

Friedberg Solution

2dayclean

2026/01/08

1 벡터공간

1.1 개론

1.2 벡터공간

Problem 1.

- (a) 참. 공리 (VS3)에 의해 모든 벡터 공간에는 영벡터가 존재한다.
- (b) 참. (a)와 같은 이유로 존재하며, 실제로 영벡터는 유일하다.
- (c) 거짓. $x = 0$ 인 경우, $1x = 2x = 0$ 이지만 $1 \neq 2$ 이다.
- (d) 거짓. $a = 0$ 인 경우, $0x = 0y$ 이지만 $x \neq y$ 인 x, y 가 존재할 수 있다.
- (e) 참. 그 둘을 본질적으로 같다고 할 수 있다. 이는 추후에 나오는 선형사상과 차원을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.
- (f) 거짓. $m \times n$ 행렬은 m 개의 행과 n 개의 열로 이루어져 있다.
- (g) 거짓. $x + 1$ 과 $x^2 + x + 1$ 의 합은 $x^2 + 2x + 2$ 이다.
- (h) 거짓. $x + 1$ 과 $-x + 1$ 은 차수가 둘 다 1이지만, 그 합은 2이고 차수가 0이다.
- (i) 참. 다항식 f 의 leading coefficient가 a_n 이라고 하면, cf 의 leading coefficient는 ca_n 이고 이는 0이 아니다. 이는 임의의 체 \mathbb{F} 에서도 성립한다.
- (j) 참. 이는 동형사상을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.
- (k) 참. 함수의 같음을 정의하는 방법이다.

Problem 2. 벡터공간 $M_{3 \times 4}(F)$ 의 영벡터는 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

Problem 3. $M_{13} = 3$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = 5$.

Problem 4.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{bmatrix}$$

$$(e) 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$$

$$(f) -x^3 + 7x^2 + 4$$

$$(g) 10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$$

$$(h) 3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$$

Problem 5. (a) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) 자명.

Problem 6. 문제 5와 유사하므로 생략.

Problem 7. 문제 1의 (k)를 사용한다. $f(0) = 1, f(1) = 3, g(0) = 1, g(1) = 1 + 4 - 2 = 3$ 이므로 f 와 g 가 S 에서의 함수값이 모두 일치한다. 즉, $f = g$ 이다. 또한, $h(0) = 2, h(1) = 6$ 인데 $(f + g)(t)$ 와 S 에서의 함수값이 모두 일치하므로 $f + g = h$ 이다.

Problem 8. 임의의 벡터 x, y 와 임의의 스칼라 a, b 에 대해,

$$(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y \quad (\text{VS8})$$

$$= (ax + bx) + (ay + by) \quad (\text{VS7})$$

$$= ax + (bx + ay) + by \quad (\text{VS2})$$

$$= ax + ay + bx + by \quad (\text{VS1}), (\text{VS2})$$

Problem 9. 따름정리 1. (VS3)을 만족하는 벡터 0 은 유일하다.

proof) (VS3)을 만족하는 벡터 $0, 0'$ 을 고려하자. 그러면, (VS3)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

즉, 0 과 $0'$ 은 동일한 벡터이다. 따라서, 영벡터는 유일하다. □

따름정리 2. (VS4)를 만족하는 벡터 y 는 유일하다.

proof) 주어진 x 에 대해, $x + y = 0$ 이고 $x + z = 0$ 이라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$y = y + 0$$

$$= y + (x + z)$$

$$= (y + x) + z$$

$$= 0 + z = z$$

즉, $y = z$ 이다. 따라서, 역벡터는 유일하다. □

정리 1.2(3) 모든 스칼라 a 에 대해 $a0 = 0$ 이다.

proof) 스칼라 a 에 대해, $a0 = a(0+0) = a0+a0$ 이다. 즉, $a0+0 = a0 = a0+a0$ 이다. 정리 1.1에 의해, $0 = a0$ 이다. \square

Problem 10. $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{는 미분가능}\}$ 이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 가장 먼저, $f, g \in V$ 와 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 $f+g \in V$ 이고 $(cf) \in V$ 인지 확인해야 한다. (연산에 대한 닫힘) 다시 말해 미분가능한 함수의 합 역시 미분가능하고, 미분가능한 함수의 스칼라배 역시 미분가능한지 보여야 한다. 이는 잘 알려진 내용이므로 생략한다. (자세한 정의는 미분적분학이나 해석학 교재를 참고하라.)

(VS1) 모든 $f, g \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$ 이므로 $f+g = g+f$ 이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 교환법칙이 사용되었다.

(VS2) 모든 $f, g, h \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f+(g+h))(x)$ 이므로 $(f+g)+h = f+(g+h)$ 이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS3) 함수 0 을 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $0(x) = 0$ 으로 정의하면 $(f+0)(x) = f(x)+0(x) = f(x)$ 이므로 늘 $f+0 = 0+f = f$ 이다. 또한, $0(x) = 0$ 은 미분가능하므로 $0 \in V$ 이다.

(VS4) 함수 $f \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 g 를 $g(x) = -f(x)$ 로 정의하면 g 는 미분가능하고, 자명히 $f+g = 0$ 이다.

(VS5) 함수 $f \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$ 이므로 $1f = f$ 이다.

(VS6) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$ 와 함수 $f \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = (a(bf))(x)$ 이다. 따라서, $(ab)f = a(bf)$ 이다. 이 증명에서는 실수의 곱에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS7) 실수 $a \in \mathbb{R}$ 와 함수 $f, g \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $(a(f+g))(x) = a((f+g)(x)) = a(f(x)+g(x)) = af(x) + ag(x) = (af+ag)(x)$ 이다. 따라서, $a(f+g) = af+ag$ 이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

(VS8) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$ 와 함수 $f, g \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x)+bf(x) = (af+bf)(x)$ 이다. 따라서, $(a+b)f = af+bf$ 이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 11. 영벡터만을 벡터로 갖는 $V = \{0\}$ 이 벡터공간임을 보이자.

(cl) $0+0 = 0$ 이고, 임의의 상수 $c \in F$ 에 대해 $c0 = 0$ 이므로 연산에 대해 닫혀 있다.

(VS1) 원소가 0 뿐이므로 $0+0 = 0+0 = 0$ 이다.

(VS2) 원소가 0 뿐이므로 $0+(0+0) = (0+0)+0$ 이다.

(VS3) 원소가 0 뿐이므로 $0+0 = 0$ 에서 0이 항등원이다.

(VS4) 원소가 0 뿐이고, $0+0 = 0$ 에서 0의 역원이 0이다.

(VS5) 정의에 의해 $1 \cdot 0 = 0$ 이다.

(VS6) 스칼라 a, b 에 대해 $(ab)0 = 0 = a0 = a(b0)$ 이다.

(VS7) 스칼라 a 에 대해 $a(0+0) = a0 = 0 = 0+0 = a0+a0$ 이다.

(VS8) 스칼라 a, b 에 대해 $(a+b)0 = 0 = 0+0 = a0+b0$ 이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 12. 짝함수(even function)들의 집합이 벡터공간임을 보이자. 사실, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로, (VS1), (VS2), (VS5 - 8)은 증명할 필요가 없다. 따라서, (cl) : 연산에 대한 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 짝함수 f, g 와 실수 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 $f + g$ 와 cf 가 짝함수임을 보이면 충분하다. 먼저, $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ 로부터 $f + g$ 는 짝함수이다. 또한, $(cf)(-x) = cf(-x) = cf(x) = (cf)(x)$ 로부터 cf 는 짝함수이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$ 이 짝함수임을 보이면 충분하다. $0(-x) = 0 = 0(x)$ 에서 0 은 짝함수이다.

(VS4) 짝함수 f 에 대해 $g(x) = -f(x)$ 로 정의된 g 가 짝함수임을 보이면 충분하다. $g(-x) = -f(-x) = -f(x) = g(x)$ 에서 g 는 짝함수이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 13. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ 만 가지고도 이 덧셈에 대해 주어진 집합이 벡터공간이 되지 않음을 보일 수 있다. 이 공간의 영벡터의 역할을 하는 벡터를 우선 찾아보자. 영벡터를 (x, y) 라고 하면, $(a, b) + (x, y) = (a + x, by) = (a, b)$ 가 되어야 한다. 따라서, $x = 0$ 이고 $y = 1$ 이어야 한다. 즉, 이 공간에서는 $(0, 1)$ 이 영벡터이다. 이제, $(1, 0)$ 의 역벡터를 찾아보자. 만일 (x, y) 가 $(1, 0)$ 의 역벡터라면, $(1, 0) + (x, y) = (1x, 0y) = (x, 0)$ 가 영벡터여야만 한다. 다시 말해, $(x, 0) = (0, 1)$ 이어야만 하는데, $0 \neq 1$ 이므로 (두번째 좌표) 어떤 (x, y) 도 역벡터가 될 수 없다. 따라서, 이 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 14. 스칼라가 \mathbb{R} 로 제한된 상태이므로, 주어진 공간이 실수 상수곱에 대해 벡터공간 공리를 만족하는지 보이면 된다. 그런데, 주어진 공간은 이미 스칼라를 \mathbb{C} 로 택했을 때 벡터 공간 공리를 만족하고, \mathbb{R} 은 \mathbb{C} 의 부분집합이므로 \mathbb{C} 에서 모두 만족한다면 \mathbb{R} 에서도 만족하게 된다. 따라서, 주어진 공간은 \mathbb{R} -벡터공간이다. \square

Problem 15. 이 경우 '닫혀 있음'이 보장되지 않는다. 예를 들어, $i \in \mathbb{C}$ 와 $(1, 1, \dots, 1) \in V$ 를 생각하자. 그러면 $i(1, 1, \dots, 1) = (i, i, \dots, i)$ 인데, 이러한 벡터는 주어진 공간 V 에 존재하지 않는다. (각 좌표가 실수가 아니기 때문) 따라서, 상수곱에 대해 닫혀있지 않으므로, 주어진 공간은 \mathbb{C} -벡터공간이 아니다. \square

Problem 16. 각 entry가 전부 실수인 $m \times n$ -행렬들을 모아놓은 공간은 이미 \mathbb{R} -벡터공간이다. \mathbb{Q} 는 \mathbb{R} 의 부분집합이므로, 문제 14에서와 동일한 논리에 의해 주어진 공간은 \mathbb{Q} -벡터공간이다. \square

Problem 17. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS5)를 만족하지 못하게 된다. $1(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ 으로부터 $a_2 \neq 0$ 인 경우에 $1v = v$ 를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 18. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS1)을 만족하지 못하게 된다. $(1, 0) + (2, 0) = (1 + 4, 0) = (5, 0)$ 이지만, 순서를 바꾼 $(2, 0) + (1, 0) = (2 + 2, 0) = (4, 0)$ 과 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 19. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS8)을 만족하지 못하게 된다. $a = 2, b = 3, v = (1, 1)$ 이라고 하자. 그러면 $(a + b)v = 5v = (5, 1/5)$ 이지만, $av = (2, 1/2), bv = (3, 1/3)$ 이고 둘의 합은 $(5, 5/6)$ 으로 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 20. 문제 12와 마찬가지로, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로 (cl) : 연산에 대한 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 함수 $f, g \in V$ 와 실수 $c \in \mathbb{R}$ 를 생각하자. $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ 이므로 $f + g$ 또한 $x = 1$ 에서 0을 갖는다. 따라서 $f + g \in V$ 이다. 또한, $(cf)(1) = cf(1) = c0 = 0$ 에서 cf 또한 $x = 1$ 에서 0을 갖는다. 따라서 $cf \in V$ 이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$ 이 $x = 1$ 에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $0(1) = 0$ 이다. 따라서, $0 \in V$ 이다.

(VS4) 함수 $f \in V$ 에 대해, $g(x) = -f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $g(1) = -f(1) = -0 = 0$ 이다. 따라서, $g \in V$ 이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 21. 곱공간이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$ 와 스칼라 $c \in F$ 에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ 에서, $v + v' \in V$ 이고 $w + w' \in W$ 임은 V, W 가 벡터 공간이라는 사실(그러므로 닫혀 있다는 사실)로부터 자동으로 얻어진다. 따라서, $(v, w) + (v', w') \in Z$ 이다. 마찬가지로 $c(v, w) = (cv, cw)$ 에 대해 $cv \in V$ 이고 $cw \in W$ 이므로 $c(v, w) \in Z$ 이다.

(VS1) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$ 에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') = (v' + v, w' + w) = (v', w') + (v, w)$ 이므로 (VS1)이 성립한다. 이는 V, W 각각이 벡터 공간이라는 사실로부터 얻어진다.

(VS2) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w'), (v'', w'') \in Z$ 에 대해, $((v, w) + (v', w')) + (v'', w'') = ((v + v') + v'', (w + w') + w'') = (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) = (v, w) + ((v', w') + (v'', w''))$ 이므로 (VS2)가 성립한다. 마찬가지로, V, W 가 (VS2)를 만족하기 때문이다.

(VS3) V 의 항등원과 W 의 항등원을 각각 $0_V, 0_W$ 라고 하자. 그러면 $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$ 이므로 $(0_V, 0_W)$ 는 영벡터이다.

(VS4) $(v, w) \in Z$ 에 대해, $v \in V, w \in W$ 의 역벡터를 각각 $x \in V, y \in W$ 라고 하자. 그러면 $(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y) = (0_V, 0_W)$ 이므로 $(x, y) \in Z$ 는 (v, w) 의 역벡터이다.

(VS5) $1(v, w) = (1v, 1w) = (v, w)$ 이므로 (VS5)가 만족된다.

(VS6) 스칼라 a, b 와 $(v, w) \in Z$ 에 대해, $(ab)(v, w) = ((ab)v, (ab)w) = (a(bv), a(bw)) = a(bv, bw) = a(b(v, w))$ 이므로 (VS6)이 만족된다.

(VS7) 스칼라 a 와 $(v, w), (v', w') \in Z$ 에 대해, $a((v, w) + (v', w')) = a(v + v', w + w') = (a(v + v'), a(w + w')) = (av + av', aw + aw') = (av, aw) + (av', aw') = a(v, w) + a(v', w')$ 이므로 (VS7)이 만족된다.

(VS8) 스칼라 a, b 와 $(v, w) \in Z$ 에 대해, $(a + b)(v, w) = ((a + b)v, (a + b)w) = (av + bv, aw + bw) = (av, aw) + (bv, bw) = a(v, w) + b(v, w)$ 이므로 (VS8)이 만족된다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 22. 각 entry에는 0 혹은 1만이 자리할 수 있다. 따라서, 총 mn -개의 entry에 0 또는 1을 채워넣는 방법의 수이므로, 2^{mn} 개의 matrix가 존재한다.

1.3 부분공간

Problem 1.

(a) 거짓. $V = \mathbb{R}^2, W = \{(x, 1) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ 을 생각하고, W 위에 덧셈과 상수곱을 다음과 같이 정의하자. $(x, 1) + (x', 1) = (x + x', 1), c(x, 1) = (cx, 1)$. 그러면 W 는 그 자체로 벡터공간이며, 집합으로는 V 의 부분집합이지만, 둘의 구조가 다르므로 부분공간은 아니다.

(b) 거짓. 공집합은 벡터공간 공리 중 영벡터를 포함해야한다는 (VS3)을 만족하지 않는다. 따라서, 공집합은 그 자체로 벡터 공간이 아니다.

(c) 참. $\{0\}$ 은 모든 벡터 공간 V 의 부분 공간이고, V 가 점공간이 아니므로 $W = \{0\} \neq V$ 로 두면 충분하다.

(d) 참. 정리 1.4에 의해 부분공간의 교집합은 늘 부분공간이다.

- (e) 참. 대각행렬은 대각 성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬이다. 따라서, 대각 성분 n 개만이 0이 아닌 값을 가질 수 있다.
- (f) 거짓. 정사각행렬의 대각합은 대각성분의 곱이 아니라 합이다.
- (g) 거짓. 둘은 '같은' 공간이 아니다.

Problem 2. (a) $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 대각합 : $-4 - 1 = -5$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \\ -8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, 대각합 : $10 - 4 + 6 = 12$ (e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 대각합 : $-4 + 1 + 5 = 2$

Problem 3. $A = (A_{ij}), B = (B_{ij})$ 로 놓고, $C = (C_{ij}) = (aA + bB)^t$ 라고 하자. 그러면, $C_{ij} = (aA + bB)_{ji}$ 이고 (전치행렬의 정의) $(aA + bB)_{ji} = aA_{ji} + bB_{ji}$ 이다. 따라서, $C_{ij} = aA_{ji} + bB_{ji}$ 이다. 또한, $(aA^t + bB^t)_{ij} = a(A^t)_{ij} + b(B^t)_{ij} = aA_{ji} + bB_{ji}$ 이다. 따라서, $(aA + bB)^t = aA^t + bB^t$ 이다. \square

Problem 4. $A = (A_{ij})$ 로 두자. 그러면 $[(A^t)^t]_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}$ 이므로, $(A^t)^t$ 의 (i, j) -성분은 A 의 (i, j) -성분이다. 따라서, $(A^t)^t = A$ 이다. \square

Problem 5. 문제 3에 의해, $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t$ 이다. 그리고, 문제 4에 의해 $(A^t)^t = A$ 이므로, $(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$ 이다. 즉, $A + A^t$ 는 전치행렬과 동일하므로 대칭행렬이다. \square

Problem 6. $\text{tr}(aA + bB) = \sum_{i=1}^n (aA + bB)_{ii} = \sum_{i=1}^n (aA_{ii} + bB_{ii}) = a \sum_{i=1}^n A_{ii} + b \sum_{i=1}^n B_{ii} = a \text{tr}(A) + b \text{tr}(B)$. \square

Problem 7. 대각행렬 $D = (D_{ij})$ 를 생각하자. 그러면, $i \neq j$ 이면 $D_{ij} = 0$ 이다. 따라서, $(D^t)_{ij} = D_{ji}$ 에 대해, $i \neq j$ 이면 $D_{ji} = 0 = D_{ij}$ 이고, $i = j$ 이면 $D_{ji} = D_{ii} = D_{ij}$ 이다. 따라서, $D^t = D$ 이므로 D 는 대칭행렬이다. \square

Problem 8.

- (a) (a) $(0, 0, 0) \in W_1 : a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ 이므로 $a_1 = 0 = 3a_2, a_3 = 0 = -a_2$ 이다.
- (b) 덧셈에 대한 닫힘 : $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in W_1$ 에 대해, 둘의 합 $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ 을 조사하자. $(a_1 + b_1) = 3a_2 + 3b_2 = 3(a_2 + b_2)$ 이고, $(a_3 + b_3) = -a_2 - b_2 = -(a_2 + b_2)$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.
- (c) 상수곱에 대한 닫힘 : $(a_1, a_2, a_3) \in W_1$ 과 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해, 상수곱 (Ca_1, ca_2, ca_3) 을 조사하자. $ca_1 = c(3a_2) = 3(ca_2)$ 이고 $ca_3 = c(-a_2) = -(ca_2)$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.

- (b) (a) $(0, 0, 0) \in W_2 : a_1 = 0, a_3 = 0$ 이므로 $a_1 = a_3 + 2$ 를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.
- (c) (a) $(0, 0, 0) \in W_3 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 이므로, $2 * 0 - 7 * 0 + 0 = 0$ 이다.
- (b) 덧셈에 대한 닫힘 : $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in W_2$ 에 대해, 둘의 합을 조사하자. $2(a_1 + b_1) - 7(a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = (2a_1 - 7a_2 + a_3) + (2b_1 - 7b_2 + b_3) = 0 + 0$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.
- (c) 상수곱에 대한 닫힘 : $(a_1, a_2, a_3) \in W_3$ 과 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해, 상수곱을 조사하자. $2(ca_1) - 7(ca_2) + (ca_3) = c(2a_1 - 7a_2 + a_3) = c * 0 = 0$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.

- (d) (c)와 같은 이유로, 주어진 공간은 부분공간이다.

- (e) (a) $(0, 0, 0) \in W_5 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 이므로, $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \neq 1$ 이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.
- (f) (a) 덧셈에 대한 닫힘 : $(\sqrt{3}, \sqrt{5}, 0), (0, \sqrt{6}, \sqrt{3}) \in W_6$ 에 대해, 둘의 합인 $(\sqrt{3}, \sqrt{5} + \sqrt{6}, \sqrt{3}) = (a_1, a_2, a_3)$ 은 $5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 15 - 3(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 + 18 = -6\sqrt{30} \neq 0$ 이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

Problem 9.

- $W_1 \cap W_3 : a_1 = 3a_2, a_3 = -a_2$ 와 동시에 $2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0$ 을 만족하는 점들을 찾으면 충분하다. $a_2 = k$ 로 놓으면, $a_1 = 3k, a_3 = -k$ 이고, $2(3k) - 7(k) - (k) = -2k = 0$ 으로부터, $k = 0$ 만이 주어진 공간의 원소이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이다.
- $W_1 \cap W_4 : a_2 = k$ 로 놓으면 $a_1 = 3k, a_3 = -k$ 이고, $(3k) - 4k + k = 0k = 0$ 이므로 모든 $k \in \mathbb{R}$ 에 대해 $(3k, k, -k)$ 가 주어진 조건을 만족한다. 즉, $W_1 \cap W_4 = W_1$ 이다.
- $W_3 \cap W_4 : 2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0$ 으로부터 $a_3 = -2a_1 + 7a_2$ 이고, $a_1 - 4a_2 - a_3 = 0$ 으로부터 $a_3 = a_1 - 4a_2$ 이다. 이 두 식을 연립하면, $-2a_1 + 7a_2 = a_1 - 4a_2$, 즉 $3a_1 = 11a_2$ 를 얻는다. $a_1 = 11k$ 로 놓으면, $a_2 = 3k$ 이고 $a_3 = 11k - 12k = -k$ 이다. 즉, $\{(11k, 3k, -k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R}\}$ 이 $W_3 \cap W_4$ 이다.

Problem 10. 먼저, W_1 이 부분공간임을 보이자. 이는 정리 1.3으로부터, (1) 영벡터의 존재성 (2) 덧셈에 대한 닫힘 (3) 상수곱에 대한 닫힘을 보이면 충분하다.

1. $(0, 0, \dots, 0)$ 은 $0 + 0 + \dots + 0 = 0$ 을 만족하므로 영벡터가 존재한다.
2. $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in W_1$ 에 대해, 합을 조사하면 된다. $(a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) = 0 + 0 = 0$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.
3. $(a_1, \dots, a_n) \in W_1$ 과 $c \in F$ 에 대해, 상수곱을 조사하면 된다. $(ca_1) + \dots + (ca_n) = c(a_1 + \dots + a_n) = c0 = 0$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

그러나 W_2 는 부분공간이 아니다. $(1, 0, \dots, 0)$ 은 W_2 의 원소이지만, 그 두 배인 $(2, 0, \dots, 0)$ 은 W_2 의 원소가 아니다. 따라서 W_2 는 부분공간이 아니다. \square

Problem 11. 주어진 공간은 덧셈에 대해 닫혀 있지 않다. $n = 2$ 인 경우, $x^2 + x$ 와 $-x^2 + x$ 는 모두 W 의 원소이지만 둘의 합인 $2x$ 는 차수가 1이므로 W 의 원소가 아니다. \square

Problem 12. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영행렬 $0 \in M_{m \times n}(F)$ 에 대해, $i > j$ 라면 $0_{ij} = 0$ 이므로 영행렬은 상삼각행렬이다.
2. 두 상삼각행렬 A, B 에 대해, $i > j$ 라면 $A_{ij} = B_{ij} = 0$ 이다. 따라서, 둘의 합인 $A + B$ 역시 $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 + 0 = 0$ 이므로 상삼각행렬이다.
3. 상삼각행렬 A 와 스칼라 $c \in F$ 에 대해, $i > j$ 라면 $A_{ij} = 0$ 이다. 따라서, 상수곱인 cA 역시 $(cA)_{ij} = cA_{ij} = c0 = 0$ 이므로 상삼각행렬이다.

따라서, $m \times n$ 상삼각행렬의 집합은 $M_{m \times n}(F)$ 의 부분공간이다. \square

Problem 13. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 $0 \in \mathcal{F}(S, F)$ 에 대해, $0(s_0) = 0$ 이므로 영벡터를 포함한다.
2. 두 함수 $f, g \in \mathcal{F}(S, F)$ 에 대해, $f(s_0) = g(s_0) = 0$ 이라고 하자. 그러면 둘의 합은 $(f + g)(s_0) = f(s_0) + g(s_0) = 0 + 0 = 0$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

3. 함수 $f \in \mathcal{F}(S, F)$ 와 $c \in F$ 에 대해, $f(s_0) = 0$ 이라고 하자. 그러면 상수곱은 $(cf)(s_0) = c(f(s_0)) = c0 = 0$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은 $\mathcal{F}(S, F)$ 의 부분공간이다. □

Problem 14. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 0이 아닌 값을 가지는 점이 존재하지 않는다. 즉, 유한개의 점에서만 함숫값이 0이므로 $\mathcal{C}(S, F)$ 의 원소이다.
2. 두 함수 $f, g \in \mathcal{C}(S, F)$ 에 대해, f 가 0을 갖지 않는 점의 집합을 $S(f)$ 라고 하자. 그러면 조건에 의해 $S(f)$ 와 $S(g)$ 는 유한집합이다. $S(f + g) \subseteq S(f) \cup S(g)$ 이므로, $S(f + g)$ 는 유한집합이다. 따라서, $f + g \in \mathcal{C}(S, F)$ 이다.
3. 함수 $f \in \mathcal{C}(S, F)$ 에 대해, $S(f)$ 는 유한집합이다. 0이 아닌 스칼라 $c \in F$ 에 대해, $S(cf) = S(f)$ 이므로 $cf \in \mathcal{C}(S, F)$ 이다.

따라서, $\mathcal{C}(S, F)$ 는 $\mathcal{F}(S, F)$ 의 부분공간이다. □

Problem 15. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 자명히 미분가능하다.
2. 두 함수 f, g 가 미분가능하다면 $f + g$ 도 미분가능하다. 따라서 합에 대해 닫혀 있다.
3. 함수 f 가 미분가능할 때, 스칼라 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 cf 도 미분가능하다. 따라서 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은 $C(\mathbb{R})$ 의 부분공간이다. □

Problem 16. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 자명히 n -번 미분 가능하고 n 계 도함수가 연속이다.
2. 두 함수 f, g 가 n -번 미분 가능하고 n 계 도함수가 연속이라면, $f + g$ 또한 그러함이 잘 알려져 있다. (문제 15와 마찬가지로, 미분적분학이나 해석학을 참고하라.)
3. 이 역시 미분적분학이나 해석학에 의해, 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은 $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 의 부분공간이다. □

Problem 17. (\Rightarrow) 만일 W 가 V 의 부분공간이라면, W 는 영벡터를 포함하므로 $W \neq \emptyset$ 이다. 또한, 정리 1.3에 의해 상수곱과 덧셈에 대해 닫혀 있다. (\Leftarrow) 우선 주어진 공간이 상수곱과 합에 대해 닫혀 있으므로 영벡터의 존재성만 보이면 충분하다. $W \neq \emptyset$ 이므로 $w \in W$ 가 있고, 상수곱에 대해 닫혀 있으므로 $0w = 0 \in W$ 이다. 정리 1.3에 의해, W 는 V 의 부분공간이다. □

Problem 18. (\Rightarrow) 문제 17과 동일하게 증명된다. (\Leftarrow) 정리 1.3에 의해, 주어진 공간이 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있음을 확인하면 충분하다. $a = 1$ 로 놓으면, 임의의 두 벡터 $x, y \in W$ 에 대해 $x + y \in W$ 이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다. 이제, $y = 0$ 으로 놓으면, 임의의 벡터 $x \in W$ 와 $a \in F$ 에 대해 $ax \in W$ 이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다. □

Problem 19. (\Rightarrow) $W_1 \cup W_2$ 가 V 의 부분공간이라고 놓자. 결론을 부정하여, $w_1 \in W_1 \setminus W_2$ 와 $w_2 \in W_2 \setminus W_1$ 이 존재한다고 하자. 그러면 $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ 이다. 만일 $w_1 + w_2 \in W_1$ 이라면, $w_1 + w_2 - w_1 = w_2 \in W_1$ 이므로 모순이다. 마찬가지로, $w_1 + w_2 \in W_2$ 라면, $w_1 + w_2 - w_2 = w_1 \in W_2$ 이므로 모순이다. 따라서, $W_1 \subseteq W_2$ 이거나 $W_2 \subseteq W_1$ 이어야만 한다. (\Leftarrow) 역은 자명하다. 만일 $W_1 \subseteq W_2$ 라면 $W_1 \cup W_2 = W_2$ 이므로 부분공간이다. □

Problem 20. 수학적 귀납법을 사용한다. ($n = 1$) 자명하다. (Induction step) $n = k$ 에서 성립함을 가정하고, $n = k + 1$ 에서 성립함을 보이자. $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + a_{k+1}w_{k+1} = (a_1w_1 + \cdots + a_kw_k) + a_{k+1}w_{k+1}$ 이고, $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k \in W$

는 가정에 의해 참이다. W 는 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있으므로, $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + a_{k+1}w_{k+1} \in W$ 이다. 따라서, 임의의 n 에 대해 성립한다. \square

Problem 21. 정리 1.3을 이용하자.

1. 모든 항이 0인 수열 $a_n = 0$ 은 수렴하는 수열이다.
2. 두 수렴하는 수열의 합 역시 수렴한다. 이는 미적분학이나 해석학에서 확인할 수 있다.
3. 수렴하는 수열의 상수곱 역시 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열의 집합은 V 의 부분공간이다. \square

Problem 22. 문제 18을 이용하자.

1. 우함수의 집합은 부분공간이다.
 - (a) 영함수 $0(t)$ 는 우함수이다. $0(-t) = 0 = 0(t)$ 이기 때문이다.
 - (b) 두 우함수 f, g 와 스칼라 $c \in F_2$ 에 대해, $cf + g$ 가 우함수임을 보이자. $(cf + g)(-t) = cf(-t) + g(-t) = cf(t) + g(t) = (cf + g)(t)$ 이므로 우함수이다.
2. 기함수의 집합은 부분공간이다.
 - (a) 영함수 $0(t)$ 는 기함수이다. $0(-t) = 0 = -0 = -0(t)$ 이기 때문이다.
 - (b) 두 기함수 f, g 와 스칼라 $c \in F_2$ 에 대해, $cf + g$ 가 기함수임을 보이자. $(cf + g)(-t) = cf(-t) + g(-t) = c(-f(t)) + (-g(t)) = -(cf(t) + g(t)) = -(cf + g)(t)$ 이므로 기함수이다.

따라서, 우함수의 집합과 기함수의 집합은 각각 부분공간이 된다. \square

Problem 23. 문제 18을 이용하자.

- (a) 우선, $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ 에 대해 $w_1 + 0 \in W_1 + W_2$ 이고 $0 + w_2 \in W_1 + W_2$ 이므로 $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$ 이다. 영벡터는 $0 = 0 + 0$ 이므로 $W_1 + W_2$ 는 영벡터를 포함한다. 이제, $v_1 + v_2, w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ 와 $c \in F$ 에 대해, $c(v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = (cv_1 + w_1) + (cv_2 + w_2) \in W_1 + W_2$ 이므로, $W_1 + W_2$ 는 부분공간이다. \square
- (b) 어떤 부분공간 S 가 W_1, W_2 를 포함한다고 하자. 그러면 S 는 덧셈에 대해 닫혀 있으므로, $w_1 \in W_1 \subseteq S$ 와 $w_2 \in W_2 \subseteq S$ 에 대해 $w_1 + w_2 \in S$ 이다. 따라서, 모든 $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ 에 대해 $w_1 + w_2 \in S$ 이다. 즉, $W_1 + W_2 \subseteq S$ 이다. \square

Problem 24. $W_1 \cap W_2$ 은 $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ 이고 $a_n = 0$ 인 벡터들을 포함하므로 오로지 영벡터만이 포함된다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 이다. 임의의 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) \in F^n$ 에 대해, $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 0) + (0, 0, \cdots, 0, a_n) \in W_1 + W_2$ 이다. 따라서, $F^n = W_1 \oplus W_2$ 이다. \square