Partial Differential Equations

2dayclean

2025/09/04

Contents

1 Where PDEs come from

1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다. $(x, y, z, \cdots, t, \cdots)$ (2) 우리가 알고 싶어하는 함수 u가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

Definition
PDE는 독립변수들과 미지의 함수 u, 그리고 u의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

Example
PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1. $u_x + u_y = 0$ (transport equation), 더 일반적으로는, $u_x + yu_y = 0$이나 $u_x + a(x,y)u_y = 0$ 역시 transport equation 이라고 불립니다.
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace equation), $\nabla^2 u = 0$과 같이 쓰기도 합니다.
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Wave equation)
4. $u_t - u_{xx} = 0$ (Heat equation)

1.2 Homogenity and Linearity of PDE

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를 $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots) = g(x, y)$라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를, $\mathcal{L}[u] = g$와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고, $\mathcal{L}[0] = 0$이 되도록 $\mathcal{L}$을 조작할 수 있습니다. 이러한 $\mathcal{L}$은 다음과

같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\to \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \cdots) \end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을 $C^\infty(\Omega)$와 같이 쓰면, $\mathcal{L}$은 일종의 operator가 됩니다.

Definition 1.1

Operator $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1. $\mathcal{L}[u+v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2. $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히, $\mathcal{L}$이 linear하다면, $\mathcal{L}[u] = 0$은 **homogeneous linear equation**이라고 하고, $\mathcal{L}[u] = g (g \not\equiv 0)$은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

Example

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1. $u_x + u_y = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$
4. $u_t - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

Example

Transport equation의 일종인 $u_x + yu_y = 0$은 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는 $u_x + uu_y = 0$은 linear하지 않습니다.

Example

PDE $\cos(xy^2)u_x - y^2 u_y = \tan(x^2 + y^2)$는 $\mathcal{L} = \cos(xy^2)\dfrac{\partial}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous 합니다.

Proposition 1.2

Superposition Principle : Linear한 $\mathcal{L}$에 대해 $u_1, u_2, \cdots, u_n$이 $\mathcal{L}[u] = 0$의 solution이라면, constants $c_1, \cdots, c_n$에 대해 $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ 또한 $\mathcal{L}[u] = 0$의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

Example 1.3

$u = u(x, y)$에 대해, $u_{xx} = 0$의 해를 찾아 봅시다.

Recall : $u = u(x)$이고 $u'' = 0$이라면, $u(x) = c_1 x + c_2$이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(u_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 &\Longrightarrow u_x(x, y) = f(y) \\ &\Longrightarrow u(x, y) = f(y)x + g(y)\end{aligned}$$

Example 1.4

$u = u(x, y)$에 대해, $u_{xx} + u = 0$의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$의 해가 $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$임을 recall하고 나면, $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$

Example 1.5

$u = u(x, y)$에 대해, $u_{xy} = 0$의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned} u_{xy} = 0 &\Longrightarrow (u_x)_y = 0 \\ &\Longrightarrow u_x(x, y) = g(x) \\ &\Longrightarrow u(x, y) = \int g(x)dx + F(y) = G(x) + F(y)\end{aligned}$$

즉, 해는 $u(x, y) = G(x) + F(y)$와 같이 나타납니다.

1.2.1 First order linear equations

$u = u(x, y)$ 꼴의 함수에 대해, $au_x + bu_y = 0$ (*) 꼴의 transport equation이 주어져 있다고 합시다. 이 때, $a, b \neq 0$은 상수입니다. 그러면, $\mathcal{L} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$인 1차 homogeneous linear equation인데, 이를 다음과 같은 두 가지 방법으로 풀어봅시다.

Geometric Method. 우선, $v = (a, b)$와 같이 표현합시다. 그러면, u의 v 방향으로의 directional derivative는 $D_v(u) = \frac{1}{\|v\|}(au_x + bu_y)$이고, 주어진 미분방정식 (*)은 $u(x, y)$가 v 방향으로의 line에 대해 전부 constant함을 의미합니다. 그리고, v 방향을 가지는 직선은 $bx - ay = c$ 꼴입니다. $u(x, y)$의 값은 이 c에만 의존하게 될 것이며, 따라서 arbitary한 function f에 대해 $u = f(c) = f(bx - ay)$가 됩니다.

Coordinate Method. 좌표계 (x', y')를 잡아서 $au_x + bu_y = u_{x'}$와 같이 만들 수 있다면 문제가 아주 쉬워질 것입니다. 간단하게, $y' = bx - ay$, 그리고 $x' = ax + by$와 같이 좌표계를 설정합시다. (이는 Method 1에 전적으로 의존합니다.) 그러면, chain rule에 의하여,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x', y') &= \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'} \\ \frac{\partial}{\partial y}u(x', y') &= bu_{x'} - au_{y'}\end{aligned}$$

가 성립하고, 따라서 $u_{x'} = 0$으로 쓸 수 있습니다. 이제, $u = f(y') = f(bx - ay)$라고 쓸 수 있습니다.

Example

$u_x + yu_y = 0$

주어진 미분방정식은 $(1, y) \cdot \nabla u(x, y) = 0$으로 쓸 수 있습니다. 즉, u의 (x, y) 점에서 $(1, y)$ 방향으로의 도함수가 0입니다. 따라서, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}$인 curve에서 constant하고, 이 curve는 $y = Ce^x$와 같이 나타납니다. 이제 u의 값은 이 C에 의해서만 결정되므로, $u(x, y) = f(C) = f(y \cdot e^{-x})$라고 쓸 수 있습니다.

Example

$4u_x - 3u_y = 0$, initial condition : $u(0, y) = y^3$

주어진 미분방정식의 일반적인 해는 $u(x, y) = f(-3x - 4y)$입니다. 조건에 의해 $u(0, y) = f(-4y) = y^3$이므로, $f(\omega) = -\frac{\omega^3}{64}$이고, 따라서 $u(x, y) = \frac{1}{64}(3x + 4y)^3$입니다.

Example

$au_x + bu_y + cu = 0$

주어진 미분방정식에 대해 $x' = ax + by$와 $y' = bx - ay$를 통해 좌표 변환을 시행하면,

$$(a^2 + b^2)u_{x'}(x', y') + cu(x', y') = 0$$

을 얻습니다. 따라서, $u(x', y') = f(y') \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}x'\right]$이고, 최종적으로는

$$u(x, y) = f(bx - ay) \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right]$$

가 됩니다.

Example

$u_x + 2xy^2 u_y = 0$

이젠 기계적으로 풀 수 있을 것 같습니다. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1}$인 curve는 $C = x^2 + \frac{1}{y}$처럼 나타나고, 따라서 $u = f(x^2 + \frac{1}{y})$가 됩니다.

Example

$yu_x + xu_y = 0$, initial condition : $u(0, y) = e^{-y^2}$

마찬가지로, 결과만 쓰면 : $u(x, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

1.3 Flows, Vibrations, and Diffusion