

Friedberg Solution

2dayclean

2026/01/07

1 벡터공간

1.1 개론

1.2 벡터공간

Problem 1.

- (a) 참. 공리 (VS3)에 의해 모든 벡터 공간에는 영벡터가 존재한다.
- (b) 참. (a)와 같은 이유로 존재하며, 실제로 영벡터는 유일하다.
- (c) 거짓. $x = 0$ 인 경우, $1x = 2x = 0$ 이지만 $1 \neq 2$ 이다.
- (d) 거짓. $a = 0$ 인 경우, $0x = 0y$ 지만 $x \neq y$ 인 x, y 가 존재할 수 있다.
- (e) 참. 그 둘을 본질적으로 같다고 할 수 있다. 이는 추후에 나오는 선형사상과 차원을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.
- (f) 거짓. $m \times n$ 행렬은 m 개의 행과 n 개의 열로 이루어져 있다.
- (g) 거짓. $x + 1$ 과 $x^2 + x + 1$ 의 합은 $x^2 + 2x + 2$ 이다.
- (h) 거짓. $x + 1$ 과 $-x + 1$ 은 차수가 둘 다 1이지만, 그 합은 2이고 차수가 0이다.
- (i) 참. 다항식 f 의 leading coefficient가 a_n 이라고 하면, cf 의 leading coefficient는 ca_n 이고 이는 0이 아니다. 이는 임의의 체 \mathbb{F} 에서도 성립한다.
- (j) 참. 이는 동형사상을 배우면 더 자세히 논의할 수 있다.
- (k) 참. 함수의 같음을 정의하는 방법이다.

Problem 2. 벡터공간 $M_{3 \times 4}(F)$ 의 영벡터는 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이다.

Problem 3. $M_{13} = 3, M_{21} = 4, M_{22} = 5$.

Problem 4.

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 8 & 20 & -12 \\ 4 & 0 & 28 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -15 & 10 \\ -5 & -40 \end{bmatrix}$$

$$(e) 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 2x + 10$$

$$(f) -x^3 + 7x^2 + 4$$

$$(g) 10x^7 - 30x^4 + 40x^2 - 15x$$

$$(h) 3x^5 - 6x^3 + 12x + 6$$

Problem 5. (a) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) 자명.

Problem 6. 문제 5와 유사하므로 생략.

Problem 7. 문제 1의 (k)를 사용한다. $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1 + 4 - 2 = 3$ 이므로 f 와 g 가 S 에서의 함수값이 모두 일치한다. 즉, $f = g$ 이다. 또한, $h(0) = 2$, $h(1) = 6$ 인데 $(f+g)(t)$ 와 S 에서의 함수값이 모두 일치하므로 $f+g = h$ 이다.

Problem 8. 임의의 벡터 x, y 와 임의의 스칼라 a, b 에 대해,

$$(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y \quad (\text{VS8})$$

$$= (ax + bx) + (ay + by) \quad (\text{VS7})$$

$$= ax + (bx + ay) + by \quad (\text{VS2})$$

$$= ax + ay + bx + by \quad (\text{VS1}), (\text{VS2})$$

Problem 9. 따름정리 1. (VS3)을 만족하는 벡터 0은 유일하다.

proof) (VS3)을 만족하는 벡터 $0, 0'$ 을 고려하자. 그러면, (VS3)에 의해 다음이 성립한다.

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

즉, 0 과 $0'$ 은 동일한 벡터이다. 따라서, 영벡터는 유일하다. \square

따름정리 2. (VS4)를 만족하는 벡터 y 는 유일하다.

proof) 주어진 x 에 대해, $x + y = 0$ 이고 $x + z = 0$ 이라고 하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + (x + z) \\ &= (y + x) + z \\ &= 0 + z = z \end{aligned}$$

즉, $y = z$ 이다. 따라서, 역벡터는 유일하다. \square

정리 1.2(3) 모든 스칼라 a 에 대해 $a0 = 0$ 이다.

proof) 스칼라 a 에 대해, $a0 = a(0+0) = a0+a0$ 이다. 즉, $a0+0 = a0 = a0+a0$ 이다. 정리 1.1에 의해, $0 = a0$ 이다. \square

Problem 10. $V = \{f : R \rightarrow R \mid f\text{는 미분가능}\}$ 이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 가장 먼저, $f, g \in V$ 와 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 $f + g \in V$ 이고 $(cf) \in V$ 인지 확인해야 한다. (연산에 대한 닫힘) 다시 말해 미분가능한 함수의 합 역시 미분가능하고, 미분가능한 함수의 스칼라배 역시 미분가능한지 보여야 한다. 이는 잘 알려진 내용이므로 생략한다. (자세한 정의는 미분적분학이나 해석학 교재를 참고하라.)

(VS1) 모든 $f, g \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$ 으로 $f + g = g + f$ 이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 교환법칙이 사용되었다.

(VS2) 모든 $f, g, h \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$ 으로 $(f + g) + h = f + (g + h)$ 이다. 이 증명에서는 실수의 합에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS3) 함수 0을 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $0(x) = 0$ 으로 정의하면 $(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$ 으로 늘 $f + 0 = 0 + f = f$ 이다. 또한, $0(x) = 0$ 은 미분가능하므로 $0 \in V$ 이다.

(VS4) 함수 $f \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $g(x) = -f(x)$ 로 정의하면 g 는 미분가능하고, 자명히 $f + g = 0$ 이다.

(VS5) 함수 $f \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $(1f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$ 으로 $1f = f$ 이다.

(VS6) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$ 와 함수 $f \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = (a(bf))(x)$ 이다. 따라서, $(ab)f = a(bf)$ 이다. 이 증명에서는 실수의 곱에 대한 결합법칙이 사용되었다.

(VS7) 실수 $a \in \mathbb{R}$ 와 함수 $f, g \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $(a(f + g))(x) = a((f + g)(x)) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) = (af + ag)(x)$ 이다. 따라서, $a(f + g) = af + ag$ 이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

(VS8) 실수 $a, b \in \mathbb{R}$ 와 함수 $f, g \in V$ 에 대해, 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에서 $((a+b)f)(x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af + bf)(x)$ 이다. 따라서, $(a+b)f = af + bf$ 이다. 이 증명에서는 실수의 분배법칙이 사용되었다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 11. 영벡터만을 벡터로 갖는 $V = \{0\}$ 이 벡터공간임을 보이자.

(cl) $0 + 0 = 0$ 이고, 임의의 상수 $c \in F$ 에 대해 $c0 = 0$ 으로 연산에 대해 닫혀 있다.

(VS1) 원소가 0 뿐이므로 $0 + 0 = 0 + 0 = 0$ 이다.

(VS2) 원소가 0 뿐이므로 $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$ 이다.

(VS3) 원소가 0 뿐이므로 $0 + 0 = 0$ 에서 0이 항등원이다.

(VS4) 원소가 0 뿐이고, $0 + 0 = 0$ 에서 0의 역원이 0이다.

(VS5) 정의에 의해 $1 \cdot 0 = 0$ 이다.

(VS6) 스칼라 a, b 에 대해 $(ab)0 = 0 = a0 = a(b0)$ 이다.

(VS7) 스칼라 a 에 대해 $a(0 + 0) = a0 = 0 = 0 + 0 = a0 + a0$ 이다.

(VS8) 스칼라 a, b 에 대해 $(a + b)0 = 0 = 0 + 0 = a0 + b0$ 이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 12. 짹함수(even function)들의 집합이 벡터공간임을 보이자. 사실, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로, (VS1), (VS2), (VS5 - 8)은 증명할 필요가 없다. 따라서, (cl) : 연산에 대한 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 짹함수 f, g 와 실수 $c \in \mathbb{R}$ 에 대해 $f + g$ 와 cf 가 짹함수임을 보이면 충분하다. 먼저, $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ 로부터 $f + g$ 는 짹함수이다. 또한, $(cf)(-x) = cf(-x) = cf(x) = (cf)(x)$ 로부터 cf 는 짹함수이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$ 이 짹함수임을 보이면 충분하다. $0(-x) = 0 = 0(x)$ 에서 0 은 짹함수이다.

(VS4) 짹함수 f 에 대해 $g(x) = -f(x)$ 로 정의된 g 가 짹함수임을 보이면 충분하다. $g(-x) = -f(-x) = -f(x) = g(x)$ 에서 g 는 짹함수이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 13. $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 b_2)$ 만 가지고도 이 덧셈에 대해 주어진 집합이 벡터공간이 되지 않음을 보일 수 있다. 이 공간의 영벡터의 역할을 하는 벡터를 우선 찾아보자. 영벡터를 (x, y) 라고 하면, $(a, b) + (x, y) = (a + x, by) = (a, b)$ 가 되어야 한다. 따라서, $x = 0$ 이고 $y = 1$ 이어야 한다. 즉, 이 공간에서는 $(0, 1)$ 이 영벡터이다. 이제, $(1, 0)$ 의 역벡터를 찾아보자. 만일 (x, y) 가 $(1, 0)$ 의 역벡터라면, $(1, 0) + (x, y) = (1x, 0y) = (x, 0)$ 가 영벡터여야만 한다. 다시 말해, $(x, 0) = (0, 1)$ 이어야만 하는데, $0 \neq 1$ 이므로 (두번째 좌표) 어떤 (x, y) 도 역벡터가 될 수 없다. 따라서, 이 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 14. 스칼라가 \mathbb{R} 로 제한된 상태이므로, 주어진 공간이 실수 상수곱에 대해 벡터공간 공리를 만족하는지 보이면 된다. 그런데, 주어진 공간은 이미 스칼라를 \mathbb{C} 로 택했을 때 벡터 공간 공리를 만족하고, \mathbb{R} 은 \mathbb{C} 의 부분집합이므로 \mathbb{C} 에서 모두 만족한다면 \mathbb{R} 에서도 만족하게 된다. 따라서, 주어진 공간은 \mathbb{R} -벡터공간이다. \square

Problem 15. 이 경우 '닫혀 있음'이 보장되지 않는다. 예를 들어, $i \in \mathbb{C}$ 와 $(1, 1, \dots, 1) \in V$ 를 생각하자. 그러면 $i(1, 1, \dots, 1) = (i, i, \dots, i)$ 인데, 이러한 벡터는 주어진 공간 V 에 존재하지 않는다. (각 좌표가 실수가 아니기 때문) 따라서, 상수곱에 대해 닫혀있지 않으므로, 주어진 공간은 \mathbb{C} -벡터공간이 아니다. \square

Problem 16. 각 entry가 전부 실수인 $m \times n$ -행렬들을 모아놓은 공간은 이미 \mathbb{R} -벡터공간이다. \mathbb{Q} 는 \mathbb{R} 의 부분집합이므로, 문제 14에서와 동일한 논리에 의해 주어진 공간은 \mathbb{Q} -벡터공간이다. \square

Problem 17. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS5)를 만족하지 못하게 된다. $1(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ 으로부터 $a_2 \neq 0$ 인 경우에 $1v = v$ 를 만족하지 못한다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 18. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS1)을 만족하지 못하게 된다. $(1, 0) + (2, 0) = (1 + 4, 0) = (5, 0)$ 이지만, 순서를 바꾼 $(2, 0) + (1, 0) = (2 + 2, 0) = (4, 0)$ 과 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 19. 이 경우, 벡터 공간 공리 (VS8)을 만족하지 못하게 된다. $a = 2, b = 3, v = (1, 1)$ 이라고 하자. 그러면 $(a + b)v = 5v = (5, 1/5)$ 이지만, $av = (2, 1/2), bv = (3, 1/3)$ 이고 둘의 합은 $(5, 5/6)$ 으로 그 결과가 다르다. 따라서, 주어진 공간은 벡터 공간이 아니다. \square

Problem 20. 문제 12와 마찬가지로, 함수들의 집합이 벡터공간이 된다는 것을 보였으므로 (cl) : 연산에 대해 닫힘, (VS3) : 영벡터의 존재성, (VS4) : 역벡터의 존재성만 보이면 충분하다.

(cl) 임의의 함수 $f, g \in V$ 와 실수 $c \in \mathbb{R}$ 을 생각하자. $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$ 이므로 $f + g$ 또한 $x = 1$ 에서 0을 갖는다. 따라서 $f + g \in V$ 이다. 또한, $(cf)(1) = cf(1) = c0 = 0$ 에서 cf 또한 $x = 1$ 에서 0을 갖는다. 따라서 $cf \in V$ 이다.

(VS3) 영함수 $0(x) = 0$ 이 $x = 1$ 에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $0(1) = 0$ 이다. 따라서, $0 \in V$ 이다.

(VS4) 함수 $f \in V$ 에 대해, $g(x) = -f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 0을 가짐을 보이면 충분하다. 그런데, $g(1) = -f(1) = -0 = 0$ 이다. 따라서, $g \in V$ 이다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 21. 곱공간이 벡터공간임을 보이자.

(cl) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$ 와 스칼라 $c \in F$ 에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ 에서, $v + v' \in V$ 이고 $w + w' \in W$ 임은 V, W 가 벡터 공간이라는 사실(그러므로 달혀 있다는 사실)로부터 자동으로 얻어진다. 따라서, $(v, w) + (v', w') \in Z$ 이다. 마찬가지로 $c(v, w) = (cv, cw)$ 에 대해 $cv \in V$ 이고 $cw \in W$ 므로 $c(v, w) \in Z$ 이다.

(VS1) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w') \in Z$ 에 대해, $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w') = (v' + v, w' + w) = (v', w') + (v, w)$ 이므로 (VS1)이 성립한다. 이는 V, W 각각이 벡터 공간이라는 사실로부터 얻어진다.

(VS2) 임의의 벡터 $(v, w), (v', w'), (v'', w'') \in Z$ 에 대해, $((v, w) + (v', w')) + (v'', w'') = ((v + v') + v'', (w + w') + w'') = (v + (v' + v''), w + (w' + w'')) = (v, w) + ((v', w') + (v'', w''))$ 이므로 (VS2)가 성립한다. 마찬가지로, V, W 가 (VS2)를 만족하기 때문이다.

(VS3) V 의 항등원과 W 의 항등원을 각각 $0_V, 0_W$ 라고 하자. 그러면 $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$ 이므로 $(0_V, 0_W)$ 는 영벡터이다.

(VS4) $(v, w) \in Z$ 에 대해, $v \in V, w \in W$ 의 역벡터를 각각 $x \in V, y \in W$ 라고 하자. 그러면 $(v, w) + (x, y) = (v+x, w+y) = (0_V, 0_W)$ 이므로 $(x, y) \in Z$ 는 (v, w) 의 역벡터이다.

(VS5) $1(v, w) = (1v, 1w) = (v, w)$ 이므로 (VS5)가 만족된다.

(VS6) 스칼라 a, b 와 $(v, w) \in Z$ 에 대해, $(ab)(v, w) = ((ab)v, (ab)w) = (a(bv), a(bw)) = a(bv, bw) = a(b(v, w))$ 이므로 (VS6)이 만족된다.

(VS7) 스칼라 a 와 $(v, w), (v', w') \in Z$ 에 대해, $a((v, w) + (v', w')) = a(v + v', w + w') = (a(v + v'), a(w + w')) = (av + av', aw + aw') = (av, aw) + (av', aw')$ 이므로 (VS7)이 만족된다.

(VS8) 스칼라 a, b 와 $(v, w) \in Z$ 에 대해, $(a+b)(v, w) = ((a+b)v, (a+b)w) = (av + bv, aw + bw) = (av, aw) + (bv, bw) = a(v, w) + b(v, w)$ 이므로 (VS8)이 만족된다.

따라서, 주어진 집합은 벡터공간이다. \square

Problem 22. 각 entry에는 0 혹은 1만이 자리할 수 있다. 따라서, 총 mn -개의 entry에 0 또는 1을 채워넣는 방법의 수이므로, 2^{mn} 개의 matrix가 존재한다.