Nonlinear dynamics and chaos

2dayclean

2025/09/09

Contents

1 Flows on the Line **2**
1.1 Flows on the line 2
1.2 Autonomous system 2
1.3 Fixed points and its stability 3
1.3.1 Population - growth 4
1.3.2 Linear stability analysis 4

1 Flows on the Line

1.1 Flows on the line

Flows on the line이란 $\dot{x} = f(x)$와 같은 one-dimensional dynamical system을 의미하며, 이를 **flow** 혹은 **vector field**라고 부른다.

Example

$\dot{x} = \sin(x)$의 해는 어떻게 주어지는가?

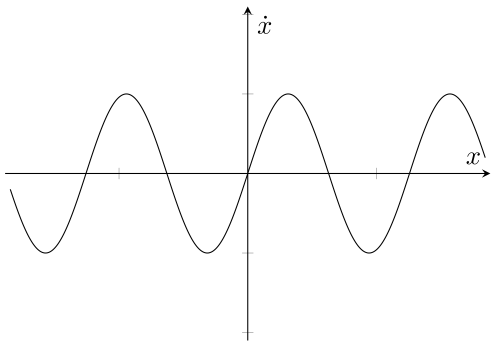
다음과 같이 변수분리법을 사용할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \Longrightarrow t = \int \csc(x)dx + C = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

따라서, initial condition $x(0) = x_0$이 주어지면,

$$t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|$$

와 같이 쓸 수 있다. 그러나 대체 이 해는 어떻게 생겼는가? $x = x(t)$ 꼴로 explicit하게 알 방법이 없다. Qualitive한 분석을 위하여 우리는 다음과 같은 $x - \dot{x}$ plot을 이용할 수 있다.



$\dot{x} = 0$인 점에서는 흐름이 없고, $\dot{x} > 0$인 점에서는 x가 증가하는 방향으로 흐를 것이고(flow to right), $\dot{x} < 0$인 점에서는 x가 감소하는 방향으로 흐를 것이다(flow to left). 이를 이용하면 qualititive하게 해를 분석할 수 있을 것이다. (do it yourself.)

1.2 Autonomous system

$$\dot{x} = f(x)$$

만일 $x(t)$가 $x(0) = x_0$인 solution이라면, $x(t - t_0)$ with $x(t_0) = x_0$ 역시 이 system의 해일 것이다.

Proof

$t' := t - t_0$으로 두자. 그러면,

$$\frac{dx}{dt'}(t') = \frac{dx}{dt}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(x(t'))$$

가 되고 $x(t' = 0) = x(t = t_0) = x_0$이 되므로, $x(t - t_0)$ 역시 해이고 따라서 일반성을 잃지 않고 $t_0 = 0$을 가정할 수 있다. □

1.3 Fixed points and its stability

$$f(x^*) = 0$$

점 x^*를 flow의 fixed point라고 하며, critical point, equilibrium point, 혹은 steady-state라고 부르기도 한다.

> ***Note*** *: What is the difference between equilibirum and steady-state?*
> 공통적으로는 두 상태 모두 time-invariant하다는 것이다. 그러나, **equilibrium**은 $\nabla f = 0$, 즉 공간적으로도 uniform한 상황을 의미하고, **steady-state**는 공간적으로는 uniform하지 않을 수도 있다.

Fixed point의 stability는 다음과 같이 구분할 수 있다.

1. x^* is **stable** (혹은 *asymptotically Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로는 모두 고정점을 향할 때. 즉,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 > 0 \text{ with } |x^* - x_0| < \delta, \lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*| = 0.$$

2. x^* is **unstable** : some arbitary small perturbation이 시간이 지남에 따라 grow할 때. 즉, stable하지 않는 모든 경우.

3. x^* is **neutrally-stable** (혹은 *Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로가 계속해서 고정점 근처에 있을 때. 즉,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

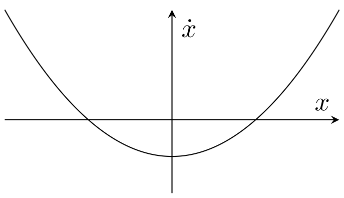
   이를 좀 더 "연속"적이게 쓰면 다음과 같다.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)| < \epsilon \text{ for } t > 0$$

Example

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

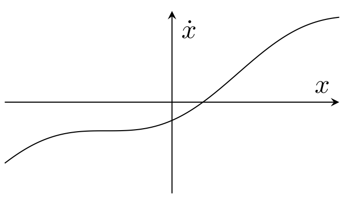
고정점은 $x^* = 1, -1$이고 $x = 1$에서 unstable, $x = -1$에서 stable하다.



Example

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

고정점은 하나 존재하고, 여기서 unstable하다.



1.3.1 Population - growth

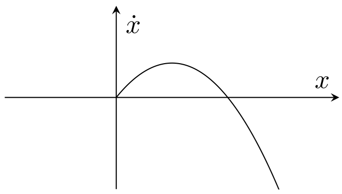
다양한 비선형 생물 시스템 중 ecosystem에 대한 연구가 제일 많이 이루어져 있고, 다루기가 상대적으로 간단하다.

$$\dot{N} = \beta N - \delta N = rN$$

여기서 N은 population, β, δ는 각각 birth rate, death rate, r은 growth rate이다. 이 때, $r > 0$이면 이 시스템은 성장하고, $r < 0$이면 decay한다. 이 미분방정식의 해는 당연히 $N(t) = N_0 e^{rt}$일 것이다. 즉, $r > 0$이면 계속해서 population이 늘어나 결국 발산한다. 그러나 현실에서는 이러한 일이 일어나지 않는다.

More Realistic Model : $r = \dfrac{\dot{N}}{N}$은 상수가 될 수 없다. 일반적으로 N이 커질수록 overcrowding/competition/resource limiting에 의해 r이 줄어들 것이다. $r = 0$이 되는 N을 K라고 쓰고, **Carrying capacity**라고 부르면 좋을 것이다. 즉, $N > K$이면 $\dot{N} < 0$이 된다.

가장 간단한 모델으로 $\dfrac{\dot{N}}{N} = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$를 생각할 수 있다. 그러면, $\dot{N} = rN - \dfrac{r}{K}N^2$이므로, 다음과 같은 plot을 얻을 수 있다. 즉, 간단하게 분석할 수 있다.



1.3.2 Linear stability analysis

Stability를 qualititive하게 분석해보자.

우선, **Perturbation**을 $y(t) := x(t) - x^*$와 같이 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) \\
&= \dot{x} = f(x) = f(x^* + y) \\
&= f(x^*) + f'(x^*)y + \frac{f''(x^*)}{2}y^2 + \cdots \\
&= f'(x^*)y + O(y^2)
\end{aligned}$$

가 된다.