

Partial Differential Equations

2dayclean

2025/09/09

Contents

1	Where PDEs come from	1
1.1	What is PDE	1
1.2	Homogeneity and Linearity of PDE	1
1.2.1	First order linear equations	3
1.3	Flows, Vibrations, and Diffusion	5
1.3.1	Simple transport	5
1.3.2	Vibrating string	5

1 Where PDEs come from

1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다. $(x, y, z, \dots, t, \dots)$ (2) 우리가 알고 싶어하는 함수 u 가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

Definition

PDE는 독립변수들과 미지의 함수 u , 그리고 u 의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

Example

PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1. $u_x + u_y = 0$ (transport equation), 더 일반적으로는, $u_x + yu_y = 0$ 이나 $u_x + a(x, y)u_y = 0$ 역시 transport equation 이라고 불립니다.
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace equation), $\nabla^2 u = 0$ 과 같이 쓰기도 합니다.
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Wave equation)
4. $u_t - u_{xx} = 0$ (Heat equation)

1.2 Homogeneity and Linearity of PDE

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를 $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = g(x, y)$ 라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를, $\mathcal{L}[u] = g$ 와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고, $\mathcal{L}[0] = 0$ 이 되도록 \mathcal{L} 을 조작할 수 있습니다. 이러한 \mathcal{L} 은 다음과

같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\rightarrow \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \dots)\end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을 $C^\infty(\Omega)$ 와 같이 쓰면, \mathcal{L} 은 일종의 operator가 됩니다.

Definition 1.1

Operator $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ 가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1. $\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2. $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히, \mathcal{L} 이 linear하다면, $\mathcal{L}[u] = 0$ 은 **homogeneous linear equation**이라고 하고, $\mathcal{L}[u] = g (g \neq 0)$ 은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

Example

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1. $u_x + u_y = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
4. $u_t - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Example

Transport equation의 일종인 $u_x + yu_y = 0$ 은 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ 로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는 $u_x + uu_y = 0$ 은 linear하지 않습니다.

Example

PDE $\cos(xy^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2 + y^2)$ 는 $\mathcal{L} = \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}$ 와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous합니다.

Proposition 1.2

Superposition Principle : Linear한 \mathcal{L} 에 대해 u_1, u_2, \dots, u_n 이 $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution이라면, constants c_1, \dots, c_n 에 대해 $\sum_{i=1}^n c_i u_i$ 또한 $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

Example 1.3

$u = u(x, y)$ 에 대해, $u_{xx} = 0$ 의 해를 찾아 봅시다.

Recall : $u = u(x)$ 이고 $u'' = 0$ 이라면, $u(x) = c_1x + c_2$ 이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(u_x)_x &= \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 \implies u_x(x, y) = f(y) \\ &\implies u(x, y) = f(y)x + g(y)\end{aligned}$$

Example 1.4

$u = u(x, y)$ 에 대해, $u_{xx} + u = 0$ 의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$ 의 해가 $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 임을 recall하고 나면, $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$

Example 1.5

$u = u(x, y)$ 에 대해, $u_{xy} = 0$ 의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned}u_{xy} = 0 &\implies (u_x)_y = 0 \\ &\implies u_x(x, y) = g(x) \\ &\implies u(x, y) = \int g(x)dx + F(y) = G(x) + F(y)\end{aligned}$$

즉, 해는 $u(x, y) = G(x) + F(y)$ 와 같이 나타납니다.

1.2.1 First order linear equations

$u = u(x, y)$ 꼴의 함수에 대해, $au_x + bu_y = 0$ (*) 꼴의 transport equation이 주어져 있다고 합시다. 이 때, $a, b \neq 0$ 은 상수입니다. 그러면, $\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ 인 1차 homogeneous linear equation인데, 이를 다음과 같은 두 가지 방법으로 풀어봅시다.

Geometric Method. 우선, $v = (a, b)$ 와 같이 표현합시다. 그러면, u 의 v 방향으로의 directional derivative는 $D_v(u) = \frac{1}{\|v\|}(au_x + bu_y)$ 이고, 주어진 미분방정식 (*)은 $u(x, y)$ 가 v 방향으로의 line에 대해 전부 constant함을 의미합니다. 그리고, v 방향을 가지는 직선은 $bx - ay = c$ 꼴입니다. $u(x, y)$ 의 값은 이 c 에만 의존하게 될 것이며, 따라서 arbitrary한 function f 에 대해 $u = f(c) = f(bx - ay)$ 가 됩니다.

Coordinate Method. 좌표계 (x', y') 를 잡아서 $au_x + bu_y = u_{x'}$ 와 같이 만들 수 있다면 문제가 아주 쉬워질 것입니다. 간단하게, $y' = bx - ay$, 그리고 $x' = ax + by$ 와 같이 좌표계를 설정합시다. (이는 Method 1에 전적으로 의존합니다.) 그러면, chain rule에 의하여,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x', y') &= \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'} \\ \frac{\partial}{\partial y}u(x', y') &= bu_{x'} - au_{y'}\end{aligned}$$

가 성립하고, 따라서 $u_{x'} = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 이제, $u = f(y') = f(bx - ay)$ 라고 쓸 수 있습니다.

Example

$$u_x + yu_y = 0$$

주어진 미분방정식은 $(1, y) \cdot \nabla u(x, y) = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 즉, u 의 (x, y) 점에서 $(1, y)$ 방향으로의 도함수가 0입니다. 따라서, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}$ 인 curve에서 constant하고, 이 curve는 $y = Ce^x$ 와 같이 나타납니다. 이제 u 의 값은 이 C 에 의해서만 결정되므로, $u(x, y) = f(C) = f(y \cdot e^{-x})$ 라고 쓸 수 있습니다.

Example

$4u_x - 3u_y = 0$, initial condition : $u(0, y) = y^3$

주어진 미분방정식의 일반적인 해는 $u(x, y) = f(-3x - 4y)$ 입니다. 조건에 의해 $u(0, y) = f(-4y) = y^3$ 이므로, $f(\omega) = -\frac{\omega^3}{64}$ 이고, 따라서 $u(x, y) = \frac{1}{64}(3x + 4y)^3$ 입니다.

Example

$au_x + bu_y + cu = 0$

주어진 미분방정식에 대해 $x' = ax + by$ 와 $y' = bx - ay$ 를 통해 좌표 변환을 시행하면,

$$(a^2 + b^2)u_{x'}(x', y') + cu(x', y') = 0$$

을 얻습니다. 따라서, $u(x', y') = f(y') \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}x'\right]$ 이고, 최종적으로는

$$u(x, y) = f(bx - ay) \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right]$$

가 됩니다.

Example

$u_x + 2xy^2u_y = 0$

이젠 기계적으로 풀 수 있을 것 같습니다. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1}$ 인 curve는 $C = x^2 + \frac{1}{y}$ 처럼 나타나고, 따라서 $u = f(x^2 + \frac{1}{y})$ 가 됩니다.

Example

$yu_x + xu_y = 0$, initial condition : $u(0, y) = e^{-y^2}$

마찬가지로, 결과만 쓰면 : $u(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$

이번에는 간단히 linear nonhomogeneous equation을 푸는 방법에 대해 알아보시다. 먼저, 다음과 같은 미분방정식을 생각합시다.

$$\begin{aligned} u_x + u_y + u &= e^{x+2y} \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

우선, nonhomogeneous에 대해 handle하는 법을 생각해봅시다.

Proposition 1.6

$\mathcal{L}[u] = g$ (*)와 같은 미분방정식을 생각합시다. 그리고, $u_0(x, y)$ 가 $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 general solution이고 $u_p(x, y)$ 가 $\mathcal{L}[u] = g$ 의 특정한 한 solution이라고 둡시다. 그러면 $u_0 + u_p$ 는 늘 (*)의 solution이고, 이는 \mathcal{L} 의 linearity에 의해 자명합니다.

반면, v 가 (*)의 solution이라면, $\mathcal{L}[v - u_p] = 0$ 이므로 $v = u_p + u_0$ 입니다. 즉, 모든 solution은 $u_0 + u_p$ 꼴입니다.

이제, coordinate method를 이용합시다. 우선, 다음과 같이 좌표 변환을 수행합니다.

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases} \implies 2u_{x'} + u = \exp\left(\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)$$

integrating factor method를 이용합니다. $e^{x'/2}$ 를 양변에 곱해주면,

$$\begin{aligned}
 2e^{\frac{1}{2}x'}u_{x'} + e^{\frac{1}{2}x'}u &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\
 \frac{\partial}{\partial x'}(2e^{\frac{1}{2}x'}u) &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\
 e^{\frac{1}{2}x'}u &= \frac{1}{4}e^{2x' - \frac{1}{2}y'} + f(y') \\
 u(x', y') &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x'}f(y') \\
 u(x, y) &= \frac{1}{4}e^{x+2y} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}f(x-y) \\
 u(x, 0) &= \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}f(x) = 0 \\
 (\therefore f(x) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}) \\
 u(x, y) &= \frac{1}{4}\exp(x+2y) - \frac{1}{4}\exp(x-2y)
 \end{aligned}$$

이렇게 해를 얻을 수 있습니다.

1.3 Flows, Vibrations, and Diffusion

이 절에서는 다양한 물리적인 PDE를 유도하는 방법을 배웁니다.

1.3.1 Simple transport

$u(t, x)$ 를 x -방향으로 pipe를 따라 수평하게 흐르는 유체의 밀도라고 두면, flow의 속도 c 에 대해 다음이 성립할 것입니다.

$$\forall h > 0, u(x, t) = u(x + ch, t + h)$$

양변을 h 에 대해 미분한 후 $h = 0$ 을 대입하면, $u_t + cu_x = 0$ 을 얻습니다.

1.3.2 Vibrating string

$u(t, x)$ 를 시간 t 에 위치 x 에서의 줄의 수직한 변위라고 두고, 다음과 같은 몇가지 물리적인 가정을 합시다.

1. 줄은 uniform한 density ρ 를 갖습니다.
2. 줄은 완벽히 탄성적이어서 장력은 접선 방향으로만 작용합니다.
3. 줄에 걸리는 다른 힘은 없습니다.
4. 줄은 오로지 수직 방향으로만 진동합니다.
5. 진동의 진폭은 충분히 작습니다. (0에 가깝습니다.)

이제 시간 t 와 위치 x 에서의 줄에 걸리는 장력을 $T(x, t)$ 와 같이 두도록 합시다. 그러면, line segment $[x_0, x_1]$ 에 대해 걸리는 힘은 오로지 끝점에서의 장력 뿐입니다. 이제, 각각의 위치에서 힘을 분석합니다.

- x_0 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_0, t) \cos \theta_0 = T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_0, t) \sin \theta_0 = T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

- x_1 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

따라서, 합력은 다음과 같이 주어집니다.

- Horizontal (H) : $T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$
- Vertical (V) : $T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

조건 (5)에서 $|u_x| \ll 1$ 이고 (거의 0) 따라서 $\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2} \simeq \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \simeq 1$ 입니다. 또, 조건 (4)에서 $(\mathbf{H}) = 0$ 이어야 함을 알 수 있습니다. 이로부터, $T(x_1, t) - T(x_0, t) = 0$ 이므로 $T := T(x, t)$ 를 constant라고 가정할 수 있습니다. (왜 T 가 *time-invariant*한가?) Vertical에서만 분석하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}) &\simeq Tu_x(x_1, t) - Tu_x(x_0, t) \simeq (\mathbf{mass}) \times (\mathbf{acceleration}) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt}(x, t) dt \\ &= \rho \int_{x_0}^{x_1} u_{tt}(x, t) dx \\ Tu_{xx}(x_0, t) &= \rho u_{tt}(x_0, t) \end{aligned}$$

이제, $c = \sqrt{T/\rho}$ 와 같이 정의하면 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 이라는 wave equation을 얻을 수 있습니다.