 $-X'' = \lambda X$ 라는 eigenvalue problem을 푸는 문제가 된다. 이 때, operator $\mathcal{A} := -\frac{d^2}{dx^2}$ 를 고려하면 $\mathcal{A}X = \lambda X$ 를 푼다는 것이다.

Theorem 5.2

Green's Theorem. 만일 X_1, X_2 가 \mathcal{A} 의 different (= linearly independent) eigenfunction이라면, 즉, 다음이 성립한다면,

$$\begin{aligned} -X_1'' &= \lambda_1 X_1 \\ -X_2'' &= \lambda_2 X_2 \end{aligned}$$

다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I &:= \int_a^b -X_1'' X_2 + X_1 X_2'' dx \\ &= \int_a^b (-X_1' X_2 + X_1 X_2')' dx \\ &= -(X_1'(b)X_2(b) - X_1(b)X_2'(b)) + (X_1'(a)X_2(a) - X_1(a)X_2'(a)) \end{aligned}$$

더 일반적으로는, simply-connected domain $D \subset \mathbb{R}^n$ 와 $D \subset V \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$ 에 대해 $X_1, X_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어진다면,

$$\int_D -\Delta X_1 X_2 + X_1 \Delta X_2 dx = \int_{\partial D} [-\nabla X_1 X_2 + X_1 \nabla X_2] \cdot \nu dS$$

가 성립한다. 이 때, ν 는 ∂D 의 outward unit normal vector이다. 이를 *Green's second identity* 라고 부른다.

각각의 Case에 대해 Green's theorem을 계산해보자.

1. Zero Dirichlet B.C. : $X_j(a) = X_j(b) = 0$ ($j = 1, 2$)에 대해, $I = 0$ 이다.
2. Zero Neumann B.C. : $X_j'(a) = X_j'(b) = 0$ ($j = 1, 2$)에 대해, $I = 0$ 이다.
3. Periodic Boundary Condition : $X_j(a) = X_j(b), X_j'(a) = X_j'(b)$ ($j = 1, 2$)에 대해, $I = 0$ 이다.

4. Robin Boundary Condition : $X_j'(a) - c_0 X_j(a) = 0 = X_j'(b) + c_1 X_j(b)$ ($j = 1, 2$)에 대해,

$$\begin{aligned} I &= -X_1'(a)X_2(b) + X_1(a)X_2'(b) + X_1'(a)X_2(a) - X_1(a)X_2'(a) \\ &= -(-c_1 X_1(b))X_2(b) + X_1(b)(-c_1 X_2(b)) + (c_0 X_1(a))X_2(a) - X_1(a)(c_0 X_2(a)) = 0 \end{aligned}$$

이 성립한다.

즉, 우리가 사용했던 B.C.에 대해서는 전부 $I = 0$ 이다. 그러나, 일반적으로는 이것이 (당연히) 성립하지 않을 수 있다. 만일 $X_j(a) = X_j(b)$, $X_j'(a) = 2X_j'(b)$ 를 사용하면, $I = \frac{1}{2}(-X_1'(a)X_2(a) + X_1(a)X_2'(a))$ 는 일반적으로 0이 아니다. 어쨌든, 위의 모든 경우에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b (-X_1''X_2 + X_1X_2'')dx = -X_1'X_2 + X_1X_2'|_a^b = 0 \\ &= \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2)X_1X_2dx \end{aligned}$$

다시 말해, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 라면 $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ 이다.

이제, 아주 일반적인 다음과 같은 boundary condition을 생각하자. 즉, **GBC**를 생각하자.

$$\text{GBC} \begin{cases} \alpha_1 X(a) + \beta_1 X(b) + \gamma_1 X'(a) + \delta_1 X'(b) = 0 \\ \alpha_2 X(a) + \beta_2 X(b) + \gamma_2 X'(a) + \delta_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

만일 어떤 GBC를 만족하는 모든 f, g 에 대해 $I = 0$ 이라면 이러한 BC를 **symmetric**하다고 한다.

Theorem 5.3

만일 $X'' = -\lambda X$ 가 symmetric한 BC를 가진다면, 서로 다른 eigenvalue를 갖는 eigenfunction은 늘 orthogonal 하다. (*) 따라서, 어떤 함수가 이러한 eigenfunction들의 series로 표현된다면, 그 coefficient는 유일하게 결정된다. (**)

(*)는 이미 위에서 증명하였고, (**)는 다음과 같이 증명할 수 있다. : 우선, 다음과 같은 ϕ 를 생각하자.

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

이 때, X_n 은 λ_n 에 대응되는 eigenfunction이며, 각각의 λ_n 은 서로 다른 값들이다. 즉, X_n 들은 각각이 서로 orthogonal 하다. 따라서,

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x) X_m(x) dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) X_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b A_n X_n(x) X_m(x) dx = A_m \|X_m\|^2 \end{aligned}$$

가 성립한다. 즉, 각각의 계수는 다음처럼 표현된다.

$$A_m = \frac{1}{\|X_m\|^2} \int_a^b \phi(x) X_m(x) dx$$

□

위의 증명에서, convergence에 대한 모든 의문을 해결하지 않았고, $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 경우에 대해서는 전혀 말하지 않았음을 주의하라.

5.3.1 Complex eigenvalue

만일 complex-valued function f, g 가 $a \leq x \leq b$ 위에 정의되어 있다면 f, g 의 inner product를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

이 경우에도, $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x) \bar{f}(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ 인 것과 $f(x) \equiv 0$ 인 것은 동치이다.

Theorem 5.4

만일 $X'' = -\lambda X$ 가 symmetric한 BC를 가진다면, (λ 는 complex를 허용함)

1. All the eigenvalues are real.
2. All the eigenfunctions can be chosen to be real-valued.

우선, eigenvalue들이 real함을 먼저 증명해보자. 우선, $-X'' = \lambda X$ 라고 하면, 양변에 complex conjugate를 취해 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{-X''} &= \overline{\lambda X} \\ -\bar{X}'' &= \bar{\lambda} \bar{X} \end{aligned}$$

따라서, $\bar{\lambda}$ 는 eigenvalue이고 \bar{X} 는 그에 대한 eigenfunction이다. 이제,

$$\int_a^b -X'' \bar{X} + X \bar{X}'' dx = (-X' \bar{X} + X \bar{X}')|_a^b = 0 (\because \text{symmetric})$$

인데, $-X'' = \lambda X$ 이므로,

$$\int_a^b \lambda X \bar{X} - \bar{\lambda} X \bar{X} dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |X|^2 dx = 0$$

이다. 즉, $\lambda = \bar{\lambda}$ 여야만 한다. 다시 말해, $\lambda \in \mathbb{R}$ 이다. 따라서, 모든 eigenvalue들은 real하다.

이제, $X(x) = Y(x) + iZ(x)$ 가 real λ 에 대한 eigenfunction이라고 하자. 그러면, $\bar{X}(x) = Y(x) - iZ(x)$ 는 $\bar{\lambda} = \lambda$ 에 대응하는 eigenfunction이다. 따라서, X 와 \bar{X} 는 λ 에 대응하는 서로 다른(= linearly independent) eigenfunction이다. 이제,

$$\begin{aligned} -X''(x) &= -Y''(x) - iZ''(x) \\ \lambda X(x) &= \lambda Y(x) + i\lambda Z(x) \end{aligned}$$

로부터, $-Y'' = \lambda Y$ 이고 $-Z'' = \lambda Z$ 가 성립한다. 따라서, Y 와 Z 는 마찬가지로 λ 에 대한 eigenfunction이다.

5.4 Completeness

우선 eigenvalue problem (*) $X'' + \lambda X = 0, x \in (a, b)$ 를 생각하자. 이 때, symmetric boundary condition을 갖는다고 하자. 5.3.의 Theorem에 따르면, (*)의 eigenvalue는 전부 real하다. 다음은 증명 없이 사용하는 정리이다.

Theorem 5.5

(*)의 eigenvalue는 무한히 많으며, 이 때 $\{\lambda_n\}$ 이라는 eigenvalue의 수열은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ 를 만족한다.

이 정리에 의하면, eigenvalue들의 multiplicity는 전부 finite하다. 즉, 모든 eigenvalue는 많아야 유한한 eigenfunction을 가지며, Gram-Schmidt process를 사용하여 eigenfunction들을 전부 orthogonal하게 만들 수 있다.

게다가, 이전의 정리에 따르면, $\lambda_i \neq \lambda_j$ 라면 그에 대응하는 eigenfunction X_i, X_j 는 서로 orthogonal하다. 즉, eigenvalue들을 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$ 로 줄 세우면, 그에 대응하는 eigenfunction들 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 은 전부 mutually orthogonal하다.

Example

$(a, b) = (0, l)$ 이고 Zero Dirichlet Boundary condition을 갖는다면, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 이고 $X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$ 들은 전부 orthogonal하다. ($n \in \mathbb{N}$)

Example

$(a, b) = (0, l)$ 이고 Zero Neumann Boundary condition을 갖는다면, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 이고 $X_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$ 들은 전부 orthogonal하다. ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

Example

$(a, b) = (-l, l)$ 이고 Periodic Boundary condition $u(-l, t) = u(l, t), u_x(-l, t) = u_x(l, t)$ 를 갖는다면, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 이고 $X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}$ 들이 전부 orthogonal하다. (multiplicity : 2)

Definition 5.6

(a, b) 위의 함수 $f(x)$ 에 대해, 일반적인 **Fourier coefficient**는 다음과 같이 정의된다.

$$A_n = \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{\int_a^b f(x) \overline{X_n(x)} dx}{\int_a^b |X_n(x)|^2 dx}$$

이 때, f 의 **Fourier series**는 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$ 을 의미한다.

다음과 같은 세 가지 종류의 수렴을 생각하자. (a, b) 에 주어진 함수열 $\{f_n\}$ 에 대해,

1. Series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 (a, b) 에서 f 로 **pointwise** 수렴한다는 것은, 각각의 $x \in (a, b)$ 에 대해 $\sum_{n=1}^N f_n(x)$ 가 $f(x)$ 로 수렴한다는 것이다. 즉, $\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty$ 이다.

2. Series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 (a, b) 에서 f 로 **uniformly** 수렴한다는 것은, 다음이 성립하는 것이다.

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

3. Series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 (a, b) 에서 f 로 L^2 -수렴한다는 것은, 다음이 성립하는 것이다.

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

당연히, uniform convergence는 pointwise convergence와 L^2 convergence보다도 강하다.

Example

우선, $a_N := \sup_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|$ 라고 놓자. Uniform convergence는 $N \rightarrow \infty$ 에서 $a_N \rightarrow 0$ 임을 의미한다.

1. 이제, 각 $a < x < b$ 에 대해, $\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \leq a_N \rightarrow 0$ 이므로, **squeeze theorem**에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는 $f(x)$ 로 (a, b) 에서 pointwise 수렴한다.
2. 또한, 다음에 의해 L^2 -수렴한다.

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dx \leq \int_a^b |a_N|^2 dx = a_N^2(b-a) \rightarrow 0$$

그리고, 당연히 이의 역은 성립하지 않는다.

- 먼저, $f_n(x) = (1-x)x^{n-1}$ 은 (그 series가) pointwisely converge하지만, uniformly converge하지 않고, RL^2 -converge한다.
- 또, $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n-1}{1+(n-1)^2x^2}$ 는 pointwisely converge하지만, uniformly converge하지 않고, RL^2 -converge하지도 않는다.

Theorem 5.7

(Uniform convergence) 다음이 만족되면, 구간 $[a, b]$ 위의 함수 f 의 Fourier series $\sum A_n X_n$ 이 f 로 uniformly converge한다.

- $f \in C^2([a, b])$ 이다.
- f 는 주어진 eigenvalue problem의 boundary condition을 만족한다.

Note : classical Fourier series (sine, cosine, 그리고 full)의 경우에는 f'' 의 존재성은 필요 없다. (이는 $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$ 에서 유래된다.)

Theorem 5.8

(L^2 -convergence) 만일 f 가 $L^2(a, b)$ 에 속하는 함수라면, f 의 Fourier series는 f 로 L^2 - converge한다.

다음과 같은 새로운 개념을 정의하자.

Definition 5.9

함수 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 **jump discontinuity**를 가진다는 것은, $f(c-) := \lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ 와 $f(c+) := \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ 가 존재하지만 $f(c-) \neq f(c+)$ 인 것이다.

그러면,

Definition 5.10

함수 $f(x)$ 가 $[a, b]$ 에서 **piecewise continuous**하다는 것은 f 가 continuous하지만 유한한 점에서 jump discontinuity를 갖는다는 것이다. 마찬가지로, $f(x)$ 가 $-\infty < x < \infty$ 에서 piecewise continuous하다는 것은 모든 $[a, b]$ 에서 piecewise continuous하다는 것이다.

Theorem 5.11

(Pointwise convergence) 이 정리는 classical Fourier series로만 생각한다.

1. Classical Fourier series가 (a, b) 에서 f 로 pointwise 수렴하려면, f 가 $[a, b]$ 에서 연속이고 f' 가 $[a, b]$ 에서 piecewise continuous해야만 한다.
2. 더 일반적으로, f 가 $[a, b]$ 에서 piecewise continuous하고 f' 가 $[a, b]$ 에서 piecewise continuous하다면 classical Fourier series가 모든 x ($-\infty < x < \infty$)에서 pointwise 수렴한다, 그 때, 수렴값은 다음과 같다.

$$\sum_n A_n X_n(x) = \frac{1}{2} [f_{\text{ext}}(x-) + f_{\text{ext}}(x+)]$$

이 때, f_{ext} 는 f 의 extended function이다.

f 가 연속함수라고 해서 Fourier series의 pointwise convergence를 보장하지는 못한다. 연속함수이더라도 그 미분 f' 가 piecewise continuous하다는 보장이 없기 때문이다.

6 Harmonic Functions

6.1 Laplace equation

Laplace equation은 diffusion 혹은 wave가 steady-state인 상태의 식을 의미한다. 즉, $\Delta u = 0$ 을 의미한다. 이 때, 이 laplace equation의 solution u 를 **Harmonic function**이라고 한다.

One dimensional case : 1-D의 경우에 $u(x) = A + Bx$ 이므로 큰 재미가 없다.

Two dimensional case : 2-D의 경우에는 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 의 해가 되는데, 다음과 같은 내용이 잘 알려져 있다.

Example 6.1

복소함수 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 에 대해 u, v 가 f 의 Real part, imaginary part라고 하자. 만일 f 가 holomorphic하다면, u 와 v 는 harmonic하다.

Example

라플라스 방정식의 inhomogeneous version, $\Delta u = f$ 를 **Poisson equation**이라고 하며, 다음과 같은 예시가 있다.

1. 중력 포텐셜 혹은 전기 포텐셜 ϕ 에 대해, $\Delta u = C\rho$ 가 성립한다. 여기서 ρ 는 질량밀도 혹은 전하밀도이다.
2. Brownian motion에 대해, $C_1 \sqcup C_2 = D$ 일 때, $u(x, y, z)$ 를 $(x, y, z) \in \bar{D}$ 에서 출발한 입자가 C_1 에 도달할 확률로 두자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\Delta u = 0$$

$$u = 1 \text{ on } C_1$$

$$u = 0 \text{ on } C_2$$

Theorem 6.2

Maximum Principle : $D \subset \mathbb{R}^n$ 을 connected bounded open set이라고 하자. u 가 D 위의 harmonic function이고 \bar{D} 에서 연속이라면, u 의 \bar{D} 에서의 최소값과 최대값은 ∂D 에서 나타난다. (weak) 게다가, 오로지 ∂D 에서만 나타난다. (strong)

Proof. 다음과 같은 아이디어를 떠올리자. “만일 함수 v 가 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ 에서 최대값을 갖는다면, $v_{xx}(\mathbf{x}_0) \leq 0$ 이므로 $\Delta v(\mathbf{x}_0) \leq 0$ 이다. 즉, 만일 $\Delta v(\mathbf{x}_0) > 0$ 이라면, 최대값을 갖지 못한다.” 이제 harmonic function u 에 대해, 즉 $\Delta u = 0$

일 때, u 의 perturbation으로부터 시작하자. 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해, $v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \epsilon\|\mathbf{x}\|^2$ 로 정의하자. 그러면, 주어진 D 에서, $\Delta v = \Delta u + \epsilon\Delta\|\mathbf{x}\|^2 = 0 + 2n\epsilon > 0$ 이다. 따라서, Δv 는 D 에서 maximum을 가질 수 없다. \bar{D} 가 compact하므로, v 는 \bar{D} 에서 maximum을 갖고, 따라서 v 는 ∂D 에서만 maximum을 갖게 된다. 이제 $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ 가 \bar{D} 에서 v 의 maximum point라고 하자. 즉, $v(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{D}} v$ 라고 하자. 임의의 $\mathbf{x} \in \bar{D}$ 에 대해, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\leq u(\mathbf{x}) + \epsilon\|\mathbf{x}\|^2 = v(\mathbf{x}) \\ &\leq v(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0) + \epsilon\|\mathbf{x}_0\|^2 \\ &\leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2 \end{aligned}$$

여기서 l 은 $l = \sup \{ \|\mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in \partial D \} < \infty$ 이다. (bounded이므로.) 따라서, $u(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2$ 가 성립하고,

$$\max_{\bar{D}} u \leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2$$

이고, ϵ 는 arbitrary하므로, $\epsilon \rightarrow 0$ 으로 두면 $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$ 가 성립한다. 게다가, $-u$ 도 harmonic하므로, $\min_{\bar{D}} u = \min_{\partial D} u$ 가 성립한다.

Corollary 6.3

Uniqueness of Dirichlet problem : 다음과 같은 dirichlet problem을 생각하자.

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(\mathbf{x} \in D) \\ u &= h(\mathbf{x} \in \partial D) \end{aligned}$$

그러면, 이 문제의 solution은 존재한다면 유일하다.

6.1.1 Laplace equation in the other systems

Laplace equation in the polar coordinate

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

Laplace equation in the spherical coordinate

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin \theta}u_{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}u_{\phi\phi}$$

6.2 Rectangles and Cubes

직사각형 영역 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$ 에서의 harmonic equation을 생각하자. 그리고, 다음과 같은 boundary condition을 고려하자.

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \\ u(0, y) &= j(y) \\ u_x(a, y) &= k(y) \\ u(x, b) &= g(x) \\ u_y(x, 0) + u(x, 0) &= h(x) \end{cases}$$

이 경우, Boundary condition을 (g, h, j, k) 로 뒀을 때, 다음과 같은 Boundary condition을 갖는 해들의 합으로 생각할 수 있다. ($u_1 : (g, 0, 0, 0), u_2 : (0, h, 0, 0), u_3 : (0, 0, j, 0), u_4 : (0, 0, 0, k)$)

Example

$u(x, b) = g(x)$, 나머지는 0인 u_1 이라는 해를 구해보자. 이를 위해, Separation of variable $u(x, y) := X(x)Y(y)$ 을

생각하자. 그러면, $X''Y + XY'' = 0$ 이고 $X(0) = X'(a) = 0$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= X'(a) = 0 \end{aligned}$$

이므로, eigenfunction은 $X_n(x) = \sin \left[\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{a} x \right]$ 이고 corresponding eigenvalue는 $\lambda_n = \beta_n^2 = \left[\frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{a} \right]^2$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned} Y'' - \lambda_n Y &= 0 \\ Y'(0) + Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

으로부터, $Y_n(y) = A_n \left[\cosh(\beta_n y) - \frac{1}{\beta_n} \sinh(\beta_n y) \right]$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\cosh(\beta_n y) - \frac{1}{\beta_n} \sinh(\beta_n y) \right] \sin(\beta_n x) \\ A_n &= \frac{2}{a} \left[\cosh(b\beta_n) - \frac{1}{\beta_n} \sinh(b\beta_n) \right]^{-1} \int_0^a g(x) \sin(\beta_n x) dx \end{aligned}$$

가 성립한다.

Example

다음과 같은 cube를 생각하자 : $D = \{ (x, y, z) \mid 0 < x, y, z < \pi \}$. 그리고, boundary condition으로 $u(\pi, y, z) = g(y, z)$ 로 두고 나머지 면에 대해서는 전부 0이라고 두자. 같은 방법으로, $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ 이고 따라서,

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= \sin(ny) \\ Z_m(z) &= \sin(mz) \\ X_{nm}(x) &= \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}x) \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}x) \sin(ny) \sin(mz) \\ A_{n,m} &= \frac{4}{\pi^2 \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi)} \int_0^\pi \int_0^\pi g(y, z) \sin(ny) \sin(mz) dy dz \end{aligned}$$

이다.

6.3 Poisson's Formula

다음과 같은 Disk에서의 Laplace equation을 풀어보자.

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < a^2 \\ u(a, \theta) = h(\theta) & x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

이를 해결하기 위해 Separation of Variable을 사용하자 : $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Polar coordinate에서의 Laplace equation은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \\ &= R''\Theta + \frac{1}{r}R\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \\ \left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\Theta &= -\frac{1}{r^2}R\Theta'' \\ \frac{r^2R'' + rR'}{R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta} =: \lambda(\text{constant})\end{aligned}$$

따라서, $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ 과 $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$ 을 해결하면 된다.

Theta term. $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$. 이 때, Θ 는 2π -periodic해야한다.

1. $\lambda > 0$ 인 경우. $\lambda = \beta^2$ ($\beta > 0$)이라고 놓자. 그러면,

$$\Theta(\theta) = A \cos(\beta\theta) + B \sin(\beta\theta)$$

이므로, Θ 는 $\frac{2\pi}{\beta}$ -periodic하다. 따라서, β 는 positive integer여야만 하고, $\beta_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이다. 즉, eigenvalue는 $\lambda = n^2$ 이고 eigenfunction은 $\cos n\theta, \sin n\theta$ 이다.

2. $\lambda = 0$ 인 경우. Eigenvalue는 $\lambda = 0$ 이고 Eigenfunction은 1이다.

3. $\lambda < 0$ 인 경우. $\lambda = -\gamma^2$ ($\gamma > 0$)이라고 놓자. 그러면,

$$\Theta(\theta) = A \cosh(\beta\theta) + B \sinh(\beta\theta)$$

인데, periodicity에 의해 $A = B = 0$ 이어야만 한다.

따라서, $\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)이다.

Raidal term. $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$. 이 때, $r \geq 0$ 이고, $r = 0$ 에서 R 은 finite하다는 조건을 가져가자. 그러면, 주어진 방정식은 **Cauchy-Euler equation**이므로 $R(r) = r^\alpha$ 로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha &= 0 \\ (\alpha^2 - n^2)r^\alpha &= 0\end{aligned}$$

따라서, $n \geq 1$ 에서 $\alpha = \pm n$ 이고, $R(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$ 이어야만 한다. 그런데, $r = 0$ 에서 R 이 finite해야하므로 $D_n \equiv 0$ 이어야 한다. 즉, $R_n(r) = C_n r^n$ ($n = 1, 2, \dots$)

만일 $n = 0$ 이라면, $r^2R'' + rR' = r(rR'' + R') = 0$ 에서 $R_0(r) = C + D \ln r$ 이므로, finiteness 조건에서 $D = 0$ 이어야만 한다. 즉, 종합했을 때,

$$R_n(r) = C_n r^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

가 된다.

최종적으로, 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u(r, \theta) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \\ u(a, \theta) &= h(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]\end{aligned}$$

이 때, 계수는 다음과 같다.

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

해를 적분 꼴로 적어서 정리해보자.

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \left\{ \underbrace{\cos(n\phi) \cos(n\theta) + \sin(n\phi) \sin(n\theta)}_{=\cos(n(\theta-\phi))} \right\} d\phi \right] \\ &= \int_0^{2\pi} h(\phi) \frac{d\phi}{2\pi} + \int_0^{2\pi} h(\phi) \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\theta-\phi)) \right] \frac{d\phi}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} h(\phi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\theta-\phi)) \right\} \frac{d\phi}{2\pi} \end{aligned}$$

integrand의 괄호 내부를 분석해보자.

$$\begin{aligned} [\dots] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n [e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)} \right)^n \\ &= 1 + \frac{r e^{i(\theta-\phi)}}{a - r e^{i(\theta-\phi)}} + \frac{r e^{-i(\theta-\phi)}}{a - r e^{-i(\theta-\phi)}} \\ &= 1 + \frac{a r e^{i(\theta-\phi)} + a r e^{-i(\theta-\phi)} - 2r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta-\phi) + r^2} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta-\phi) + r^2} \end{aligned}$$

따라서, 다음과 같은 **Poisson's formula**를 얻을 수 있다.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} h(\phi) d\phi$$

이 때, $\mathbf{x}(r, \theta)$ 와 $\mathbf{x}'(a, \phi)$ 에 대해, 다음과 같은 vector form을 생각할 수 있다. 두 점 사이의 거리가 $a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2$ 이므로 (제2 코사인 법칙)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\|\mathbf{x}'\|=a} \frac{\|\mathbf{x}'\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} h(\phi) \frac{ds'}{a} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \oint_{\|\mathbf{x}'\|=a} \frac{\|\mathbf{x}'\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} u(\mathbf{x}') ds' \end{aligned}$$

이러한 vector form의 Poisson formula를 얻을 수 있다.

Theorem 6.4

$h(\phi) = u(\mathbf{x}')$ 를 $C = \partial D$ 에서의 임의의 continuous function이라고 하자. 그러면, Poisson formula에 의해 D 에서의 harmonic function 중에 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0)$ (for all $\mathbf{x}_0 \in C = \partial D$)를 만족하는 것은 유일하다. 또한, formula에 의해 u 를 D 에서 무한 번 미분할 수 있다.

Proposition 6.5

Mean value property : u 가 disk D 의 harmonic function이고 \bar{D} 에서 continuous하다고 하자. D 의 center가 \mathbf{x}_0 이라면, $u(\mathbf{x}_0)$ 은 ∂D 에서 u 의 average value이다.

증명은 간단하다. 일반성을 잃지 않고 $\mathbf{x}_0 = 0$ 라고 하면, Poisson formula에 의해,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial D} \frac{\|\mathbf{x}'\|^2 - \|0\|^2}{\|\mathbf{x}' - 0\|^2} u(\mathbf{x}') ds' = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial D} u(\mathbf{x}') ds'$$

가 성립한다.

Theorem 6.6

Strong Maximum Principle : D 가 2-차원의 bounded open connected set이라고 하자. 그리고, u 는 D 에서 harmonic이고 \bar{D} 에서 연속인 함수라고 하자. 그러면 u 의 maximum(또한 minimum)은 D 의 boundary에서만 존재한다. 그렇지 않다면, u 는 상수이다.

pf. $M := \max_{\bar{D}} u$ 라고 하자. 이제, $x_0 \in D$ 가 있어서 $u(x_0) = M$ 이라고 하자. 그러면, u 가 constant함을 claim할 것이다. $E := \{x \in D \mid u(x) = M\} \neq \emptyset$ 이라고 하자. 그러면, (1) u 가 continuous하므로, $u^{-1}(\{M\})$ 은 D 에서 relatively closed하다. (2) 이제 $x_1 \in E$ 라고 하자. D 가 open이므로, $r > 0$ 이 있어서 $B_r(x_1) \subseteq D$ 가 되게 할 수 있다. Mean value property에 의해,

$$M = u(x_1) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B_a(x_1)} u(x') ds'$$

이것이 $0 < a < r$ 에서 성립한다. 만일 $u(x'_1) < M$ 인 $x'_1 \in \partial B_a(x_1)$ 이 존재한다면, u 가 continuous하므로,

$$\frac{1}{2\pi a} \int_{\partial B_r(a)} u(x') ds' < M$$

이므로 모순이다. 따라서, $\partial B_a(x_1)$ 에서 전부 $u \equiv M$ 을 가지고 $0 < a < r$ 은 arbitrary하므로 $x \in B_r(x_1)$ 에서 $u(x) \equiv M$ 이다. 따라서, $B_r(x_1) \subseteq E$ 이고 E 는 \mathbb{R}^2 에서 open이므로 E 는 D 에서 open이다. 따라서, E 는 D 에서 open이고 closed이다. 이 때 D 는 connected하므로 $E = \emptyset$ 이거나 $E = D$ 이다. 그러나 $E \neq \emptyset$ 이므로, $E = D$ 이고 따라서 u 는 constant하다.

Proposition 6.7

Differentiability of harmonic function : Poisson's formula로부터,

$$u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi a} \oint_{\|\mathbf{x}'\|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} ds'$$

그런데 $0 < a - \|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq a + \|\mathbf{x}\|$ 이므로 $\frac{u(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2}$ 는 smooth하다. 따라서,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{a^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi a} \right] \oint \cdots ds' + \frac{a^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi a} \oint_{\|\mathbf{x}'\|=a} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} \right) ds'$$

이고 따라서 differentiable하다. 마찬가지로 smooth하다.

7 Green's identities and Green's Function

7.1 Green's First identity

우선 다음과 같은 **Divergence theorem**을 생각하자. $D \subseteq \mathbb{R}^3$ 이고 ∂D 가 smooth할 때, $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\iiint_D \nabla \cdot F dV = \iint_{\partial D} F \cdot \mathbf{n} dS$$

이제, $u, v : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ 라고 하고 $F = v \nabla u$ 이라고 하자. 그러면, divergence theorem에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \iiint_D \nabla \cdot (v \nabla u) d\mathbf{x} &= \iint_{\partial D} v \nabla u \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_D \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u d\mathbf{x} &= \iint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

이제 $v \equiv 1$ 이라고 두면, $\iiint_D \Delta u d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS$ 이다. 이제, 다음과 같은 Neumann boundary condition을 갖는 poisson equation을 생각하자.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \partial D \end{cases}$$

만일 u 가 이 문제의 solution이라면, Divergence theorem에 의해 $\iiint_D f d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} h dS$ 여야만 한다. (necessary condition of existence of solution)

Mean Value Property of harmonic function

$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$ 와 $\partial D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ 라고 하자. 만일 u 가 \bar{D} 에서 continuous 하고 u 가 D 에서 harmonic하다면, 즉 $\Delta u = 0$ 이라면 다음이 성립한다.

$$\iiint_D \Delta u d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

이다. 구면좌표계에서, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_r(a, \theta, \phi) a^2 \sin \theta d\theta d\phi &= 0 \\ \therefore \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_r(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi &= 0, \forall r \in [0, a] \end{aligned}$$

따라서, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right] &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_r(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 0 \\ \therefore \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi &\equiv \text{Constant} \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(a, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow 0^+} u(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= u(0) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi u(0) \end{aligned}$$

따라서,

$$\frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\partial D} u dS = u(0)$$

Uniqueness of Dirichlet problem : u 가 만일 다음을 만족하면, 해는 0으로 유일한데 이는 green's first identity로 증명할 수 있다.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = 0 & \text{in } \partial D \end{cases}$$

Theorem 7.1

Dirichlet principle : Dirichlet Boundary condition $w := h$ on ∂D (8)을 생각하고, 다음과 같은 **Dirichlet energy**를 정의하자.

$$E[w] = \frac{1}{2} \iiint_D \|\nabla w\|^2 d\mathbf{x}$$

그러면, u 가 (8)을 만족할 때, 다음이 성립한다.

u 가 D 에서 harmonic iff (8)을 만족하는 임의의 w 에 대해, $E[w] \geq E[u]$ 이다.

(\Rightarrow) $v = u - w$ 라고 하자. 그러면, $v = 0$ on ∂D 이다. 그러면,

$$\begin{aligned} E[w] &= \frac{1}{2} \iiint_D |\nabla(u - v)|^2 d\mathbf{x} \\ &= E[u] - \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + E[v] \end{aligned}$$

그러면, Green's first identity에 의해,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iiint_D \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u d\mathbf{x} \\ 0 &= \iiint_D \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \end{aligned}$$

즉, $E[w] = E[u] + E[v] \geq E[u]$ 이므로 증명이 완료된다.

(\Leftarrow) v 를 ∂D 에서 vanishing하도록 잡자. 그러면, 모든 $\epsilon \in \mathbb{R}$ 에 대해, $u + \epsilon v$ 는 boundary condition을 만족한다. 그러면,

$$\begin{aligned} E[u] &\leq E[u + \epsilon v] \\ &= E[u] - \int_D \nabla u \cdot (\epsilon \nabla v) d\mathbf{x} + E[\epsilon v] \\ &= E[u] - \epsilon \int_D \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \epsilon^2 E[v] \end{aligned}$$

RHS는 $\epsilon = 0$ 에서 minimum을 가지고, $E[v] \geq 0$ 이므로 $\int_D \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = 0$ 이다. 그러므로, $\int_D v \nabla u d\mathbf{x} = 0$ 이다. v 가 ∂D 에서 vanish하는 임의의 함수이므로, 모든 $D' \subset D$ 에 대해 $\iiint_{D'} \Delta u d\mathbf{x} = 0$ 이다. 즉, $\Delta u = 0$ 이다.

7.2 Green's second identity

Green's 1st identity로부터 시작하자.

$$\begin{aligned}\iint_D \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u d\mathbf{x} &= \iint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ \iint_D \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v d\mathbf{x} &= \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} dS\end{aligned}$$

두번째 식에서 첫번째 식을 빼줌으로써 다음을 얻는다.

$$\iint_D u \Delta v - v \Delta u d\mathbf{x} = u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

이를 **Green's second identity**라고 한다.

Proposition 7.2

Representation Formula 1. $\Delta u = 0$ 이 D 에서 성립한다면,

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial D} \left[-u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \right] \frac{dS}{4\pi}$$

3-dimensional radial harmonic function $u(r) = \frac{C}{r} + D$ 를 생각하자. 이는 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 에서 harmonic하다. $C = -\frac{1}{4\pi}$, $D = 0$ 으로부터, $u(r) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$ 는 원점을 제외하고 harmonic하다. 따라서, $-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$ 은 \mathbf{x}_0 을 제외하고 harmonic하다. 이제, Green's second identity에서 시작하자.

$$\iint_D u \Delta v - v \Delta u d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Δv 가 D 전역에서 harmonic하지 못하므로, $D_\epsilon := D \setminus B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ 을 생각하자. ($0 < \epsilon \ll 1$) 그러면, D_ϵ 에서 $\Delta u, \Delta v$ 는 well-defined되며 harmonic하다. 따라서,

$$\begin{aligned}\iint_{D_\epsilon} u \Delta v - v \Delta u d\mathbf{x} &= \iint_{\partial D_\epsilon} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ 0 &= \iint_{\partial D} uv_n - vu_n dS + \iint_{\partial B_\epsilon(\mathbf{x}_0)} uv_n - vu_n dS\end{aligned}$$

Wlog, $\mathbf{x}_0 = 0$ 이라고 두자. 그러면 $\partial B_\epsilon(0)$ 에서 $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial r}$ 이다.

$$\begin{aligned}\iint_{\partial B_\epsilon(0)} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_{\partial B_\epsilon(0)} -u \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{r=\epsilon} -\frac{1}{r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{r=\epsilon} u dS + \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{r=\epsilon} \frac{\partial u}{\partial r} dS\end{aligned}$$

이제, mean value property로부터,

$$\begin{aligned}0 &= \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS - u(0) + \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS - u(0)\end{aligned}$$

따라서,

$$u(0) = \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

이 때, $v = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|}$ 이다.

특히, 2D에서는 $v = \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ 으로,

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[u \frac{\partial}{\partial n} (\log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) - \frac{\partial u}{\partial n} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \right] ds$$

7.3 Green's Function

특히, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 은 ∂D 에서 어떤지 정확히 알 수 없다.

Definition 7.3

Green's function $G(\mathbf{x})$ for the operator $-\Delta$ and the domain D at the point $\mathbf{x}_0 \in D$ 는 $\mathbf{x} \in D$ 에서 정의되는 다음을 만족하는 함수이다.

1. $G \in C^2$ 이고 $-\Delta G = 0$ on D 이다. (\mathbf{x}_0 을 제외하고)
2. $G(\mathbf{x}) = 0$ on ∂D .
3. $G(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$ 은 \mathbf{x}_0 에서 finite하고 이계도함수가 모든 위치에서 존재하며 \mathbf{x}_0 에서 harmonic하다.

이를 $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ 이라고 쓴다.

Theorem 7.4

Green's function $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ 에 대해, Dirichlet problem의 solution은 다음처럼 주어진다.

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_D u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dS$$

증명. Formula 1 $u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} dS$ ($v = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$)에서 시작하자. $H(\mathbf{x}) := G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - v(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$ 은 D 에서 harmonic하다. 즉, $\Delta H = 0$ 이다. 이제, G2로부터,

$$\begin{aligned} \iiint_D H \Delta u - u \Delta H d\mathbf{x} &= \iint_{\partial D} H \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial H}{\partial n} dS \\ &= 0 = \iint_{\partial D} H \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial H}{\partial n} dS \end{aligned}$$

이를 Formula 1과 결합하면,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0) &= \iint_{\partial D} u \frac{\partial}{\partial n} (H + v) - (H + v) \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ &= \iint_{\partial D} u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ \therefore u(\mathbf{x}_0) &= \iint_{\partial D} u \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dS \end{aligned}$$

Theorem 7.5

Poisson problem의 solution은 다음처럼 주어진다.

$$u(\mathbf{x}) = \iint_{\partial D} h(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dS + \iiint_D f(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$$

7.4 Green's functions : examples

Half-space, $D = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$ 과 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 에서 green's function은 다음과 같이 주어진다.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{1}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|}$$

여기서 $\mathbf{x}_0^* = (x_0, y_0, -z_0)$ 이다.

Ball, $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$ 에서 green's function은 다음과 같이 주어진다.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{1}{4\pi\rho^*}$$

여기서 $\rho = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ 이고 $\rho^* = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*\|$ 이다. 특히, $\mathbf{x}_0^* = \frac{a^2}{\|\mathbf{x}_0\|^2}\mathbf{x}_0$ 이다.