Friedberg Solution

2dayclean

2026/01/07

1 벡터공간

1.1 개론

1.2 벡터공간

Problem 1.

(a) 참. 공리 (VS3)에 의해 모든 벡터 공간에는 영벡터가 존재한다.

(b) 참. (a)와 같은 이유로 존재하며, 실제로 영벡터는 유일하다.

(c) 거짓. $x = 0$인 경우, $1x = 2x = 0$이지만 $1 \neq 2$이다.

(d) 거짓. $a = 0$인 경우, $0x = 0y$이지만 $x \neq y$인 x, y가 존재할 수 있다.

(e) 참. 그 둘을 본질적으로 같다고 할 수 있다. 이는 추후에 나오는 선형사상과 차원을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.

(f) 거짓. $m \times n$ 행렬은 m개의 **행**과 n개의 **열**로 이루어져 있다.

(g) 거짓. $x + 1$과 $x^2 + x + 1$의 합은 $x^2 + 2x + 2$이다.

(h) 거짓. $x + 1$과 $-x + 1$은 차수가 둘 다 1이지만, 그 합은 2이고 차수가 0이다.

(i) 참. 다항식 f의 leading coefficient가 a_n이라고 하면, cf의 leading coefficient는 ca_n이고 이는 0이 아니다. 이는 임의의 체 $\mathbb{F}$에서도 성립한다.

(j) 참. 이는 동형사상을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.

(k) 참. 함수의 같음을 정의하는 방법이다.

Problem 2. 벡터공간 $\mathsf{M}_{3\times 4}(F)$의 영벡터는 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

Problem 3. $M_{13} = 3$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = 5$.

Problem 4.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{bmatrix}$

(e) $2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$

(f) $-x^3 + 7x^2 + 4$

(g) $10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$

(h) $3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$

Problem 5. (a) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) 자명.

Problem 6. 문제 5와 유사하므로 생략.

Problem 7. 문제 1의 (k)를 사용한다. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1 + 4 - 2 = 3$이므로 f와 g가 S에서의 함수값이 모두 일치한다. 즉, $f = g$이다. 또한, $h(0) = 2$, $h(1) = 6$인데 $(f + g)(t)$와 S에서의 함수값이 모두 일치하므로 $f + g = h$이다.

Problem 8. 임의의 벡터 x, y와 임의의 스칼라 a, b에 대해,

$$\begin{aligned} (a+b)(x+y) &= (a+b)x + (a+b)y && \text{(VS8)} \\ &= (ax+bx) + (ay+by) && \text{(VS7)} \\ &= ax + (bx+ay) + by && \text{(VS2)} \\ &= ax + ay + bx + by && \text{(VS1), (VS2)} \end{aligned}$$

Problem 9. 따름정리 1. (VS3)을 만족하는 벡터 0은 유일하다.
proof) (VS3)을 만족하는 벡터 $0, 0'$을 고려하자. 그러면, (VS3)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

즉, 0과 $0'$은 동일한 벡터이다. 따라서, 영벡터는 유일하다. □

따름정리 2. (VS4)를 만족하는 벡터 y는 유일하다.
proof) 주어진 x에 대해, $x + y = 0$이고 $x + z = 0$이라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + (x + z) \\ &= (y + x) + z \\ &= 0 + z = z \end{aligned}$$

즉, $y = z$이다. 따라서, 역벡터는 유일하다. □

정리 1.2(3) 모든 스칼라 a에 대해 $a0 = 0$이다.

proof) 스칼라 a에 대해, $a0 = a(0+0) = a0 + a0$이다. 즉, $a0 + 0 = a0 = a0 + a0$이다. 정리 1.1에 의해, $0 = a0$이다. □

Problem 10. $\mathsf{V} = \{ f : R \to R \mid f$는 미분가능$\}$이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 가장 먼저, $f, g \in \mathsf{V}$와 $c \in \mathbb{R}$에 대해 $f + g \in \mathsf{V}$이고 $(cf) \in \mathsf{V}$인지 확인해야 한다. (연산에 대한 닫힘) 다시 말해 미분가능한 함수의 합 역시 미분가능하고, 미분가능한 함수의 스칼라배 역시 미분가능한지 보여야 한다. 이는 잘 알려진 내용이므로 생략한다. (자세한 정의는 미분적분학이나 해석학 교재를 참고하라.)

(VS1) 모든 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$이므로 $f + g = g + f$이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 교환법칙이 사용되었다.

(VS2) 모든 $f, g, h \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f + (g+h))(x)$이므로 $(f+g)+h = f+(g+h)$이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS3) 함수 0을 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $0(x) = 0$으로 정의하면 $(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$이므로 늘 $f + 0 = 0 + f = f$이다. 또한, $0(x) = 0$은 미분가능하므로 $0 \in \mathsf{V}$이다.

(VS4) 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 g를 $g(x) = -f(x)$로 정의하면 g는 미분가능하고, 자명히 $f + g = 0$이다.

(VS5) 함수 $f \in \mathsf{v}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$이므로 $1f = f$이다.

(VS6) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$와 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = (a(bf))(x)$이다. 따라서, $(ab)f = a(bf)$이다. 이 증명에서는 실수의 곱에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS7) 실수 $a \in \mathbb{R}$와 함수 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(a(f+g))(x) = a((f+g)(x)) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$이다. 따라서, $a(f+g) = af + ag$이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

(VS8) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$와 함수 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af + bf)(x)$이다. 따라서, $(a+b)f = af + bf$이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □