

# Partial Differential Equations

2dayclean

2025/09/25

## Contents

<b>1</b>	<b>Where PDEs come from</b>	<b>1</b>
1.1	What is PDE . . . . .	1
1.2	Homogeneity and Linearity of PDE . . . . .	2
1.2.1	First order linear equations . . . . .	3
1.3	Flows, Vibrations, and Diffusion . . . . .	5
1.3.1	Simple transport . . . . .	5
1.3.2	Vibrating string . . . . .	5
1.3.3	Vibrating Drumhead . . . . .	6
1.3.4	Diffusion . . . . .	7
1.3.5	Heat Flow . . . . .	7
1.3.6	Stationary waves and diffusions . . . . .	7
1.4	Initial and Boundary conditions . . . . .	7
1.5	Types of second order PDE . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Waves and Diffusions</b>	<b>8</b>
2.1	The wave equation . . . . .	8
2.1.1	Initial Value Problem . . . . .	9
2.1.2	General solution for wave equation . . . . .	9
2.2	Causality and Energy . . . . .	10
2.2.1	Causality . . . . .	10
2.2.2	Energy . . . . .	11
2.3	Diffusion equation . . . . .	11
2.3.1	Uniqueness of solution . . . . .	12
2.3.2	Stability of solution . . . . .	13

## 1 Where PDEs come from

### 1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다.  $(x, y, z, \dots, t, \dots)$  (2) 우리가 알고 싶어하는 함수  $u$ 가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

#### Definition

PDE는 독립변수들과 미지의 함수  $u$ , 그리고  $u$ 의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

**Example**

PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1.  $u_x + u_y = 0$  (transport equation), 더 일반적으로는,  $u_x + yu_y = 0$ 이나  $u_x + a(x, y)u_y = 0$  역시 transport equation 이라고 불립니다.
2.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  (Laplace equation),  $\nabla^2 u = 0$ 과 같이 쓰기도 합니다.
3.  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  (Wave equation)
4.  $u_t - u_{xx} = 0$  (Heat equation)

**1.2 Homogeneity and Linearity of PDE**

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를  $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = g(x, y)$ 라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를,  $\mathcal{L}[u] = g$ 와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고,  $\mathcal{L}[0] = 0$ 이 되도록  $\mathcal{L}$ 을 조작할 수 있습니다. 이러한  $\mathcal{L}$ 은 다음과 같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\rightarrow \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \dots)\end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을  $C^\infty(\Omega)$ 와 같이 쓰면,  $\mathcal{L}$ 은 일종의 operator가 됩니다.

**Definition 1.1**

Operator  $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ 가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1.  $\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2.  $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히,  $\mathcal{L}$ 이 linear하다면,  $\mathcal{L}[u] = 0$ 은 **homogeneous linear equation**이라고 하고,  $\mathcal{L}[u] = g (g \neq 0)$ 은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

**Example**

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1.  $u_x + u_y = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
2.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
3.  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
4.  $u_t - u_{xx} = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

**Example**

Transport equation의 일종인  $u_x + yu_y = 0$ 은  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ 로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는  $u_x + uu_y = 0$ 은 linear하지 않습니다.

**Example**

PDE  $\cos(xy^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2 + y^2)$ 는  $\mathcal{L} = \cos(xy^2) \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ 와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous합니다.

**Proposition 1.2**

**Superposition Principle** : Linear한  $\mathcal{L}$ 에 대해  $u_1, u_2, \dots, u_n$ 이  $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution이라면, constants  $c_1, \dots, c_n$ 에 대해  $\sum_{i=1}^n c_i u_i$  또한  $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

**Example 1.3**

$u = u(x, y)$ 에 대해,  $u_{xx} = 0$ 의 해를 찾아 봅시다.

**Recall** :  $u = u(x)$ 이고  $u'' = 0$ 이라면,  $u(x) = c_1 x + c_2$ 이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(u_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 &\implies u_x(x, y) = f(y) \\ &\implies u(x, y) = f(y)x + g(y)\end{aligned}$$

**Example 1.4**

$u = u(x, y)$ 에 대해,  $u_{xx} + u = 0$ 의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$ 의 해가  $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 임을 recall하고 나면,  $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$

**Example 1.5**

$u = u(x, y)$ 에 대해,  $u_{xy} = 0$ 의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned}u_{xy} = 0 &\implies (u_x)_y = 0 \\ &\implies u_x(x, y) = g(x) \\ &\implies u(x, y) = \int g(x) dx + F(y) = G(x) + F(y)\end{aligned}$$

즉, 해는  $u(x, y) = G(x) + F(y)$ 와 같이 나타납니다.

**1.2.1 First order linear equations**

$u = u(x, y)$  꼴의 함수에 대해,  $au_x + bu_y = 0$  (\*) 꼴의 transport equation이 주어져 있다고 합시다. 이 때,  $a, b \neq 0$ 은 상수입니다. 그러면,  $\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ 인 1차 homogeneous linear equation인데, 이를 다음과 같은 두 가지 방법으로 풀어봅시다.

**Geometric Method.** 우선,  $v = (a, b)$ 와 같이 표현합시다. 그러면,  $u$ 의  $v$  방향으로의 directional derivative는  $D_v(u) = \frac{1}{\|v\|}(au_x + bu_y)$ 이고, 주어진 미분방정식 (\*)은  $u(x, y)$ 가  $v$  방향으로의 line에 대해 전부 constant함을 의미합니다. 그리고,  $v$  방향을 가지는 직선은  $bx - ay = c$  꼴입니다.  $u(x, y)$ 의 값은 이  $c$ 에만 의존하게 될 것이며, 따라서 arbitrary한 function  $f$ 에 대해  $u = f(c) = f(bx - ay)$ 가 됩니다.

**Coordinate Method.** 좌표계  $(x', y')$ 를 잡아서  $au_x + bu_y = u_{x'}$ 와 같이 만들 수 있다면 문제가 아주 쉬워질 것입니다. 간단하게,  $y' = bx - ay$ , 그리고  $x' = ax + by$ 와 같이 좌표계를 설정합시다. (이는 Method 1에 전적으로 의존합니다.) 그러면, chain rule에 의하여,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x', y') &= \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'} \\ \frac{\partial}{\partial y}u(x', y') &= bu_{x'} - au_{y'}\end{aligned}$$

가 성립하고, 따라서  $u_{x'} = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 이제,  $u = f(y') = f(bx - ay)$ 라고 쓸 수 있습니다.

### Example

$$u_x + yu_y = 0$$

주어진 미분방정식은  $(1, y) \cdot \nabla u(x, y) = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 즉,  $u$ 의  $(x, y)$  점에서  $(1, y)$  방향으로의 도함수가 0입니다. 따라서,  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}$ 인 curve에서 constant하고, 이 curve는  $y = Ce^x$ 와 같이 나타납니다. 이제  $u$ 의 값은 이  $C$ 에 의해서만 결정되므로,  $u(x, y) = f(C) = f(y \cdot e^{-x})$ 라고 쓸 수 있습니다.

### Example

$$4u_x - 3u_y = 0, \text{ initial condition : } u(0, y) = y^3$$

주어진 미분방정식의 일반적인 해는  $u(x, y) = f(-3x - 4y)$ 입니다. 조건에 의해  $u(0, y) = f(-4y) = y^3$ 이므로,  $f(\omega) = -\frac{\omega^3}{64}$ 이고, 따라서  $u(x, y) = \frac{1}{64}(3x + 4y)^3$ 입니다.

### Example

$$au_x + bu_y + cu = 0$$

주어진 미분방정식에 대해  $x' = ax + by$ 와  $y' = bx - ay$ 를 통해 좌표 변환을 시행하면,

$$(a^2 + b^2)u_{x'}(x', y') + cu(x', y') = 0$$

을 얻습니다. 따라서,  $u(x', y') = f(y') \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}x'\right]$ 이고, 최종적으로는

$$u(x, y) = f(bx - ay) \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right]$$

가 됩니다.

### Example

$$u_x + 2xy^2u_y = 0$$

이젠 기계적으로 풀 수 있을 것 같습니다.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1}$ 인 curve는  $C = x^2 + \frac{1}{y}$ 처럼 나타나고, 따라서  $u = f(x^2 + \frac{1}{y})$ 가 됩니다.

### Example

$$yu_x + xu_y = 0, \text{ initial condition : } u(0, y) = e^{-y^2}$$

마찬가지로, 결과만 쓰면 :  $u(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$

이번에는 간단히 linear nonhomogeneous equation을 푸는 방법에 대해 알아보시다. 먼저, 다음과 같은 미분방정식을 생각합시다.

$$u_x + u_y + u = e^{x+2y}$$

$$u(x, 0) = 0$$

우선, nonhomogeneous에 대해 handle하는 법을 생각해봅시다.

**Proposition 1.6**

$\mathcal{L}[u] = g$  (\*)와 같은 미분방정식을 생각합시다. 그리고,  $u_0(x, y)$ 가  $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 general solution이고  $u_p(x, y)$ 가  $\mathcal{L}[u] = g$ 의 특정한 한 solution이라고 합시다. 그러면  $u_0 + u_p$ 는 늘 (\*)의 solution이고, 이는  $\mathcal{L}$ 의 linearity에 의해 자명합니다.

반면,  $v$ 가 (\*)의 solution이라면,  $\mathcal{L}[v - u_p] = 0$ 이므로  $v = u_p + u_0$ 입니다. 즉, 모든 solution은  $u_0 + u_p$  꼴입니다.

이제, coordinate method를 이용합니다. 우선, 다음과 같이 좌표 변환을 수행합니다.

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases} \implies 2u_{x'} + u = \exp\left(\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)$$

integrating factor method를 이용합니다.  $e^{x'/2}$ 를 양변에 곱해주면,

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{1}{2}x'}u_{x'} + e^{\frac{1}{2}x'}u &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\ \frac{\partial}{\partial x'}(2e^{\frac{1}{2}x'}u) &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\ e^{\frac{1}{2}x'}u &= \frac{1}{4}e^{2x' - \frac{1}{2}y'} + f(y') \\ u(x', y') &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x'}f(y') \\ u(x, y) &= \frac{1}{4}e^{x+2y} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}f(x-y) \\ u(x, 0) &= \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}f(x) = 0 \\ (\therefore f(x) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}) \\ u(x, y) &= \frac{1}{4}\exp(x+2y) - \frac{1}{4}\exp(x-2y) \end{aligned}$$

이렇게 해를 얻을 수 있습니다.

### 1.3 Flows, Vibrations, and Diffusion

이 절에서는 다양한 물리적인 PDE를 유도하는 방법을 배웁니다.

#### 1.3.1 Simple transport

$u(t, x)$ 를  $x$ -방향으로 pipe를 따라 수평하게 흐르는 유체의 밀도라고 두면, flow의 속도  $c$ 에 대해 다음이 성립할 것입니다.

$$\forall h > 0, u(x, t) = u(x + ch, t + h)$$

양변을  $h$ 에 대해 미분한 후  $h = 0$ 을 대입하면,  $u_t + cu_x = 0$ 을 얻습니다.

#### 1.3.2 Vibrating string

$u(t, x)$ 를 시간  $t$ 에 위치  $x$ 에서의 줄의 수직한 변위라고 두고, 다음과 같은 몇가지 물리적인 가정을 합시다.

1. 줄은 uniform한 density  $\rho$ 를 갖습니다.
2. 줄은 완벽히 탄성적이어서 장력은 접선 방향으로만 작용합니다.
3. 줄에 걸리는 다른 힘은 없습니다.
4. 줄은 오로지 수직 방향으로만 진동합니다.

5. 진동의 진폭은 충분히 작습니다. (0에 가깝습니다.)

이제 시간  $t$ 와 위치  $x$ 에서의 줄에 걸리는 장력을  $T(x, t)$ 와 같이 두도록 합시다. 그러면, line segment  $[x_0, x_1]$ 에 대해 걸리는 힘은 오로지 끝점에서의 장력 뿐입니다. 이제, 각각의 위치에서 힘을 분석합니다.

- $x_0$ 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_0, t) \cos \theta_0 = T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_0, t) \sin \theta_0 = T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

- $x_1$ 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

따라서, 합력은 다음과 같이 주어집니다.

- Horizontal (H) :  $T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

- Vertical (V) :  $T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

조건 (5)에서  $|u_x| \ll 1$ 이고 (거의 0) 따라서  $\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2} \simeq \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \simeq 1$ 입니다. 또, 조건 (4)에서  $(\mathbf{H}) = 0$  이어야 함을 알 수 있습니다. 이로부터,  $T(x_1, t) - T(x_0, t) = 0$ 이므로  $T := T(x, t)$ 를 constant라고 가정할 수 있습니다. (왜  $T$ 가 time-invariant한가?) Vertical에서만 분석하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}) &\simeq T u_x(x_1, t) - T u_x(x_0, t) \simeq (\text{mass}) \times (\text{acceleration}) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt}(x, t) dx \\ &= \rho \int_{x_0}^{x_1} u_{tt}(x, t) dx \\ T u_{xx}(x_0, t) &= \rho u_{tt}(x_0, t) \end{aligned}$$

이제,  $c = \sqrt{T/\rho}$ 와 같이 정의하면  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 이라는 wave equation을 얻을 수 있습니다.

### 1.3.3 Vibrating Drumhead

Drumhead 영역에서,  $u(x, y, t)$ 를 위치  $(x, y)$ 와 시간  $t$ 에서 drumhead의 equilibrium position으로부터의 변위(displacement)로 씁시다. 그러면, 1D vibration과 마찬가지로, 작은 closed region  $D$ 에서 다음과 같은 식을 세울 수 있습니다.

$$F = \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

여기서  $\frac{\partial u}{\partial n}$ 은 단순히  $n$  방향, 즉 outward unit normal vector로의 도함수를 의미합니다. 간단히,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_{\partial D} T \nabla u \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \iint_D \nabla \cdot (T \nabla u) ds \\ &= \iint_D T(u_{xx} + u_{yy}) dx dy \end{aligned}$$

처럼 나타낼 수 있습니다. 그러므로,

$$\iint_D T(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \iint_D \rho u_{tt} dx dy$$

가 임의의 영역  $D$ 에서 성립합니다. 이는 곧,  $\rho u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) = T\Delta u$ 임을 의미합니다. 마찬가지로의 방법으로, 3D case에서도  $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ 임을 알 수 있습니다.

### 1.3.4 Diffusion

얇은 관 안에 유체가 가득 찬 경우를 생각합시다. 이제,  $u(x, t)$ 를 위치  $x$ 와 시간  $t$ 에서의 물질의 밀도라고 하고, 다음을 가정합니다.

1. 유체는 직접 흐르지 않습니다. 즉, Convection이 일어나지 않습니다.
2. 유체 안의 화학종에 대해, 그 화학종의 diffusion은 Fick's law를 따릅니다.

구간  $[x_0, x_1]$  안에 담긴 유체의 총 질량은 다음과 같을 것입니다.

$$M(t; x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

따라서, 물질 보존 식에 의해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= k \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= k \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{1}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} k \frac{1}{x_1 - x_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] \\ \therefore u_t(x_0, t) &= k u_{xx}(x_0, t) \end{aligned}$$

인테,  $x_0$ 은 임의적이므로  $u_t = k u_{xx}$ 라고 쓸 수 있습니다.

마찬가지로, 3D Diffusion 역시 같은 방법으로 유도되어  $u_t = k \Delta u$ 라고 쓸 수 있습니다.

### 1.3.5 Heat Flow

공간 상의 물질에 대해,  $u(x, y, z, t)$ 를 위치  $(x, y, z)$ 와 시간  $t$ 에서 물질의 온도라고 정의합시다. 그러면,

$$\begin{aligned} \iiint_D c \rho u dx dy dz &=: H(t) \\ \iiint_D c \rho u_t dx dy dz &= \iint_{\partial D} k (\nabla u \cdot n) dS = \iiint_D \nabla \cdot (k \nabla u) dx dy dz \end{aligned}$$

이므로,  $c \rho u_t = \nabla \cdot (k \nabla u)$ 를 얻습니다.  $k$ 가 상수라면,  $c \rho u_t = k \nabla^2 u$ 이므로 Diffusion eq.와 일치합니다.

### 1.3.6 Stationary waves and diffusions

말 그대로 steady-state인 상황입니다.  $\Delta u = 0$ 을 Laplace equation이라고 합니다.

## 1.4 Initial and Boundary conditions

$u := u(\vec{x}, t)$ 에 대해, 다음과 같은 조건들을 생각할 수 있습니다.

1. Initial condition(I. C.) : Fixed  $t_0$ 에 대해,  $u(\vec{x}, t_0) = \phi(\vec{x})$  혹은  $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t_0) = \psi(\vec{x})$ 라고 합니다.

## 2. Boundary condition(B. C.)

- (a) Dirichlet B.C. :  $u = g$  on  $\partial D$ 인 조건을 의미합니다.
- (b) Neumann B.C. :  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = g$  on  $\partial D$ 인 조건을 의미합니다.
- (c) Robin B.C. :  $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$  on  $\partial D$ 인 조건을 의미합니다. (Mixed condition)

## 1.5 Types of second order PDE

함수  $u = u(x, y)$ 에 대해, 모든 linear homogeneous second order PDE는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0$$

특히,  $u_{xy} = u_{yx}$ 이므로 다음과 같은 symmetric matrix를 자연스럽게 생각할 수 있습니다.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이제,  $D$ 를 이용해 PDE를 세 가지로 분류할 수 있습니다.

1. Elliptic case :  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  ( $\det(D) < 0$ )  
 이 경우에는 (적절한 변수변환을 통해)  $u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$  꼴로 바꿀 수 있습니다.  
*e.g.*) Laplace equation,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$
2. Hyperbolic case :  $\det(D) > 0$   
 이 경우에는  $u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0$  꼴로 바꿀 수 있습니다.  
*e.g.*) Wave equation,  $u_{xx} - u_{yy} = 0$
3. Parabolic case :  $\det(D) = 0$   
 이 경우에는  $u_{xx} + \dots = 0$  꼴로 바꿀 수 있습니다.  
*e.g.*) Heat equation,  $u_{xx} - u_y = 0$

## 2 Waves and Diffusions

## 2.1 The wave equation

이 절에서  $u = u(x, t)$ 이고 Wave equation은  $u_{tt} = c^2 u_{xx} \dots (W)$ 로 쓴다.

Differential operator는  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 와 같이 주어지므로,  $\mathcal{L} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$ 와 같이 factor out할 수 있다. 이는 wavefunction  $u$ 가  $C^2$  function이므로,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ 인 것으로부터 기인한다.

**Method 1.** Substitution.

안쪽의 operator를 먼저 치환해보자. 즉,  $v := \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ 와 같이 정의하자. 그러면, 주어진 wave equation (W)는  $v_t - cv_x = 0$ 과 같이 주어진다. Transport equation의 해에 의해,  $v$ 는 다음과 같을 것이다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= h(x + ct) \\ u_t + cu_x &= h(x + ct) \end{aligned}$$

이 inhomogeneous transport equation을 해결하기 위하여 적절한 particular solution을 찾아야 한다. 그리고, 그것은,

$$\begin{aligned} f(s) &:= \frac{1}{2c} \int h(s) ds \\ u_p(x, t) &= f(x + ct) \end{aligned}$$



로 주어진다. 따라서,

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

와 같이 주어진다. 특히,  $h$ 는 임의로 정해진 함수이므로,  $f$  역시 그렇다. 즉, 임의의 함수  $f, g$ 에 대해  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ 는 늘 (W)의 해가 된다. ( $C^2$ 이거만 하다면.)

**Method 2.** Coordinate change.

적절한 변수변환을 통해서도 파동방정식을 해결할 수 있다. 우선,

$$\xi := x + ct$$

$$\eta := x - ct$$

와 같은 변환을 생각하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = c \frac{\partial}{\partial \xi} - c \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

를 얻으며, 이로부터  $\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} = -2c \frac{\partial}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} = 2c \frac{\partial}{\partial \xi}$ 를 얻는다. 그러므로, (W)는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \left(-2c \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \left(2c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u &= 0 \\ u_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

이를 해결하면,  $u = f(\xi) + g(\eta)$ , 즉  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ 이다.

### 2.1.1 Initial Value Problem

지금까지 해결한 것을 토대로 IVP를 풀어보자.

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{cases}$$

이는 간단하게 해결할 수 있다. 우선,  $f(x) + g(x) = \phi(x)$ ,  $cf'(x) - cg'(x) = \psi(x)$ 로부터,

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2}\phi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + \text{Const}_1 \\ g(s) &= \frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + \text{Const}_2 \\ \therefore u(x, t) &= f(x + ct) + g(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \end{aligned}$$

를 얻는다.

### 2.1.2 General solution for wave equation

다음과 같은 Wave equation (W)를 생각하자.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \dots (W)$$

이는 다음과 같이 Factoring할 수 있다.

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 \dots (W)$$

이로부터,  $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ 를 생각했었던 것처럼, 일반적인 Wave equation (WG)를 생각하자.

$$(a\partial_t + b\partial_x)(c\partial_t + d\partial_x)u = 0 \dots (WG)$$

특히,  $ad \neq bc$  조건이 있다면, 다음과 같은 좌표 변환을 생각할 수 있다.

$$1. \xi = dt - cx$$

$$2. \eta = bt - ax$$

Chain rule에 의해서, 다음이 성립한다.

$$1. \partial_t = d\partial_\xi + b\partial_\eta$$

$$2. \partial_x = -c\partial_\xi - a\partial_\eta$$

따라서,  $(WG) = -(ad - bc)^2 \partial_\eta \partial_\xi u = 0$ 이고, 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$\begin{aligned} u &= f(\xi) + g(\eta) \\ &= f(dt - cx) + g(bt - ax) \end{aligned}$$

## 2.2 Causality and Energy

### 2.2.1 Causality

$$D'Alambert's Formula : u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

특히,  $u(x, t)$ 는  $u(s, 0)$ 과  $u_t(s, 0)$ 에 의해 결정되는데, 이 때  $s$ 의 범위는 다음과 같다 :  $x - ct \leq s \leq x + ct$ . 또한  $u(x, t_1) = \tilde{\phi}(x), u_t(x, t_2) = \tilde{\psi}(x)$ 을 생각하고 나면,  $t' = t - t_1, u_t = u_{t'}$ 이므로,  $(x, t')$  coordinate에서  $u$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{cases} u_{t't'} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \tilde{\phi}(x) \\ u_t(x, 0) &= \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

달랑베르 식에 의해,

$$u(x, t') = \frac{1}{2} [\tilde{\phi}(x + ct') + \tilde{\phi}(x - ct')] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct'}^{x+ct'} \tilde{\psi}(s) ds$$

이 성립한다. 이제,  $t' = t - t_1$ 로 두면,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\tilde{\phi}(x + c(t - t_1)) + \tilde{\phi}(x - c(t - t_1))] + \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} \tilde{\psi}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [u(x + c(t - t_1), t_1) + u(x - c(t - t_1), t_1)] + \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} u_t(x, t_1) dx \end{aligned}$$

즉,  $(x_0, t_0)$ 에서의 정보는 오로지  $u(x, t)$ 에서  $x_0 - c(t - t_0) \leq x \leq x_0 + c(t - t_0)$ 의 정보만에 영향을 줄 수 있다. 이를 **인과성 원리**(Principle of Causality)라고 한다.

### 2.2.2 Energy

Constant한 density  $\rho$ 와 tension  $T$ 를 갖는 무한히 긴 string을 생각하자. ( $c^2 = T/\rho$ ) 그러면 이 파동은  $\rho u_{tt} = T u_{xx}$ ,  $-\infty < x < \infty$ 를 따르게 될 것이다. 이 때, 줄의 운동 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{KE} := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2(x, t) dx$$

이 적분이 수렴하길 원하므로,  $\phi(x)$ 와  $\psi(x)$ 는  $-R \leq x \leq R$ 에서 vanish한다고 가정하자. 그러면,  $u(x, t)$ 와  $u_t(x, t)$ 는  $-R - ct \leq x \leq R + ct$  밖에서 vanish하므로, 문제 없이 잘 수렴한다. 이제,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{KE} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) dx \\ &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T u_t u_{xx} dx \\ &= T u_t u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} T u_{tx} u_x dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} T u_x^2 \right) dx \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{d}{dt} \left( \text{KE} + \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)^2 dx \right) = 0$$

이다. 따라서,

$$\text{PE} := \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

라고 정의하고,  $E = \text{KE} + \text{PE}$ 라고 정의하면, 에너지 보존 식이 유도된다.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

## 2.3 Diffusion equation

이 절에서  $u = u(x, t)$ 이고 Diffusion equation은  $u_t = k u_{xx} \dots (D)$ 로 쓴다. (단,  $k > 0$ )

### Theorem 2.1

**Maximum Principle** :  $u = u(x, t)$ 가 (D)를 rectangle  $R := \{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T \}$ 에서 만족시킨다면,  $u$ 는 최대값을  $R$ 의 bottom, 즉  $\{ (x, 0) \mid 0 \leq x \leq l \}$ 에서 혹은 lateral side, 즉  $\{ (x, t) \mid x = 0 \text{ or } l, 0 \leq t \leq T \}$ 에서만 갖는다.

**Remark.** 위의 maximum principle은  $u$ 가  $R$ 의 interior나 top에서 최대값을 갖지 못함을 주장해주지 못한다. 그러므로, 이를 'weak' maximum principle이라고 부른다. 그에 대한 counterpart로, 'strong' maximum principle이 존재하고 이는  $R$ 이 정말로 top과 interior에서 최대값이 갖지 못함을 주장한다.

**Terminology.** 위에서 언급한  $R$ 의 bottom과 lateral side를 합쳐서  $R$ 의 **Parabolic Boundary**라고 부른다. 반면,  $R$ 의 interior와 top을 합쳐서  $R$ 의 **Parabolic Interior**라고 부른다.

### Proof of weak Maximum Principle.

우선,  $u$ 가  $R$ 의 interior point  $p_0 = (x_0, t_0)$ 에서 maximum을 갖는다고 하자. 즉,  $0 < x_0 < l$ 이고  $0 < t_0 < T$ 이다. 그러면,

$u_x(p) = 0$ 이고  $u_{xx}(p) \leq 0$ 이어야 하며,  $u_t(p) = 0$ 일 것이다. 따라서,  $p$ 에서는,

$$0 = u_t(p) = ku_{xx}(p) \leq 0$$

로부터 반드시  $u_{xx} = 0$ 이어야만 한다. 반대로, 만일 함수  $v$ 가  $R$ 에서  $v_t < kv_{xx} \dots (*)$ 를 만족한다면,  $v$ 는  $R$ 의 안점에서 maximum을 가질 수 없다. // 이제  $M$ 을  $u$ 의 parabolic boundary of  $R$ 에서의 최대값이라고 하자.  $u$ 가 연속이고 parabolic boundary는 그 정의에 의해 closed이므로  $M$ 을 늘 찾을 수 있다. 임의의 양수  $\epsilon$ 에 대해, “perturbation”  $v = u + \epsilon x^2$ 를 생각하자. 그러면,

$$v_t = u_t = ku_{xx} = k(v_{xx} - 2\epsilon) = kv_{xx} - 2k\epsilon < kv_{xx}$$

이므로  $v$ 는  $(*)$ 을 만족한다. 따라서,  $v$ 는  $R$ 의 interior에서는 maximum을 가질 수 없다. 이제,  $v$ 가 top에 속한  $p_1 = (x_1, t_1)$ 에서 maximum을 갖는다고 가정하자. 그러면, 자명히  $v_{xx}(p_1) \leq 0$ 이고,

$$v_t(p_1) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{v(x_1, t_1 + h) - v(x_1, t_1)}{h} \geq 0$$

이 성립한다. 따라서,  $v_{xx} \leq 0 \leq v_t$ 이므로  $(*)$ 에 모순된다. 즉,  $v$ 는  $R$ 의 parabolic interior에서는 maximum을 갖지 못한다. 또한, 자명히 parabolic boundary에서는  $v = u + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2$ 이므로,

$$u(x, t) = v(x, t) - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2 - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2$$

가  $R$  전체에서 성립한다. 그런데  $\epsilon$ 의 선택은 arbitrary하므로,  $u$ 는  $R$ 에서  $u \leq M$ 이다.

### 2.3.1 Uniqueness of solution

다음과 같은 Dirichlet problem  $(\tilde{D})$ 를 생각하자.

$$(\tilde{D}) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t) & 0 < x < l \text{ and } t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = g(t), u(l, t) = h(t) \end{cases}$$

그러면,  $(\tilde{D})$ 의 solution은 유일하다. 이를 증명하기 위해,  $(\tilde{D})$ 의 두 근  $u_1, u_2$ 와  $w := u_1 - u_2$ 를 생각하자.

#### Method 1 : Maximum Principle

Maximum principle에 의해,  $T > 0$ 에 대해  $R_T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 에서  $w$ 의 최대값은  $R_T$ 의 parabolic boundary에 놓여야 하고, 이는 자명히 0이다. 임의의  $T > 0$ 에 대해 성립하므로,  $R_\infty := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t\}$ 에서의 최대값 역시 0이다. 마찬가지로,  $-w = u_2 - u_1$  역시 최대값이 0이고 이는  $w$ 가  $R_\infty$ 에서  $w \equiv 0$ 임을 의미한다. 즉,  $u_1 = u_2$ 이다.

#### Method 2 : Energy.

간단한 수학적 trick을 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot w = (w_t - kw_{xx}) \cdot w = w_t \cdot w - kw_{xx} \cdot w \\ &= \frac{1}{2}(w^2)_t - k(w_x \cdot w)_x + kw_x^2 \end{aligned}$$

양변을 적분하면,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{1}{2}(w^2)_t dx - k \int_0^l (w_x \cdot w)_x dx + k \int_0^l w_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^l w^2 dx \right] - k [w_x \cdot w]_{x=0}^{x=l} + k \int_0^l w_x^2 dx \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ \int_0^l w(x, t)^2 dx \right] &\leq 0 \\ 0 &\leq \int_0^l w(x, t)^2 dx \leq \int_0^l w(x, 0)^2 dx = 0\end{aligned}$$

따라서,  $\int_0^l w(x, t)^2 dx = 0$ 이 모든  $t$ 에 대해 성립하며,  $w$ 의 continuity에 의해  $0 < x < l, 0 \leq t$ 에서  $w \equiv 0$ 이다. 곧,  $0 \leq x \leq l, t \leq 0$ 에서  $u_1 = u_2$ 이다.

### 2.3.2 Stability of solution

다음과 같은 식을 만족하는  $u_i$  ( $i = 1, 2$ )를 생각하자.

$$\begin{cases} (u_i)_t - k(u_i)_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u_i(0, t) = u_i(l, t) = 0 & t > 0 \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x) & 0 < x < l \end{cases}$$

이제,  $w = u_1 - u_2$ 로 놓으면  $w$ 는 Initial condition으로  $w(x, 0) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$ 를 갖는다. Energy method에서 사용한 방법을 그대로 적용하면,

$$\begin{aligned}\int_0^l w(x, t)^2 dx &\leq \int_0^l w(x, 0)^2 dx; t > 0 \\ \int_0^l (u_1 - u_2)^2 dx &\leq \int_0^l (\phi_1 - \phi_2)^2 dx; t > 0\end{aligned}$$

즉,  $\|u_1 - u_2\|_2 \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_2$ 이다.

또다른 방법으로, maximum principle을 사용할 수 있다.  $R_T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 에서,

$$\begin{aligned}u_1(x, t) - u_2(x, t) &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \\ u_2(x, t) - u_1(x, y) &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_2(x) - \phi_1(x)|\end{aligned}$$

이므로,  $\max_{0 \leq x \leq l} |u_1 - u_2| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1 - \phi_2|$ 가 성립한다. 즉,  $\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty$ 이다.