Friedberg Solution

2dayclean

2026/01/12

1 벡터공간

1.1 개론

1.2 벡터공간

Problem 1.

(a) 참. 공리 (VS3)에 의해 모든 벡터 공간에는 영벡터가 존재한다.

(b) 참. (a)와 같은 이유로 존재하며, 실제로 영벡터는 유일하다.

(c) 거짓. $x = 0$인 경우, $1x = 2x = 0$이지만 $1 \neq 2$이다.

(d) 거짓. $a = 0$인 경우, $0x = 0y$이지만 $x \neq y$인 x, y가 존재할 수 있다.

(e) 참. 그 둘을 본질적으로 같다고 할 수 있다. 이는 추후에 나오는 선형사상과 차원을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.

(f) 거짓. $m \times n$ 행렬은 m개의 **행**과 n개의 **열**로 이루어져 있다.

(g) 거짓. $x + 1$과 $x^2 + x + 1$의 합은 $x^2 + 2x + 2$이다.

(h) 거짓. $x + 1$과 $-x + 1$은 차수가 둘 다 1이지만, 그 합은 2이고 차수가 0이다.

(i) 참. 다항식 f의 leading coefficient가 a_n이라고 하면, cf의 leading coefficient는 ca_n이고 이는 0이 아니다. 이는 임의의 체 $\mathbb{F}$에서도 성립한다.

(j) 참. 이는 동형사상을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.

(k) 참. 함수의 같음을 정의하는 방법이다.

Problem 2. 벡터공간 $\mathsf{M}_{3\times 4}(F)$의 영벡터는 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

Problem 3. $M_{13} = 3$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = 5$.

Problem 4.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{bmatrix}$

(e) $2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$

(f) $-x^3 + 7x^2 + 4$

(g) $10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$

(h) $3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$

Problem 5. (a) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) 자명.

Problem 6. 문제 5와 유사하므로 생략.

Problem 7. 문제 1의 (k)를 사용한다. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1 + 4 - 2 = 3$이므로 f와 g가 S에서의 함수값이 모두 일치한다. 즉, $f = g$이다. 또한, $h(0) = 2$, $h(1) = 6$인데 $(f + g)(t)$와 S에서의 함수값이 모두 일치하므로 $f + g = h$이다.

Problem 8. 임의의 벡터 x, y와 임의의 스칼라 a, b에 대해,

$$\begin{aligned} (a+b)(x+y) &= (a+b)x + (a+b)y && \text{(VS8)} \\ &= (ax+bx) + (ay+by) && \text{(VS7)} \\ &= ax + (bx+ay) + by && \text{(VS2)} \\ &= ax + ay + bx + by && \text{(VS1), (VS2)} \end{aligned}$$

Problem 9. 따름정리 1. (VS3)을 만족하는 벡터 0은 유일하다.
proof) (VS3)을 만족하는 벡터 $0, 0'$을 고려하자. 그러면, (VS3)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

즉, 0과 $0'$은 동일한 벡터이다. 따라서, 영벡터는 유일하다. □

따름정리 2. (VS4)를 만족하는 벡터 y는 유일하다.
proof) 주어진 x에 대해, $x + y = 0$이고 $x + z = 0$이라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + (x + z) \\ &= (y + x) + z \\ &= 0 + z = z \end{aligned}$$

즉, $y = z$이다. 따라서, 역벡터는 유일하다. □

정리 1.2(3) 모든 스칼라 a에 대해 $a0 = 0$이다.

proof) 스칼라 a에 대해, $a0 = a(0+0) = a0 + a0$이다. 즉, $a0 + 0 = a0 = a0 + a0$이다. 정리 1.1에 의해, $0 = a0$이다. □

Problem 10. $\mathsf{V} = \{ f : R \to R \mid f$는 미분가능$\}$이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 가장 먼저, $f, g \in \mathsf{V}$와 $c \in \mathbb{R}$에 대해 $f + g \in \mathsf{V}$이고 $(cf) \in \mathsf{V}$인지 확인해야 한다. (연산에 대한 닫힘) 다시 말해 미분가능한 함수의 합 역시 미분가능하고, 미분가능한 함수의 스칼라배 역시 미분가능한지 보여야 한다. 이는 잘 알려진 내용이므로 생략한다. (자세한 정의는 미분적분학이나 해석학 교재를 참고하라.)

(VS1) 모든 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$이므로 $f + g = g + f$이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 교환법칙이 사용되었다.

(VS2) 모든 $f, g, h \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f + (g+h))(x)$이므로 $(f+g)+h = f + (g+h)$이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS3) 함수 0을 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $0(x) = 0$으로 정의하면 $(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$이므로 늘 $f + 0 = 0 + f = f$이다. 또한, $0(x) = 0$은 미분가능하므로 $0 \in \mathsf{V}$이다.

(VS4) 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 g를 $g(x) = -f(x)$로 정의하면 g는 미분가능하고, 자명히 $f + g = 0$이다.

(VS5) 함수 $f \in \mathsf{v}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$이므로 $1f = f$이다.

(VS6) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$와 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = (a(bf))(x)$이다. 따라서, $(ab)f = a(bf)$이다. 이 증명에서는 실수의 곱에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS7) 실수 $a \in \mathbb{R}$와 함수 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(a(f+g))(x) = a((f+g)(x)) = a(f(x)+g(x)) = af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$이다. 따라서, $a(f+g) = af + ag$이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

(VS8) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$와 함수 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af+bf)(x)$이다. 따라서, $(a+b)f = af + bf$이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 11. 영벡터만을 벡터로 갖는 $\mathsf{V} = \{0\}$이 벡터공간임을 보이자.

(cl) $0 + 0 = 0$이고, 임의의 상수 $c \in F$에 대해 $c0 = 0$이므로 연산에 대해 닫혀 있다.

(VS1) 원소가 0 뿐이므로 $0 + 0 = 0 + 0 = 0$이다.

(VS2) 원소가 0 뿐이므로 $0 + (0+0) = (0+0) + 0$이다.

(VS3) 원소가 0 뿐이므로 $0 + 0 = 0$에서 0이 항등원이다.

(VS4) 원소가 0 뿐이고, $0 + 0 = 0$에서 0의 역원이 0이다.

(VS5) 정의에 의해 $1 \cdot 0 = 0$이다.

(VS6) 스칼라 a, b에 대해 $(ab)0 = 0 = a0 = a(b0)$이다.

(VS7) 스칼라 a에 대해 $a(0+0) = a0 = 0 = 0 + 0 = a0 + a0$이다.

(VS8) 스칼라 a, b에 대해 $(a+b)0 = 0 = 0 + 0 = a0 + b0$이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 12. 짝함수(even function)들의 집합이 벡터공간임을 보이자. 사실, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로, (VS1), (VS2), (VS5 - 8)은 증명할 필요가 없다. 따라서, (cl) : 연산에 대한 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 짝함수 f, g와 실수 $c \in \mathbb{R}$에 대해 $f+g$와 cf가 짝함수임을 보이면 충분하다. 먼저, $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$로부터 $f+g$는 짝함수이다. 또한, $(cf)(-x) = cf(-x) = cf(x) = (cf)(x)$로부터 cf는 짝함수이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$이 짝함수임을 보이면 충분하다. $0(-x) = 0 = 0(x)$에서 0은 짝함수이다.

(VS4) 짝함수 f에 대해 $g(x) = -f(x)$로 정의된 g가 짝함수임을 보이면 충분하다. $g(-x) = -f(-x) = -f(x) = g(x)$에서 g는 짝함수이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 13. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$만 가지고도 이 덧셈에 대해 주어진 집합이 벡터공간이 되지 않음을 보일 수 있다. 이 공간의 영벡터의 역할을 하는 벡터를 우선 찾아보자. 영벡터를 (x, y)라고 하면, $(a, b) + (x, y) = (a + x, by) = (a, b)$가 되어야 한다. 따라서, $x = 0$이고 $y = 1$이어야 한다. 즉, 이 공간에서는 $(0, 1)$이 영벡터이다. 이제, $(1, 0)$의 역벡터를 찾아보자. 만일 (x, y)가 $(1, 0)$의 역벡터라면, $(1, 0) + (x, y) = (1x, 0y) = (x, 0)$가 영벡터여야만 한다. 다시 말해, $(x, 0) = (0, 1)$이어야만 하는데, $0 \neq 1$이므로 (두번째 좌표) 어떤 (x, y)도 역벡터가 될 수 없다. 따라서, 이 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 14. 스칼라가 $\mathbb{R}$로 제한된 상태이므로, 주어진 공간이 실수 상수곱에 대해 벡터공간 공리를 만족하는지 보이면 된다. 그런데, 주어진 공간은 이미 스칼라를 $\mathbb{C}$로 택했을 때 벡터 공간 공리를 만족하고, $\mathbb{R}$은 $\mathbb{C}$의 부분집합이므로 $\mathbb{C}$에서 모두 만족한다면 $\mathbb{R}$에서도 만족하게 된다. 따라서, 주어진 공간은 $\mathbb{R}$-벡터공간이다. □

Problem 15. 이 경우 '닫혀 있음'이 보장되지 않는다. 예를 들어, $i \in \mathbb{C}$와 $(1, 1, \cdots, 1) \in \mathsf{V}$를 생각하자. 그러면 $i(1, 1, \cdots, 1) = (i, i, \cdots, i)$인데, 이러한 벡터는 주어진 공간 V에 존재하지 않는다. (각 좌표가 실수가 아니기 때문) 따라서, 상수곱에 대해 닫혀있지 않으므로, 주어진 공간은 $\mathbb{C}$-벡터공간이 아니다. □

Problem 16. 각 entry가 전부 실수인 $m \times n$-행렬들을 모아놓은 공간은 이미 $\mathbb{R}$-벡터공간이다. $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$의 부분집합이므로, 문제 14에서와 동일한 논리에 의해 주어진 공간은 $\mathbb{Q}$-벡터공간이다. □

Problem 17. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS5)를 만족하지 못하게 된다. $1(a_1, a_2) = (a_1, 0)$으로부터 $a_2 \neq 0$인 경우에 $1v = v$를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 18. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS1)을 만족하지 못하게 된다. $(1, 0) + (2, 0) = (1 + 4, 0) = (5, 0)$이지만, 순서를 바꾼 $(2, 0) + (1, 0) = (2 + 2, 0) = (4, 0)$과 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 19. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS8)을 만족하지 못하게 된다. $a = 2, b = 3, v = (1, 1)$이라고 하자. 그러면 $(a + b)v = 5v = (5, 1/5)$이지만, $av = (2, 1/2), bv = (3, 1/3)$이고 둘의 합은 $(5, 5/6)$으로 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 20. 문제 12와 마찬가지로, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로 (cl) : 연산에 대해 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 함수 $f, g \in \mathsf{V}$와 실수 $c \in \mathbb{R}$을 생각하자. $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$이므로 $f + g$ 또한 $x = 1$에서 0을 갖는다. 따라서 $f + g \in \mathsf{V}$이다. 또한, $(cf)(1) = cf(1) = c0 = 0$에서 cf 또한 $x = 1$에서 0을 갖는다. 따라서 $cf \in \mathsf{V}$이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$이 $x = 1$에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $0(1) = 0$이다. 따라서, $0 \in \mathsf{V}$이다.

(VS4) 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, $g(x) = -f(x)$가 $x = 1$에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $g(1) = -f(1) = -0 = 0$이다. 따라서, $g \in \mathsf{V}$이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 21. 곱공간이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$와 스칼라 $c \in F$에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$에서, $v + v' \in V$이고 $w + w' \in W$임은 V, W가 벡터 공간이라는 사실(그러므로 닫혀 있다는 사실)로부터 자동으로 얻어진다. 따라서, $(v, w) + (v', w') \in Z$이다. 마찬가지로 $c(v, w) = (cv, cw)$에 대해 $cv \in V$이고 $cw \in W$이므로 $c(v, w) \in Z$이다.

(VS1) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') = (v' + v, w' + w) = (v', w') + (v, w)$이므로 (VS1)이 성립한다. 이는 V, W 각각이 벡터 공간이라는 사실로부터 얻어진다.

(VS2) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w'), (v'', w'') \in Z$에 대해, $((v, w) + (v', w')) + (v'', w'') = ((v + v') + v'', (w + w') + w'') = (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) = (v, w) + ((v', w') + (v'', w''))$이므로 (VS2)가 성립한다. 마찬가지로, V, W가 (VS2)를 만족하기 때문이다.

(VS3) V의 항등원과 W의 항등원을 각각 $0_V, 0_W$라고 하자. 그러면 $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$이므로 $(0_V, 0_W)$는 영벡터이다.

(VS4) $(v, w) \in Z$에 대해, $v \in V, w \in W$의 역벡터를 각각 $x \in V, y \in W$라고 하자. 그러면 $(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y) = (0_V, 0_W)$이므로 $(x, y) \in Z$는 (v, w)의 역벡터이다.

(VS5) $1(v, w) = (1v, 1w) = (v, w)$이므로 (VS5)가 만족된다.

(VS6) 스칼라 a, b와 $(v, w) \in Z$에 대해, $(ab)(v, w) = ((ab)v, (ab)w) = (a(bv), a(bw)) = a(bv, bw) = a(b(v, w))$이므로 (VS6)이 만족된다.

(VS7) 스칼라 a와 $(v, w), (v', w') \in Z$에 대해, $a((v, w) + (v', w')) = a(v + v', w + w') = (a(v + v'), a(w + w')) = (av + av', aw + aw') = (av, aw) + (av', aw') = a(v, w) + a(v', w')$이므로 (VS7)이 만족된다.

(VS8) 스칼라 a, b와 $(v, w) \in Z$에 대해, $(a + b)(v, w) = ((a + b)v, (a + b)w) = (av + bv, aw + bw) = (av, aw) + (bv, bw) = a(v, w) + b(v, w)$이므로 (VS8)이 만족된다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 22. 각 entry에는 0 혹은 1만이 자리할 수 있다. 따라서, 총 mn-개의 entry에 0 또는 1을 채워넣는 방법의 수이므로, 2^{mn}개의 matrix가 존재한다.

1.3 부분공간

Problem 1.

(a) **거짓**. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{ (x, 1) \in V \mid x \in \mathbb{R} \}$을 생각하고, W 위에 덧셈과 상수곱을 다음과 같이 정의하자. $(x, 1) + (x', 1) = (x + x', 1)$, $c(x, 1) = (cx, 1)$. 그러면 W는 그 자체로 벡터공간이며, 집합으로는 V의 부분집합이지만, 둘의 구조가 다르므로 부분공간은 아니다.

(b) **거짓**. 공집합은 벡터공간 공리 중 영벡터를 포함해야한다는 (VS3)을 만족하지 않는다. 따라서, 공집합은 그 자체로 벡터 공간이 아니다.

(c) 참. $\{0\}$은 모든 벡터 공간 V의 부분 공간이고, V가 점공간이 아니므로 $W = \{0\} \neq V$로 두면 충분하다.

(d) 참. 정리 1.4에 의해 부분공간의 교집합은 늘 부분공간이다.

(e) 참. 대각행렬은 대각 성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬이다. 따라서, 대각 성분 n개만이 0이 아닌 값을 가질 수 있다.

(f) 거짓. 정사각행렬의 대각합은 대각성분의 곱이 아니라 합이다.

(g) 거짓. 둘은 ’같은’ 공간이 아니다.

Problem 2. (a) $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 대각합 : $-4-1=-5$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \\ -8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, 대각합 : $10-4+6=12$ (e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 대각합 : $-4+1+5=2$

Problem 3. $A=(A_{ij}), B=(B_{ij})$로 놓고, $C=(C_{ij})=(aA+bB)^t$라고 하자. 그러면, $C_{ij}=(aA+bB)_{ji}$이고 (전치행렬의 정의) $(aA+bB)_{ji}=aA_{ji}+bB_{ji}$이다. 따라서, $C_{ij}=aA_{ji}+bB_{ji}$이다. 또한, $(aA^t+bB^t)_{ij}=a(A^t)_{ij}+b(B^t)_{ij}=aA_{ji}+bB_{ji}$이다. 따라서, $(aA+bB)^t=aA^t+bB^t$이다. □

Problem 4. $A=(A_{ij})$로 두자. 그러면 $\left[(A^t)^t\right]_{ij}=(A^t)_{ji}=A_{ij}$이므로, $(A^t)^t$의 (i,j) - 성분은 A의 (i,j) - 성분이다. 따라서, $(A^t)^t=A$이다. □

Problem 5. 문제 3에 의해, $(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t$이다. 그리고, 문제 4에 의해 $(A^t)^t=A$이므로, $(A+A^t)^t=A^t+A=A+A^t$이다. 즉, $A+A^t$는 전치행렬과 동일하므로 대칭행렬이다. □

Problem 6. $\operatorname{tr}(aA+bB)=\sum_{i=1}^{n}(aA+bB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(aA_{ii}+bB_{ii})=a\sum_{i=1}^{n}A_{ii}+b\sum_{i=1}^{n}B_{ii}=a\operatorname{tr}(A)+b\operatorname{tr}(B)$. □

Problem 7. 대각행렬 $D=(D_{ij})$를 생각하자. 그러면, $i\neq j$이면 $D_{ij}=0$이다. 따라서, $(D^t)_{ij}=D_{ji}$에 대해, $i\neq j$이면 $D_{ji}=0=D_{ij}$이고, $i=j$이면 $D_{ji}=D_{ii}=D_{ij}$이다. 따라서, $D^t=D$이므로 D는 대칭행렬이다. □

Problem 8.

(a) (a) $(0,0,0)\in \mathsf{W}_1$: $a_1=0, a_2=0, a_3=0$이므로 $a_1=0=3a_2$, $a_3=0=-a_2$이다.

(b) 덧셈에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in \mathsf{W}_1$에 대해, 둘의 합 $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$을 조사하자. $(a_1+b_1)=3a_2+3b_2=3(a_2+b_2)$이고, $(a_3+b_3)=-a_2+-b_2=-(a_2+b_2)$이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

(c) 상수곱에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3)\in \mathsf{W}_1$과 $c\in\mathbb{R}$에 대해, 상수곱 (Ca_1,ca_2,ca_3)을 조사하자. $ca_1=c(3a_2)=3(ca_2)$이고 $ca_3=c(-a_2)=-(ca_2)$이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.

(b) (a) $(0,0,0)\in \mathsf{W}_2$: $a_1=0, a_3=0$이므로 $a_1=a_3+2$를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

(c) (a) $(0,0,0)\in \mathsf{W}_3$: $a_1=a_2=a_3=0$이므로, $2*0-7*0+0=0$이다.

(b) 덧셈에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in \mathsf{W}_2$에 대해, 둘의 합을 조사하자. $2(a_1+b_1)-7(a_2+b_2)+(a_3+b_3)=(2a_1-7a_2+a_3)+(2b_1-7b_2+b_3)=0+0$이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

(c) 상수곱에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3)\in \mathsf{W}_3$과 $c\in\mathbb{R}$에 대해, 상수곱을 조사하자. $2(ca_1)-7(ca_2)+(ca_3)=c(2a_1-7a_2+a_3)=c0=0$이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.

(d) (c)와 같은 이유로, 주어진 공간은 부분공간이다.

(e) (a) $(0,0,0)\ in \mathsf{W}_5 : a_1 = a_2 = a_3 = 0$이므로, $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \neq 1$이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

(f) (a) 덧셈에 대한 닫힘 : $(\sqrt{3}, \sqrt{5}, 0), (0, \sqrt{6}, \sqrt{3}) \in \mathsf{W}_6$에 대해, 둘의 합인 $(\sqrt{3}, \sqrt{5}+\sqrt{6}, \sqrt{3}) = (a_1, a_2, a_3)$은 $5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 15 - 3(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2 + 18 = -6\sqrt{30} \neq 0$이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

Problem 9.

- $W_1 \cap W_3$: $a_1 = 3a_2$, $a_3 = -a_2$와 동시에 $2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0$을 만족하는 점들을 찾으면 충분하다. $a_2 = k$로 놓으면, $a_1 = 3k, a_3 = -k$이고, $2(3k) - 7(k) - (k) = -2k = 0$으로부터, $k = 0$만이 주어진 공간의 원소이다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다.
- $W_1 \cap W_4$: 마찬가지로, $a_2 = k$로 놓으면 $a_1 = 3k$, $a_3 = -k$이고, $(3k) - 4k + k = 0k = 0$이므로 모든 $k \in \mathbb{R}$에 대해 $(3k, k, -k)$가 주어진 조건을 만족한다. 즉, $W_1 \cap W_4 = W_1$이다.
- $W_3 \cap W_4$: $2a_1 - 7a_2 + a_3 = 0$으로부터 $a_3 = -2a_1 + 7a_2$이고, $a_1 - 4a_2 - a_3 = 0$으로부터 $a_3 = a_1 - 4a_2$이다. 이 두 식을 연립하면, $-2a_1 + 7a_2 = a_1 - 4a_2$, 즉 $3a_1 = 11a_2$를 얻는다. $a_1 = 11k$로 놓으면, $a_2 = 3k$이고 $a_3 = 11k - 12k = -k$이다. 즉, $\{\, (11k, 3k, -k) \in \mathbb{R}^3 \mid k \in \mathbb{R} \,\}$이 $W_3 \cap W_4$이다.

Problem 10. 먼저, W_1이 부분공간임을 보이자. 이는 정리 1.3으로부터, (1) 영벡터의 존재성 (2) 덧셈에 대한 닫힘 (3) 상수곱에 대한 닫힘을 보이면 충분하다.

1. $(0, 0, \cdots, 0)$은 $0 + 0 + \cdots + 0 = 0$을 만족하므로 영벡터가 존재한다.
2. $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n) \in W_1$에 대해, 합을 조사하면 된다. $(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n) = 0 + 0 = 0$이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.
3. $(a_1, \cdots, a_n) \in W_1$과 $c \in F$에 대해, 상수곱을 조사하면 된다. $(ca_1) + \cdots + (ca_n) = c(a_1 + \cdots + a_n) = c0 = 0$이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

그러나 W_2는 부분공간이 아니다. $(1, 0, \cdots, 0)$은 W_2의 원소이지만, 그 두 배인 $(2, 0, \cdots, 0)$은 W_2의 원소가 아니다. 따라서 W_2는 부분공간이 아니다. □

Problem 11. 주어진 공간은 덧셈에 대해 닫혀 있지 않다. $n = 2$인 경우, $x^2 + x$와 $-x^2 + x$는 모두 W의 원소이지만 둘의 합인 $2x$는 차수가 1이므로 W의 원소가 아니다. □

Problem 12. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영행렬 $0 \in \mathsf{M}_{m\times n}(F)$에 대해, $i > j$라면 $0_{ij} = 0$이므로 영행렬은 상삼각행렬이다.
2. 두 상삼각행렬 A, B에 대해, $i > j$라면 $A_{ij} = B_{ij} = 0$이다. 따라서, 둘의 합인 $A + B$ 역시 $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 + 0 = 0$이므로 상삼각행렬이다.
3. 상삼각행렬 A와 스칼라 $c \in F$에 대해, $i > j$라면 $A_{ij} = 0$이다. 따라서, 상수곱인 cA 역시 $(cA)_{ij} = cA_{ij} = c0 = 0$이므로 상삼각행렬이다.

따라서, $m \times n$ 상삼각행렬의 집합은 $\mathsf{M}_{m\times n}(F)$의 부분공간이다. □

Problem 13. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 $0 \in \mathcal{F}(S, F)$에 대해, $0(s_0) = 0$이므로 영벡터를 포함한다.
2. 두 함수 $f, g \in \mathcal{F}(S, F)$에 대해, $f(s_0) = g(s_0) = 0$이라고 하자. 그러면 둘의 합은 $(f + g)(s_0) = f(s_0) + g(s_0) = 0 + 0 = 0$이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

3. 함수 $f \in \mathcal{F}(S, F)$와 $c \in F$에 대해, $f(s_0) = 0$이라고 하자. 그러면 상수곱은 $(cf)(s_0) = c(f(s_0)) = c0 = 0$이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은 $\mathcal{F}(S, F)$의 부분공간이다. □

Problem 14. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 0이 아닌 값을 가지는 점이 존재하지 않는다. 즉, 유한개의 점에서만 함숫값이 0이므로 $\mathcal{C}(S, F)$의 원소이다.

2. 두 함수 $f, g \in \mathcal{C}(S, F)$에 대해, f가 0을 갖지 않는 점의 집합을 $S(f)$라고 하자. 그러면 조건에 의해 $S(f)$와 $S(g)$는 유한집합이다. $S(f+g) \subseteq S(f) \cup S(g)$이므로, $S(f+g)$는 유한집합이다. 따라서, $f + g \in \mathcal{C}(S, F)$이다.

3. 함수 $f \in \mathcal{C}(S, F)$에 대해, $S(f)$는 유한집합이다. 0이 아닌 스칼라 $c \in F$에 대해, $S(cf) = S(f)$이므로 $cf \in \mathcal{C}(S, F)$이다.

따라서, $\mathcal{C}(S, F)$는 $\mathcal{F}(S, F)$의 부분공간이다. □

Problem 15. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 자명히 미분가능하다.

2. 두 함수 f, g가 미분가능하다면 $f + g$도 미분가능하다. 따라서 합에 대해 닫혀 있다.

3. 함수 f가 미분가능할 때, 스칼라 $c \in \mathbb{R}$에 대해 cf도 미분가능하다. 따라서 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은 $C(\mathbb{R})$의 부분공간이다. □

Problem 16. 정리 1.3을 이용하자.

1. 영함수 0에 대해, 0은 자명히 n-번 미분 가능하고 n계 도함수가 연속이다.

2. 두 함수 f, g가 n-번 미분 가능하고 n계 도함수가 연속이라면, $f + g$ 또한 그러함이 잘 알려져 있다. (문제 15와 마찬가지로, 미분적분학이나 해석학을 참고하라.)

3. 이 역시 미분적분학이나 해석학에 의해, 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 집합은 $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$의 부분공간이다. □

Problem 17. ($\Rightarrow$) 만일 W가 V의 부분공간이라면, W는 영벡터를 포함하므로 W $\neq \emptyset$이다. 또한, 정리 1.3에 의해 상수곱과 덧셈에 대해 닫혀 있다. ($\Leftarrow$) 우선 주어진 공간이 상수곱과 합에 대해 닫혀 있으므로 영벡터의 존재성만 보이면 충분하다. W $\neq \emptyset$이므로 $w \in$ W가 있고, 상수곱에 대해 닫혀 있으므로 $0w = 0 \in$ W이다. 정리 1.3에 의해, W는 V의 부분공간이다. □

Problem 18. ($\Rightarrow$) 문제 17과 동일하게 증명된다. ($\Leftarrow$) 정리 1.3에 의해, 주어진 공간이 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있음을 확인하면 충분하다. $a = 1$로 놓으면, 임의의 두 벡터 $x, y \in$ W에 대해 $x + y \in$ W이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다. 이제, $y = 0$으로 놓으면, 임의의 벡터 $x \in$ W와 $a \in F$에 대해 $ax \in$ W이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다. □

Problem 19. ($\Rightarrow$) $W_1 \cup W_2$가 V의 부분공간이라고 놓자. 결론을 부정하여, $w_1 \in W_1 \setminus W_2$와 $w_2 \in W_2 \setminus W_1$이 존재한다고 하자. 그러면 $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$이다. 만일 $w_1 + w_2 \in W_1$이라면, $w_1 + w_2 - w_1 = w_2 \in W_1$이므로 모순이다. 마찬가지로, $w_1 + w_2 \in W_2$라면, $w_1 + w_2 - w_2 = w_1 \in W_2$이므로 모순이다. 따라서, $W_1 \subseteq W_2$이거나 $W_2 \subseteq W_1$이어야만 한다. ($\Leftarrow$) 역은 자명하다. 만일 $W_1 \subseteq W_2$라면 $W_1 \cup W_2 = W_2$이므로 부분공간이다. □

Problem 20. 수학적 귀납법을 사용한다. ($n = 1$) 자명하다. (Induction step) $n = k$에서 성립함을 가정하고, $n = k+1$에서 성립함을 보이자. $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + a_{k+1}w_{k+1} = (a_1w_1 + \cdots + a_kw_k) + a_{k+1}w_{k+1}$이고, $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k \in W$

는 가정에 의해 참이다. W는 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있으므로, $a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + a_{k+1}w_{k+1} \in W$이다. 따라서, 임의의 n에 대해 성립한다. □

Problem 21. 정리 1.3을 이용하자.

1. 모든 항이 0인 수열 $a_n = 0$은 수렴하는 수열이다.
2. 두 수렴하는 수열의 합 역시 수렴한다. 이는 미적분학이나 해석학에서 확인할 수 있다.
3. 수렴하는 수열의 상수곱 역시 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열의 집합은 V의 부분공간이다. □

Problem 22. 문제 18을 이용하자.

1. 우함수의 집합은 부분공간이다.
   (a) 영함수 $0(t)$는 우함수이다. $0(-t) = 0 = 0(t)$이기 때문이다.
   (b) 두 우함수 f, g와 스칼라 $c \in F_2$에 대해, $cf + g$가 우함수임을 보이자. $(cf + g)(-t) = cf(-t) + g(-t) = cf(t) + g(t) = (cf + g)(t)$이므로 우함수이다.
2. 기함수의 집합은 부분공간이다.
   (a) 영함수 $0(t)$는 기함수이다. $0(-t) = 0 = -0 = -0(t)$이기 때문이다.
   (b) 두 기함수 f, g와 스칼라 $c \in F_2$에 대해, $cf + g$가 기함수임을 보이자. $(cf + g)(-t) = cf(-t) + g(-t) = c(-f(t)) + (-g(t)) = -(cf(t) + g(t)) = -(cf + g)(t)$이므로 기함수이다.

따라서, 우함수의 집합과 기함수의 집합은 각각 부분공간이 된다. □

Problem 23. 문제 18을 이용하자.

(a) 우선, $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$에 대해 $w_1 + 0 \in W_1 + W_2$이고 $0 + w_2 \in W_1 + W_2$이므로 $W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$이다. 영벡터는 $0 = 0 + 0$이므로 $W_1 + W_2$는 영벡터를 포함한다. 이제, $v_1 + v_2, w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$와 $c \in F$에 대해, $c(v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) = (cv_1 + w_1) + (cv_2 + w_2) \in W_1 + W_2$이므로, $W_1 + W_2$는 부분공간이다. □

(b) 어떤 부분공간 S가 W_1, W_2를 포함한다고 하자. 그러면 S는 덧셈에 대해 닫혀 있으므로, $w_1 \in W_1 \subseteq S$와 $w_2 \in W_2 \subseteq S$에 대해 $w_1 + w_2 \in S$이다. 따라서, 모든 $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$에 대해 $w_1 + w_2 \in S$이다. 즉, $W_1 + W_2 \subseteq S$이다. □

Problem 24. $W_1 \cap W_2$은 $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$이고 $a_n = 0$인 벡터들을 포함하므로 오로지 영벡터만이 포함된다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) \in \mathsf{F}^n$에 대해, $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 0) + (0, 0, \cdots, 0, a_n) \in W_1 + W_2$이다. 따라서, $\mathsf{F}^n = W_1 \oplus W_2$이다. □

Problem 25. $W_1 \cap W_2$은 짝수차수 항과 홀수차수 항이 모두 0인 다항식들을 포함하므로 오로지 0만이 포함된다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathsf{P}(F)$에 대해, n이 짝수라면, $(a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x) + (a_nx^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0) \in W_1 + W_2$이고 n이 홀수라면 $(a_nx^n + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x^1) + (a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_2x^2 + a_0) \in W_1 + W2$이다. 따라서, $W_1 \oplus W_2 = \mathsf{P}(F)$이다. □

Problem 26. $W_1 \cap W_2$는 $i > j$이면 $A_{ij} = 0$, $i \leq j$이면 $A_{ij} = 0$인 행렬만을 포함하므로 오로지 영행렬만이 포함된다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 행렬 $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(F)$에 대해, $X = (X_{ij})$와 $Y = (Y_{ij})$를 다음과 같이

정의하자.

$$X_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0 & i \leq j \\ A_{ij} & i > j \end{cases}$$

그러면 $X \in W_1$이고 $Y \in W_2$이며, $A = X + Y$이다. 따라서, $W_1 \oplus W_2 = \mathsf{M}_{m\times n}(F)$이다. □

Problem 27. $W_1 \cap W_2$는 $i \geq j$이면 $A_{ij} = 0$, $i \neq j$이면 $A_{ij} = 0$인 상삼각행렬만을 포함하므로 오로지 영행렬만이 포함된다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 상삼각행렬 $A = (A_{ij})$에 대해, $X = (X_{ij})$와 $Y = (Y_{ij})$를 다음과 같이 정의하자.

$$X_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ A_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

그러면 $X \in W_1$이고 $Y \in W_2$이며 $A = X + Y$이다. 따라서, $W_1 \oplus W_2 = V$이다. □

Problem 28. $W_1 \cap W_2$는 $A^t = A$이고 $A^t = -A$인 행렬만을 포함하므로 $A = A^t = -A$에서 $A = 0$, 즉 영행렬만이 포함된다. 따라서, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 행렬 A에 대해, $X := \frac{1}{2}\left(A + A^t\right), Y := \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$로 정의하면 X는 문제 5에 의해 대칭행렬이고 $Y^t = \frac{1}{2}\left(A - A^t\right)^t \frac{1}{2}\left(A^t - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^t\right) = -Y$이므로 Y는 반대칭행렬이다. 또, $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$이므로, $W_1 \oplus W_2 = \mathsf{M}_{n\times n}(F)$이다. □

Problem 29. $W_1 \cap W_2$는, $i \leq j$일 때 $A_{ij} = 0$이면서 $A^t = A$이므로 $i \geq j$일 때 $A_{ij} = 0$을 만족해야 한다. 즉, 영행렬만이 포함되고 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 행렬 $A = (A_{ij})$에 대해, $D = (D_{ij})$를 다음과 같이 정의하자.

$$D_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & i \leq j \\ A_{ji} & i > j \end{cases}$$

그러면 $i > j$이면 $D_{ij} = A_{ji} = D_{ji}$이고 $i \leq j$이면 $D_{ij} = A_{ij} = D_{ji}$이므로 D는 대칭행렬이다. 이제, $X = A - D$로 정의하면, X는 $i \leq j$에서 0이므로 $X \in W_1$이다. 또한, $A = D + (A - D)$이므로 $W_1 \oplus W_2 = \mathsf{M}_{n\times n}(F)$이다. □

Problem 30. ($\Rightarrow$) $V = W_1 \oplus W_2$라고 하자. 그러면 정의에 의해 임의의 $v \in V$에 대해 $v = x_1 + x_2$로 표현할 수 있다. ($x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$) 만일 또다른 표현 $v = y_1 + y_2$가 존재하여 $y_1 \in W_1, y_2 \in W_2$라면, $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$이고, $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$이다. 좌변은 W_1의 원소이고 우변은 W_2의 원소인데, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이므로 $x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0$이다. 따라서, $x_1 = y_1, x_2 = y_2$이고 $v = x_1 + x_2$의 표현은 유일하다. ($\Leftarrow$) $v \in V$의 표현 $v = x_1 + x_2$이 유일하다고 가정하자. 만일 $W_1 \cap W_2$에 0이 아닌 또다른 원소 w가 있다면, $w = w + 0 = 0 + w$로 표현될 수 있다. 이는 모순이며, 따라서 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$이다. 임의의 v를 W_1과 W_2의 원소의 합으로 표현할 수 있으므로 따라서 $V = W_1 \oplus W_2$이다. □

Problem 31.

(a) ($\Rightarrow$) $v \notin W$이면서 $v + W$가 부분공간이라고 하자. 그러면 $0 \in v + W$인데, $0 = v + w$인 w가 존재해야 한다. 따라서, $v = -w \in W$가 되어 모순이다. ($\Leftarrow$) $v \in W$라면, $v + W = W$이므로 자명히 부분공간이다. (임의의 원소 $w \in W$는 $v + (-v + w) \in v + W$이기 때문이다.)

(b) ($\Rightarrow$) $v_1 + W = v_2 + W$라면, 임의의 $w \in W$에 대해 $v_1 + w = v_2 + w'$인 $w' \in W$가 존재한다. 따라서, $v_1 - v_2 = w' - w \in W$이다. ($\Leftarrow$) $v_1 - v_2 \in W$라면, 임의의 $w \in W$에 대해 $v_1 + w = v_2 + (v_1 - v_2 + w) \in v_2 + W$이고,

$v_2 + w = v_1 + (v_2 - v_1 + w) \in v_1 + W$이다.

(c) (a) 덧셈 : $v_1 + W = v_1' + W$이고 $v_2 + W = v_2' + W$일 때, $(v_1 + v_2) + W = (v_1' + v_2') + W$임을 보이면 된다. (b)에 의해 $v_1 - v_1' \in W$이고 $v_2 - v_2' \in W$이므로, $(v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2') \in W$이다.

(b) 상수곱 : $v_1 + W = v_1' + W$일 때, $av_1 + W = av_1' + W$임을 보이면 된다. (b)에 의해, $v_1 - v_1' \in W$이므로 $av_1 - av_2 = a(v_1 - v_1') \in W$이다.

(d) 덧셈과 상수곱에 대해 닫혀 있음을 보였으므로, 여기에서는 영벡터와 역벡터의 존재만 보이겠다. (나머지 공리는 자명하다.)

(VS3) 임의의 v에 대해, $(v + W) + (0 + W) = (v + 0) + W = v + W$이므로 $0 + W$는 영벡터이다.

(VS4) 임의의 v에 대해, $(v+W)+((-v)+W) = (v+(-v))+W = 0+W$이므로 $(-v)+W$가 $v+W$의 역벡터이다.

1.4 일차결합과 연립일차방정식

Problem 1.

(a) 참. 벡터공간 V의 공집합이 아닌 임의의 부분집합 S에 대해, $v \in S$를 생각하자. 그러면, $0 = 0v$는 S의 일차결합이다.

(b) 거짓. 생성공간은 벡터공간이지만, $\emptyset$은 벡터공간이 아니다.

(c) 참.
proof) S를 포함하는 V의 모든 부분공간의 교집합을 $I(S)$라고 하자. 임의의 부분공간의 교집합은 부분공간이므로, $I(S)$는 S를 포함하는 V의 부분공간이다. 정리 1.5에 의해, $\mathrm{span}(S) \subseteq I(S)$이다. 또한, $\mathrm{span}(S)$는 S를 포함하는 V의 부분공간이므로, $I(S) \subseteq \mathrm{span}(S)$이다. 따라서, $\mathrm{span}(S) = I(S)$이다.

(d) 거짓. 원래 방정식에 0을 곱하면 해집합이 바뀔 수 있다.

(e) 참.

(f) 거짓. $x + y = 1; x + y = 0$은 해를 갖지 않는다.

Problem 2. 생략.

Problem 3.

(a) $(+4) * (1, 3, 0) + (-3) * (2, 4, -1) = (-2, 0, 3)$

(b) $5 * (-3, 2, 1) + 8 * (2, -1, -1) = (1, 2, -3)$

(c) 첫 번째 벡터는 나머지 두 벡터로 표현할 수 없다.

(d) 첫 번째 벡터는 나머지 두 벡터로 표현할 수 없다.

(e) 첫 번째 벡터는 나머지 두 벡터로 표현할 수 없다.

(f) $4 * (1, 2, -1) + 2 * (-3, -3, 3) = (-2, 2, 2)$

Problem 4 - 6. TBD.

Problem 7. 임의의 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathsf{F}^n$에 대해, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$이므로 $\{e_1, \cdots, e_n\}$은 F^n을 생성한다. □

Problem 8. 임의의 $a_nx^n+\cdots+a_1x^1+a_0 \in \mathsf{P}(F)$에 대해, $a_nx^n+\cdots+a_1x^1+a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$이므로 $\{1, x, \cdots, x^n\}$은 $\mathsf{P}(F)$를 생성한다. □

Problem 9. (i, j)-성분만 1이고 나머지는 0인 행렬을 e_{ij}라고 하자. 그러면 제시된 행렬은 $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$이다. 임의의 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times2}(F)$에 대해, $A = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + a_{21}e_{21} + a_{22}e_{22}$이므로 주어진 집합은 $\mathsf{M}_{2\times2}(F)$를 생성한다. □

Problem 10. 임의의 대칭행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$에 대해, $A = aM_1 + cM_2 + bM_3$이므로 $\{M_1, M_2, M_3\}$는 대칭행렬을 생성한다. □

Problem 11. $\operatorname{span}(\{x\})$는 $\{x\}$의 모든 일차결합의 집합이므로, 정의에 의해 $\operatorname{span}(\{x\}) = \{\, ax \mid a \in F \,\}$이다. 이는 벡터 x를 방향벡터로 갖는 직선을 의미한다. □

Problem 12. ($\Rightarrow$) 만일 W가 V의 부분공간이라면, $\operatorname{span}(W)$는 W를 포함하는 가장 작은 부분공간이므로 $\operatorname{span}(W) = W$이다. ($\Leftarrow$) 만일 $\operatorname{span}(W) = W$라면, $\operatorname{span}(W)$가 이미 V의 부분공간이므로 W가 V의 부분공간이다. □

Problem 13. $\operatorname{span}(S_1)$은 S_1을 포함하는 가장 작은 부분공간이며, $\operatorname{span}(S_2)$는 S_2를 포함하는 가장 작은 부분공간이다. 따라서, $\operatorname{span}(S_2)$는 S_1를 포함한다. 그리고, $\operatorname{span}(S_2)$는 그 자체로 부분공간이면서 S_1을 포함하므로, $\operatorname{span}(S_1)$의 최소성에 의해 $\operatorname{span}(S_1) \subseteq \operatorname{span}(S_2)$이다. □

Problem 14. ($\subseteq$) $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2)$는 $S_1 \cup S_2$를 포함하는 가장 작은 부분공간이며, $\operatorname{span}(S_1), \operatorname{span}(S_2)$는 각각 S_1, S_2를 포함하는 가장 작은 부분공간이다. 또한, $\operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$는 $\operatorname{span}(S_1)$과 $\operatorname{span}(S_2)$를 포함하는 가장 작은 부분공간이므로 S_1과 S_2를 포함한다. 즉, $S_1 \cup S_2$이다. 따라서, $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) \subseteq \operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$이다. ($\supseteq$) $S_1 \cup S_2$는 S_1과 S_2를 포함하므로, 문제 13에 의해 $\operatorname{span}(S_1), \operatorname{span}(S_2) \subseteq \operatorname{span}(S_1 \cup S_2)$이다. $\operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$는 $\operatorname{span}(S_1), \operatorname{span}(S_2)$를 포함하는 가장 작은 부분공간이므로 $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) \supseteq \operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$이다. 따라서, $\operatorname{span}(S_1 \cup S_2) = \operatorname{span}(S_1) + \operatorname{span}(S_2)$이다. □

Problem 15.

(a) $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1, S_2$이므로 문제 13에 의해 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \operatorname{span}(S_1)$이고 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \operatorname{span}(S_2)$이다. 따라서, $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \operatorname{span}(S_1) \cap \operatorname{span}(S_2)$이다.

(b) $S_1 = S_2$이면 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) = \operatorname{span}(S_1) = \operatorname{span}(S_1) \cap \operatorname{span}(S_2)$이다. 반대로, $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $S_1 = \{(0,0), (1,0)\}$과 $S_2 = \{(0,0), (2,0)\}$을 생각하자. 그러면 $S_1 \cap S_2 = \{(0,0)\}$이므로 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) = \{(0,0)\}$이지만, $\operatorname{span}(S_1) = \{\, (a, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R} \,\} = \operatorname{span}(S_2)$이므로 $\operatorname{span}(S_1 \cap S_2) \neq \operatorname{span}(S_1) \cap \operatorname{span}(S_2)$이다.

Problem 16. 결과를 부정하여 표현하는 방법이 유일하지 않다고 하자. 그러면 어떤 벡터 $v \in \operatorname{span}(S)$에 대해 v를 표현하는 두 가지 (이상의) 방법이 있다. 서로 다른 두 표현에서 겹치는 벡터를 $v_1, \cdots, v_n$, 겹치지 않는 벡터를 $w_1, \cdots, w_m$과 $u_1, \cdots, u_r$이라고 두면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} v &= a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m \\ &= a_1'v_1 + \cdots + a_n'v_n + c_1u_1 + \cdots + c_ru_r \end{aligned}$$

따라서 소거를 통해 다음을 얻는다.

$$(a_1 - a_1')v_1 + \cdots + (a_n - a_n')v_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m + (-c_1)u_1 + \cdots + (-c_r)u_r = 0$$

조건에 의해, $a_i = a_i'$ $(1 \le i \le n)$이고 $b_1 = \cdots = b_m = 0$, $c_1 = \cdots = c_r = 0$이어야 한다. 즉, v의 두 표현이 동일하고, 이는 모순이다. 따라서, $\operatorname{span}(S)$의 모든 벡터는 S의 일차결합으로 표현하는 방법이 유일하다. □

Problem 17. $|W| < \infty$이면 W를 생성하는 집합이 유한히 많다.

1.5 일차종속과 일차독립

Problem 1.

(a) 거짓. $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $\{(1,1),(2,2),(1,0)\}$은 일차종속이지만, $(1,0)$은 $(1,1)$과 $(2,2)$의 일차결합으로 표현할 수 없다.

(b) 참. 영벡터에 0이 아닌 스칼라를 곱하더라도 영벡터이기 때문이다.

(c) 거짓. 공집합은 일차독립이다.

(d) 거짓. $\mathbb{R}^2$의 부분집합 $\{(1,0),(0,0)\}$은 일차종속이지만, 부분집합 $\{(1,0)\}$은 일차독립이다.

(e) 참.

(f) 참.

Problem 2.

(a) $2 * \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -24 & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4-8 & \end{bmatrix} = 0$이므로 주어진 집합은 일차종속이다.

(b) 주어진 집합의 행렬을 순서대로 A_1, A_2라고 하면, $cA_1 + dA_2 = 0$이 되기 위해서는 모든 성분이 0이 될 필요가 있다. $(1,1)$ - entry는 $c+d=0$을 요구하고, $(1,2)$ - entry는 $-2c+d=0$을 요구하므로 주어진 조건을 만족하는 c, d는 오직 $c=d=0$ 뿐이다. 즉, 주어진 집합은 일차독립이다.

(c) 주어진 집합의 다항식을 순서대로 p_1, p_2, p_3라고 하면, $p_1 - p_3 = 3x^2 - 2x + 1$이고(3차항의 제거) 이는 p_2의 배수가 아니다. 즉, 주어진 집합은 일차독립이다.

(d) 주어진 집합의 다항식을 순서대로 p_1, p_2, p_3라고 하면, $2p_1 + p_3 = 3x^2 + 6$이고(3차항의 제거) 이는 $\frac{3}{2}p_2$이다. 즉, $2p_1 - \frac{3}{2}p_2 + p_3 = 0$이므로 주어진 집합은 일차종속이다.

(e) 주어진 집합의 벡터를 순서대로 v_1, v_2, v_3라고 하면, $-3v_1 + 2v_2 + v_3 = (0,0,0)$이므로 주어진 집합은 일차종속이다.

(f) 주어진 집합의 벡터를 순서대로 v_1, v_2, v_3라고 하면, $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$인 0이 아닌 a, b, c가 존재하지 않는다. 즉, 주어진 집합은 일차독립이다.

(g)-(j) 생략.

Problem 3. 주어진 집합의 행렬을 순서대로 M_1, M_2, M_3, M_4, M_5라고 하자. 그러면 $M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - M_5$는 영행렬이다. 즉, 주어진 집합은 일차종속이다. □

Problem 4. $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = 0$이라고 하자. 좌변은 $(a_1, \cdots, a_n)$이고 우변은 $(0, \cdots, 0)$이므로, $a_1 = \cdots = a_n = 0$이어야 한다. 즉, 주어진 집합은 일차독립이다. □

Problem 5. $a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$이라고 하자. 좌변과 우변의 계수를 비교하여, $a_n = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$이어야 한다. 즉, 주어진 집합은 일차독립이다. □

Problem 6. $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E^{ij} = 0$이라고 하자. 좌변의 (i,j) - 성분은 a_{ij}이고 우변은 영행렬이므로, 모든 i, j에 대해 $a_{ij} = 0$이어야 한다. 즉, 주어진 집합은 일차독립이다. □

Problem 7. 다음과 같은 집합은 $\mathsf{M}_{2\times 2}(F)$를 생성하는 일차독립인 집합이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 8.

(a) $a_1(1,1,0)+a_2(1,0,1)+a_3(0,1,1)=(0,0,0)$이라고 하자. 즉, $(a_1+a_2, a_1+a_3, a_2+a_3)=(0,0,0)$이다. 주어진 연립방정식을 해결하면, $2a_1=2a_2=2a_3=0$을 얻는다. 따라서, $a_1=a_2=a_3=0$이고 주어진 집합은 일차독립이다. □

(b) (a)에서, $2a_1=0$으로부터 $a_1=1$ 역시 주어진 조건을 만족한다. 즉, $(1,1,0)+(1,0,1)+(0,1,1)=(0,0,0)$이다. ($\because \operatorname{char}(F)=2$) 따라서, 주어진 집합은 일차종속이다. □

Problem 9. ($\Rightarrow$) 주어진 집합 $\{u,v\}$이 일차종속이라면, $au+bv=0$을 만족하는 $(a,b)\neq(0,0)$이 존재한다. 일반성을 잃지 않고, $a\neq 0$이라고 하자. 그러면, $au+bv=0$으로부터 $u=-\frac{b}{a}v$이다. 따라서, 한 벡터가 다른 벡터의 스칼라 곱으로 표현된다. ($\Leftarrow$) 주어진 집합 $\{u,v\}$에 대해 $u=kv$라고 두자. 그러면 $u-kv=0$이므로 주어진 집합은 일차종속이다. □

Problem 10. $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$은 일차종속이다.

Problem 11. $\operatorname{span}(S)$에는 $a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$이 포함되고, 각 a_i는 0 또는 1의 값을 가질 수 있다. 따라서, 2^n개의 벡터가 존재한다. □

Problem 12. (정리 1.6) $S_1\subseteq S_2\subseteq V$에 대해 S_1이 일차종속이면 S_2도 일차종속임을 보이자. S_1이 일차종속이므로, S_1의 벡터 $v_1,\cdots,v_n$과 0이 아닌 스칼라 $a_1,\cdots,a_n$이 존재하여 $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$이다. S_2 역시 $v_1,\cdots,v_n$을 포함하므로, 동일한 스칼라 $a_1,\cdots,a_n$에 대해 $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$이다. 따라서, S_2도 일차종속이다.

(정리 1.6 따름정리) S_1이 일차종속임을 가정하자. 그러면 정리 1.6에 의해 S_2도 일차종속이어야만 한다. 그러나 S_2는 일차독립이므로 모순이다. 따라서, S_1은 일차독립이다. □

Problem 13.

(a) ($\Rightarrow$) 집합 $\{u,v\}$가 일차독립이라고 하자. $a(u+v)+b(u-v)=(a+b)u+(a-b)v=0$으로부터, $a+b=0, a-b=0$이어야만 한다. 따라서, $a=b=0$이다. 즉, $\{u+v,u-v\}$는 일차독립이다. ($\Leftarrow$) 집합 $\{u+v,u-v\}$가 일차독립이라고 하자. $au+bv=\frac{a+b}{2}(u+v)+\frac{a-b}{2}(u-v)=0$으로부터, $a+b=0, a-b=0$이어야만 한다. 따라서, $a=b=0$이다. 즉, $\{u,v\}$는 일차독립이다. □

(b) ($\Rightarrow$) 집합 $\{u,v,w\}$가 일차독립이라고 하자. $a(u+v)+b(u+w)+c(v+w)=(a+b)u+(a+c)v=(b+c)w=0$으로부터, $a+b=a+c=b+c=0$이어야만 한다. 따라서, $a=b=c=0$이다. 즉, $\{u+v,u+w,v+w\}$는 일차독립이다. ($\Leftarrow$) 집합 $\{u+v,u+w,v+w\}$가 일차독립이라고 하자. $au+bv+cw=\frac{a+b}{2}(u+v)+\frac{a+c}{2}(u+w)+\frac{b+c}{2}(v+w)=0$으로부터, $a+b=a+c=b+c=0$이어야만 한다. 즉, $\{u,v,w\}$는 일차독립이다. □

Problem 14. ($\Rightarrow$) S가 일차종속이라고 하자. 그러면 0이 아닌 스칼라 $a_1,\cdots,a_n$과 벡터 $v_1,\cdots,v_n$이 존재하여 $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$이 된다. 만일 $n=1$만이 가능하다면, $S=\{0\}$이다. $n\neq 1$이면, $v_1=-\frac{a_2}{a_1}v_2+\cdots+-\frac{a_n}{a_1}v_n$이다. 따라서, $v_1=v$, $u_i=v_{i+1}$로 두면 충분하다. ($\Leftarrow$) $S=\{0\}$이면 자명히 일차종속이다. 만일 $v=a_1u_1+\cdots+a_nv_n$이라면, $v+(-a_1)u_1+\cdots+(-a_n)u_n=0$이므로 S는 일차종속이다. □

Problem 15. ($\Rightarrow$) S가 일차종속이라고 하자. 만일 $u=0$인 벡터 u가 있다면, 그런 u를 u_1로 두면 충분하다. 만일 그러한 u가 없다면, 문제 14에 의해 어떤 v가 $u_{i_1},\cdots,u_{i_k}$의 일차결합으로 나타난다. 인덱스를 재조정하여, v를 u_{k+1}로 두고, $u_{i_1},\cdots,u_{i_k}$를 각각 $u_1,\cdots,u_k$로 두면 충분하다. ($\Leftarrow$) $u_1=0$이라면, 자명히 S는 일차종속이다. 만일 $u_{k+1}\in\operatorname{span}(\{u_1,u_2,\cdots,u_k\})$라면, 문제 14에 의해 S는 일차종속이다. □

Problem 16. ($\Rightarrow$) S가 일차독립이라면, 임의의 유한 부분집합 $T\subseteq S$에 대해, T는 정리 1.6의 따름정리에 의해 일차독립이다. ($\Leftarrow$) S가 일차종속이라고 가정하자. 정의에 의해, 0이 아닌 스칼라 $a_1,\cdots,a_n$과 벡터 $u_1,\cdots,u_n\in S$가 존재하여 $a_1u_1+\cdots+a_nu_n=0$이 된다. 따라서, $T=\{u_1,\cdots,u_n\}$은 일차종속이고 이는 가정에 모순이다. 따라서, S는 일차독립이다. □

Problem 17. M의 열벡터를 순서대로 $C_1,\cdots,C_n$이라고 하자. 문제 15를 이용하자. $C_1\neq 0$이고, 임의의 $1\leq k<n$에 대해 C_{k+1}은 $(k+1)$-번째 성분이 0이 아니고 $C_1,\cdots,C_k$는 $(k+1)$-번째 성분이 0이므로 $C_{k+1}\notin\operatorname{span}(\{C_1,\cdots,C_k\})$

이다. 즉, 문제 15에 의해 M의 열벡터는 일차독립이다. □

Problem 18. 문제 15를 이용하자. 주어진 집합 S의 다항식을 차수에 따라 오름차순으로 정렬하여 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 라고 하자. 그러면 $p_1 \neq 0$이고, 차수 비교에 의해 $p_{k+1} \notin \text{span}(\{u_1, \cdots, u_k\})$이다. 따라서, S는 일차독립이다. □

Problem 19. 만일 $\{A_1^t, A_2^t, \cdots, A_k^t\}$가 일차종속이라면, $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \neq (0, 0, \cdots, 0)$이 존재하여 $a_1A_1^t + a_2A_2^t + \cdots + a_kA_k^t = 0$이고, 따라서 $(a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_kA_k)^t = 0$이다. 이는 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$가 일차독립인 것에 모순이다. 따라서, $\{A_1^t, A_2^t, \cdots, A_k^t\}$는 일차독립이다. □

Problem 20. 만일 $f(t) = e^{rt}$와 $g(t) = e^{st}$가 일차종속이라면, 문제 9에 의해 $f(t) = kg(t)$인 스칼라 k가 존재해야 한다. $e^{rt} = ke^{st}$로부터, $e^{(r-s)t} = k$여야 한다. 그런데, $r \neq s$이므로 좌변은 상수함수가 아니다. 따라서, f와 g는 일차독립이다. □

Problem 21. $(\Rightarrow)$ 대우를 사용하여, $\text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2) = \{0\}$이라고 하자. $S_1 \cup S_2$의 벡터 $v_1, \cdots, v_n$에 대해, S_1의 벡터는 $u_1, \cdots, u_m$, S_2의 벡터는 $w_1, \cdots, w_r$로 표기하자. $(m + r = n)$ 만일 $a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1w_1 + \cdots + b_rw_r = 0$이라면, $a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = (-b_1)w_1 + \cdots + (-b_r)w_r$이고 좌변은 $\text{span}(S_1)$의 원소, 우변은 $\text{span}(S_2)$의 원소이고 따라서 각각이 0이다. 그러나 S_1, S_2는 일차독립이므로, $a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_r = 0$이다. 따라서, $S_1 \cup S_2$는 일차독립이다.

$(\Leftarrow)$ $\text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2) \neq \{0\}$이라고 하자. 그러면 $0 \neq v \in \text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2)$인 v가 존재한다. 즉, S_1의 벡터 $u_1, \cdots, u_n$과 S_2의 벡터 $w_1, \cdots, w_m$에 대해 $v = a_1u_1 + \cdots a_nu_n = b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$으로 표현할 수 있다. (여기서 모든 스칼라는 0이 아니다.) $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n - b_1w_1 - \cdots - b_mw_m = 0$이므로 $S_1 \cup S_2$는 일차종속이다. 특히, S_1과 S_2는 서로소이므로 $u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_m$은 전부 다른 벡터이다. □

1.6 기저와 차원

Problem 1.

(a) 거짓. 점공간의 기저는 $\emptyset$이다.

(b) 참.

(c) 거짓. 모든 다항식의 집합의 기저는 유한집합이 아니다.

(d) 거짓. $\mathbb{R}^2$의 기저로 $\{(1, 0), (0, 1)\}$을 택할 수도 있지만, $\{(1, 1), (1, -1)\}$을 택할 수도 있다.

(e) 참. 그 원소의 개수를 차원이라고 한다.

(f) 거짓. $n + 1$이다.

(g) 거짓. mn이다.

(h) 참.

(i) 거짓. 유일성은 일차독립이 필요하다.

(j) 참.

(k) 참. 차원이 0인 부분공간은 점공간 $\{0\}$ 뿐이고 차원이 n인 부분공간은 V 뿐이다.

(l) 참.