Time derivative of Volume Averaging

2dayclean

2025/09/08

1. 어떤 물리량 ψ가 공간 좌표 x와 시간 t에 의존한다고 하자. 즉, $\psi = \psi(x,t)$이다.
2. 이 물리량이 정의되어 있는 공간 V는 시간 $t=0$에서 V_0이고 시간에 의존하여 변한다. 즉, $V = V(t)$이다.
3. 어떤 물리량 ψ의 평균 $\langle\psi\rangle$은 다음과 같이 정의된다.
$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{V_0}\int_{V(t)} \psi dV$$
4. 평균의 시간 미분, $\frac{d}{dt}\langle\psi\rangle$을 계산해 보자. 그런데, 적분범위 V가 시간에 따라 변화하므로, 이를 고려해줄 필요가 있다. 이를 위해, $x = \phi(y,t)$와 같은 함수를 생각하자. 부피가 커짐에 따라 x가 흐르기 때문에, 고정된 y를 생각하는 것이다. 이 때, $V_0 = V(t=0) = \phi(V,0)$일 것이다. (abuse of notation)
5. 그러면, 평균 식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.
$$\begin{aligned}\langle\psi\rangle &= \frac{1}{V_0}\int_{V(t)} \psi dV \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \psi(\phi(y,t),t) J dV_y\end{aligned}$$
여기서 J는 야코비안, 즉 $J = \det\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$이다.
6. 따라서, 시간 미분은 다음과 같다.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\psi\rangle &= \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t}\left[\psi(\phi(y,t),t)J\right] dV_y \\ &= \frac{1}{V_0}\int_{V_0} \frac{\partial\psi}{\partial t}J + \psi\frac{\partial J}{\partial t} dV_y\end{aligned}$$
7. 우선, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$는 다음과 같이 표현된다.
$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ &= \nabla_x\cdot\psi\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\end{aligned}$$
여기서, $\frac{\partial\phi}{\partial t} = v$로 두면 $\frac{\partial\psi}{\partial t}J = \left(\nabla_x\cdot\psi v + \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)J$이다.
8. 이제, $\frac{\partial J}{\partial t}$를 계산하자. **Jacobi's formula**를 이용하자.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J &= \frac{d}{dt}\det\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \\ &= J\,\mathrm{tr}\left(J^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)\end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right]_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial y_j}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t}\right)\\ &= \frac{\partial v_i}{\partial y_j} = \sum_k\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)J\end{aligned}$$

이므로, 따라서

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= J\,\mathrm{tr}\left(J^{-1}\frac{\partial v}{\partial x}J\right)\\ &= J\nabla_x\cdot v\end{aligned}$$

가 성립한다.

9. 최종적으로, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\psi\rangle &= \frac{1}{V_0}\int_{V_0}\frac{\partial\psi}{\partial t}J + (\nabla_x\cdot\psi)vJ + \psi(\nabla_x\cdot v)JdV_y\\ &= \frac{1}{V_0}\int_V\frac{\partial\psi}{\partial t}dV + \frac{1}{V_0}\int_V\nabla_x\cdot(\psi v)dV\\ &= \left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{V_0}\int_{\partial V}\psi v\cdot ndA\end{aligned}$$