

# Partial Differential Equations

2dayclean

2025/12/04

## Contents

<b>1</b>	<b>Where PDEs come from</b>	<b>2</b>
1.1	What is PDE . . . . .	2
1.2	Homogeneity and Linearity of PDE . . . . .	3
1.2.1	First order linear equations . . . . .	4
1.3	Flows, Vibrations, and Diffusion . . . . .	6
1.3.1	Simple transport . . . . .	6
1.3.2	Vibrating string . . . . .	6
1.3.3	Vibrating Drumhead . . . . .	7
1.3.4	Diffusion . . . . .	8
1.3.5	Heat Flow . . . . .	8
1.3.6	Stationary waves and diffusions . . . . .	8
1.4	Initial and Boundary conditions . . . . .	8
1.5	Types of second order PDE . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Waves and Diffusions</b>	<b>9</b>
2.1	The wave equation . . . . .	9
2.1.1	Initial Value Problem . . . . .	10
2.1.2	General solution for wave equation . . . . .	10
2.2	Causality and Energy . . . . .	11
2.2.1	Causality . . . . .	11
2.2.2	Energy . . . . .	12
2.3	Diffusion equation . . . . .	12
2.3.1	Uniqueness of solution . . . . .	13
2.3.2	Stability of solution . . . . .	14
2.4	Diffusion in the whole line . . . . .	14
2.4.1	Physical interpretation of the fundamental solution . . . . .	17
2.4.2	Heuristic approach to the general solution via the fundamental solution . . . . .	18
2.4.3	Example of diffusion equation . . . . .	18
2.5	Comparison of waves and diffusions . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Reflections and Sources</b>	<b>19</b>
3.1	Diffusion on the half-line . . . . .	19
3.1.1	Zero Dirichlet boundary value problem . . . . .	19
3.1.2	Zero Neumann boundary value problem . . . . .	20
3.2	Reflection of waves . . . . .	20
3.2.1	Zero Dirichlet boundary value problem . . . . .	20
3.2.2	Dirichlet problem on a finite interval . . . . .	21
3.3	Diffusion with a source . . . . .	21

3.3.1	Diffusion with source on a half line . . . . .	22
3.4	Wave with a source . . . . .	23
3.4.1	Coordinate method . . . . .	23
3.4.2	Green's theorem . . . . .	24
3.4.3	Operator method . . . . .	25
3.4.4	Wave with source on half-line . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Boundary Problems</b>	<b>26</b>
4.1	Separation of Variables, the Dirichlet Condition . . . . .	26
4.1.1	Wave equation . . . . .	26
4.1.2	Diffusion equation . . . . .	27
4.2	Separation of Variables, the Neumann Condition . . . . .	28
4.2.1	Mixed Boundary Condition . . . . .	29
4.3	Separation of Variables, the Robin Condition . . . . .	30
4.3.1	Derivation of solution . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Fourier Series</b>	<b>32</b>
5.1	Fourier coefficient . . . . .	32
5.1.1	Fourier sine series . . . . .	32
5.1.2	Fourier cosine series . . . . .	33
5.1.3	Full Fourier Series . . . . .	33
5.2	Even, Odd, Periodic and complex functions . . . . .	34
5.2.1	Fourier series and Boundary conditions . . . . .	35
5.2.2	Complex Form of Fourier Series . . . . .	35
5.3	Orthogonality and General Fourier Series . . . . .	36
5.3.1	Complex eigenvalue . . . . .	38
5.4	Completeness . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Harmonic Functions</b>	<b>41</b>
6.1	Laplace equation . . . . .	41
6.1.1	Laplace equation in the other systems . . . . .	42
6.2	Rectangles and Cubes . . . . .	42
6.3	Poisson's Formula . . . . .	43

## 1 Where PDEs come from

### 1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다.  $(x, y, z, \dots, t, \dots)$  (2) 우리가 알고 싶어하는 함수  $u$ 가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

#### Definition

PDE는 독립변수들과 미지의 함수  $u$ , 그리고  $u$ 의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

#### Example

PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1.  $u_x + u_y = 0$  (transport equation), 더 일반적으로는,  $u_x + yu_y = 0$ 이나  $u_x + a(x, y)u_y = 0$  역시 transport equation 이라고 불립니다.

2.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  (Laplace equation),  $\nabla^2 u = 0$ 과 같이 쓰기도 합니다.
3.  $u_{tt} - u_{xx} = 0$  (Wave equation)
4.  $u_t - u_{xx} = 0$  (Heat equation)

## 1.2 Homogeneity and Linearity of PDE

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를  $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = g(x, y)$ 라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를,  $\mathcal{L}[u] = g$ 와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고,  $\mathcal{L}[0] = 0$ 이 되도록  $\mathcal{L}$ 을 조작할 수 있습니다. 이러한  $\mathcal{L}$ 은 다음과 같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\rightarrow \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \dots)\end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을  $C^\infty(\Omega)$ 와 같이 쓰면,  $\mathcal{L}$ 은 일종의 operator가 됩니다.

### Definition 1.1

Operator  $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ 가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1.  $\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2.  $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히,  $\mathcal{L}$ 이 linear하다면,  $\mathcal{L}[u] = 0$ 은 **homogeneous linear equation**이라고 하고,  $\mathcal{L}[u] = g (g \neq 0)$ 은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

### Example

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1.  $u_x + u_y = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
2.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
3.  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
4.  $u_t - u_{xx} = 0$ , 이 때  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

### Example

Transport equation의 일종인  $u_x + y u_y = 0$ 은  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ 로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는  $u_x + u u_y = 0$ 은 linear하지 않습니다.

### Example

PDE  $\cos(xy^2)u_x - y^2 u_y = \tan(x^2 + y^2)$ 는  $\mathcal{L} = \cos(xy^2) \frac{\partial}{\partial x} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}$ 와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous합니다.

**Proposition 1.2**

**Superposition Principle** : Linear한  $\mathcal{L}$ 에 대해  $u_1, u_2, \dots, u_n$ 이  $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution이라면, constants  $c_1, \dots, c_n$ 에 대해  $\sum_{i=1}^n c_i u_i$  또한  $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

**Example 1.3**

$u = u(x, y)$ 에 대해,  $u_{xx} = 0$ 의 해를 찾아 봅시다.

**Recall** :  $u = u(x)$ 이고  $u'' = 0$ 이라면,  $u(x) = c_1 x + c_2$ 이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(u_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 &\implies u_x(x, y) = f(y) \\ &\implies u(x, y) = f(y)x + g(y)\end{aligned}$$

**Example 1.4**

$u = u(x, y)$ 에 대해,  $u_{xx} + u = 0$ 의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$ 의 해가  $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ 임을 recall하고 나면,  $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$

**Example 1.5**

$u = u(x, y)$ 에 대해,  $u_{xy} = 0$ 의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned}u_{xy} = 0 &\implies (u_x)_y = 0 \\ &\implies u_x(x, y) = g(x) \\ &\implies u(x, y) = \int g(x)dx + F(y) = G(x) + F(y)\end{aligned}$$

즉, 해는  $u(x, y) = G(x) + F(y)$ 와 같이 나타납니다.

**1.2.1 First order linear equations**

$u = u(x, y)$  꼴의 함수에 대해,  $au_x + bu_y = 0$  (\*) 꼴의 transport equation이 주어져 있다고 합시다. 이 때,  $a, b \neq 0$ 은 상수입니다. 그러면,  $\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$ 인 1차 homogeneous linear equation인데, 이를 다음과 같은 두 가지 방법으로 풀어봅시다.

**Geometric Method.** 우선,  $v = (a, b)$ 와 같이 표현합시다. 그러면,  $u$ 의  $v$  방향으로의 directional derivative는  $D_v(u) = \frac{1}{\|v\|}(au_x + bu_y)$ 이고, 주어진 미분방정식 (\*)은  $u(x, y)$ 가  $v$  방향으로의 line에 대해 전부 constant함을 의미합니다. 그리고,  $v$  방향을 가지는 직선은  $bx - ay = c$  꼴입니다.  $u(x, y)$ 의 값은 이  $c$ 에만 의존하게 될 것이며, 따라서 arbitrary한 function  $f$ 에 대해  $u = f(c) = f(bx - ay)$ 가 됩니다.

**Coordinate Method.** 좌표계  $(x', y')$ 를 잡아서  $au_x + bu_y = u_{x'}$ 와 같이 만들 수 있다면 문제가 아주 쉬워질 것입니다. 간단하게,  $y' = bx - ay$ , 그리고  $x' = ax + by$ 와 같이 좌표계를 설정합시다. (이는 Method 1에 전적으로 의존합니다.) 그러면, chain rule에 의하여,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x', y') &= \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'} \\ \frac{\partial}{\partial y}u(x', y') &= bu_{x'} - au_{y'}\end{aligned}$$

가 성립하고, 따라서  $u_{x'} = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 이제,  $u = f(y') = f(bx - ay)$ 라고 쓸 수 있습니다.

### Example

$$u_x + yu_y = 0$$

주어진 미분방정식은  $(1, y) \cdot \nabla u(x, y) = 0$ 으로 쓸 수 있습니다. 즉,  $u$ 의  $(x, y)$  점에서  $(1, y)$  방향으로의 도함수가 0입니다. 따라서,  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1}$ 인 curve에서 constant하고, 이 curve는  $y = Ce^x$ 와 같이 나타납니다. 이제  $u$ 의 값은 이  $C$ 에 의해서만 결정되므로,  $u(x, y) = f(C) = f(y \cdot e^{-x})$ 라고 쓸 수 있습니다.

### Example

$$4u_x - 3u_y = 0, \text{ initial condition : } u(0, y) = y^3$$

주어진 미분방정식의 일반적인 해는  $u(x, y) = f(-3x - 4y)$ 입니다. 조건에 의해  $u(0, y) = f(-4y) = y^3$ 이므로,  $f(\omega) = -\frac{\omega^3}{64}$ 이고, 따라서  $u(x, y) = \frac{1}{64}(3x + 4y)^3$ 입니다.

### Example

$$au_x + bu_y + cu = 0$$

주어진 미분방정식에 대해  $x' = ax + by$ 와  $y' = bx - ay$ 를 통해 좌표 변환을 시행하면,

$$(a^2 + b^2)u_{x'}(x', y') + cu(x', y') = 0$$

을 얻습니다. 따라서,  $u(x', y') = f(y') \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}x'\right]$ 이고, 최종적으로는

$$u(x, y) = f(bx - ay) \exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right]$$

가 됩니다.

### Example

$$u_x + 2xy^2u_y = 0$$

이젠 기계적으로 풀 수 있을 것 같습니다.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1}$ 인 curve는  $C = x^2 + \frac{1}{y}$ 처럼 나타나고, 따라서  $u = f(x^2 + \frac{1}{y})$ 가 됩니다.

### Example

$$yu_x + xu_y = 0, \text{ initial condition : } u(0, y) = e^{-y^2}$$

마찬가지로, 결과만 쓰면 :  $u(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$

이번에는 간단히 linear nonhomogeneous equation을 푸는 방법에 대해 알아보시다. 먼저, 다음과 같은 미분방정식을 생각합시다.

$$u_x + u_y + u = e^{x+2y}$$

$$u(x, 0) = 0$$

우선, nonhomogeneous에 대해 handle하는 법을 생각해봅시다.

**Proposition 1.6**

$\mathcal{L}[u] = g$  (\*)와 같은 미분방정식을 생각합시다. 그리고,  $u_0(x, y)$ 가  $\mathcal{L}[u] = 0$ 의 general solution이고  $u_p(x, y)$ 가  $\mathcal{L}[u] = g$ 의 특정한 한 solution이라고 합시다. 그러면  $u_0 + u_p$ 는 늘 (\*)의 solution이고, 이는  $\mathcal{L}$ 의 linearity에 의해 자명합니다.

반면,  $v$ 가 (\*)의 solution이라면,  $\mathcal{L}[v - u_p] = 0$ 이므로  $v = u_p + u_0$ 입니다. 즉, 모든 solution은  $u_0 + u_p$  꼴입니다.

이제, coordinate method를 이용합시다. 우선, 다음과 같이 좌표 변환을 수행합니다.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \implies 2u_{x'} + u = \exp\left(\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)$$

integrating factor method를 이용합시다.  $e^{x'/2}$ 를 양변에 곱해주면,

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{1}{2}x'}u_{x'} + e^{\frac{1}{2}x'}u &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\ \frac{\partial}{\partial x'}(2e^{\frac{1}{2}x'}u) &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\ e^{\frac{1}{2}x'}u &= \frac{1}{4}e^{2x' - \frac{1}{2}y'} + f(y') \\ u(x', y') &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x'}f(y') \\ u(x, y) &= \frac{1}{4}e^{x+2y} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}f(x-y) \\ u(x, 0) &= \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}f(x) = 0 \\ (\therefore f(x) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}) \\ u(x, y) &= \frac{1}{4}\exp(x+2y) - \frac{1}{4}\exp(x-2y) \end{aligned}$$

이렇게 해를 얻을 수 있습니다.

### 1.3 Flows, Vibrations, and Diffusion

이 절에서는 다양한 물리적인 PDE를 유도하는 방법을 배웁니다.

#### 1.3.1 Simple transport

$u(t, x)$ 를  $x$ -방향으로 pipe를 따라 수평하게 흐르는 유체의 밀도라고 두면, flow의 속도  $c$ 에 대해 다음이 성립할 것입니다.

$$\forall h > 0, u(x, t) = u(x + ch, t + h)$$

양변을  $h$ 에 대해 미분한 후  $h = 0$ 을 대입하면,  $u_t + cu_x = 0$ 을 얻습니다.

#### 1.3.2 Vibrating string

$u(t, x)$ 를 시간  $t$ 에 위치  $x$ 에서의 줄의 수직한 변위라고 두고, 다음과 같은 몇가지 물리적인 가정을 합시다.

1. 줄은 uniform한 density  $\rho$ 를 갖습니다.
2. 줄은 완벽히 탄성적이어서 장력은 접선 방향으로만 작용합니다.
3. 줄에 걸리는 다른 힘은 없습니다.
4. 줄은 오로지 수직 방향으로만 진동합니다.

5. 진동의 진폭은 충분히 작습니다. (0에 가깝습니다.)

이제 시간  $t$ 와 위치  $x$ 에서의 줄에 걸리는 장력을  $T(x, t)$ 와 같이 두도록 합시다. 그러면, line segment  $[x_0, x_1]$ 에 대해 걸리는 힘은 오로지 끝점에서의 장력 뿐입니다. 이제, 각각의 위치에서 힘을 분석합니다.

- $x_0$ 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_0, t) \cos \theta_0 = T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_0, t) \sin \theta_0 = T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

- $x_1$ 에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

따라서, 합력은 다음과 같이 주어집니다.

- Horizontal (H) :  $T(x_1, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

- Vertical (V) :  $T(x_1, t) \frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t) \frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

조건 (5)에서  $|u_x| \ll 1$ 이고 (거의 0) 따라서  $\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2} \simeq \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \simeq 1$ 입니다. 또, 조건 (4)에서  $(\mathbf{H}) = 0$  이어야 함을 알 수 있습니다. 이로부터,  $T(x_1, t) - T(x_0, t) = 0$ 이므로  $T := T(x, t)$ 를 constant라고 가정할 수 있습니다. (왜  $T$ 가 time-invariant한가?) Vertical에서만 분석하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}) &\simeq T u_x(x_1, t) - T u_x(x_0, t) \simeq (\text{mass}) \times (\text{acceleration}) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt}(x, t) dx \\ &= \rho \int_{x_0}^{x_1} u_{tt}(x, t) dx \\ T u_{xx}(x_0, t) &= \rho u_{tt}(x_0, t) \end{aligned}$$

이제,  $c = \sqrt{T/\rho}$ 와 같이 정의하면  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 이라는 wave equation을 얻을 수 있습니다.

### 1.3.3 Vibrating Drumhead

Drumhead 영역에서,  $u(x, y, t)$ 를 위치  $(x, y)$ 와 시간  $t$ 에서 drumhead의 equilibrium position으로부터의 변위(displacement)로 씁시다. 그러면, 1D vibration과 마찬가지로, 작은 closed region  $D$ 에서 다음과 같은 식을 세울 수 있습니다.

$$F = \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

여기서  $\frac{\partial u}{\partial n}$ 은 단순히  $n$  방향, 즉 outward unit normal vector로의 도함수를 의미합니다. 간단히,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} T \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \int_{\partial D} T \nabla u \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \iint_D \nabla \cdot (T \nabla u) dx dy \\ &= \iint_D T(u_{xx} + u_{yy}) dx dy \end{aligned}$$

처럼 나타낼 수 있습니다. 그러므로,

$$\iint_D T(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \iint_D \rho u_{tt} dx dy$$

가 임의의 영역  $D$ 에서 성립합니다. 이는 곧,  $\rho u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) = T\Delta u$ 임을 의미합니다. 마찬가지로의 방법으로, 3D case에서도  $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ 임을 알 수 있습니다.

### 1.3.4 Diffusion

얇은 관 안에 유체가 가득 찬 경우를 생각합시다. 이제,  $u(x, t)$ 를 위치  $x$ 와 시간  $t$ 에서의 물질의 밀도라고 하고, 다음을 가정합니다.

1. 유체는 직접 흐르지 않습니다. 즉, Convection이 일어나지 않습니다.
2. 유체 안의 화학종에 대해, 그 화학종의 diffusion은 Fick's law를 따릅니다.

구간  $[x_0, x_1]$  안에 담긴 유체의 총 질량은 다음과 같을 것입니다.

$$M(t; x_0, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx$$

따라서, 물질 보존 식에 의해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= k \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} u(x, t) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= k \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] \\ \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{1}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} k \frac{1}{x_1 - x_0} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) \right] \\ \therefore u_t(x_0, t) &= k u_{xx}(x_0, t) \end{aligned}$$

인테,  $x_0$ 은 임의적이므로  $u_t = k u_{xx}$ 라고 쓸 수 있습니다.

마찬가지로, 3D Diffusion 역시 같은 방법으로 유도되어  $u_t = k \Delta u$ 라고 쓸 수 있습니다.

### 1.3.5 Heat Flow

공간 상의 물질에 대해,  $u(x, y, z, t)$ 를 위치  $(x, y, z)$ 와 시간  $t$ 에서 물질의 온도라고 정의합시다. 그러면,

$$\begin{aligned} \iiint_D c \rho u dx dy dz &=: H(t) \\ \iiint_D c \rho u_t dx dy dz &= \iint_{\partial D} k (\nabla u \cdot n) dS = \iiint_D \nabla \cdot (k \nabla u) dx dy dz \end{aligned}$$

이므로,  $c \rho u_t = \nabla \cdot (k \nabla u)$ 를 얻습니다.  $k$ 가 상수라면,  $c \rho u_t = k \nabla^2 u$ 이므로 Diffusion eq.와 일치합니다.

### 1.3.6 Stationary waves and diffusions

말 그대로 steady-state인 상황입니다.  $\Delta u = 0$ 을 Laplace equation이라고 합니다.

## 1.4 Initial and Boundary conditions

$u := u(\vec{x}, t)$ 에 대해, 다음과 같은 조건들을 생각할 수 있습니다.

1. Initial condition(I. C.) : Fixed  $t_0$ 에 대해,  $u(\vec{x}, t_0) = \phi(\vec{x})$  혹은  $\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, t_0) = \psi(\vec{x})$ 라고 합니다.

## 2. Boundary condition(B. C.)

(a) Dirichlet B.C. :  $u = g$  on  $\partial D$ 인 조건을 의미합니다.(b) Neumann B.C. :  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = g$  on  $\partial D$ 인 조건을 의미합니다.(c) Robin B.C. :  $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$  on  $\partial D$ 인 조건을 의미합니다. (Mixed condition)

## 1.5 Types of second order PDE

함수  $u = u(x, y)$ 에 대해, 모든 linear homogeneous second order PDE는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0$$

특히,  $u_{xy} = u_{yx}$ 이므로 다음과 같은 symmetric matrix를 자연스럽게 생각할 수 있습니다.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이제,  $D$ 를 이용해 PDE를 세 가지로 분류할 수 있습니다.1. Elliptic case :  $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$  ( $\det(D) < 0$ )이 경우에는 (적절한 변수변환을 통해)  $u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$  꼴로 바꿀 수 있습니다.e.g.) Laplace equation,  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 2. Hyperbolic case :  $\det(D) > 0$ 이 경우에는  $u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0$  꼴로 바꿀 수 있습니다.e.g.) Wave equation,  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ 3. Parabolic case :  $\det(D) = 0$ 이 경우에는  $u_{xx} + \dots = 0$  꼴로 바꿀 수 있습니다.e.g.) Heat equation,  $u_{xx} - u_y = 0$ 

## 2 Waves and Diffusions

## 2.1 The wave equation

이 절에서  $u = u(x, t)$ 이고 Wave equation은  $u_{tt} = c^2 u_{xx} \dots (W)$ 로 쓴다.Differential operator는  $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 와 같이 주어지므로,  $\mathcal{L} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right)$ 와 같이 factor out할 수 있다. 이는 wavefunction  $u$ 가  $C^2$  function이므로,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ 인 것으로부터 기인한다.**Method 1.** Substitution.안쪽의 operator를 먼저 치환해보자. 즉,  $v := \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u$ 와 같이 정의하자. 그러면, 주어진 wave equation (W)는  $v_t - cv_x = 0$ 과 같이 주어진다. Transport equation의 해에 의해,  $v$ 는 다음과 같을 것이다.

$$v(x, t) = h(x + ct)$$

$$u_t + cu_x = h(x + ct)$$

이 inhomogeneous transport equation을 해결하기 위하여 적절한 particular solution을 찾아야 한다. 그리고, 그것은,

$$f(s) := \frac{1}{2c} \int h(s) ds$$

$$u_p(x, t) = f(x + ct)$$

로 주어진다. 따라서,

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

와 같이 주어진다. 특히,  $h$ 는 임의로 정해진 함수이므로,  $f$  역시 그렇다. 즉, 임의의 함수  $f, g$ 에 대해  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ 는 늘 (W)의 해가 된다. ( $C^2$ 이거만 하다면.)

**Method 2.** Coordinate change.

적절한 변수변환을 통해서도 파동방정식을 해결할 수 있다. 우선,

$$\xi := x + ct$$

$$\eta := x - ct$$

와 같은 변환을 생각하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = c \frac{\partial}{\partial \xi} - c \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

를 얻으며, 이로부터  $\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} = -2c \frac{\partial}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} = 2c \frac{\partial}{\partial \xi}$ 를 얻는다. 그러므로, (W)는 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{aligned} \left(-2c \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \left(2c \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u &= 0 \\ u_{\xi\eta} &= 0 \end{aligned}$$

이를 해결하면,  $u = f(\xi) + g(\eta)$ , 즉  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ 이다.

### 2.1.1 Initial Value Problem

지금까지 해결한 것을 토대로 IVP를 풀어보자.

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{cases}$$

이는 간단하게 해결할 수 있다. 우선,  $f(x) + g(x) = \phi(x)$ ,  $cf'(x) - cg'(x) = \psi(x)$ 로부터,

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2}\phi(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + \text{Const}_1 \\ g(s) &= \frac{1}{2}\phi(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + \text{Const}_2 \\ \therefore u(x, t) &= f(x + ct) + g(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \end{aligned}$$

를 얻는다.

### 2.1.2 General solution for wave equation

다음과 같은 Wave equation (W)를 생각하자.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \dots (W)$$

이는 다음과 같이 Factoring할 수 있다.

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 \dots (W)$$

이로부터,  $\xi = x + ct, \eta = x - ct$ 를 생각했었던 것처럼, 일반적인 Wave equation (WG)를 생각하자.

$$(a\partial_t + b\partial_x)(c\partial_t + d\partial_x)u = 0 \dots (WG)$$

특히,  $ad \neq bc$  조건이 있다면, 다음과 같은 좌표 변환을 생각할 수 있다.

$$1. \xi = dt - cx$$

$$2. \eta = bt - ax$$

Chain rule에 의해서, 다음이 성립한다.

$$1. \partial_t = d\partial_\xi + b\partial_\eta$$

$$2. \partial_x = -c\partial_\xi - a\partial_\eta$$

따라서,  $(WG) = -(ad - bc)^2 \partial_\eta \partial_\xi u = 0$ 이고, 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$\begin{aligned} u &= f(\xi) + g(\eta) \\ &= f(dt - cx) + g(bt - ax) \end{aligned}$$

## 2.2 Causality and Energy

### 2.2.1 Causality

$$D'Alembert's Formula : u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

특히,  $u(x, t)$ 는  $u(s, 0)$ 과  $u_t(s, 0)$ 에 의해 결정되는데, 이 때  $s$ 의 범위는 다음과 같다 :  $x - ct \leq s \leq x + ct$ . 또한  $u(x, t_1) = \tilde{\phi}(x), u_t(x, t_2) = \tilde{\psi}(x)$ 을 생각하고 나면,  $t' = t - t_1, u_t = u_{t'}$ 이므로,  $(x, t')$  coordinate에서  $u$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{cases} u_{t't'} &= c^2 u_{xx} \\ u(x, 0) &= \tilde{\phi}(x) \\ u_t(x, 0) &= \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

달랑베르 식에 의해,

$$u(x, t') = \frac{1}{2} [\tilde{\phi}(x + ct') + \tilde{\phi}(x - ct')] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct'}^{x+ct'} \tilde{\psi}(s) ds$$

이 성립한다. 이제,  $t' = t - t_1$ 로 두면,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\tilde{\phi}(x + c(t - t_1)) + \tilde{\phi}(x - c(t - t_1))] + \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} \tilde{\psi}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [u(x + c(t - t_1), t_1) + u(x - c(t - t_1), t_1)] + \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} u_t(x, t_1) dx \end{aligned}$$

즉,  $(x_0, t_0)$ 에서의 정보는 오로지  $u(x, t)$ 에서  $x_0 - c(t - t_0) \leq x \leq x_0 + c(t - t_0)$ 의 정보만에 영향을 줄 수 있다. 이를 **인과성 원리**(Principle of Causality)라고 한다.

### 2.2.2 Energy

Constant한 density  $\rho$ 와 tension  $T$ 를 갖는 무한히 긴 string을 생각하자. ( $c^2 = T/\rho$ ) 그러면 이 파동은  $\rho u_{tt} = T u_{xx}$ ,  $-\infty < x < \infty$ 를 따르게 될 것이다. 이 때, 줄의 운동 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{KE} := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2(x, t) dx$$

이 적분이 수렴하길 원하므로,  $\phi(x)$ 와  $\psi(x)$ 는  $-R \leq x \leq R$ 에서 vanish한다고 가정하자. 그러면,  $u(x, t)$ 와  $u_t(x, t)$ 는  $-R - ct \leq x \leq R + ct$  밖에서 vanish하므로, 문제 없이 잘 수렴한다. 이제,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{KE} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) dx \\ &= \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T u_t u_{xx} dx \\ &= T u_t u_x \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} T u_{tx} u_x dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} T u_x^2 \right) dx \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{d}{dt} \left( \text{KE} + \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)^2 dx \right) = 0$$

이다. 따라서,

$$\text{PE} := \frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

라고 정의하고,  $E = \text{KE} + \text{PE}$ 라고 정의하면, 에너지 보존 식이 유도된다.

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

## 2.3 Diffusion equation

이 절에서  $u = u(x, t)$ 이고 Diffusion equation은  $u_t = k u_{xx} \dots (D)$ 로 쓴다. (단,  $k > 0$ )

### Theorem 2.1

**Maximum Principle** :  $u = u(x, t)$ 가 (D)를 rectangle  $R := \{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T \}$ 에서 만족시킨다면,  $u$ 는 최대값을  $R$ 의 bottom, 즉  $\{ (x, 0) \mid 0 \leq x \leq l \}$ 에서 혹은 lateral side, 즉  $\{ (x, t) \mid x = 0 \text{ or } l, 0 \leq t \leq T \}$ 에서만 갖는다.

**Remark.** 위의 maximum principle은  $u$ 가  $R$ 의 interior나 top에서 최대값을 갖지 못함을 주장해주지 못한다. 그러므로, 이를 'weak' maximum principle이라고 부른다. 그에 대한 counterpart로, 'strong' maximum principle이 존재하고 이는  $R$ 이 정말로 top과 interior에서 최대값이 갖지 못함을 주장한다.

**Terminology.** 위에서 언급한  $R$ 의 bottom과 lateral side를 합쳐서  $R$ 의 **Parabolic Boundary**라고 부른다. 반면,  $R$ 의 interior와 top을 합쳐서  $R$ 의 **Parabolic Interior**라고 부른다.

### Proof of weak Maximum Principle.

우선,  $u$ 가  $R$ 의 interior point  $p_0 = (x_0, t_0)$ 에서 maximum을 갖는다고 하자. 즉,  $0 < x_0 < l$ 이고  $0 < t_0 < T$ 이다. 그러면,

$u_x(p) = 0$ 이고  $u_{xx}(p) \leq 0$ 이어야 하며,  $u_t(p) = 0$ 일 것이다. 따라서,  $p$ 에서는,

$$0 = u_t(p) = ku_{xx}(p) \leq 0$$

로부터 반드시  $u_{xx} = 0$ 이어야만 한다. 반대로, 만일 함수  $v$ 가  $R$ 에서  $v_t < kv_{xx} \dots (*)$ 를 만족한다면,  $v$ 는  $R$ 의 안점에서 maximum을 가질 수 없다. // 이제  $M$ 을  $u$ 의 parabolic boundary of  $R$ 에서의 최대값이라고 하자.  $u$ 가 연속이고 parabolic boundary는 그 정의에 의해 closed이므로  $M$ 을 늘 찾을 수 있다. 임의의 양수  $\epsilon$ 에 대해, “perturbation”  $v = u + \epsilon x^2$ 를 생각하자. 그러면,

$$v_t = u_t = ku_{xx} = k(v_{xx} - 2\epsilon) = kv_{xx} - 2k\epsilon < kv_{xx}$$

이므로  $v$ 는  $(*)$ 을 만족한다. 따라서,  $v$ 는  $R$ 의 interior에서는 maximum을 가질 수 없다. 이제,  $v$ 가 top에 속한  $p_1 = (x_1, t_1)$ 에서 maximum을 갖는다고 가정하자. 그러면, 자명히  $v_{xx}(p_1) \leq 0$ 이고,

$$v_t(p_1) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{v(x_1, t_1 + h) - v(x_1, t_1)}{h} \geq 0$$

이 성립한다. 따라서,  $v_{xx} \leq 0 \leq v_t$ 이므로  $(*)$ 에 모순된다. 즉,  $v$ 는  $R$ 의 parabolic interior에서는 maximum을 갖지 못한다. 또한, 자명히 parabolic boundary에서는  $v = u + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2$ 이므로,

$$u(x, t) = v(x, t) - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2 - \epsilon x^2 \leq M + \epsilon l^2$$

가  $R$  전체에서 성립한다. 그런데  $\epsilon$ 의 선택은 arbitrary하므로,  $u$ 는  $R$ 에서  $u \leq M$ 이다.

### 2.3.1 Uniqueness of solution

다음과 같은 Dirichlet problem  $(\tilde{D})$ 를 생각하자.

$$(\tilde{D}) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t) & 0 < x < l \text{ and } t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = g(t), u(l, t) = h(t) \end{cases}$$

그러면,  $(\tilde{D})$ 의 solution은 유일하다. 이를 증명하기 위해,  $(\tilde{D})$ 의 두 근  $u_1, u_2$ 와  $w := u_1 - u_2$ 를 생각하자.

#### Method 1 : Maximum Principle

Maximum principle에 의해,  $T > 0$ 에 대해  $R_T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 에서  $w$ 의 최대값은  $R_T$ 의 parabolic boundary에 놓여야 하고, 이는 자명히 0이다. 임의의  $T > 0$ 에 대해 성립하므로,  $R_\infty := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t\}$ 에서의 최대값 역시 0이다. 마찬가지로,  $-w = u_2 - u_1$  역시 최대값이 0이고 이는  $w$ 가  $R_\infty$ 에서  $w \equiv 0$ 임을 의미한다. 즉,  $u_1 = u_2$ 이다.

#### Method 2 : Energy.

간단한 수학적 trick을 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot w &= (w_t - kw_{xx}) \cdot w = w_t \cdot w - kw_{xx} \cdot w \\ &= \frac{1}{2}(w^2)_t - k(w_x \cdot w)_x + kw_x^2 \end{aligned}$$

양변을 적분하면,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{1}{2}(w^2)_t dx - k \int_0^l (w_x \cdot w)_x dx + k \int_0^l w_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^l w^2 dx \right] - k [w_x \cdot w]_{x=0}^{x=l} + k \int_0^l w_x^2 dx \end{aligned}$$

즉,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^l w(x, t)^2 dx \right] &\leq 0 \\ 0 &\leq \int_0^l w(x, t)^2 dx \leq \int_0^l w(x, 0)^2 dx = 0 \end{aligned}$$

따라서,  $\int_0^l w(x, t)^2 dx = 0$ 이 모든  $t$ 에 대해 성립하며,  $w$ 의 continuity에 의해  $0 < x < l, 0 \leq t$ 에서  $w \equiv 0$ 이다. 곧,  $0 \leq x \leq l, t \leq 0$ 에서  $u_1 = u_2$ 이다.

### 2.3.2 Stability of solution

다음과 같은 식을 만족하는  $u_i$  ( $i = 1, 2$ )를 생각하자.

$$\begin{cases} (u_i)_t - k(u_i)_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u_i(0, t) = u_i(l, t) = 0 & t > 0 \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x) & 0 < x < l \end{cases}$$

이제,  $w = u_1 - u_2$ 로 놓으면  $w$ 는 Initial condition으로  $w(x, 0) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$ 를 갖는다. Energy method에서 사용한 방법을 그대로 적용하면,

$$\begin{aligned} \int_0^l w(x, t)^2 dx &\leq \int_0^l w(x, 0)^2 dx; t > 0 \\ \int_0^l (u_1 - u_2)^2 dx &\leq \int_0^l (\phi_1 - \phi_2)^2 dx; t > 0 \end{aligned}$$

즉,  $\|u_1 - u_2\|_2 \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_2$ 이다.

또다른 방법으로, maximum principle을 사용할 수 있다.  $R_T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ 에서,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) - u_2(x, t) &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)| \\ u_2(x, t) - u_1(x, y) &\leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| \end{aligned}$$

이므로,  $\max_{0 \leq x \leq l} |u_1 - u_2| \leq \max_{0 \leq x \leq l} |\phi_1 - \phi_2|$ 가 성립한다. 즉,  $\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty$ 이다.

## 2.4 Diffusion in the whole line

다음과 같은 Diffusion equation을 생각하자.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \dots (*) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

그러면, (\*)를 만족하는 solution  $u(x, t)$ 에 대해, 다음과 같은 성질들이 만족된다.

- 임의의  $y \in \mathbb{R}$ 에 대해,  $v(x, t) := u(x - y, t)$  역시 (\*)의 solution이다.  
**pf.**  $v_t(x, t) = u_t(x - y, t)$ 이고,  $v_{xx}(x, t) = u_{xx}(x - y, t)$ 이므로  $v$  역시 (\*)의 solution이다.
- 임의의  $u$ 의 derivative  $u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, \dots$  역시 (\*)의 solution이다.  
**pf.**  $u$ 가 smooth함을 가정하므로, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} (u_x)_t &= (u_t)_x = (ku_{xx})_x = k(u_x)_{xx} \\ (u_t)_t &= (ku_{xx})_t = k(u_t)_{xx} \end{aligned}$$

따라서, 임의의 derivative 역시 solution이 된다.

3. (\*)의 solution의 linear combination 역시 (\*)의 solution이 된다.

pf. 이는  $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 가 linear하므로 자명하다.

4. 임의의  $g(y)$ 에 대해, 이 improper integral이 적절히 수렴하는 한  $v(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)g(y)dy$  역시 (\*)의 solution이 된다.

**Note.** 여기서 이 improper integral이 적절히 수렴한다는 것은, 다음이 만족된다는 것이다.

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &:= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x - y, t)g(y)dy \\ v_{xx}(x, t) &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y, t)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x - y, t)g(y)dy \end{aligned}$$

pf. 다음에 의해 증명된다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &:= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R u(x - y, t)g(y)dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u(x - y_i, t)g(y_i)\Delta y \right] \end{aligned}$$

여기서  $\Delta y = \frac{2R}{n}$ 이고  $y_i = -R + i\Delta y$ 이다. 특히,  $g$ 가 아주 좋은 성질을 만족하고 있다고 가정하고 있고,  $v$ 가 solution의 sequence의 극한이므로  $v$  역시 solution이다.

5. (Dilation) 임의의  $a > 0$ 에 대해  $v(x, t) := u(\sqrt{a}x, at)$  역시 (\*)의 solution이다.

pf. 다음에 의해 성립한다.

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &:= au_t(\sqrt{a}x, at) \\ v_x(x, t) &:= \sqrt{a}u_x(\sqrt{a}x, at) \\ v_{xx}(x, t) &:= au_{xx}(\sqrt{a}x, at) \end{aligned}$$

이를 이용하여 다음과 같은 (DPI)를 만족하는 함수  $Q(x, t)$ 를 찾을 것이다.

$$(DPI) \begin{cases} Q_t = kQ_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t \\ Q(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

이 initial condition은 다음과 같은 sense에서 생각할 수 있다.

$$\lim_{t \rightarrow 0+} Q(x, t) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

특히,  $Q(x, t)$ 는  $(x, t) \mapsto (\sqrt{a}x, at)$ 에 의해 invariant하다. 즉,  $\tilde{Q}(x, t) = Q(\sqrt{a}x, at)$  역시 (DPI)의 해가 된다. 해의 Uniqueness에 의하여,  $Q(x, t) = \tilde{Q}(x, t) = Q(\sqrt{a}x, at)$ 이다. 따라서,  $Q(x, t)$ 는  $\frac{x}{\sqrt{t}}$ 에 의존하는 함수이다. (similarity parameter)

따라서,  $Q(x, t) := g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$ 와 같이 놓자. 그러면,

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \\ Q(x, t) &= g(p) \\ Q_t &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \right] = -\frac{p}{2t} g'(p) \\ Q_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \right] = g'\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4kt}} \\ Q_{xx} &= g''(p) \frac{1}{4kt} \end{aligned}$$

따라서,  $Q$ 가 (\*)를 만족한다면  $g$ 는  $g''(p) + 2pg'(p) = 0$ 을 만족한다. 따라서,

$$\begin{aligned} g(p) &= C_1 \int_0^p e^{-q^2} dq + C_2 \\ Q(x, t) &= C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-q^2} dq + C_2 \end{aligned}$$

이제, initial condition에 의하여,

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) + \frac{1}{2}$$

라고 놓을 수 있다.

이제,  $S(x, t) := \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t)$ 로 정의하자. Property (2)에 의해,  $S$  역시  $S_t = kS_{xx}$ 를 만족한다. Initial condition  $u(x, 0) = \phi(x)$ 에 대해,  $u(x, t)$ 를 다음과 같이 정의하면 Property (4)에 의해  $u$  역시  $u_t = ku_{xx}$ 를 만족한다.

$$u(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi(y) dy$$

이제, 이 함수가  $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \phi(x)$ 를 만족함을 보일 것이다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x - y, t) \phi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial Q}{\partial y}(x - y, t) \phi(y) dy \\ &= -Q(x - y, t) \phi(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \end{aligned}$$

그런데,  $\phi$ 는 빠르게 decay하는 함수이므로,  $\phi(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \phi(y) = 0$ 이고  $\phi(-\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \phi(y) = 0$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} Q(x - y, t) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-p^2} dp = 0 \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} Q(x - y, t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} Q(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-p^2} dp = 0 \end{aligned}$$

을 만족하므로, 위의 부분적분에서  $y = -\infty, \infty$ 에서 limit이 stably 0이 된다.

$$\begin{aligned} \therefore u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0+} Q(x - y, t) \phi'(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \phi'(y) dy = \phi(x) - \phi(-\infty) = \phi(x) \end{aligned}$$

따라서,  $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\phi(y)dy$ 는 주어진 미분방정식의 해가 된다.

**Recall.**  $S$ 는 explicit하게 다음이 된다.

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp \right] \\ &= 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \end{aligned}$$

위의 Recall로부터,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{(x - y)^2}{4kt} \right] \phi(y) dy$$

이러한  $u$ 가 초기조건  $u(x, 0) = \phi(x)$ 를 갖는 diffusion equation의 해이다.

### Proposition 2.2

$S(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ 는 **source function, Green's function, Fundamental solution, Gaussian** 또는 **Propagator of Diffusion equation**이라고 불리고, 다음과 같은 성질을 갖는다.

1.  $S(x, t) \geq 0$ 이고  $S(x, t) = S(-x, t)$ 이다.
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t) dx = 1$ 이다.
3.  $x \neq 0$ 이면  $\lim_{t \rightarrow 0+} S(x, t) = 0$ 이고,  $x = 0$ 이면,  $\lim_{t \rightarrow 0+} S(x, t) = \infty$ 이다.

특히,  $S(x, t)$ 의  $t \rightarrow 0+$ 에서의 극한을 Dirac delta라고 하며,  $\delta(x) := \lim_{t \rightarrow 0+} S(x, t)$ 이다.

### Definition 2.3

**Dirac Delta distribution** : Dirac delta  $\delta$ 는 다음과 같은  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 에서  $\mathbb{R}$ 로 가는 linear mapping으로 정의된다.

$$\delta[\phi] = \phi(0)$$

Heuristically, dirac delta를  $x \neq 0$ 에서  $\delta(x) = 0$ 이고  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$ 인 함수로 취급할 수 있다.

Dirac delta는 heaviside step function  $Q(x, 0)$ 의 weak derivative로 생각될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, 0)\phi'(x)dx &= \int_0^{\infty} \phi'(x)dx \\ &= \phi(\infty) - \phi(0) = -\phi(0) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

#### 2.4.1 Physical interpretation of the fundamental solution

초기에,  $x = 0$ 에 1만큼의 heat을 가지고 있는 무한히 긴 막대기를 생각하자. 그러면,  $x = 0$ 인 점은 계속해서 cooling 되고, rod 전체로 퍼져나갈 것이다. 특히, (1) 이 propagation의 속도는 무한히 빠르며 (2) 늘  $\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t)dx = 1$ 이므로, heat의 loss가 없다.

### 2.4.2 Heuristic approach to the general solution via the fundamental solution

$S(x, t)$ 는 당연히 다음과 같은 Diffusion equation의 solution이다.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & t > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

임의의  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (initial function)에 대해, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\phi(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\phi(y)dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \delta(x-y)\phi(y)dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \delta(x-y_i)\phi(y_i)\Delta y \end{aligned}$$

여기서  $\Delta y = \frac{2R}{N}$ 이고  $y_i = -R + i\Delta y$ 이다. 각  $i$ 에 대해  $S(x - y_i, t)$ 는 초기조건이  $u(x, 0) = \delta(x - y_i)$ 인 solution

이므로,  $\sum_{i=1}^N S(x - y_i, t)\phi(y_i)\Delta y$ 은  $u(x, 0) = \sum_{i=1}^N \delta(x - y_i)\phi(y_i)\Delta y$ 의 해가 된다.  $N$ 과  $R$ 에  $\infty$ 로의 극한을 취하면, 이는

$\lim_R \lim_N \sum_{i=1}^N \delta(x - y_i)\phi(y_i)\Delta y = \phi(x)$ 를 초기조건으로 갖는 해가 된다.

### 2.4.3 Example of diffusion equation

다음의 Diffusion equation을 해결해보자.

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \\ u(x, 0) &= e^{-x} \end{aligned}$$

이 해는,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-y} dy \\ &= e^{-x+kt} \end{aligned}$$

## 2.5 Comparison of waves and diffusions

### 1. Propagation speed

- Wave : finite  $\leq c$
- Diffusion : speed =  $\infty$

### 2. Singularities for $t > 0$

- Wave : transported along characteristics,  $(x_0 \pm ct, t)$  for every  $t > 0$
- Diffusion : lost immediately (Consider  $S$ , the fundamental solution)

### 3. Well-posedness : both OK.

### 4. Well-posedness for $t < 0$

- Wave : Yes.

- Diffusion : No. Consider the following :

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \\ u(x, 0) &= S(x, 1) \end{aligned}$$

translation-invariance에 의해,  $u(x, t) = S(x, t + 1)$ 은 solution이고,  $u(0, t) = S(0, t + 1)$ 은  $t \rightarrow -1+$ 에서  $\rightarrow \infty$ , 발산한다.

5. Maximum principle : Wave No, but Diffusion Yes.

6. Behavior as  $t \rightarrow \infty$

- Wave :  $u(x, t) \not\rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$  in general.
- Diffusion :  $u(x, t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , if  $u(x, 0) = \phi(x)$  is integrable.

7. Information

- Wave : Transferred.
- Diffusion : Lost gradually.

### 3 Reflections and Sources

#### 3.1 Diffusion on the half-line

##### 3.1.1 Zero Dirichlet boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(DD) : \begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ v(x, 0) = \phi(x) & x > 0 \\ v(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

이는 **odd extension**을 사용하여 해결할 수 있다.

$$\phi_{\text{odd}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

따라서,  $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy$ 는 solution이 되고,  $x$ 에 대해 odd하다. 따라서,  $v(x, t) := u(x, t)$  on  $x \geq 0, t > 0$ 으로 두면  $v$ 는 (DD)의 solution이 된다. 특히,  $v$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy + \int_{-\infty}^0 S(x - y, t) \phi_{\text{odd}}(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} [S(x - y, t) - S(x + y, t)] \phi(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x + y)^2}{4kt}\right) \right\} \phi(y) dy \end{aligned}$$

**Example** : 만일  $\phi(x) = 1$ 이라면,

$$u(x, t) = \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

### 3.1.2 Zero Neumann boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(DN) : \begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ w(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < \infty \\ w_x(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

이번에는 **even extension**을 사용하여 해결할 수 있다.

$$\phi_{\text{even}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ \phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

따라서, 해는 다음과 같다.

$$w(x, t) = \int_0^\infty [S(x-y, t) + S(x+y, t)] \phi(y) dy$$

**Example** : 만일  $\phi(x) = 1$ 이라면,

$$u(x, t) = 1$$

## 3.2 Reflection of waves

### 3.2.1 Zero Dirichlet boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(WD) : \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, -\infty < x < \infty \\ v(x, 0) = \phi(x), v_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < \infty \\ v(0, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

따라서, odd extension에 대해,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{odd}}(x+ct) + \phi_{\text{odd}}(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(y) dy$$

가 성립한다. 만일,  $t > 0$ 이라면 explicit하게 다음을 얻을 수 있다.

1. Case 1 :  $x > ct$ , 즉  $x+ct > x-ct > 0$ .

$$v = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

2. Case 2 :  $0 < x \leq ct$ , 즉  $x-ct < 0 \leq x+ct$ .

$$v = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy$$

따라서, 일종의 "반사"가 일어남을 알 수 있다.

### 3.2.2 Dirichlet problem on a finite interval

다음의 문제를 해결해 보자.

$$(WDF) : \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l \\ v(x, 0) = \phi(x), v_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

따라서, 다음과 같은 **extension**을 생각하자.

$$\phi_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ -\phi(-x) & -l < x < 0 \\ \text{period } 2l. \end{cases}$$

즉,

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{ext}}(x - ct) + \phi_{\text{ext}}(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{ext}}(y) dy$$

특히,  $2l < x + ct < 3l, -l < x - ct < 0$ 에서는 다음과 같다.

$$v = \frac{1}{2} [-\phi(ct - x) + \phi(x + ct - 2l)] - \frac{1}{2l} \int_{x+ct-2l}^{ct-l} \psi(y) dy$$

### 3.3 Diffusion with a source

다음과 같은 'Source가 있는 diffusion equation'을 생각해 보자.

$$(DS) : \begin{cases} u_t - k u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, 다음과 같은 ODE에서의 Heuristic approach를 생각해 보자.

$$\text{ODE} : \begin{cases} u'(t) + A u(t) = f(t) \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

적분 인자(integrating factor)로부터, 다음과 같은 해를 얻는다.

$$u(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds + e^{-At} \phi$$

식을 관찰해봤을 때, homogeneous solution인  $e^{-At} \phi$ 로부터 (1)  $t$ 를  $t - s$ 로 바꾸고 (2)  $\phi$ 를 nonhomogeneous term인  $f(s)$ 로 바꿔서 적분했음을 알 수 있다. (DS)에 대응하는 homogeneous equation (DSH)의 해는 다음과 같음을 우리는 알고 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi(y) dy$$

이를 일종의 operator가 적용된 것으로 생각하여,  $\mathfrak{S}[\phi](t)$ 로 쓰자. 그러면, ODE를 통한 heuristic approach로부터, 다음이 (DS)의 해일 것이라고 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathfrak{S}[\phi](t) + \int_0^t \mathfrak{S}[f(-, s)](t - s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t) \phi(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

이제, 이  $u$ 가 실제로 (DS)의 해가 됨을 보이자. Diffusion equation의 linearity에 의해,  $\mathfrak{S}[\phi](t)$ 는 이미 (DSH)의 해이므로, 두번째 항이 zero initial condition  $\phi = 0$ 을 갖는 (DS)의 해가 됨을 보이면 된다. 이제,  $v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds$ 라고 하자. 그러면,  $t > 0$ 에서,

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, 0)f(y, t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_t(x - y, t - s)f(y, s)dyds \end{aligned}$$

이고,

$$v_{xx} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(x - y, t - s)f(y, s)dyds$$

이므로,  $v_t - v_{xx} = f(x, t)$ 이다. Initial condition의 경우에는,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds = 0$$

으로부터 확인할 수 있다. (엄밀히 : 이게 왜 성립할까?) 따라서, 다음과 같은 해를 우리가 얻는다.

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s)f(y, s)dyds$$

### 3.3.1 Diffusion with source on a half line

**Case 1.** Dirichlet boundary condition

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = f(x, t) & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ v(x, 0) = \phi(x) \\ v(0, t) = h(t) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여,  $V(x, t) = v(x, t) - h(t)$ 를 생각하면,

$$\begin{cases} V_t - kV_{xx} = f(x, t) - h'(t) \\ V(x, 0) = \phi(x) - h(0) =: \tilde{\phi}(x) \\ V(0, t) = 0 \end{cases}$$

이를 얻고, "odd extension"을 이용하여 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$\tilde{V}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t)\tilde{\phi}_{\text{odd}}(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x - y, t - s) \cdot (f(y, s) - h'(s))dyds$$

**Case 2.** Neumann boundary condition

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = f(x, t) & 0 < x < \infty \\ w(x, 0) = \phi(x) \\ w_x(0, t) = h(t) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여,  $W(x, t) = w(x, t) - xh(t)$ 를 생각하면,

$$\begin{cases} W_t - kW_{xx} = f(x, t) - xh'(t) \\ W(x, 0) = \phi(x) - xh(0) =: \tilde{\phi}(x) \\ W_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

### 3.4 Wave with a source

다음과 같은 source가 있는 wave equation을 생각하자.

$$(WS) = \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

#### Theorem 3.1

(WS)는 다음과 같은 형태의 unique solution을 갖는다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s) dx + [\text{nonhomogeneous term}]$$

#### 3.4.1 Coordinate method

이 문제를 해결하기 위해서는 non-homogeneous term만을 해결하면 된다. 다음과 같은 coordinate change를 생각하자.

$$\begin{cases} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{cases}$$

그러면, 주어진 식은 다음과 같이 바뀐다.

$$\begin{aligned} -4c^2 u_{\xi\eta} &= f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) = \tilde{f}(\xi, \eta) \\ u_{\xi} &= -\frac{1}{4c^2} \left( \tilde{F}(\xi, \eta) + g(\xi) \right) \end{aligned}$$

여기서,  $g(\xi) = -\tilde{F}(\xi, \xi)$ 라고 두면,

$$\begin{aligned} u_{\xi} &= -\frac{1}{4c^2} \left( \tilde{F}(\xi, \eta) + g(\xi) \right) \\ &= -\frac{1}{4c^2} \int_{\xi}^{\eta} \tilde{f}(\xi, \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \\ &=: h(\xi, \eta) \end{aligned}$$

이 된다. 따라서,  $\xi$ 에 대한 적분을 함으로써 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= H(\xi, \eta) + k(\eta) \leftarrow k(\eta) = -H(\eta, \eta) \\ &= \int_{\eta}^{\xi} h(\tilde{\xi}, \eta) d\tilde{\xi} \\ &= -\frac{1}{4c^2} \int_{\eta}^{\xi} \int_{\tilde{\xi}}^{\eta} \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) d\tilde{\eta} d\tilde{\xi} \end{aligned}$$

점  $p_0 = (x_0, t_0)$ 에 대해,  $\xi_0 = x_0 + ct_0, \eta_0 = x_0 - ct_0$ 이라고 하면, 다음과 같이 식을 예쁘게 만들 수 있다.

$$u(p_0) = \frac{1}{4c^2} \int_{\eta_0}^{\xi_0} \int_{\eta_0}^{\xi} \tilde{f}(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

주어진 영역에 대한 적분을 원래 domain으로 돌려보내면, 다음과 같은 최종적인 해를 얻을 수 있다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

최종적으로, 다음과 같은 (WS)의 해를 얻는다.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

### 3.4.2 Green's theorem

함수  $u(x, t)$ 가 (WS)의 solution이라고 하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f dx dt &= \iint_{\Delta} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) dx dt \\ &= \iint_{\Delta} (-c^2 u_x)_x - (-u_t)_t dx dt \\ &= \int_{\partial \Delta} (-u_t) dx + (-c^2 u_x) dt \\ &= \int_{L_0 \cup L_1 \cup L_2} -u_t dx - c^2 u_x dt \end{aligned}$$

여기서  $L_0$ 은  $(x_0 - ct_0, 0)$ 에서  $(x_0 + ct_0, 0)$ 까지 잇는 line이며,  $L_1$ 은  $(x_0 + ct_0, 0)$ 에서  $(x_0, t_0)$ 까지 잇는 line,  $L_2$ 는  $(x_0, t_0)$ 에서  $(x_0 - ct_0, 0)$ 으로 돌아오는 line이다.

$$\begin{aligned} \int_{L_0} -u_t dx - c^2 u_x dt &= \int_{x-ct_0}^{x+ct_0} -u_t(x, 0) dx \\ &= - \int_{x-ct_0}^{x+ct_0} \psi(x) dx \end{aligned}$$

또,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} -u_t dx - c^2 u_x dt &= \int_{L_1} (-u_t)(-cdt) - c^2 u_x \left(-\frac{dx}{c}\right) \\ &= \int_{L_1} (cu_t) dt + (cu_x) dx \\ &= \int_{L_1} cdu = cu(x_0, t_0) - c\phi(x_0 + ct_0) \end{aligned}$$

이고,

$$\int_{L_2} -u_t dx - c^2 u_x dt = \int_{L_2} -cdu = -c\phi(x_0 - ct_0) + cu(x_0, t_0)$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} f dx dt &= 2cu(x_0, t_0) - c[\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)] - \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s) ds \\ \therefore u(x_0, t_0) &= \frac{1}{2} [\phi(x_0 + ct_0) + \phi(x_0 - ct_0)] + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f(x, t) dx dt \end{aligned}$$

를 얻고, 그러므로 solution은 unique하다.

### 3.4.3 Operator method

Recall :  $u'' + A^2u = f, u(0) = \phi, u'(0) = \psi$  ( $A \neq 0$ )의 해는 다음과 같다.

$$u(t) = S'(t)\phi + S(t)\psi + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$S(t) = A^{-1} \sin(At)$$

특히, 다음을 얻을 수 있다.

1.  $S(t)\psi$ 는  $u'' + A^2u = 0, u(0) = 0, u'(0) = \psi$ 의 해이다.
2.  $S'(t)\phi$ 는  $u'' + A^2u = 0, u(0) = \phi, u'(0) = 0$ 의 해이다.
3.  $\int_0^t S(t-s)f(s)ds$ 는  $u'' + A^2u = f, u(0) = u'(0) = 0$ 의 해이다.

따라서, (WS)를 다음과 같이 씌으로써 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) & \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (-c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) u = f \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

자세히 보면,  $u(t), \phi, \psi, f(t)$ 가  $u(x, t), \phi(x), \psi(x), f(x, t)$ 로 바뀌었으며,  $A$ 는  $ci \frac{\partial}{\partial x}$ 이다. 그러면,  $\phi = 0, f = 0$ 의 해는, 다음과 같다.

$$\mathcal{S}\psi := \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy$$

또,  $\psi = 0, f = 0$ 의 해는 다음과 같다.

$$\left( \frac{d}{dt} \mathcal{S}(t) \right) \phi = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)]$$

이제,  $\phi = \psi = 0$ 의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(x, s)ds &= \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s)dyds \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s)dyds \end{aligned}$$

### 3.4.4 Wave with source on half-line

$$(\star) = \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t) \\ v(x, 0) = \phi(x), v_t(x, 0) = \psi(x) \\ v(0, t) = h(t) \end{cases}$$

그러면,  $0 < ct < x$ 에서는,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f dxdt$$

이다. 이제  $0 < x < ct$ 에서는, "반사"된 영역  $D$ 에 대해,

$$\frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y)dy + \iint_D f(y, s)dyds$$

가  $h = 0$ 의 해일 것이고, 이제  $\phi = \psi = f = 0$ 의 해만 찾으려 한다.

**Note.**  $v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$ 의 해  $v$ 를 생각하자.

$$\begin{aligned} v(x, t) &= M(x + ct) + N(x - ct) \\ v(x, 0) &= M(x) + N(x) = 0 \quad (x > 0) \\ v_t(x, 0) &= cM'(x) - cN'(x) = 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$x > 0$ 에서는  $M = N = 0$ 임을 알 수 있다. 이제,

$$v(0, t) = M(ct) + N(-ct) = N(-ct) = h(t)$$

로부터,  $N(x) = h\left(-\frac{x}{c}\right)$  where  $x < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서,

$$v(x, t) = N(x - ct) = h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

즉,

$$\frac{1}{2} [\phi(x + ct) - \phi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy + \iint_D f(y, s) dy ds + h\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

이다.

## 4 Boundary Problems

### 4.1 Separation of Variables, the Dirichlet Condition

#### 4.1.1 Wave equation

우선 다음과 같은 Dirichlet condition을 갖는 wave equation의 general solution을 구해보자.

$$(W) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

Separation of variable method를 이용하여,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 라고 가정하자. 이를 Wave Equation에 대입하면,  $XT'' = c^2 X''T$ 를 얻는다. 따라서, 양변을  $-c^2 XT$ 로 나누어 다음을 얻는다.

$$-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} =: \lambda$$

특히, 위 식에서 첫번째 변은  $t$ 에 대한 함수이고 두번째 변은  $x$ 에 대한 식이므로,  $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ 이 되고  $\nabla \lambda = 0$ 이 되어  $\lambda$ 는 상수이다. 게다가,  $\lambda > 0$  case만 살펴봐도 충분하다. 따라서,  $\beta > 0$ 에 대해  $\lambda = \beta^2$ 라고 가정하자. 그러면,  $\lambda$ 가 상수이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} T'' + c^2 \beta^2 T = 0 \\ X'' + \beta^2 T = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} T(t) = A \cos(\beta ct) + B \sin(\beta ct) \\ X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \end{cases}$$

이제 Boundary Condition을 이용하자.  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ 이므로,  $X(0)T(t) = 0$ 으로부터,  $X(0) = C = 0$ 을 얻는다. 그리고,  $X(l) = D \sin(\beta l) = 0$ 이므로,  $\beta l = n\pi (n \in \mathbb{Z})$ 여야 하고 이는  $\beta = \frac{n\pi}{l}$ 으로 쓸 수 있음을 의미한다. 따라서, 주어진 Wave equation with Boundary condition은 다음과 같은 해를 갖게 된다.

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cdot \left[A \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right]$$

특히,  $n < 0$ 인 경우에는  $n = -m$  for some  $m \in \mathbb{N}$ 인데,

$$\sin\left(-\frac{m\pi}{l}x\right) \cdot \left[A \cos\left(-\frac{m\pi}{l}ct\right) + B \sin\left(-\frac{m\pi}{l}ct\right)\right] = \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \left[-A \cos\left(\frac{m\pi}{l}ct\right) + B \sin\left(\frac{m\pi}{l}ct\right)\right]$$

이므로 사실  $n \in \mathbb{N}$ 에 대해서만 생각하면 충분하다. 이제,  $u_n$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$u_n(x, t) := \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right]$$

그러면, wave equation의 linearity에 의하여, 임의의 finite한  $n$ 의 합에 대하여,  $u(x, t) = \sum_n u_n(x, t)$  역시 wave equation의 해가 된다. 이제, initial condition을 생각해보면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) [A_n \cdot 1 + B_n \cdot 0] = \sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \phi(x) \\ u_t(x, 0) &= \sum_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[-\frac{n\pi}{l}c \cdot A_n \cdot 0 + \frac{n\pi}{l}c \cdot B_n \cdot 1\right] = \sum_n \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \psi(x) \end{aligned}$$

그런데, 유한한 합에 대해 위의 식이 성립하는  $\phi$ 와  $\psi$ 는 너무나 드물 것이다. 따라서, finite sum을 infinite sum으로 바꿀 필요가 있다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\right] \\ \phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

이러한 계수를 구하는 방법은 chapter 5에서 다룰 것이고, 특히 다음을 보일 것이다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum \cdots\right) = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum \cdots\right) = \sum \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdots \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Diffusion equation

이번에는 다음과 같은 diffusion equation의 일반해를 구해보자.

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 & 0 < x < l, 0 < t < \infty \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

마찬가지로 separated solution을 이용하자.  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 라면,  $XT' = kX''T$ 이고, 따라서 상수  $\lambda > 0$ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + k\lambda T = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} X_n(x) = A_n \sin\left[\frac{n\pi}{l}x\right] \\ T(t) = C \exp[-\lambda kt] \end{cases}$$

따라서, 일반해는 다음과 같을 것이다.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \phi(x) \end{aligned}$$

특히,  $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 는  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 라는 linear operator의 eigenfunction이고, eigenvalue로  $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 를 가짐을 주목하자.

**Observation.** 왜  $\lambda > 0$ 만을 다루어도 되는지 Boundary condition과 연관지어 생각해보자.  $X'' + \lambda X = 0$  with  $X(0) = X(l) = 0$ 으로부터,

1.  $\lambda = 0 : X'' = 0$ 이므로,  $X(x) = Cx + D$ 이고, B.C로부터  $X \equiv 0$  on  $(0, l)$ .
2.  $\lambda < 0 : \lambda = -\gamma^2$ 로부터,  $(\gamma > 0)$   $X'' - \gamma^2 X = 0$ 이고,  $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ 이다. B.C로부터,  $X \equiv 0$  on  $(0, l)$ .

## 4.2 Separation of Variables, the Neumann Condition

특히, 다음과 같은 Zero Neumann Boundary Condition을 갖는 문제를 생각해보자.

$$(W) : \begin{cases} \text{W.E.} & u_{tt} = c^2 u_{xx} & (0 < x < l) \\ \text{I.C.} & u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & (0 < x < l) \\ \text{B.C.} & u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & \text{Zero Neumann B.C.} \end{cases}$$

$$(D) : \begin{cases} \text{D.E.} & u_t = k u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ \text{I.C.} & u(x, 0) = \phi(x) & (0 < x < l) \\ \text{B.C.} & u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & \text{Zero Neumann B.C.} \end{cases}$$

이제,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 로부터,  $X$ 에 대해,  $X'' + \lambda X = 0$ 를 얻고,  $X'(0) = X'(l) = 0$ 이다.

**Case 1.**  $\lambda > 0$ 인 경우. 즉,  $\lambda = \beta^2$ 인 경우( $\beta > 0$ )에 대해 생각해보자.

$$\begin{aligned} X(x) &= C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \\ X'(x) &= -\beta C \sin(\beta x) + \beta D \cos(\beta x) \end{aligned}$$

로부터,  $X'(0) = \beta D = 0$ 에서  $D = 0$ .  $X'(l) = -\beta C \sin(\beta l) = 0$ 으로부터,  $\beta l = n\pi$ . 즉,  $\beta = \frac{n\pi}{l}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )를 얻는다. 따라서, 각  $n \in \mathbb{N}$ 에 대해,  $X_n(x) = C \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 를 얻는다. 이제  $T$ 를 찾자.

1. Wave equation :  $T'' + c^2 \lambda T = 0$ 에서 ( $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ),

$$T_n(t) = A_n \cos\left[\frac{n\pi}{l}ct\right] + B_n \sin\left[\frac{n\pi}{l}ct\right]$$

2. Diffusion equation :  $T' + k \lambda T = 0$ 에서,

$$T_n(t) = A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$$

**Case 2.**  $\lambda = 0$ 인 경우.  $X'' = 0$ 으로부터,  $X(x) = Cx + D$ 이고,  $X(x) = D$ 여야 한다. 이제  $T$ 를 찾자.

1. Wave equation :  $T'' = 0$ 에서  $T(t) = A + Bt$
2. Diffusion equation :  $T' = 0$ 에서  $T(t) = A$

**Case 3.**  $\lambda < 0$ 인 경우. 즉,  $\lambda = -\gamma^2$ 인 경우( $\gamma > 0$ )에 대해 생각해보자. 그러면,  $X'' - \gamma^2 X = 0$ 이므로,  $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ 이다. 조건으로부터,  $X'(0) = \gamma C - \gamma D = 0$ 에서  $C = D$ 이고,  $X'(l) = \gamma C(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0$ 에서  $C = 0$ 이므로,  $X \equiv 0$ 이 되어 무의미해진다.

이제, Case 1과 2를 합쳐보자.

1. Wave equation case :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (A + Bt) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

특히,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ \psi(x) &= u_t(x, 0) = \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\end{aligned}$$

2. Diffusion equation case :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\end{aligned}$$

특히,

$$\phi(x) = u(x, 0) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

#### 4.2.1 Mixed Boundary Condition

이번에는  $u(0, t) = u_x(l, t) = 0$ 이라는 조건을 생각해보자. 우선,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 를 놓으면,  $X'' + \lambda X = 0$ 이고  $X(0) = X'(l) = 0$ 이다.

**Case 1.**  $\lambda = \beta^2 > 0$  for some  $\beta > 0$ 이라면,  $X(x) = C \cdot \cos(\beta x) + D \cdot \sin(\beta x)$ 이다.  $X(0) = C = 0$ 이고,  $X'(l) = \beta D \cos(\beta l) = 0$ 에서  $\beta = \frac{(n+1/2)\pi}{l}$  ( $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ )이다.

**Case 2.**  $\lambda = 0$ 인 경우 :  $X(x) = Cx + D$ 에서  $X'(l) = C = 0$ 이고,  $X(0) = D = 0$ 이다. 따라서,  $X \equiv 0$ 이다.

**Case 3.**  $\lambda = -\gamma^2 < 0$ 인 경우 :  $X(x) = Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ 이다.  $X(0) = C + D = 0$ 이므로  $C = -D$ 이고,  $X'(l) = \gamma C(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l})$ 으로부터,  $C = D = 0$ 이므로  $X \equiv 0$ 이다.

따라서,

1. Wave equation case :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}ct\right] + B_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}ct\right] \right) \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]$$

특히,

$$\begin{aligned}\phi(x) &= u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right] \\ \psi(x) &= u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)\pi c}{l} B_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]\end{aligned}$$

2. Diffusion equation case :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-k\left(\frac{(n+1/2)\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]$$

특히,

$$\phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left[\frac{(n+1/2)\pi}{l}x\right]$$

### 4.3 Separation of Variables, the Robin Condition

이 경우 Boundary condition은 다음과 같다.

$$u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = u_x(l, t) + a_l u(l, t) = 0$$

이 때,  $a_0, a_l > 0$ 이면 energy가 퍼져나가는 것으로 생각할 수 있고,  $a_0, a_l < 0$ 이면 에너지가 concentrate하는 것이다. 이제,  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 라고 두자. 그러면,  $X'' + \lambda X = 0$ 이고  $X'(0) - a_0 X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0$ 을 풀면 된다.

**Case 1.**  $\lambda = \beta^2 > 0$  for some  $\beta > 0$ 인 경우. 그러면,  $X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$ 인데, B.C.를 쓰면 다음을 얻는다.

- $x = 0$ , no flux :  $D = \frac{a_0}{\beta} C$
- $x = l$ , no flux : 이 경우,

$$\left( \frac{a_0 a_l}{\beta} - \beta \right) C \sin(\beta l) + (a_0 + a_l) C \cos(\beta l) = 0$$

만일  $C = 0$ 이면  $X \equiv 0$ 이 된다. 그러므로,  $C \neq 0$ 을 가정하자.

이제,  $\cos(\beta l) \neq 0$ 이라고 하면,

$$\tan(\beta l) = \frac{(a_0 + a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$$

이 된다. 즉, 이 조건 하에서,  $X$ 는 다음과 같다.

$$X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) = C \left\{ \cos(\beta x) + \frac{a_0}{\beta} \sin(\beta x) \right\} \quad (1)$$

**Case 2.**  $\lambda = 0$ 인 경우.  $X'' = 0$ 에서  $X(x) = Cx + D$ 이다. 따라서,  $(a_0 + a_l + a_0 a_l l)D = 0$ 을 얻는데,  $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$ 인 경우에,

$$X(x) = Cx + D = D(a_0 x + 1)$$

**Case 3.**  $\lambda = -\gamma^2 < 0$ 인 경우. ( $\gamma > 0$ ) 이 경우에는  $X$ 를  $\cosh$ 와  $\sinh$ 로 표현하는 것이 유리하다.

$$X(x) = C \cosh(\gamma x) + D \sinh(\gamma x)$$

에서, Case 1과 같은 이유로 다음을 얻는다.

$$X(x) = C \left( \cosh(\gamma x) + \frac{a_0}{l} \sinh(\gamma x) \right)$$

이 때,

$$\tanh(\gamma l) = -\frac{(a_0 + a_l)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_l}$$

라는 관계가 필요하다.

#### 4.3.1 Derivation of solution

Separation of variable을 사용하기 위하여  $u(x, t) = X(x)T(t)$ 로 두자. 그러면  $X$ 는 다음과 같은 식을 만족해야만 한다.

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - a_0 X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0 \end{cases}$$

이제, case를 나누어 풀이해 보자.

**Case 1.**  $\lambda > 0$ 인 경우. 즉,  $\lambda = \beta^2$  ( $\beta > 0$ )를 생각해보자. 그러면, general solution은  $X(x) = C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$ 이고,  $X'(x) = -\beta C \sin(\beta x) + \beta D \cos(\beta x)$ 이 된다. 따라서,

- $x = 0 : 0 = (\beta D - a_0 C)$ 로부터,  $D = \frac{a_0}{\beta} C$ .
- $x = l : 0 = (\beta D + a_l C) \cos(\beta l) + (-\beta C + a_l D) \sin(\beta l) = (a_0 + a_l) C \cos(\beta l) + \left( \frac{a_0 a_l}{\beta} - \beta \right) C \sin(\beta l)$  특히,  $C = 0$ 이면  $D = 0$ 이므로  $C \neq 0$ 을 가정하자. 그러면,

$$\begin{aligned}\beta(a_0 + a_l) \cos(\beta l) &= (\beta^2 - a_0 a_l) \sin(\beta l) \\ \beta(a_0 + a_l) &= (\beta^2 - a_0 a_l) \tan(\beta l) \\ \tan(\beta l) &= \frac{\beta(a_0 + a_l)}{\beta^2 - a_0 a_l}\end{aligned}$$

을 만족해야만 한다. 이러한 조건을 만족하는  $\beta$ 에 대해, solution은  $C(\cos(\beta l) + \frac{a_0}{\beta} \sin(\beta l))$ 이 된다.

이제 각각의 케이스를 따져보자.

- $a_0, a_l > 0$  : 그러면,  $y = \frac{(a_0 + a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$ 과  $y = \tan(\beta l)$ 의 교점이 바로 eigenvalue가 된다. (positive eigenvalue)
- $a_0 < 0 < a_l$ 이고  $a_0 + a_l > 0$  :  $\frac{(a_0 + a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$ 이 늘 0 이상이므로,  $\beta = 0$ 에서의 기울기가 중요하다. 이 때, slope은 다음과 같이 나타난다.

$$f'(0) = \frac{a_0 + a_l}{-a_0 a_l}$$

–  $\frac{a_0 + a_l}{-a_0 a_l} > l$ 인 경우. 즉,  $a_0 + a_l > -a_0 a_l l$ 인 경우.

이 경우, 두 그래프가  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 최초로 만난다. 그리고, 일반적으로는  $\beta = \beta_n \in \left(\frac{n\pi}{l}, \frac{(n+1/2)\pi}{l}\right)$ 에서 만난다. ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

–  $\frac{a_0 + a_l}{-a_0 a_l} \leq l$ 인 경우. 즉,  $a_0 + a_l \leq -a_0 a_l l$ 인 경우.

이 경우, 두 그래프가  $\beta \in \left(\frac{\pi}{l}, \frac{3\pi}{2l}\right)$ 에서 최초로 만난다. 그리고, 일반적으로는  $\beta = \beta_n \in \left(\frac{n\pi}{l}, \frac{(n+1/2)\pi}{l}\right)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ )에서 만난다.

**Case 2.**  $\lambda = 0$ 인 경우.  $X(x) = Cx + D$ 인 경우로,  $C - a_0 D = 0$ 과  $C + a_l(Cl + D) = 0$ 으로부터  $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$ 을 얻는다. 즉, Case 1에서  $a_0 + a_l \leq -a_0 a_l l$ 인 경우에 한 근이  $\beta = 0$ 으로 갔던 것이다.

**Case 3.**  $\lambda < 0$ 인 경우. 즉,  $\lambda = -\gamma^2$  ( $\gamma > 0$ )를 생각해보자. 그러면, general solution을 이 경우에는  $X(x) = C \cosh(\gamma x) + D \sinh(\gamma x)$ 라고 쓸 수 있다. Boundary condition에 의하여, 다음을 만족해야만 한다.

$$\tanh(\gamma l) = -\frac{(a_0 + a_l)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_l}$$

또한,  $X(x) = C \left( \cosh(\gamma x) + \frac{a_0}{\gamma} \sinh(\gamma x) \right)$ 이다. 이제, 각각의 케이스를 또 따져 보자.

- $a_0, a_l > 0$  : 그러면,  $-\frac{(a_0 + a_l)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_l} < 0$ 이므로 eigenvalue가 존재하지 않는다.
- $a_0 < 0 < a_l, a_0 + a_l > 0$  : 마찬가지로, 초기 기울기가 중요하다. 따라서 다음과 같은 케이스를 나누자.
  - $a_0 + a_l \leq -a_0 a_l l$ 인 경우, 만족하는  $\gamma > 0$ 이 존재하지 않는다.
  - $a_0 + a_l < -a_0 a_l l$ 인 경우, 만족하는  $\gamma > 0$ 은 단 하나로  $(0, \sqrt{-a_0 a_l})$  사이에 있다. 즉, Case 1에서 한 근이 음수로 간 것이다.

요약하면 다음과 같다.

1.  $a_0, a_l > 0$ 인 경우 : positive eigenvalue만을 갖는다.
2.  $a_0 < 0 < a_l, a_0 + a_l > 0$ 인 경우 :
  - (a)  $a_0 + a_l > -a_0 a_l l$  : positive eigenvalue만을 갖는다.
  - (b)  $a_0 + a_l = -a_0 a_l l$  : Zero 그리고 positive eigenvalue들을 갖는다.
  - (c)  $a_0 + a_l < -a_0 a_l l$  : Negative one 그리고 positive eigenvalue들을 갖는다.

## 5 Fourier Series

### 5.1 Fourier coefficient

이번 절에서  $\phi$ 는  $[0, l]$ 에서 정의된 함수라고 하자.

#### 5.1.1 Fourier sine series

구간  $0 < x < l$  (끝점을 무시하고)에서,  $\phi$ 가 다음과 같은 형태라고 가정하자.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

이 때,  $A_n$ 을 찾기 위하여, 다음과 같은 내용을 살펴보자.

**Observation.** 만일  $n, m \in \mathbb{N}$ 이라면, 다음이 성립한다.

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \delta_{nm} \frac{l}{2}$$

이는 다음과 같이 증명할 수 있다.  $n \neq m$ 이라면,  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ 에 의해,

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \int_0^l \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} \right]_{x=0}^{x=l} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{l}{(n-m)\pi} \sin(n-m)\pi - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin(n+m)\pi \right] \equiv 0 \end{aligned}$$

가 성립한다. 만일  $n = m$ 이라면,

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right] dx = \frac{l}{2}$$

가 성립한다. 그러므로, 주어진 observation이 성립한다. □

다시,  $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ 로부터, 양변을 적분하여 다음과 같은 결론을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l A_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta_{nm} \frac{l}{2} = \frac{l}{2} A_m \\ \therefore A_m &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \end{aligned}$$

### 5.1.2 Fourier cosine series

구간  $0 < x < l$ 에서 정의된 다음과 같은  $\phi$ 를 생각하자.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

마찬가지로, 다음과 같은 observation을 생각하자.

**Observation.** non-negative integers  $n, m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ 에 대해,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

가 성립한다. 이에 대한 증명은 sine 함수에서와 정확하게 동일하다.

### 5.1.3 Full Fourier Series

이번에는,  $\phi(x)$ 가  $[-l, l]$ 에서 정의된 함수라고 하자. 그러면,  $\phi$ 를 다음과 같이 가정하자.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

이 경우에도, 다음과 같은 observation을 생각하자.

**Observation.**  $n, m \in \mathbb{N} \cap \{0\}$ 에 대해, 다음이 성립한다.

1.  $\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0$ , if  $n \neq m$
2.  $\int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l$
3.  $\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$ , if  $n \neq m$
4.  $\int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l$
5.  $\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$  even if  $n = m$ .

증명은 간단하다. (1)의 경우, even과 even의 곱이므로 even이고,  $2 \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 0$ 이므로 성립한다. (3)의 경우, odd와 odd의 곱이므로 even하고, (1)과 마찬가지로 0이 된다. 그리고, (5)의 경우, even과 odd의 곱이므로 odd하고, 범위가  $[-l, l]$ 이므로 0이다. (2), (4)의 경우에는, 둘 다 even하므로 간단하게 2배가 된다.  $\square$

다시 돌아와서,  $\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$ 인데, 다음과 같이  $A_n, B_n$ 을 얻을 수 있다.

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n \in \mathbb{N} \cap \{0\}$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n \in \mathbb{N}$$

### Example

$\phi(x) \equiv 1$  on  $[0, 1]$ 인 경우. ( $l = 1$ )

**Fourier sine series** :  $A_n = 2 \int_0^1 \sin n\pi x dx$ 이고, 이 값은  $n$ 이 odd일 때  $\frac{4}{n\pi}$ ,  $n$ 이 even일 때 0이다. 따라서,  $\phi$ 의 fourier sine series는 다음과 같다.

$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \frac{1}{5} \sin 5\pi x + \dots \right)$$

**Fourier cosine series** :  $A_n = 2 \int_0^1 \cos n\pi x dx$ 이고, 이 값은  $n \neq 0$ 이면 0,  $n = 0$ 이면 2이다. 따라서,  $\phi$ 의 fourier cosine series는 다음과 같다.

$$1 = 1 + 0 + 0 + \dots$$

## 5.2 Even, Odd, Periodic and complex functions

**Definitions.**  $-\infty < x < \infty$ 에 정의된 함수  $\phi(x)$ 가 **periodic**하다는 것은, 어떤  $p > 0$ 이 있어서  $\phi(x+p) = \phi(x)$ 인 것이다. 특히,  $p$ -periodic function  $\phi$ 에 대해 다음이 성립한다.

- $\phi(x+np) = \phi(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$  and  $n \in \mathbb{Z}$
- $\int_a^{a+p} \phi(x) dx = \int_0^p \phi(x) dx$  for all  $a \in \mathbb{R}$

만일,  $\phi$ 가 length  $p$ 인 interval에 정의되어 있다면, 다음과 같은 **periodic extension**을 정의할 수 있다.

$$\phi_{\text{per}}(x) := \phi(x-p) \forall x \in (-\infty, \infty)$$

예를 들어,  $\phi$ 가  $-l < x < l$ 에 정의된 함수라면, 그의 periodic extension은  $\phi_{\text{per}}(x) = \phi(x - 2lm)$ 으로 정의된다. ( $-l < x - 2lm < l, m \in \mathbb{Z}$ ) 이를 통해, *Full Fourier Series*를 다시 보면,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi}{l} x + B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

으로부터, 이를 다음처럼 생각할 수 있다.

- Full Fourier series는  $(-l, l)$ 에 정의된 임의의 함수의 expansion이다.
- 그러므로, 이는 일종의  $2l$  - periodic function으로 생각할 수 있다.

**Definition.** Even function은  $\phi(-x) = \phi(x)$ 를 만족하는 것이고, Odd function은  $\phi(-x) = -\phi(x)$ 를 만족하는 것이다. 이러한 함수들은 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

- 만일  $\phi$ 가 even function이라면, 다음이 성립한다.

1.  $\int_{-l}^l \phi(x) dx = 2 \int_0^l \phi(x) dx$
2.  $\phi'(x)$ 와  $\int_0^x \phi(s) ds$ 는 odd function이다.

- 만일  $\phi$ 가 odd function이라면, 다음이 성립한다.

1.  $\phi(0) = 0$
2.  $\int_{-l}^l \phi(x)dx = 0$
3.  $\phi'(x)$ 와  $\int_0^x \phi(s)ds$ 는 even function이다.

- 일반적으로, 다음이 성립한다.

1. Even function과 Even function의 곱은 Even function이다.
2. Odd function과 Odd function의 곱은 Even function이다.
3. Even function과 Odd function의 곱은 Odd function이다.

따라서, 다음과 같은 **even extension**과 **odd extension**을 정의할 수 있다.

$$\phi_{\text{even}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ \phi(-x) & -l < x < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{\text{odd}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ 0 & x = 0 \\ -\phi(-x) & -l < x < 0 \end{cases}$$

### 5.2.1 Fourier series and Boundary conditions

Fourier sine series  $\sum A_n \sin \frac{n\pi}{l}x$ 는 다음처럼 생각할 수 있다.

- 구간  $0 < x < l$ 에 정의된 임의의 함수의 expansion이다.
- whole line  $-\infty < x < \infty$ 에 정의된  $2l$  - periodic *odd* function이다.

Fourier cosine series  $\frac{1}{2}A_0 + \sum A_n \cos \frac{n\pi}{l}x$ 는 다음처럼 생각할 수 있다.

- 구간  $0 < x < l$ 에 정의된 임의의 함수의 expansion이다.
- whole line  $-\infty < x < \infty$ 에 정의된  $2l$  - periodic *even* function이다.

따라서, 이러한 관찰을 바탕으로 다음처럼 주장할 수 있다.

#### Proposition 5.1

만일  $\psi$ 가  $-\infty < x < \infty$ 에서 정의된  $2l$  - periodic odd(cf. even) function이라면,  $\psi(x) = (\phi_{\text{odd}})_{\text{per}}$  (cf.  $= (\phi_{\text{even}})_{\text{per}}$ ) 이고  $\phi(x) = \psi(x) \forall x \in (0, l)$ 으로 볼 수 있다.

### 5.2.2 Complex Form of Fourier Series

다음과 같은  $L^2$  - inner product를 생각하자.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \bar{g}(x) dx$$

그리고 나면,  $\{e^{i\frac{n\pi}{l}x} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 는 orthonormal set이다. 따라서,  $\phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ 에 대해 각각의 coefficient는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_n &= \langle \phi, e^{i\frac{n\pi}{l}x} \rangle \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi(x) e^{-i\frac{n\pi}{l}x} dx \end{aligned}$$

### 5.3 Orthogonality and General Fourier Series

함수  $f, g$ 가  $a \leq x \leq b$ 에 정의된 real-valued 실함수라고 하자. 그러면, 둘의 inner product는 다음과 같이 정의된다.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

특히,  $\langle f, g \rangle = 0$ 이면  $f$ 와  $g$ 를 서로 **orthogonal**하다고 한다. 다음과 같은 관찰으로부터, 영함수를 제외하면 그 어떤 함수도 자기 자신과 직교하지 않는다.

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x)^2 \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$$

이제, 돌아가서,  $X'' + \lambda X = 0$ 을 생각하자. 이는  $-X'' = \lambda X$ 라는 eigenvalue problem을 푸는 문제가 된다. 이 때, operator  $\mathcal{A} := -\frac{d^2}{dx^2}$ 를 고려하면  $\mathcal{A}X = \lambda X$ 를 푼다는 것이다.

#### Theorem 5.2

**Green's Theorem.** 만일  $X_1, X_2$ 가  $\mathcal{A}$ 의 different (= linearly independent) eigenfunction이라면, 즉, 다음이 성립한다면,

$$\begin{aligned} -X_1'' &= \lambda_1 X_1 \\ -X_2'' &= \lambda_2 X_2 \end{aligned}$$

다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I &:= \int_a^b -X_1'' X_2 + X_1 X_2'' dx \\ &= \int_a^b (-X_1' X_2 + X_1 X_2')' dx \\ &= -(X_1'(b)X_2(b) - X_1(b)X_2'(b)) + (X_1'(a)X_2(a) - X_1(a)X_2'(a)) \end{aligned}$$

더 일반적으로는, simply-connected domain  $D \subset \mathbb{R}^n$ 와  $D \subset V \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$ 에 대해  $X_1, X_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ 가 주어진다면,

$$\int_D -\Delta X_1 X_2 + X_1 \Delta X_2 dx = \int_{\partial D} [-\nabla X_1 X_2 + X_1 \nabla X_2] \cdot \nu dS$$

가 성립한다. 이 때,  $\nu$ 는  $\partial D$ 의 outward unit normal vector이다. 이를 *Green's second identity* 라고 부른다.

각각의 Case에 대해 Green's theorem을 계산해보자.

1. Zero Dirichlet B.C. :  $X_j(a) = X_j(b) = 0$  ( $j = 1, 2$ )에 대해,  $I = 0$ 이다.
2. Zero Neumann B.C. :  $X_j'(a) = X_j'(b) = 0$  ( $j = 1, 2$ )에 대해,  $I = 0$ 이다.
3. Periodic Boundary Condition :  $X_j(a) = X_j(b), X_j'(a) = X_j'(b)$  ( $j = 1, 2$ )에 대해,  $I = 0$ 이다.

4. Robin Boundary Condition :  $X_j'(a) - c_0 X_j(a) = 0 = X_j'(b) + c_1 X_j(b)$  ( $j = 1, 2$ )에 대해,

$$\begin{aligned} I &= -X_1'(a)X_2(b) + X_1(a)X_2'(b) + X_1'(a)X_2(a) - X_1(a)X_2'(a) \\ &= -(-c_1 X_1(b))X_2(b) + X_1(b)(-c_1 X_2(b)) + (c_0 X_1(a))X_2(a) - X_1(a)(c_0 X_2(a)) = 0 \end{aligned}$$

이 성립한다.

즉, 우리가 사용했던 B.C.에 대해서는 전부  $I = 0$ 이다. 그러나, 일반적으로는 이것이 (당연히) 성립하지 않을 수 있다. 만일  $X_j(a) = X_j(b)$ ,  $X_j'(a) = 2X_j'(b)$ 를 사용하면,  $I = \frac{1}{2}(-X_1'(a)X_2(a) + X_1(a)X_2'(a))$ 는 일반적으로 0이 아니다. 어쨌든, 위의 모든 경우에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b (-X_1''X_2 + X_1X_2'')dx = -X_1'X_2 + X_1X_2'|_a^b = 0 \\ &= \int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2)X_1X_2dx \end{aligned}$$

다시 말해,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 라면  $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ 이다.

이제, 아주 일반적인 다음과 같은 boundary condition을 생각하자. 즉, **GBC**를 생각하자.

$$\text{GBC} \begin{cases} \alpha_1 X(a) + \beta_1 X(b) + \gamma_1 X'(a) + \delta_1 X'(b) = 0 \\ \alpha_2 X(a) + \beta_2 X(b) + \gamma_2 X'(a) + \delta_2 X'(b) = 0 \end{cases}$$

만일 어떤 GBC를 만족하는 모든  $f, g$ 에 대해  $I = 0$ 이라면 이러한 BC를 **symmetric**하다고 한다.

### Theorem 5.3

만일  $X'' = -\lambda X$ 가 symmetric한 BC를 가진다면, 서로 다른 eigenvalue를 갖는 eigenfunction은 늘 orthogonal 하다. (\*) 따라서, 어떤 함수가 이러한 eigenfunction들의 series로 표현된다면, 그 coefficient는 유일하게 결정된다. (\*\*)

(\*)는 이미 위에서 증명하였고, (\*\*)는 다음과 같이 증명할 수 있다. : 우선, 다음과 같은  $\phi$ 를 생각하자.

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

이 때,  $X_n$ 은  $\lambda_n$ 에 대응되는 eigenfunction이며, 각각의  $\lambda_n$ 은 서로 다른 값들이다. 즉,  $X_n$ 들은 각각이 서로 orthogonal 하다. 따라서,

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x) X_m(x) dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) X_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b A_n X_n(x) X_m(x) dx = A_m \|X_m\|^2 \end{aligned}$$

가 성립한다. 즉, 각각의 계수는 다음처럼 표현된다.

$$A_m = \frac{1}{\|X_m\|^2} \int_a^b \phi(x) X_m(x) dx$$

□

위의 증명에서, convergence에 대한 모든 의문을 해결하지 않았고,  $\lambda_1 = \lambda_2$ 인 경우에 대해서는 전혀 말하지 않았음을 주의하라.

### 5.3.1 Complex eigenvalue

만일 complex-valued function  $f, g$ 가  $a \leq x \leq b$  위에 정의되어 있다면  $f, g$ 의 inner product를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$$

이 경우에도,  $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x) \bar{f}(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ 인 것과  $f(x) \equiv 0$ 인 것은 동치이다.

#### Theorem 5.4

만일  $X'' = -\lambda X$ 가 symmetric한 BC를 가진다면, ( $\lambda$ 는 complex를 허용함)

1. All the eigenvalues are real.
2. All the eigenfunctions can be chosen to be real-valued.

우선, eigenvalue들이 real함을 먼저 증명해보자. 우선,  $-X'' = \lambda X$ 라고 하면, 양변에 complex conjugate를 취해 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{-X''} &= \overline{\lambda X} \\ -\bar{X}'' &= \bar{\lambda} \bar{X} \end{aligned}$$

따라서,  $\bar{\lambda}$ 는 eigenvalue이고  $\bar{X}$ 는 그에 대한 eigenfunction이다. 이제,

$$\int_a^b -X'' \bar{X} + X \bar{X}'' dx = (-X' \bar{X} + X \bar{X}')|_a^b = 0 (\because \text{symmetric})$$

인데,  $-X'' = \lambda X$ 이므로,

$$\int_a^b \lambda X \bar{X} - \bar{\lambda} X \bar{X} dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |X|^2 dx = 0$$

이다. 즉,  $\lambda = \bar{\lambda}$ 여야만 한다. 다시 말해,  $\lambda \in \mathbb{R}$ 이다. 따라서, 모든 eigenvalue들은 real하다.

이제,  $X(x) = Y(x) + iZ(x)$ 가 real  $\lambda$ 에 대한 eigenfunction이라고 하자. 그러면,  $\bar{X}(x) = Y(x) - iZ(x)$ 는  $\bar{\lambda} = \lambda$ 에 대응하는 eigenfunction이다. 따라서,  $X$ 와  $\bar{X}$ 는  $\lambda$ 에 대응하는 서로 다른(= linearly independent) eigenfunction이다. 이제,

$$\begin{aligned} -X''(x) &= -Y''(x) - iZ''(x) \\ \lambda X(x) &= \lambda Y(x) + i\lambda Z(x) \end{aligned}$$

로부터,  $-Y'' = \lambda Y$ 이고  $-Z'' = \lambda Z$ 가 성립한다. 따라서,  $Y$ 와  $Z$ 는 마찬가지로  $\lambda$ 에 대한 eigenfunction이다.

## 5.4 Completeness

우선 eigenvalue problem (\*)  $X'' + \lambda X = 0, x \in (a, b)$ 를 생각하자. 이 때, symmetric boundary condition을 갖는다고 하자. 5.3.의 Theorem에 따르면, (\*)의 eigenvalue는 전부 real하다. 다음은 증명 없이 사용하는 정리이다.

#### Theorem 5.5

(\*)의 eigenvalue는 무한히 많으며, 이 때  $\{\lambda_n\}$ 이라는 eigenvalue의 수열은  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ 를 만족한다.

이 정리에 의하면, eigenvalue들의 multiplicity는 전부 finite하다. 즉, 모든 eigenvalue는 많아야 유한한 eigenfunction을 가지며, Gram-Schmidt process를 사용하여 eigenfunction들을 전부 orthogonal하게 만들 수 있다.

게다가, 이전의 정리에 따르면,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  라면 그에 대응하는 eigenfunction  $X_i, X_j$  는 서로 orthogonal하다. 즉, eigenvalue들을  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$  로 줄 세우면, 그에 대응하는 eigenfunction들  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  은 전부 mutually orthogonal하다.

### Example

$(a, b) = (0, l)$  이고 Zero Dirichlet Boundary condition을 갖는다면,  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  이고  $X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$  들은 전부 orthogonal하다. ( $n \in \mathbb{N}$ )

### Example

$(a, b) = (0, l)$  이고 Zero Neumann Boundary condition을 갖는다면,  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  이고  $X_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$  들은 전부 orthogonal하다. ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )

### Example

$(a, b) = (-l, l)$  이고 Periodic Boundary condition  $u(-l, t) = u(l, t), u_x(-l, t) = u_x(l, t)$  를 갖는다면,  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  이고  $X_n = \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}$  들이 전부 orthogonal하다. (multiplicity : 2)

#### Definition 5.6

$(a, b)$  위의 함수  $f(x)$ 에 대해, 일반적인 **Fourier coefficient**는 다음과 같이 정의된다.

$$A_n = \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} = \frac{\int_a^b f(x) \overline{X_n(x)} dx}{\int_a^b |X_n(x)|^2 dx}$$

이 때,  $f$ 의 **Fourier series**는  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$ 을 의미한다.

다음과 같은 세 가지 종류의 수렴을 생각하자.  $(a, b)$ 에 주어진 함수열  $\{f_n\}$ 에 대해,

1. Series  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가  $(a, b)$ 에서  $f$ 로 **pointwise** 수렴한다는 것은, 각각의  $x \in (a, b)$ 에 대해  $\sum_{n=1}^N f_n(x)$ 가  $f(x)$ 로 수렴한다는 것이다. 즉,  $\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$ 이다.

2. Series  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가  $(a, b)$ 에서  $f$ 로 **uniformly** 수렴한다는 것은, 다음이 성립하는 것이다.

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

3. Series  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가  $(a, b)$ 에서  $f$ 로  $L^2$ -수렴한다는 것은, 다음이 성립하는 것이다.

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty$$

당연히, uniform convergence는 pointwise convergence와  $L^2$  convergence보다도 강하다.

### Example

우선,  $a_N := \sup_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|$  라고 놓자. Uniform convergence는  $N \rightarrow \infty$ 에서  $a_N \rightarrow 0$ 임을 의미한다.

1. 이제, 각  $a < x < b$ 에 대해,  $\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \leq a_N \rightarrow 0$ 이므로, **squeeze theorem**에 의해  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 는  $f(x)$ 로  $(a, b)$ 에서 pointwise 수렴한다.
2. 또한, 다음에 의해  $L^2$ -수렴한다.

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dx \leq \int_a^b |a_N|^2 dx = a_N^2(b-a) \rightarrow 0$$

그리고, 당연히 이의 역은 성립하지 않는다.

- 먼저,  $f_n(x) = (1-x)x^{n-1}$ 은 (그 series가) pointwisely converge하지만, uniformly converge하지 않고,  $RL^2$ -converge한다.
- 또,  $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n-1}{1+(n-1)^2x^2}$ 는 pointwisely converge하지만, uniformly converge하지 않고,  $RL^2$ -converge하지도 않는다.

#### Theorem 5.7

(Uniform convergence) 다음이 만족되면, 구간  $[a, b]$  위의 함수  $f$ 의 Fourier series  $\sum A_n X_n$ 이  $f$ 로 uniformly converge한다.

- $f \in C^2([a, b])$ 이다.
- $f$ 는 주어진 eigenvalue problem의 boundary condition을 만족한다.

Note : classical Fourier series (sine, cosine, 그리고 full)의 경우에는  $f''$ 의 존재성은 필요 없다. (이는  $(\sin x)'' = -\sin x$ ,  $(\cos x)'' = -\cos x$ 에서 유래된다.)

#### Theorem 5.8

( $L^2$ -convergence) 만일  $f$ 가  $L^2(a, b)$ 에 속하는 함수라면,  $f$ 의 Fourier series는  $f$ 로  $L^2$  - converge한다.

다음과 같은 새로운 개념을 정의하자.

#### Definition 5.9

함수  $f(x)$ 가  $x = c$ 에서 **jump discontinuity**를 가진다는 것은,  $f(c-) := \lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ 와  $f(c+) := \lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ 가 존재하지만  $f(c-) \neq f(c+)$ 인 것이다.

그러면,

#### Definition 5.10

함수  $f(x)$ 가  $[a, b]$ 에서 **piecewise continuous**하다는 것은  $f$ 가 continuous하지만 유한한 점에서 jump discontinuity를 갖는다는 것이다. 마찬가지로,  $f(x)$ 가  $-\infty < x < \infty$ 에서 piecewise continuous하다는 것은 모든  $[a, b]$ 에서 piecewise continuous하다는 것이다.

**Theorem 5.11**

(Pointwise convergence) 이 정리는 classical Fourier series로만 생각한다.

1. Classical Fourier series가  $(a, b)$ 에서  $f$ 로 pointwise 수렴하려면,  $f$ 가  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f'$ 가  $[a, b]$ 에서 piecewise continuous해야만 한다.
2. 더 일반적으로,  $f$ 가  $[a, b]$ 에서 piecewise continuous하고  $f'$ 가  $[a, b]$ 에서 piecewise continuous하다면 classical Fourier series가 모든  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ )에서 pointwise 수렴한다, 그 때, 수렴값은 다음과 같다.

$$\sum_n A_n X_n(x) = \frac{1}{2} [f_{\text{ext}}(x-) + f_{\text{ext}}(x+)]$$

이 때,  $f_{\text{ext}}$ 는  $f$ 의 extended function이다.

$f$ 가 연속함수라고 해서 Fourier series의 pointwise convergence를 보장하지는 못한다. 연속함수이더라도 그 미분  $f'$ 가 piecewise continuous하다는 보장이 없기 때문이다.

## 6 Harmonic Functions

### 6.1 Laplace equation

**Laplace equation**은 diffusion 혹은 wave가 steady-state인 상태의 식을 의미한다. 즉,  $\Delta u = 0$ 을 의미한다. 이 때, 이 laplace equation의 solution  $u$ 를 **Harmonic function**이라고 한다.

One dimensional case : 1-D의 경우에  $u(x) = A + Bx$ 이므로 큰 재미가 없다.

Two dimensional case : 2-D의 경우에는  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 의 해가 되는데, 다음과 같은 내용이 잘 알려져 있다.

**Example 6.1**

복소함수  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 에 대해  $u, v$ 가  $f$ 의 Real part, imaginary part라고 하자. 만일  $f$ 가 holomorphic하다면,  $u$ 와  $v$ 는 harmonic하다.

**Example**

라플라스 방정식의 inhomogeneous version,  $\Delta u = f$ 를 **Poisson equation**이라고 하며, 다음과 같은 예시가 있다.

1. 중력 포텐셜 혹은 전기 포텐셜  $\phi$ 에 대해,  $\Delta u = C\rho$ 가 성립한다. 여기서  $\rho$ 는 질량밀도 혹은 전하밀도이다.
2. Brownian motion에 대해,  $C_1 \sqcup C_2 = D$ 일 때,  $u(x, y, z)$ 를  $(x, y, z) \in \bar{D}$ 에서 출발한 입자가  $C_1$ 에 도달할 확률로 두자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\Delta u = 0$$

$$u = 1 \text{ on } C_1$$

$$u = 0 \text{ on } C_2$$

**Theorem 6.2**

**Maximum Principle** :  $D \subset \mathbb{R}^n$ 을 connected bounded open set이라고 하자.  $u$ 가  $D$  위의 harmonic function이고  $\bar{D}$ 에서 연속이라면,  $u$ 의  $\bar{D}$ 에서의 최소값과 최대값은  $\partial D$ 에서 나타난다. (weak) 게다가, 오로지  $\partial D$ 에서만 나타난다. (strong)

**Proof.** 다음과 같은 아이디어를 떠올리자. “만일 함수  $v$ 가  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ 에서 최대값을 갖는다면,  $v_{xx}(\mathbf{x}_0) \leq 0$ 이므로  $\Delta v(\mathbf{x}_0) \leq 0$ 이다. 즉, 만일  $\Delta v(\mathbf{x}_0) > 0$ 이라면, 최대값을 갖지 못한다.” 이제 harmonic function  $u$ 에 대해, 즉  $\Delta u = 0$

일 때,  $u$ 의 perturbation으로부터 시작하자. 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대해,  $v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \epsilon\|\mathbf{x}\|^2$ 로 정의하자. 그러면, 주어진  $D$ 에서,  $\Delta v = \Delta u + \epsilon\Delta\|\mathbf{x}\|^2 = 0 + 2n\epsilon > 0$ 이다. 따라서,  $\Delta v$ 는  $D$ 에서 maximum을 가질 수 없다.  $\bar{D}$ 가 compact하므로,  $v$ 는  $\bar{D}$ 에서 maximum을 갖고, 따라서  $v$ 는  $\partial D$ 에서만 maximum을 갖게 된다. 이제  $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ 가  $\bar{D}$ 에서  $v$ 의 maximum point라고 하자. 즉,  $v(\mathbf{x}_0) = \max_{\bar{D}} v$ 라고 하자. 임의의  $\mathbf{x} \in \bar{D}$ 에 대해, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\leq u(\mathbf{x}) + \epsilon\|\mathbf{x}\|^2 = v(\mathbf{x}) \\ &\leq v(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0) + \epsilon\|\mathbf{x}_0\|^2 \\ &\leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2 \end{aligned}$$

여기서  $l$ 은  $l = \sup \{ \|\mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in \partial D \} < \infty$ 이다. (bounded이므로.) 따라서,  $u(\mathbf{x}) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2$ 가 성립하고,

$$\max_{\bar{D}} u \leq \max_{\partial D} u + \epsilon l^2$$

이고,  $\epsilon$ 는 arbitrary하므로,  $\epsilon \rightarrow 0$ 으로 두면  $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$ 가 성립한다. 게다가,  $-u$ 도 harmonic하므로,  $\min_{\bar{D}} u = \min_{\partial D} u$ 가 성립한다.

### Corollary 6.3

**Uniqueness of Dirichlet problem** : 다음과 같은 dirichlet problem을 생각하자.

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(\mathbf{x} \in D) \\ u &= h(\mathbf{x} \in \partial D) \end{aligned}$$

그러면, 이 문제의 solution은 존재한다면 유일하다.

#### 6.1.1 Laplace equation in the other systems

##### Laplace equation in the polar coordinate

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

##### Laplace equation in the spherical coordinate

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin \theta}u_{\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}u_{\phi\phi}$$

## 6.2 Rectangles and Cubes

직사각형 영역  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$ 에서의 harmonic equation을 생각하자. 그리고, 다음과 같은 boundary condition을 고려하자.

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \\ u(0, y) &= j(y) \\ u_x(a, y) &= k(y) \\ u(x, b) &= g(x) \\ u_y(x, 0) + u(x, 0) &= h(x) \end{cases}$$

이 경우, Boundary condition을  $(g, h, j, k)$ 로 뒀을 때, 다음과 같은 Boundary condition을 갖는 해들의 합으로 생각할 수 있다. ( $u_1 : (g, 0, 0, 0), u_2 : (0, h, 0, 0), u_3 : (0, 0, j, 0), u_4 : (0, 0, 0, k)$ )

### Example

$u(x, b) = g(x)$ , 나머지는 0인  $u_1$ 이라는 해를 구해보자. 이를 위해, Separation of variable  $u(x, y) := X(x)Y(y)$ 을

생각하자. 그러면,  $X''Y + XY'' = 0$ 이고  $X(0) = X'(a) = 0$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ X(0) &= X'(a) = 0 \end{aligned}$$

이므로, eigenfunction은  $X_n(x) = \sin \left[ \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{a} x \right]$ 이고 corresponding eigenvalue는  $\lambda_n = \beta_n^2 = \left[ \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{a} \right]^2$ 이다. 또한,

$$\begin{aligned} Y'' - \lambda_n Y &= 0 \\ Y'(0) + Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

으로부터,  $Y_n(y) = A_n \left[ \cosh(\beta_n y) - \frac{1}{\beta_n} \sinh(\beta_n y) \right]$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ \cosh(\beta_n y) - \frac{1}{\beta_n} \sinh(\beta_n y) \right] \sin(\beta_n x) \\ A_n &= \frac{2}{a} \left[ \cosh(b\beta_n) - \frac{1}{\beta_n} \sinh(b\beta_n) \right]^{-1} \int_0^a g(x) \sin(\beta_n x) dx \end{aligned}$$

가 성립한다.

### Example

다음과 같은 cube를 생각하자 :  $D = \{ (x, y, z) \mid 0 < x, y, z < \pi \}$ . 그리고, boundary condition으로  $u(\pi, y, z) = g(y, z)$ 로 두고 나머지 면에 대해서는 전부 0이라고 두자. 같은 방법으로,  $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  이고 따라서,

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= \sin(ny) \\ Z_m(z) &= \sin(mz) \\ X_{nm}(x) &= \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}x) \end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}x) \sin(ny) \sin(mz) \\ A_{n,m} &= \frac{4}{\pi^2 \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi)} \int_0^\pi \int_0^\pi g(y, z) \sin(ny) \sin(mz) dy dz \end{aligned}$$

이다.

## 6.3 Poisson's Formula

다음과 같은 Disk에서의 Laplace equation을 풀어보자.

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x^2 + y^2 < a^2 \\ u(a, \theta) = h(\theta) & x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

이를 해결하기 위해 Separation of Variable을 사용하자 :  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Polar coordinate에서의 Laplace equation은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \\ &= R''\Theta + \frac{1}{r}R\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \\ \left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\Theta &= -\frac{1}{r^2}R\Theta'' \\ \frac{r^2R'' + rR'}{R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta} =: \lambda(\text{constant})\end{aligned}$$

따라서,  $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ 과  $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$ 을 해결하면 된다.

**Theta term.**  $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ . 이 때,  $\Theta$ 는  $2\pi$ -periodic해야한다.

1.  $\lambda > 0$ 인 경우.  $\lambda = \beta^2$  ( $\beta > 0$ )이라고 놓자. 그러면,

$$\Theta(\theta) = A \cos(\beta\theta) + B \sin(\beta\theta)$$

이므로,  $\Theta$ 는  $\frac{2\pi}{\beta}$ -periodic하다. 따라서,  $\beta$ 는 positive integer여야만 하고,  $\beta_n = n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )이다. 즉, eigenvalue는  $\lambda = n^2$ 이고 eigenfunction은  $\cos n\theta, \sin n\theta$ 이다.

2.  $\lambda = 0$ 인 경우. Eigenvalue는  $\lambda = 0$ 이고 Eigenfunction은 1이다.

3.  $\lambda < 0$ 인 경우.  $\lambda = -\gamma^2$  ( $\gamma > 0$ )이라고 놓자. 그러면,

$$\Theta(\theta) = A \cosh(\beta\theta) + B \sinh(\beta\theta)$$

인테, periodicity에 의해  $A = B = 0$ 이어야만 한다.

따라서,  $\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )이다.

**Raidal term.**  $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$ . 이 때,  $r \geq 0$ 이고,  $r = 0$ 에서  $R$ 은 finite하다는 조건을 가져가자. 그러면, 주어진 방정식은 **Cauchy-Euler equation**이므로  $R(r) = r^\alpha$ 로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha &= 0 \\ (\alpha^2 - n^2)r^\alpha &= 0\end{aligned}$$

따라서,  $n \geq 1$ 에서  $\alpha = \pm n$ 이고,  $R(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$ 이어야만 한다. 그런데,  $r = 0$ 에서  $R$ 이 finite해야하므로  $D_n \equiv 0$ 이어야 한다. 즉,  $R_n(r) = C_n r^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

만일  $n = 0$ 이라면,  $r^2R'' + rR' = r(rR'' + R') = 0$ 에서  $R_0(r) = C + D \ln r$ 이므로, finiteness 조건에서  $D = 0$ 이어야만 한다. 즉, 종합했을 때,

$$R_n(r) = C_n r^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

가 된다.

최종적으로, 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u(r, \theta) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \\ u(a, \theta) &= h(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)]\end{aligned}$$

이 때, 계수는 다음과 같다.

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

해를 적분 꼴로 적어서 정리해보자.

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[ \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \left\{ \underbrace{\cos(n\phi) \cos(n\theta) + \sin(n\phi) \sin(n\theta)}_{=\cos(n(\theta-\phi))} \right\} d\phi \right] \\ &= \int_0^{2\pi} h(\phi) \frac{d\phi}{2\pi} + \int_0^{2\pi} h(\phi) \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\theta-\phi)) \right] \frac{d\phi}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} h(\phi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos(n(\theta-\phi)) \right\} \frac{d\phi}{2\pi} \end{aligned}$$

integrand의 괄호 내부를 분석해보자.

$$\begin{aligned} [\dots] &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n [e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)} \right)^n \\ &= 1 + \frac{r e^{i(\theta-\phi)}}{a - r e^{i(\theta-\phi)}} + \frac{r e^{-i(\theta-\phi)}}{a - r e^{-i(\theta-\phi)}} \\ &= 1 + \frac{a r e^{i(\theta-\phi)} + a r e^{-i(\theta-\phi)} - 2r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta-\phi) + r^2} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta-\phi) + r^2} \end{aligned}$$

따라서, 다음과 같은 **Poisson's formula**를 얻을 수 있다.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} h(\phi) d\phi$$

이 때,  $\mathbf{x}(r, \theta)$ 와  $\mathbf{x}'(a, \phi)$ 에 대해, 다음과 같은 vector form을 생각할 수 있다. 두 점 사이의 거리가  $a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2$  이므로 (제2 코사인 법칙)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\|\mathbf{x}'\|=a} \frac{\|\mathbf{x}'\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} h(\phi) \frac{ds'}{a} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \oint_{\|\mathbf{x}'\|=a} \frac{\|\mathbf{x}'\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} u(\mathbf{x}') ds' \end{aligned}$$

이러한 vector form의 Poisson formula를 얻을 수 있다.

#### Theorem 6.4

$h(\phi) = u(\mathbf{x}')$ 를  $C = \partial D$ 에서의 임의의 continuous function이라고 하자. 그러면, Poisson formula에 의해  $D$ 에서의 harmonic function 중에  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0)$  (for all  $\mathbf{x}_0 \in C = \partial D$ )를 만족하는 것은 유일하다. 또한, formula에 의해  $u$ 를  $D$ 에서 무한 번 미분할 수 있다.

**Proposition 6.5**

**Mean value property** :  $u$ 가 disk  $D$ 의 harmonic function이고  $\bar{D}$ 에서 continuous하다고 하자.  $D$ 의 center가  $\mathbf{x}_0$  이라면,  $u(\mathbf{x}_0)$ 은  $\partial D$ 에서  $u$ 의 average value이다.

증명은 간단하다. 일반성을 잃지 않고  $\mathbf{x}_0 = 0$ 라고 하면, Poisson formula에 의해,

$$u(0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial D} \frac{\|\mathbf{x}'\|^2 - \|0\|^2}{\|\mathbf{x}' - 0\|^2} u(\mathbf{x}') ds' = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial D} u(\mathbf{x}') ds'$$

가 성립한다.