Friedberg Solution

2dayclean

2026/01/07

1 벡터공간

1.1 개론

1.2 벡터공간

Problem 1.

(a) 참. 공리 (VS3)에 의해 모든 벡터 공간에는 영벡터가 존재한다.

(b) 참. (a)와 같은 이유로 존재하며, 실제로 영벡터는 유일하다.

(c) 거짓. $x = 0$인 경우, $1x = 2x = 0$이지만 $1 \neq 2$이다.

(d) 거짓. $a = 0$인 경우, $0x = 0y$이지만 $x \neq y$인 x, y가 존재할 수 있다.

(e) 참. 그 둘을 본질적으로 같다고 할 수 있다. 이는 추후에 나오는 선형사상과 차원을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.

(f) 거짓. $m \times n$ 행렬은 m개의 **행**과 n개의 **열**로 이루어져 있다.

(g) 거짓. $x + 1$과 $x^2 + x + 1$의 합은 $x^2 + 2x + 2$이다.

(h) 거짓. $x + 1$과 $-x + 1$은 차수가 둘 다 1이지만, 그 합은 2이고 차수가 0이다.

(i) 참. 다항식 f의 leading coefficient가 a_n이라고 하면, cf의 leading coefficient는 ca_n이고 이는 0이 아니다. 이는 임의의 체 $\mathbb{F}$에서도 성립한다.

(j) 참. 이는 동형사상을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.

(k) 참. 함수의 같음을 정의하는 방법이다.

Problem 2. 벡터공간 $\mathsf{M}_{3\times4}(F)$의 영벡터는 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$이다.

Problem 3. $M_{13} = 3$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = 5$.

Problem 4.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{bmatrix}$

(e) $2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$

(f) $-x^3 + 7x^2 + 4$

(g) $10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$

(h) $3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$

Problem 5. (a) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) 자명.

Problem 6. 문제 5와 유사하므로 생략.

Problem 7. 문제 1의 (k)를 사용한다. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1 + 4 - 2 = 3$이므로 f와 g가 S에서의 함수값이 모두 일치한다. 즉, $f = g$이다. 또한, $h(0) = 2$, $h(1) = 6$인데 $(f + g)(t)$와 S에서의 함수값이 모두 일치하므로 $f + g = h$이다.

Problem 8. 임의의 벡터 x, y와 임의의 스칼라 a, b에 대해,

$$\begin{aligned} (a+b)(x+y) &= (a+b)x + (a+b)y && \text{(VS8)} \\ &= (ax+bx) + (ay+by) && \text{(VS7)} \\ &= ax + (bx+ay) + by && \text{(VS2)} \\ &= ax + ay + bx + by && \text{(VS1), (VS2)} \end{aligned}$$

Problem 9. 따름정리 1. (VS3)을 만족하는 벡터 0은 유일하다.
proof) (VS3)을 만족하는 벡터 $0, 0'$을 고려하자. 그러면, (VS3)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

즉, 0과 $0'$은 동일한 벡터이다. 따라서, 영벡터는 유일하다. □

따름정리 2. (VS4)를 만족하는 벡터 y는 유일하다.
proof) 주어진 x에 대해, $x + y = 0$이고 $x + z = 0$이라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + (x + z) \\ &= (y + x) + z \\ &= 0 + z = z \end{aligned}$$

즉, $y = z$이다. 따라서, 역벡터는 유일하다. □

정리 1.2(3) 모든 스칼라 a에 대해 $a0 = 0$이다.

proof) 스칼라 a에 대해, $a0 = a(0+0) = a0 + a0$이다. 즉, $a0 + 0 = a0 = a0 + a0$이다. 정리 1.1에 의해, $0 = a0$이다. □

Problem 10. $\mathsf{V} = \{ f : R \to R \mid f$는 미분가능$\}$이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 가장 먼저, $f, g \in \mathsf{V}$와 $c \in \mathbb{R}$에 대해 $f + g \in \mathsf{V}$이고 $(cf) \in \mathsf{V}$인지 확인해야 한다. (연산에 대한 닫힘) 다시 말해 미분가능한 함수의 합 역시 미분가능하고, 미분가능한 함수의 스칼라배 역시 미분가능한지 보여야 한다. 이는 잘 알려진 내용이므로 생략한다. (자세한 정의는 미분적분학이나 해석학 교재를 참고하라.)

(VS1) 모든 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$이므로 $f + g = g + f$이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 교환법칙이 사용되었다.

(VS2) 모든 $f, g, h \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) = (f + (g+h))(x)$이므로 $(f+g)+h = f+(g+h)$이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS3) 함수 0을 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $0(x) = 0$으로 정의하면 $(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$이므로 늘 $f + 0 = 0 + f = f$이다. 또한, $0(x) = 0$은 미분가능하므로 $0 \in \mathsf{V}$이다.

(VS4) 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 g를 $g(x) = -f(x)$로 정의하면 g는 미분가능하고, 자명히 $f + g = 0$이다.

(VS5) 함수 $f \in \mathsf{v}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$이므로 $1f = f$이다.

(VS6) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$와 함수 $f \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = (a(bf))(x)$이다. 따라서, $(ab)f = a(bf)$이다. 이 증명에서는 실수의 곱에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS7) 실수 $a \in \mathbb{R}$와 함수 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $(a(f+g))(x) = a((f+g)(x)) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$이다. 따라서, $a(f+g) = af + ag$이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

(VS8) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$와 함수 $f, g \in \mathsf{V}$에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$에서 $((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af + bf)(x)$이다. 따라서, $(a+b)f = af + bf$이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 11. 영벡터만을 벡터로 갖는 $\mathsf{V} = \{0\}$이 벡터공간임을 보이자.

(cl) $0 + 0 = 0$이고, 임의의 상수 $c \in F$에 대해 $c0 = 0$이므로 연산에 대해 닫혀 있다.

(VS1) 원소가 0 뿐이므로 $0 + 0 = 0 + 0 = 0$이다.

(VS2) 원소가 0 뿐이므로 $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$이다.

(VS3) 원소가 0 뿐이므로 $0 + 0 = 0$에서 0이 항등원이다.

(VS4) 원소가 0 뿐이고, $0 + 0 = 0$에서 0의 역원이 0이다.

(VS5) 정의에 의해 $1 \cdot 0 = 0$이다.

(VS6) 스칼라 a, b에 대해 $(ab)0 = 0 = a0 = a(b0)$이다.

(VS7) 스칼라 a에 대해 $a(0 + 0) = a0 = 0 = 0 + 0 = a0 + a0$이다.

(VS8) 스칼라 a, b에 대해 $(a + b)0 = 0 = 0 + 0 = a0 + b0$이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 12. 짝함수(even function)들의 집합이 벡터공간임을 보이자. 사실, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로, (VS1), (VS2), (VS5 - 8)은 증명할 필요가 없다. 따라서, (cl) : 연산에 대한 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 짝함수 f, g와 실수 $c \in \mathbb{R}$에 대해 $f+g$와 cf가 짝함수임을 보이면 충분하다. 먼저, $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$로부터 $f+g$는 짝함수이다. 또한, $(cf)(-x) = cf(-x) = cf(x) = (cf)(x)$로부터 cf는 짝함수이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$이 짝함수임을 보이면 충분하다. $0(-x) = 0 = 0(x)$에서 0은 짝함수이다.

(VS4) 짝함수 f에 대해 $g(x) = -f(x)$로 정의된 g가 짝함수임을 보이면 충분하다. $g(-x) = -f(-x) = -f(x) = g(x)$에서 g는 짝함수이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 13. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$만 가지고도 이 덧셈에 대해 주어진 집합이 벡터공간이 되지 않음을 보일 수 있다. 이 공간의 영벡터의 역할을 하는 벡터를 우선 찾아보자. 영벡터를 (x, y)라고 하면, $(a, b) + (x, y) = (a + x, by) = (a, b)$가 되어야 한다. 따라서, $x = 0$이고 $y = 1$이어야 한다. 즉, 이 공간에서는 $(0, 1)$이 영벡터이다. 이제, $(1, 0)$의 역벡터를 찾아보자. 만일 (x, y)가 $(1, 0)$의 역벡터라면, $(1, 0) + (x, y) = (1x, 0y) = (x, 0)$가 영벡터여야만 한다. 다시 말해, $(x, 0) = (0, 1)$이어야만 하는데, $0 \neq 1$이므로 (두번째 좌표) 어떤 (x, y)도 역벡터가 될 수 없다. 따라서, 이 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 14. 스칼라가 $\mathbb{R}$로 제한된 상태이므로, 주어진 공간이 실수 상수곱에 대해 벡터공간 공리를 만족하는지 보이면 된다. 그런데, 주어진 공간은 이미 스칼라를 $\mathbb{C}$로 택했을 때 벡터 공간 공리를 만족하고, $\mathbb{R}$은 $\mathbb{C}$의 부분집합이므로 $\mathbb{C}$에서 모두 만족한다면 $\mathbb{R}$에서도 만족하게 된다. 따라서, 주어진 공간은 $\mathbb{R}$-벡터공간이다. □

Problem 15. 이 경우 '닫혀 있음'이 보장되지 않는다. 예를 들어, $i \in \mathbb{C}$와 $(1, 1, \cdots, 1) \in \mathsf{V}$를 생각하자. 그러면 $i(1, 1, \cdots, 1) = (i, i, \cdots, i)$인데, 이러한 벡터는 주어진 공간 V에 존재하지 않는다. (각 좌표가 실수가 아니기 때문) 따라서, 상수곱에 대해 닫혀있지 않으므로, 주어진 공간은 $\mathbb{C}$-벡터공간이 아니다. □

Problem 16. 각 entry가 전부 실수인 $m \times n$-행렬들을 모아놓은 공간은 이미 $\mathbb{R}$-벡터공간이다. $\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}$의 부분집합이므로, 문제 14에서와 동일한 논리에 의해 주어진 공간은 $\mathbb{Q}$-벡터공간이다. □

Problem 17. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS5)를 만족하지 못하게 된다. $1(a_1, a_2) = (a_1, 0)$으로부터 $a_2 \neq 0$인 경우에 $1v = v$를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 18. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS1)을 만족하지 못하게 된다. $(1, 0) + (2, 0) = (1 + 4, 0) = (5, 0)$이지만, 순서를 바꾼 $(2, 0) + (1, 0) = (2 + 2, 0) = (4, 0)$과 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 19. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS8)을 만족하지 못하게 된다. $a = 2, b = 3, v = (1, 1)$이라고 하자. 그러면 $(a + b)v = 5v = (5, 1/5)$이지만, $av = (2, 1/2), bv = (3, 1/3)$이고 둘의 합은 $(5, 5/6)$으로 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. □

Problem 20. 문제 12와 마찬가지로, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로 (cl) : 연산에 대해 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 함수 $f, g \in \mathsf{V}$와 실수 $c \in \mathbb{R}$을 생각하자. $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$이므로 $f + g$ 또한 $x = 1$에서 0을 갖는다. 따라서 $f + g \in \mathsf{V}$이다. 또한, $(cf)(1) = cf(1) = c0 = 0$에서 cf 또한 $x = 1$에서 0을 갖는다. 따라서 $cf \in \mathsf{V}$이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$이 $x = 1$에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $0(1) = 0$이다. 따라서, $0 \in \mathsf{V}$이다.

(VS4) 함수 $f \in$ V에 대해, $g(x) = -f(x)$가 $x = 1$에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $g(1) = -f(1) = -0 = 0$이다. 따라서, $g \in$ V이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 21. 곱공간이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$와 스칼라 $c \in F$에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$에서, $v + v' \in V$이고 $w + w' \in W$임은 V, W가 벡터 공간이라는 사실(그러므로 닫혀 있다는 사실)로부터 자동으로 얻어진다. 따라서, $(v, w) + (v', w') \in Z$이다. 마찬가지로 $c(v, w) = (cv, cw)$에 대해 $cv \in V$이고 $cw \in W$이므로 $c(v, w) \in Z$이다.

(VS1) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') = (v' + v, w' + w) = (v', w') + (v, w)$이므로 (VS1)이 성립한다. 이는 V, W 각각이 벡터 공간이라는 사실로부터 얻어진다.

(VS2) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w'), (v'', w'') \in Z$에 대해, $((v, w) + (v', w')) + (v'', w'') = ((v + v') + v'', (w + w') + w'') = (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) = (v, w) + ((v', w') + (v'', w''))$이므로 (VS2)가 성립한다. 마찬가지로, V, W가 (VS2)를 만족하기 때문이다.

(VS3) V의 항등원과 W의 항등원을 각각 $0_V, 0_W$라고 하자. 그러면 $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$이므로 $(0_V, 0_W)$는 영벡터이다.

(VS4) $(v, w) \in Z$에 대해, $v \in V, w \in W$의 역벡터를 각각 $x \in V, y \in W$라고 하자. 그러면 $(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y) = (0_V, 0_W)$이므로 $(x, y) \in Z$는 (v, w)의 역벡터이다.

(VS5) $1(v, w) = (1v, 1w) = (v, w)$이므로 (VS5)가 만족된다.

(VS6) 스칼라 a, b와 $(v, w) \in Z$에 대해, $(ab)(v, w) = ((ab)v, (ab)w) = (a(bv), a(bw)) = a(bv, bw) = a(b(v, w))$이므로 (VS6)이 만족된다.

(VS7) 스칼라 a와 $(v, w), (v', w') \in Z$에 대해, $a((v, w) + (v', w')) = a(v + v', w + w') = (a(v + v'), a(w + w')) = (av + av', aw + aw') = (av, aw) + (av', aw') = a(v, w) + a(v', w')$이므로 (VS7)이 만족된다.

(VS8) 스칼라 a, b와 $(v, w) \in Z$에 대해, $(a + b)(v, w) = ((a + b)v, (a + b)w) = (av + bv, aw + bw) = (av, aw) + (bv, bw) = a(v, w) + b(v, w)$이므로 (VS8)이 만족된다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. □

Problem 22. 각 entry에는 0 혹은 1만이 자리할 수 있다. 따라서, 총 mn-개의 entry에 0 또는 1을 채워넣는 방법의 수이므로, 2^{mn}개의 matrix가 존재한다.

1.3 부분공간

Problem 1.

(a) **거짓**. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{ (x, 1) \in V \mid x \in \mathbb{R} \}$을 생각하고, W 위에 덧셈과 상수곱을 다음과 같이 정의하자. $(x, 1) + (x', 1) = (x + x', 1)$, $c(x, 1) = (cx, 1)$. 그러면 W는 그 자체로 벡터공간이며, 집합으로는 V의 부분집합이지만, 둘의 구조가 다르므로 부분공간은 아니다.

(b) **거짓**. 공집합은 벡터공간 공리 중 영벡터를 포함해야한다는 (VS3)을 만족하지 않는다. 따라서, 공집합은 그 자체로 벡터 공간이 아니다.

(c) 참. $\{0\}$은 모든 벡터 공간 V의 부분 공간이고, V가 점공간이 아니므로 $W = \{0\} \neq V$로 두면 충분하다.

(d) 참. 정리 1.4에 의해 부분공간의 교집합은 늘 부분공간이다.

(e) 참. 대각행렬은 대각 성분을 제외한 모든 성분이 0인 행렬이다. 따라서, 대각 성분 n개만이 0이 아닌 값을 가질 수 있다.

(f) 거짓. 정사각행렬의 대각합은 대각성분의 곱이 아니라 합이다.

(g) 거짓. 둘은 '같은' 공간이 아니다.

Problem 2. (a) $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 대각합 : $-4-1=-5$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 9 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 7 \\ -8 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, 대각합 : $10-4+6=12$ (e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 대각합 : $-4+1+5=2$

Problem 3. $A=(A_{ij}), B=(B_{ij})$로 놓고, $C=(C_{ij})=(aA+bB)^t$라고 하자. 그러면, $C_{ij}=(aA+bB)_{ji}$이고 (전치행렬의 정의) $(aA+bB)_{ji}=aA_{ji}+bB_{ji}$이다. 따라서, $C_{ij}=aA_{ji}+bB_{ji}$이다. 또한, $(aA^t+bB^t)_{ij}=a(A^t)_{ij}+b(B^t)_{ij}=aA_{ji}+bB_{ji}$이다. 따라서, $(aA+bB)^t=aA^t+bB^t$이다. □

Problem 4. $A=(A_{ij})$로 두자. 그러면 $\left[(A^t)^t\right]_{ij}=(A^t)_{ji}=A_{ij}$이므로, $(A^t)^t$의 (i,j) - 성분은 A의 (i,j) - 성분이다. 따라서, $(A^t)^t=A$이다. □

Problem 5. 문제 3에 의해, $(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t$이다. 그리고, 문제 4에 의해 $(A^t)^t=A$이므로, $(A+A^t)^t=A^t+A=A+A^t$이다. 즉, $A+A^t$는 전치행렬과 동일하므로 대칭행렬이다. □

Problem 6. $\operatorname{tr}(aA+bB)=\sum_{i=1}^{n}(aA+bB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}(aA_{ii}+bB_{ii})=a\sum_{i=1}^{n}A_{ii}+b\sum_{i=1}^{n}B_{ii}=a\operatorname{tr}(A)+b\operatorname{tr}(B).$ □

Problem 7. 대각행렬 $D=(D_{ij})$를 생각하자. 그러면, $i\neq j$이면 $D_{ij}=0$이다. 따라서, $(D^t)_{ij}=D_{ji}$에 대해, $i\neq j$이면 $D_{ji}=0=D_{ij}$이고, $i=j$이면 $D_{ji}=D_{ii}=D_{ij}$이다. 따라서, $D^t=D$이므로 D는 대칭행렬이다. □

Problem 8.

(a) (a) $(0,0,0)\in \mathsf{W}_1$: $a_1=0, a_2=0, a_3=0$이므로 $a_1=0=3a_2$, $a_3=0=-a_2$이다.

(b) 덧셈에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in \mathsf{W}_1$에 대해, 둘의 합 $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$을 조사하자. $(a_1+b_1)=3a_2+3b_2=3(a_2+b_2)$이고, $(a_3+b_3)=-a_2+-b_2=-(a_2+b_2)$이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

(c) 상수곱에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3)\in \mathsf{W}_1$과 $c\in\mathbb{R}$에 대해, 상수곱 (Ca_1,ca_2,ca_3)을 조사하자. $ca_1=c(3a_2)=3(ca_2)$이고 $ca_3=c(-a_2)=-(ca_2)$이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.

(b) (a) $(0,0,0)\in \mathsf{W}_2$: $a_1=0, a_3=0$이므로 $a_1=a_3+2$를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

(c) (a) $(0,0,0)\in \mathsf{W}_3$: $a_1=a_2=a_3=0$이므로, $2*0-7*0+0=0$이다.

(b) 덧셈에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\in \mathsf{W}_2$에 대해, 둘의 합을 조사하자. $2(a_1+b_1)-7(a_2+b_2)+(a_3+b_3)=(2a_1-7a_2+a_3)+(2b_1-7b_2+b_3)=0+0$이므로 덧셈에 대해 닫혀 있다.

(c) 상수곱에 대한 닫힘 : $(a_1,a_2,a_3)\in \mathsf{W}_3$과 $c\in\mathbb{R}$에 대해, 상수곱을 조사하자. $2(ca_1)-7(ca_2)+(ca_3)=c(2a_1-7a_2+a_3)=c0=0$이므로 상수곱에 대해 닫혀 있다.

따라서, 주어진 공간은 부분공간이다.

(d) (c)와 같은 이유로, 주어진 공간은 부분공간이다.

(e) (a) $(0,0,0)\ in \mathsf{W}_5$: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$이므로, $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0 \neq 1$이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.

(f) (a) 덧셈에 대한 닫힘 : $(\sqrt{3}, \sqrt{5}, 0), (0, \sqrt{6}, \sqrt{3}) \in \mathsf{W}_6$에 대해, 둘의 합인 $(\sqrt{3}, \sqrt{5}+\sqrt{6}, \sqrt{3}) = (a_1, a_2, a_3)$은 $5a_1^2 - 3a_2^2 + 6a_3^2 = 15 - 3(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2 + 18 = -6\sqrt{30} \neq 0$이다. 따라서, 주어진 공간은 부분공간이 아니다.