Partial Differential Equations

2dayclean

2025/10/14

Contents

1 Where PDEs come from

1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다. $(x, y, z, \cdots, t, \cdots)$ (2) 우리가 알고 싶어하는 함수 u가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

Definition

PDE는 독립변수들과 미지의 함수 u, 그리고 u의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

Example

PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1. $u_x + u_y = 0$ (transport equation), 더 일반적으로는, $u_x + yu_y = 0$이나 $u_x + a(x, y)u_y = 0$ 역시 transport equation이라고 불립니다.
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace equation), $\nabla^2 u = 0$과 같이 쓰기도 합니다.
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Wave equation)
4. $u_t - u_{xx} = 0$ (Heat equation)

1.2 Homogenity and Linearity of PDE

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를 $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots) = g(x, y)$라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를, $\mathcal{L}[u] = g$와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고, $\mathcal{L}[0] = 0$이 되도록 $\mathcal{L}$을 조작할 수 있습니다. 이러한 $\mathcal{L}$은 다음과 같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\to \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \cdots)\end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을 $C^\infty(\Omega)$와 같이 쓰면, $\mathcal{L}$은 일종의 operator가 됩니다.

Definition 1.1

Operator $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1. $\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2. $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히, $\mathcal{L}$이 linear하다면, $\mathcal{L}[u] = 0$은 **homogeneous linear equation**이라고 하고, $\mathcal{L}[u] = g (g \neq 0)$은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

Example

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1. $u_x + u_y = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$

2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$
4. $u_t - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

Example

Transport equation의 일종인 $u_x + yu_y = 0$은 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는 $u_x + uu_y = 0$은 linear하지 않습니다.

Example

PDE $\cos(xy^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2+y^2)$는 $\mathcal{L} = \cos(xy^2)\dfrac{\partial}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous 합니다.

Proposition 1.2

Superposition Principle : Linear한 $\mathcal{L}$에 대해 $u_1, u_2, \cdots, u_n$이 $\mathcal{L}[u] = 0$의 solution이라면, constants $c_1, \cdots, c_n$에 대해 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ 또한 $\mathcal{L}[u] = 0$의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

Example 1.3

$u = u(x,y)$에 대해, $u_{xx} = 0$의 해를 찾아 봅시다.

Recall : $u = u(x)$이고 $u'' = 0$이라면, $u(x) = c_1x + c_2$이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}(u_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 &\Longrightarrow u_x(x,y) = f(y)\\ &\Longrightarrow u(x,y) = f(y)x + g(y)\end{aligned}$$

Example 1.4

$u = u(x,y)$에 대해, $u_{xx} + u = 0$의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$의 해가 $u(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$임을 recall하고 나면, $u(x,y) = f(y)\cos x + g(y)\sin x$

Example 1.5

$u = u(x,y)$에 대해, $u_{xy} = 0$의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned}u_{xy} = 0 &\Longrightarrow (u_x)_y = 0\\ &\Longrightarrow u_x(x,y) = g(x)\\ &\Longrightarrow u(x,y) = \int g(x)dx + F(y) = G(x) + F(y)\end{aligned}$$

즉, 해는 $u(x,y) = G(x) + F(y)$와 같이 나타납니다.

1.2.1 First order linear equations

$u = u(x, y)$ 꼴의 함수에 대해, $au_x + bu_y = 0$ (*) 꼴의 transport equation이 주어져 있다고 합시다. 이 때, $a, b \neq 0$은 상수입니다. 그러면, $\mathcal{L} = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y}$인 1차 homogeneous linear equation인데, 이를 다음과 같은 두 가지 방법으로 풀어봅시다.

Geometric Method. 우선, $v = (a, b)$와 같이 표현합시다. 그러면, u의 v 방향으로의 directional derivative는 $D_v(u) = \dfrac{1}{\|v\|}(au_x + bu_y)$이고, 주어진 미분방정식 (*)은 $u(x, y)$가 v 방향으로의 line에 대해 전부 constant함을 의미합니다. 그리고, v 방향을 가지는 직선은 $bx - ay = c$ 꼴입니다. $u(x, y)$의 값은 이 c에만 의존하게 될 것이며, 따라서 arbitary한 function f에 대해 $u = f(c) = f(bx - ay)$가 됩니다.

Coordinate Method. 좌표계 (x', y')를 잡아서 $au_x + bu_y = u_{x'}$와 같이 만들 수 있다면 문제가 아주 쉬워질 것입니다. 간단하게, $y' = bx - ay$, 그리고 $x' = ax + by$와 같이 좌표계를 설정합시다. (이는 Method 1에 전적으로 의존합니다.) 그러면, chain rule에 의하여,

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x', y') = \frac{\partial u}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = au_{x'} + bu_{y'}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u(x', y') = bu_{x'} - au_{y'}$$

가 성립하고, 따라서 $u_{x'} = 0$으로 쓸 수 있습니다. 이제, $u = f(y') = f(bx - ay)$라고 쓸 수 있습니다.

Example

$u_x + yu_y = 0$

주어진 미분방정식은 $(1, y) \cdot \nabla u(x, y) = 0$으로 쓸 수 있습니다. 즉, u의 (x, y) 점에서 $(1, y)$ 방향으로의 도함수가 0입니다. 따라서, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{1}$인 curve에서 constant하고, 이 curve는 $y = Ce^x$와 같이 나타납니다. 이제 u의 값은 이 C에 의해서만 결정되므로, $u(x, y) = f(C) = f(y \cdot e^{-x})$라고 쓸 수 있습니다.

Example

$4u_x - 3u_y = 0$, initial condition : $u(0, y) = y^3$

주어진 미분방정식의 일반적인 해는 $u(x, y) = f(-3x - 4y)$입니다. 조건에 의해 $u(0, y) = f(-4y) = y^3$이므로, $f(\omega) = -\dfrac{\omega^3}{64}$이고, 따라서 $u(x, y) = \dfrac{1}{64}(3x + 4y)^3$입니다.

Example

$au_x + bu_y + cu = 0$

주어진 미분방정식에 대해 $x' = ax + by$와 $y' = bx - ay$를 통해 좌표 변환을 시행하면,

$$(a^2 + b^2)u_{x'}(x', y') + cu(x', y') = 0$$

을 얻습니다. 따라서, $u(x', y') = f(y')\exp\left[-\dfrac{c}{a^2 + b^2}x'\right]$이고, 최종적으로는

$$u(x, y) = f(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{a^2 + b^2}(ax + by)\right]$$

가 됩니다.

Example

$u_x + 2xy^2u_y = 0$

이젠 기계적으로 풀 수 있을 것 같습니다. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy^2}{1}$인 curve는 $C = x^2 + \dfrac{1}{y}$처럼 나타나고, 따라서 $u = f(x^2 + \dfrac{1}{y})$가 됩니다.

Example

$yu_x + xu_y = 0$, initial condition : $u(0, y) = e^{-y^2}$

마찬가지로, 결과만 쓰면 : $u(x, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)$

이번에는 간단히 linear nonhomogeneous equation을 푸는 방법에 대해 알아봅시다. 먼저, 다음과 같은 미분방정식을 생각합시다.

$$u_x + u_y + u = e^{x+2y}$$
$$u(x, 0) = 0$$

우선, nonhomogeneous에 대해 handle하는 법을 생각해봅시다.

Proposition 1.6

$\mathcal{L}[u] = g$ (*)와 같은 미분방정식을 생각합시다. 그리고, $u_0(x, y)$가 $\mathcal{L}[u] = 0$의 general solution이고 $u_p(x, y)$가 $\mathcal{L}[u] = g$의 특정한 한 solution이라고 둡시다. 그러면 $u_0 + u_p$는 늘 (*)의 solution이고, 이는 $\mathcal{L}$의 linearity에 의해 자명합니다.

반면, v가 (*)의 solution이라면, $\mathcal{L}[v - u_p] = 0$이므로 $v = u_p + u_0$입니다. 즉, 모든 solution은 $u_0 + u_p$ 꼴입니다.

이제, coordinate method를 이용합니다. 우선, 다음과 같이 좌표 변환을 수행합니다.

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x - y \end{cases} \Longrightarrow 2u_{x'} + u = \exp\left(\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)$$

integrating factor method를 이용합니다. $e^{x'/2}$를 양변에 곱해주면,

$$\begin{aligned}
2e^{\frac{1}{2}x'}u_{x'} + e^{\frac{1}{2}x'}u &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\
\frac{\partial}{\partial x'}(2e^{\frac{1}{2}x'}u) &= e^{2x' - \frac{1}{2}y'} \\
e^{\frac{1}{2}x'}u &= \frac{1}{4}e^{2x' - \frac{1}{2}y'} + f(y') \\
u(x', y') &= \frac{1}{4}e^{\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y'} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x'}f(y') \\
u(x, y) &= \frac{1}{4}e^{x+2y} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}f(x - y) \\
u(x, 0) &= \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}f(x) = 0 \\
(\therefore f(x) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}) \\
u(x, y) &= \frac{1}{4}\exp(x + 2y) - \frac{1}{4}\exp(x - 2y)
\end{aligned}$$

이렇게 해를 얻을 수 있습니다.

1.3 Flows, Vibrations, and Diffusion

이 절에서는 다양한 물리적인 PDE를 유도하는 방법을 배웁니다.

1.3.1 Simple transport

$u(t, x)$를 x-방향으로 pipe를 따라 수평하게 흐르는 유체의 밀도라고 두면, flow의 속도 c에 대해 다음이 성립할 것입니다.

$$\forall h > 0, u(x, t) = u(x + ch, t + h)$$

양변을 h에 대해 미분한 후 $h = 0$을 대입하면, $u_t + cu_x = 0$을 얻습니다.

1.3.2 Vibrating string

$u(t, x)$를 시간 t에 위치 x에서의 줄의 수직한 변위라고 두고, 다음과 같은 몇가지 물리적인 가정을 합시다.

1. 줄은 uniform한 density ρ를 갖습니다.
2. 줄은 완벽히 탄성적이어서 장력은 접선 방향으로만 작용합니다.
3. 줄에 걸리는 다른 힘은 없습니다.
4. 줄은 오로지 수직 방향으로만 진동합니다.
5. 진동의 진폭은 충분히 작습니다. (0에 가깝습니다.)

이제 시간 t와 위치 x에서의 줄에 걸리는 장력을 $T(x, t)$와 같이 두도록 합시다. 그러면, line segment $[x_0, x_1]$에 대해 걸리는 힘은 오로지 끝점에서의 장력 뿐입니다. 이제, 각각의 위치에서 힘을 분석합니다.

- x_0에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_0, t)\cos\theta_0 = T(x_0, t)\frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_0, t)\sin\theta_0 = T(x_0, t)\frac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$$

- x_1에서 장력 :

$$\text{Horizontal : } T(x_1, t)\frac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

$$\text{Vertical : } T(x_1, t)\frac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}}$$

따라서, 합력은 다음과 같이 주어집니다.

- Horizontal (H) : $T(x_1, t)\dfrac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t)\dfrac{1}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$
- Vertical (V) : $T(x_1, t)\dfrac{u_x(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} - T(x_0, t)\dfrac{u_x(x_0, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2}}$

조건 (5)에서 $|u_x| << 1$이고 (거의 0) 따라서 $\sqrt{1 + u_x(x_0, t)^2} \simeq \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \simeq 1$입니다. 또, 조건 (4)에서 $(\mathbf{H}) = 0$이어야 함을 알 수 있습니다. 이로부터, $T(x_1, t) - T(x_0, t) = 0$이므로 $T := T(x, t)$를 constant라고 가정할 수 있습니다. (*왜 T가 time-invariant한가?*) Vertical에서만 분석하면 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}) \simeq Tu_x(x_1, t) - Tu_x(x_0, t) &\simeq (\mathbf{mass}) \times (\mathbf{acceleration}) \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt}(x, t)dt \\
&= \rho \int_{x_0}^{x_1} u_{tt}(x, t)dt \\
Tu_{xx}(x_0, t) &= \rho u_{tt}(x_0, t)
\end{aligned}$$

이제, $c = \sqrt{T/\rho}$와 같이 정의하면 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$이라는 wave equation을 얻을 수 있습니다.

1.3.3 Vibrating Drumhead

Drumhead 영역에서, $u(x, y, t)$를 위치 (x, y)와 시간 t에서 drumhead의 equilibrium position으로부터의 변위(displacement)로 씁시다. 그러면, 1D vibration과 마찬가지로, 작은 closed region D에서 다음과 같은 식을 세울 수 있습니다.

$$F = \int_{\partial D} T\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

여기서 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$은 단순히 n 방향, 즉 outward unit normal vector로의 도함수를 의미합니다. 간단히,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} T\frac{\partial u}{\partial n}ds &= \int_{\partial D} T\nabla u\cdot nds\\ &= \iint_D \nabla\cdot(T\nabla u)ds\\ &= \iint_D T(u_{xx}+u_{yy})dxdy\end{aligned}$$

처럼 나타낼 수 있습니다. 그러므로,

$$\iint_D T(u_{xx}+u_{yy})dxdy = \iint_D \rho u_{tt}dxdy$$

가 임의의 영역 D에서 성립합니다. 이는 곧, $\rho u_{tt} = T(u_{xx}+u_{yy}) = T\Delta u$임을 의미합니다. 마찬가지의 방법으로, 3D case에서도 $u_{tt} = c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$임을 알 수 있습니다.

1.3.4 Diffusion

얇은 관 안에 유체가 가득 찬 경우를 생각합시다. 이제, $u(x,t)$를 위치 x와 시간 t에서의 물질의 밀도라고 하고, 다음을 가정합니다.

1. 유체는 직접 흐르지 않습니다. 즉, Convection이 일어나지 않습니다.
2. 유체 안의 화학종에 대해, 그 화학종의 diffusion은 Fick's law를 따릅니다.

구간 $[x_0, x_1]$ 안에 담긴 유체의 총 질량은 다음과 같을 것입니다.

$$M(t;x_0,x_1) = \int_{x_0}^{x_1} u(x,t)dx$$

따라서, 물질 보존 식에 의해 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= k\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)\right)\\ &= \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)dx\\ &= \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx\end{aligned}$$

따라서,

$$\begin{gathered}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2,t)\right]\\ \lim_{x_1\to x_0}\frac{1}{x_0-x_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx = \lim_{x_1\to x_0} k\frac{1}{x_1-x_0}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t)\right]\\ \therefore u_t(x_0,t) = ku_{xx}(x_0,t)\end{gathered}$$

인데, x_0은 임의적이므로 $u_t = ku_{xx}$라고 쓸 수 있습니다.

마찬가지로, 3D Diffusion 역시 같은 방법으로 유도되어 $u_t = k\Delta u$라고 쓸 수 있습니다.

1.3.5 Heat Flow

공간 상의 물질에 대해, $u(x,y,z,t)$를 위치 (x,y,z)와 시간 t에서 물질의 온도라고 정의합시다. 그러면,

$$\begin{gathered}\iiint_D c\rho u dxdydz =: H(t)\\ \iiint_D c\rho u_t dxdydz = \iint_{\partial D} k(\nabla u\cdot n)dS = \iiint_D \nabla\cdot(k\nabla u)dxdydz\end{gathered}$$

이므로, $c\rho u_t = \nabla \cdot (k\nabla u)$를 얻습니다. k가 상수라면, $c\rho u_t = k\nabla^2 u$이므로 Diffusion eq.와 일치합니다.

1.3.6 Stationary waves and diffusions

말 그대로 steady-state인 상황입니다. $\Delta u = 0$을 Laplace equation이라고 합니다.

1.4 Initial and Boundary conditions

$u := u(\overrightarrow{x}, t)$에 대해, 다음과 같은 조건들을 생각할 수 있습니다.

1. Initial condition(I. C.) : Fixed t_0에 대해, $u(\overrightarrow{x}, t_0) = \phi(\overrightarrow{x})$ 혹은 $\frac{\partial u}{\partial t}(\overrightarrow{x}, t_0) = \psi(\overrightarrow{x})$라고 합니다.
2. Boundary condition(B. C.)
   (a) Dirichlet B.C. : $u = g$ on ∂D인 조건을 의미합니다.
   (b) Neumann B.C. : $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = g$ on ∂D인 조건을 의미합니다.
   (c) Robin B.C. : $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g$ on ∂D인 조건을 의미합니다. (Mixed condition)

1.5 Types of second order PDE

함수 $u = u(x, y)$에 대해, 모든 linear homogeneous second order PDE는 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u = 0$$

특히, $u_{xy} = u_{yx}$이므로 다음과 같은 symmetric matrix를 자연스럽게 생각할 수 있습니다.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

이제, D를 이용해 PDE를 세 가지로 분류할 수 있습니다.

1. Elliptic case : $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ $(\det(D) < 0)$
   이 경우에는 (적절한 변수변환을 통해) $u_{xx} + u_{yy} + \cdots = 0$ 꼴로 바꿀 수 있습니다.
   e.g.) Laplace equation, $u_{xx} + u_{yy} = 0$
2. Hyperbolic case : $\det(D) > 0$
   이 경우에는 $u_{xx} - u_{yy} + \cdots = 0$ 꼴로 바꿀 수 있습니다.
   e.g.) Wave equation, $u_{xx} - u_{yy} = 0$
3. Parabolic case : $\det(D) = 0$
   이 경우에는 $u_{xx} + \cdots = 0$ 꼴로 바꿀 수 있습니다.
   e.g.) Heat equation, $u_{xx} - u_y = 0$

2 Waves and Diffusions

2.1 The wave equation

이 절에서 $u = u(x, t)$이고 Wave equation은 $u_{tt} = c^2 u_{xx} \ldots (W)$로 쓴다.

Differential operator는 $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$와 같이 주어지므로, $\mathcal{L} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$와 같이 factor out할 수 있다. 이는 wavefunction u가 C^2 function이므로, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$인 것으로부터 기인한다.

Method 1. Substitution.
안쪽의 operator를 먼저 치환해보자. 즉, $v := \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u$와 같이 정의하자. 그러면, 주어진 wave equation (W)는 $v_t - cv_x = 0$과 같이 주어진다. Transport equation의 해에 의해, v는 다음과 같을 것이다.

$$v(x,t) = h(x+ct)$$
$$u_t + cu_x = h(x+ct)$$

이 inhomogeneous transport equation을 해결하기 위하여 적절한 particular solution을 찾아야 한다. 그리고, 그것은,

$$f(s) := \frac{1}{2c}\int h(s)ds$$
$$u_p(x,t) = f(x+ct)$$

로 주어진다. 따라서,

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

와 같이 주어진다. 특히, h는 임의로 정해진 함수이므로, f 역시 그렇다. 즉, 임의의 함수 f, g에 대해 $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$는 늘 (W)의 해가 된다. ($C^2$이기만 하다면.)

Method 2. Coordinate change.
적절한 변수변환을 통해서도 파동방정식을 해결할 수 있다. 우선,

$$\xi := x + ct$$
$$\eta := x - ct$$

와 같은 변환을 생각하자. 그러면,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = c\frac{\partial}{\partial \xi} - c\frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

를 얻으며, 이로부터 $\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x} = -2c\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} = 2c\frac{\partial}{\partial \xi}$를 얻는다. 그러므로, (W)는 다음과 같이 변형된다.

$$\left(-2c\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(2c\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u = 0$$
$$u_{\xi\eta} = 0$$

이를 해결하면, $u = f(\xi) + g(\eta)$, 즉 $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$이다.

2.1.1 Initial Value Problem

지금까지 해결한 것을 토대로 IVP를 풀어보자.

$$\begin{cases} u_{tt} &= c^2 u_{xx} \\ u(x,0) &= \phi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{cases}$$

이는 간단하게 해결할 수 있다. 우선, $f(x)+g(x)=\phi(x), cf'(x)-cg'(x)=\psi(x)$로부터,

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{2}\phi(s)+\frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\tau)d\tau + \mathrm{Const}_1 \\ g(s) &= \frac{1}{2}\phi(s)-\frac{1}{2c}\int_0^s \psi(\tau)d\tau + \mathrm{Const}_2 \\ \therefore u(x,t) &= f(x+ct)+g(x-ct) \\ &= \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds \end{aligned}$$

를 얻는다.

2.1.2 General solution for wave equation

다음과 같은 Wave equation (W)를 생각하자.

$$u_{tt}=c^2u_{xx}\ldots(W)$$

이는 다음과 같이 Factoring할 수 있다.

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0\ldots(W)$$

이로부터, $\xi = x+ct, \eta = x-ct$를 생각했었던 것처럼, 일반적인 Wave equation (WG)를 생각하자.

$$(a\partial_t + b\partial_x)(c\partial_t + d\partial_x)u = 0\ldots(WG)$$

특히, $ad \neq bc$ 조건이 있다면, 다음과 같은 좌표 변환을 생각할 수 있다.

1. $\xi = dt - cx$
2. $\eta = bt - ax$

Chain rule에 의해서, 다음이 성립한다.

1. $\partial_t = d\partial_\xi + b\partial_\eta$
2. $\partial_x = -c\partial_\xi - a\partial_\eta$

따라서, $(WG) = -(ad-bc)^2\partial_\eta\partial_\xi u = 0$이고, 다음과 같은 일반해를 얻는다.

$$\begin{aligned} u &= f(\xi)+g(\eta) \\ &= f(dt-cx)+g(bt-ax) \end{aligned}$$

2.2 Causality and Energy

2.2.1 Causality

D'Alambert's Formula : $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$

특히, $u(x,t)$는 $u(s,0)$과 $u_t(s,0)$에 의해 결정되는데, 이 때 s의 범위는 다음과 같다 : $x-ct \leq s \leq x+ct$. 또한 $u(x,t_1)=\tilde{\phi}(x), u_t(x,t_2)=\tilde{\psi}(x)$을 생각하고 나면, $t'=t-t_1, u_t=u_{t'}$이므로, (x,t') coordinate에서 u는 다음 식을 만족한다.

$$\begin{cases} u_{t't'} &= c^2u_{xx} \\ u(x,0) &= \tilde{\phi}(x) \\ u_t(x,0) &= \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

달랑베르 식에 의해,

$$u(x,t') = \frac{1}{2}\left[\tilde{\phi}(x+ct') + \tilde{\phi}(x-ct')\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct'}^{x+ct'} \tilde{\psi}(s)ds$$

이 성립한다. 이제, $t' = t - t_1$로 두면,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\tilde{\phi}(x+c(t-t_1) + \tilde{\phi}(x-c(t-t_1)))\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} \tilde{\psi}(s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left[u(x+c(t-t_1),t_1) + u(x-c(t-t_1),t_1)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-t_1)}^{x+c(t-t_1)} u_t(x,t_1)dx \end{aligned}$$

즉, (x_0,t_0)에서의 정보는 오로지 $u(x,t)$에서 $x_0 - c(t-t_0) \le x \le x_0 + c(t-t_0)$의 정보만에 영향을 줄 수 있다. 이를 **인과성 원리**(Principle of Causality)라고 한다.

2.2.2 Energy

Constant한 density ρ와 tension T를 갖는 무한히 긴 string을 생각하자. ($c^2 = T/\rho$) 그러면 이 파동은 $\rho u_{tt} = Tu_{xx}, -\infty < x < \infty$를 따르게 될 것이다. 이 때, 줄의 운동 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{KE} := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2(x,t)dx$$

이 적분이 수렴하길 원하므로, $\phi(x)$와 $\psi(x)$는 $-R \le x \le R$에서 vanish한다고 가정하자. 그러면, $u(x,t)$와 $u_t(x,t)$는 $-R-ct \le x \le R+ct$ 밖에서 vanish하므로, 문제 없이 잘 수렴한다. 이제,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{KE} &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\rho\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(u_t^2)dx \\ &= \rho\int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{tt} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} T u_t u_{xx} dx \\ &= T u_t u_x|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} T u_{tx} u_x dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}T u_x^2\right)dx \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{d}{dt}\left(\text{KE} + \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)^2 dx\right) = 0$$

이다. 따라서,

$$\text{PE} := \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

라고 정의하고, $\text{E} = \text{KE} + \text{PE}$라고 정의하면, 에너지 보존 식이 유도된다.

$$\frac{d\,\text{E}}{dt} = 0$$

2.3 Diffusion equation

이 절에서 $u = u(x,t)$이고 Diffusion equation은 $u_t = ku_{xx} \ldots (D)$로 쓴다. (단, $k > 0$)

Theorem 2.1

Maximum Principle : $u = u(x,t)$가 (D)를 rectangle $R := \{(x,t) \mid 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$에서 만족시킨다면, u는 최대값을 R의 bottom, 즉 $\{(x,0) \mid 0 \le x \le l\}$에서 혹은 lateral side, 즉 $\{(x,t) \mid x = 0 \text{ or } l, 0 \le t \le T\}$에서만 갖는다.

Remark. 위의 maximum principle은 u가 R의 interior나 top에서 최대값을 갖지 못함을 주장해주지 못한다. 그러므로, 이를 'weak' maximum principle이라고 부른다. 그에 대한 counterpart로, 'strong' maximum principle이 존재하고 이는 R이 정말로 top과 interior에서 최대값이 갖지 못함을 주장한다.

Terminology. 위에서 언급한 R의 bottom과 laterial side를 합쳐서 R의 **Parabolic Boundary**라고 부른다. 반면, R의 interior와 top을 합쳐서 R의 **Parabolic Interior**라고 부른다.

Proof of weak Maximum Principle.
우선, u가 R의 interior point $p_0 = (x_0, t_0)$에서 maximum을 갖는다고 하자. 즉, $0 < x_0 < l$이고 $0 < t_0 < T$이다. 그러면, $u_x(p) = 0$이고 $u_{xx}(p) \le 0$이어야 하며, $u_t(p) = 0$일 것이다. 따라서, p에서는,

$$0 = u_t(p) = ku_{xx}(p) \le 0$$

로부터 반드시 $u_{xx} = 0$이어야만 한다. 반대로, 만일 함수 v가 R에서 $v_t < kv_{xx} \ldots (*)$를 만족한다면, v는 R의 안점에서 maximum을 가질 수 없다. // 이제 M을 u의 parabolic boundary of R에서의 최대값이라고 하자. u가 연속이고 parabolic boundary는 그 정의에 의해 closed이므로 M을 늘 찾을 수 있다. 임의의 양수 ϵ에 대해, "perturbation" $v = u + \epsilon x^2$를 생각하자. 그러면,

$$v_t = u_t = ku_{xx} = k(v_{xx} - 2\epsilon) = kv_{xx} - 2k\epsilon < kv_{xx}$$

이므로 v는 $(*)$을 만족한다. 따라서, v는 R의 interior에서는 maximum을 가질 수 없다. 이제, v가 top에 속한 $p_1 = (x_1, t_1)$에서 maximum을 갖는다고 가정하자. 그러면, 자명히 $v_{xx}(p_1) \le 0$이고,

$$v_t(p_1) = \lim_{h \to 0-} \frac{v(x_1, t_1 + h) - v(x_1, t_1)}{h} \ge 0$$

이 성립한다. 따라서, $v_{xx} \le 0 \le v_t$이므로 $(*)$에 모순된다. 즉, v는 R의 parabolic interior에서는 maximum을 갖지 못한다. 또한, 자명히 parabolic boundary에서는 $v = u + \epsilon x^2 \le M + \epsilon x^2 \le M + \epsilon l^2$이므로,

$$u(x,t) = v(x,t) - \epsilon x^2 \le M + \epsilon l^2 - \epsilon x^2 \le M + \epsilon l^2$$

가 R 전체에서 성립한다. 그런데 ϵ의 선택은 arbitary하므로, u는 R에서 $u \le M$이다.

2.3.1 Uniqueness of solution

다음과 같은 Dirichlet problem $(\tilde{D})$를 생각하자.

$$(\tilde{D}) \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t) & 0 < x < l \text{ and } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0,t) = g(t), u(l,t) = h(t) \end{cases}$$

그러면, $(\tilde{D})$의 solution은 유일하다. 이를 증명하기 위해, $(\tilde{D})$의 두 근 u_1, u_2와 $w := u_1 - u_2$를 생각하자.

Method 1 : *Maximum Principle*
Maximum principle에 의해, $T > 0$에 대해 $R_T := \{(x,t) \mid 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$에서 w의 최대값은 R_T의 parabolic boundary에 놓여야 하고, 이는 자명히 0이다. 임의의 $T > 0$에 대해 성립하므로, $R_\infty := \{(x,t) \mid 0 \le x \le l, 0 \le t\}$에서의 최대값 역시 0이다. 마찬가지로, $-w = u_2 - u_1$ 역시 최대값이 0이고 이는 w가 R_∞에서 $w \equiv 0$임을 의미한다. 즉, $u_1 = u_2$이다.

Methode 2 : *Energy.*

간단한 수학적 trick을 이용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot w = (w_t - kw_{xx}) \cdot w &= w_t \cdot w - kw_{xx} \cdot w \\ &= \frac{1}{2}(w^2)_t - k(w_x \cdot w)_x + kw_x^2 \end{aligned}$$

양변을 적분하면,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{1}{2}(w^2)_t dx - k\int_0^l (w_x \cdot w)_x dx + k\int_0^l w_x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^l w^2 dx\right] - k\left[w_x \cdot w\right]_{x=0}^{x=l} + k\int_0^l w_x^2 dx \end{aligned}$$

즉,

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^l w(x,t)^2 dx\right] \le 0$$

$$0 \le \int_0^l w(x,t)^2 dx \le \int_0^l w(x,0)^2 dx = 0$$

따라서, $\int_0^l w(x,t)^2 dx = 0$이 모든 t에 대해 성립하며, w의 continuity에 의해 $0 < x < l, 0 \le t$에서 $w \equiv 0$이다. 곧, $0 \le x \le l, t \le 0$에서 $u_1 = u_2$이다.

2.3.2 Stability of solution

다음과 같은 식을 만족하는 u_i $(i = 1, 2)$를 생각하자.

$$\begin{cases} (u_i)_t - k(u_i)_{xx} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u_i(0,t) = u_i(l,t) = 0 & t > 0 \\ u_i(x,0) = \phi_i(x) & 0 < x < l \end{cases}$$

이제, $w = u_1 - u_2$로 놓으면 w는 Initial condtion으로 $w(x,0) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$를 갖는다. Energy method에서 사용한 방법을 그대로 적용하면,

$$\int_0^l w(x,t)^2 dx \le \int_0^l w(x,0)^2 dx; t > 0$$

$$\int_0^l (u_1 - u_2)^2 dx \le \int_0^l (\phi_1 - \phi_2)^2 dx; t > 0$$

즉, $\|u_1 - u_2\|_2 \le \|\phi_1 - \phi_2\|_2$이다.

또다른 방법으로, maximum principle을 사용할 수 있다. $R_T := \{\, (x,t) \mid 0 \le x \le l, 0 \le t \le T \,\}$에서,

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \max_{0 \le x \le l} |\phi_1(x) - \phi_2(x)|$$

$$u_2(x,t) - u_1(x,y) \le \max_{0 \le x \le l} |\phi_2(x) - \phi_1(x)|$$

이므로, $\max_{0 \le x \le l} |u_1 - u_2| \le \max_{0 \le x \le l} |\phi_1 - \phi_2|$가 성립한다. 즉, $\|u_1 - u_2\|_\infty \le \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty$이다.

2.4 Diffusion in the whole line

다음과 같은 Diffusion equation을 생각하자.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \ldots (*) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

그러면, (*)를 만족하는 solution $u(x,t)$에 대해, 다음과 같은 성질들이 만족된다.

1. 임의의 $y \in \mathbb{R}$에 대해, $v(x,t) := u(x-y,t)$ 역시 (*)의 solution이다.
   pf. $v_t(x,t) = u_t(x-y,t)$이고, $v_{xx}(x,t) = u_{xx}(x-y,t)$이므로 v 역시 (*)의 solution이다.

2. 임의의 u의 derivative $u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, \cdots$ 역시 (*)의 solution이다.
   pf. u가 smooth함을 가정하므로, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} (u_x)_t = (u_t)_x = (ku_{xx})_x = k(u_x)_{xx} \\ (u_t)_t = (ku_{xx})_t = k(u_t)_{xx} \end{aligned}$$

   따라서, 임의의 derivative 역시 solution이 된다.

3. (*)의 solution의 linear combination 역시 (*)의 solution이 된다.
   pf. 이는 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$가 linear하므로 자명하다.

4. 임의의 $g(y)$에 대해, 이 improper integral이 적절히 수렴하는 한 $v(x,t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x-y,t)g(y)dy$ 역시 (*)의 solution이 된다.
   Note. 여기서 이 improper integral이 *적절히* 수렴한다는 것은, 다음이 만족된다는 것이다.

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &:= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(x-y,t)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x-y,t)g(y)dy \\ v_{xx}(x,t) &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} u(x-y,t)g(y)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x-y,t)g(y)dy \end{aligned}$$

   pf. 다음에 의해 증명된다.

$$\begin{aligned} v(x,t) &:= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} u(x-y,t)g(y)dy \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u(x-y_i,t)g(y_i)\Delta y\right] \end{aligned}$$

   여기서 $\Delta y = \dfrac{2R}{n}$이고 $y_i = -R + i\Delta y$이다. 특히, g가 *아주 좋은* 성질을 만족하고 있다고 가정하고 있고, v가 solution의 sequence의 극한이므로 v 역시 solution이다.

5. (Dilation) 임의의 $a > 0$에 대해 $v(x,t) := u(\sqrt{a}x, at)$ 역시 (*)의 solution이다.
   pf. 다음에 의해 성립한다.

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &:= au_t(\sqrt{a}x, at) \\ v_x(x,t) &:= \sqrt{a}u_x(\sqrt{a}x, at) \\ v_{xx}(x,t) &:= au_{xx}(\sqrt{a}x, at) \end{aligned}$$

이를 이용하여 다음과 같은 (DPI)를 만족하는 함수 $Q(x,t)$를 찾을 것이다.

$$\text{(DPI)}\begin{cases} Q_t = kQ_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t \\ Q(x,0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

이 initial condition은 다음과 같은 sense에서 생각할 수 있다.

$$\lim_{t\to 0+} Q(x,t) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

특히, $Q(x,t)$는 $(x,t) \mapsto (\sqrt{a}x, at)$에 의해 invariant하다. 즉, $\tilde{Q}(x,t) = Q(\sqrt{a}x, at)$ 역시 (DPI)의 해가 된다. 해의 Uniqueness에 의하여, $Q(x,t) = \tilde{Q}(x,t) = Q(\sqrt{a}x, at)$이다. 따라서, $Q(x,t)$는 $\dfrac{x}{\sqrt{t}}$에 의존하는 함수이다. (similarity parameter)

따라서, $Q(x,t) := g\left(\dfrac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$와 같이 놓자. 그러면,

$$\begin{aligned}
Q(x,t) &= g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \\
Q(x,t) &= g(p) \\
Q_t &= \frac{\partial}{\partial t}\left[g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right] = -\frac{p}{2t}g'(p) \\
Q_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left[g\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)\right] = g'\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4kt}} \\
Q_{xx} &= g''(p)\frac{1}{4kt}
\end{aligned}$$

따라서, Q가 (*)를 만족한다면 g는 $g''(p) + 2pg'(p) = 0$을 만족한다. 따라서,

$$\begin{aligned}
g(p) &= C_1 \int_0^p e^{-q^2} dq + C_2 \\
Q(x,t) &= C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-q^2} dq + C_2
\end{aligned}$$

이제, initial condition에 의하여,

$$Q(x,t) = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) + \frac{1}{2}$$

라고 놓을 수 있다.

이제, $S(x,t) := \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,t)$로 정의하자. Property (2)에 의해, S 역시 $S_t = kS_{xx}$를 만족한다. Initial condition $u(x,0) = \phi(x)$에 대해, $u(x,t)$를 다음과 같이 정의하면 Property (4)에 의해 u 역시 $u_t = ku_{xx}$를 만족한다.

$$u(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy$$

이제, 이 함수가 $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \phi(x)$를 만족함을 보일 것이다.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial Q}{\partial y}(x-y,t)\phi(y)dy \\
&= -Q(x-y,t)\phi(y)|_{y=-\infty}^{y=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,t)\phi'(y)dy
\end{aligned}$$

그런데, ϕ는 빠르게 decay하는 함수이므로, $\phi(\infty) = \lim_{y\to\infty} \phi(y) = 0$이고 $\phi(-\infty) = \lim_{y\to infty} \phi(y) = 0$이다. 또한,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} Q(x-y,t) &= \lim_{x\to-\infty} Q(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\infty} e^{-p^2}dp = 0 \\
\lim_{y\to-\infty} Q(x-y,t) &= \lim_{x\to\infty} Q(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-p^2}dp = 0
\end{aligned}$$

을 만족하므로, 위의 부분적분에서 $y = -\infty, \infty$에서 limit이 stably 0이 된다.

$$
\begin{aligned}
\therefore u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,t)\phi'(y)dy \\
\lim_{t\to 0+} u(x,t) &= \lim_{t\to -+} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,t)\phi'(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to 0+} Q(x-y,t)\phi'(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \phi'(y)dy = \phi(x) - \phi(-\infty) = \phi(x)
\end{aligned}
$$

따라서, $u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy$는 주어진 미분방정식의 해가 된다.

Recall. S는 explicit하게 다음이 된다.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2}dp\right] \\
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}
\end{aligned}
$$

위의 Recall으로부터,

$$
u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right]\phi(y)dy
$$

이러한 u가 초기조건 $u(x,0) = \phi(x)$를 갖는 diffusion equation의 해이다.

Proposition 2.2

$S(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$는 **source function, Green's function, Fundamental solution, Gaussian** 또는 **Propagator of Diffusion equation**이라고 불리고, 다음과 같은 성질을 갖는다.

1. $S(x,t) \ge 0$이고 $S(x,t) = S(-x,t)$이다.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)ddx = 1$이다.
3. $x \neq 0$이면 $\displaystyle\lim_{t\to 0+} S(x,t) = 0$이고, $x = 0$이면, $\displaystyle\lim_{t\to 0+} S(x,t) = \infty$이다.

특히, $S(x,t)$의 $t \to 0+$에서의 극한을 Dirac delta라고 하며, $\delta(x) := \displaystyle\lim_{t\to 0+} S(x,t)$이다.

Definition 2.3

Dirac Delta distribution : Dirac delta δ는 다음과 같은 $C_c^{\infty}(\mathbb{R})$에서 $\mathbb{R}$로 가는 linear mapping으로 정의된다.

$$
\delta[\phi] = \phi(0)
$$

Heuristically, dirac delta를 $x \neq 0$에서 $\delta(x) = 0$이고 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$인 함수로 취급할 수 있다.

Dirac delta는 heaviside step function $Q(x,0)$의 weak derivative로 생각될 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Q(x,0)\phi'(x)dx &= \int_{0}^{\infty} \phi'(x)dx \\ &= \phi(\infty) - \phi(0) = -\phi(0) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

2.4.1 Physical interpretation of the fundamental solution

초기에, $x=0$에 1만큼의 heat을 가지고 있는 무한히 긴 막대기를 생각하자. 그러면, $x=0$인 점은 계속해서 cooling 되고, rod 전체로 퍼져나갈 것이다. 특히, (1) 이 propagation의 속도는 무한히 빠르며 (2) 늘 $\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)dx = 1$이므로, heat의 loss가 없다.

2.4.2 Heuristic approach to the general solution via the fundamental solution

$S(x,t)$는 당연히 다음과 같은 Diffusion equation의 solution이다.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

임의의 $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$(initial function)에 대해, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\phi(x-y)ddy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)\phi(y)ddy \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \delta(x-y)\phi(y)dy \\ &= \lim_{R\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \delta(x-y_i)\phi(y_i)\Delta y\end{aligned}$$

여기서 $\Delta y = \frac{2R}{N}$이고 $y_i = -R + i\Delta y$이다. 각 i에 대해 $S(x-y_i,t)$는 초기조건이 $u(x,0) = \delta(x-y_i)$인 solution 이므로, $\sum_{i=1}^{N} S(x-y_i,t)\phi(y_i)\Delta y$은 $u(x,0) = \sum_{i=1}^{N} \delta(x-y_i)\phi(y_i)\Delta y$의 해가 된다. N과 R에 ∞로의 극한을 취하면, 이는 $\lim_R \lim_N \sum_{i=1}^{N} \delta(x-y_i)\phi(y)dy = \phi(x)$를 초기조건으로 갖는 해가 된다.

2.4.3 Example of diffusion equation

다음의 Diffusion equation을 해결해보자.

$$u_t = ku_{xx}u(x,0) \qquad = e^{-x}$$

이 해는,

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-y} ddy \\ &= e^{-x+kt}\end{aligned}$$

2.5 Comparison of waves and diffusions

1. Propagation speed
   - Wave : finite $\leq c$

- Diffusion : speed $= \infty$

2. Singularities for $t > 0$
   - Wave : transported along characteristics, $(x_0 \pm ct, t)$ for every $t > 0$
   - Diffusion : lost immediately (Consider S, the fundamental solution)
3. Well-posedness : both OK.
4. Well-posedness for $t < 0$
   - Wave : Yes.
   - Diffusion : No. Consider the following :

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \\ u(x,0) &= S(x,1) \end{aligned}$$

   translation-invariance에 의해, $u(x,t) = S(x,t+1)$은 solution이고, $u(0,t) = S(0,t+1)$은 $t \to -1+$에서 $\to \infty$, 발산한다.

5. Maximum principle : Wave No, but Diffusion Yes.
6. Behaivor as $t \to \infty$
   - Wave : $u(x,t) \not\to 0$ as $t \to \infty$ in general.
   - Diffusion : $u(x,t) \to 0$ as $t \to \infty$, if $u(x,0) = \phi(x)$ is integrable.
7. Information
   - Wave : Transferred.
   - Diffusion : Lost gradually.

3 Reflections and Sources

3.1 Diffusion on the half-line

3.1.1 Zero Dirichlet boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$\text{(DD)} : \begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ v(x,0) = \phi(x) & x > 0 \\ v(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

이는 **odd extension**을 사용하여 해결할 수 있다.

$$\phi_{\text{odd}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

따라서, $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi_{\text{odd}}(y)dy$는 solution이 되고, x에 대해 odd하다. 따라서, $v(x,t) := u(x,t)$ on $x \geq 0, t > 0$으로 두면 v는 (DD)의 solution이 된다. 특히, v는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi_{\text{odd}}(y)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} S(x-y,t)\phi_{\text{odd}}(y)dy + \int_{-\infty}^{0} S(x-y,t)\phi_{\text{odd}}(y)dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \left[S(x-y,t) - S(x+y,t)\right]\phi(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{0}^{\infty}\left\{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) - \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{4kt}\right)\right\}\phi(y)dy \end{aligned}$$

Example : 만일 $\phi(x) = 1$이라면,

$$u(x,t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right)$$

3.1.2 Zero Neumann boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$\text{(DN)} : \begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ w(x,0) = \phi(x) & 0 < x < \infty \\ w_x(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

이번에는 **even extension**을 사용하여 해결할 수 있다.

$$\phi_{\text{even}}(x) := \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ \phi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

따라서, 해는 다음과 같다.

$$w(x,t) = \int_{0}^{\infty} \left[S(x-y,t) + S(x+y,t)\right]\phi(y)dy$$

Example : 만일 $\phi(x) = 1$이라면,

$$u(x,t) = 1$$

3.2 Reflection of waves

3.2.1 Zero Dirichlet boundary value problem

다음의 문제를 해결해 보자.

$$\text{(WD)} : \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < \infty, -\infty < x < \infty \\ v(x,0) = \phi(x), v_t(x,0) = \psi(x) & 0 < x < \infty \\ v(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

따라서, odd extension에 대해,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi_{\text{odd}}(x+ct) + \phi_{\text{odd}}(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(y)dy$$

가 성립한다. 만일, $t > 0$이라면 explicit하게 다음을 얻을 수 있다.

1. Case 1 : $x > ct$, 즉 $x + ct > x - ct > 0$.

$$v = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy$$

2. Case 2 : $0 < x \le ct$, 즉 $x - ct < 0 \le x + ct$.

$$v = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) - \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y)dy$$

따라서, 일종의 "반사"가 일어남을 알 수 있다.

3.2.2 Dirichlet problem on a finite interval

다음의 문제를 해결해 보자.

$$\text{(WDF)} : \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 & 0 < x < l \\ v(x,0) = \phi(x), v_t(x,0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

따라서, 다음과 같은 **extension**을 생각하자.

$$\phi_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} \phi(x) & 0 < x < l \\ -\phi(-x) & -l < x < 0 \\ \text{period 2l.} \end{cases}$$

즉,

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi_{\text{ext}}(x-ct) + \phi_{\text{ext}}(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{ext}}(y)dy$$

특히, $2l < x + ct < 3l, -l < x - ct < 0$에서는 다음과 같다.

$$v = \frac{1}{2}\left[-\phi(ct-x) + \phi(x+ct-2l)\right] - \frac{1}{2l}\int_{x+ct-2l}^{ct-l} \psi(y)dy$$

3.3 Diffusion with a source

다음과 같은 'Source가 있는 diffusion equation'을 생각해 보자.

$$\text{(DS)} : \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, 다음과 같은 ODE에서의 Heuristic approach를 생각해보자.

$$\text{ODE} : \begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

적분 인자(integrating factor)로부터, 다음과 같은 해를 얻는다.

$$u(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)ds + e^{-At}\phi$$

식을 관찰해봤을 때, homogeneous solution인 $e^{-At}\phi$로부터 (1) t를 $t - s$로 바꾸고 (2) ϕ를 nonhomogeneous term인 $f(s)$로 바꿔서 적분했음을 알 수 있다. (DS)에 대응하는 homogeneous equation (DSH)의 해는 다음과 같음을 우리는

알고 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy$$

이를 일종의 operator가 적용된 것으로 생각하여, $\mathfrak{S}[\phi](t)$로 쓰자. 그러면, ODE를 통한 heuristic approach로부터, 다음이 (DS)의 해일 것이라고 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathfrak{S}[\phi](t) + \int_0^t \mathfrak{S}[f(-,s)](t-s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds
\end{aligned}$$

이제, 이 u가 실제로 (DS)의 해가 됨을 보이자. Diffusion equation의 linearity에 의해, $\mathfrak{S}[\phi](t)$는 이미 (DSH)의 해이므로, 두번째 항이 zero initial condition $\phi = 0$을 갖는 (DS)의 해가 됨을 보이면 된다. 이제, $v(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds$라고 하자. 그러면, $t > 0$에서,

$$\begin{aligned}
v_t(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,0)f(y,t)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds \\
&= f(x,t) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_t(x-y,t-s)f(y,s)dyds
\end{aligned}$$

이고,

$$v_{xx} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

이므로, $v_t - v_{xx} = f(x,t)$이다. Initial condition의 경우에는,

$$\lim_{t\to 0+} v(x,t) = \lim_{t\to 0+} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds = 0$$

으로부터 확인할 수 있다. (엄밀히 : 이게 왜 성립할까?) 따라서, 다음과 같은 해를 우리가 얻는다.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds$$

3.3.1 Diffusion with source on a half line

Case 1. Dirichlet boundary condition

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = f(x,t) & 0 < x < \infty, 0 < t < \infty \\ v(x,0) = \phi(x) \\ v(0,t) = h(t) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, $V(x,t) = v(x,t) - h(t)$를 생각하면,

$$\begin{cases} V_t - kV_{xx} = f(x,t) - h'(t) \\ V(x,0) = \phi(x) - h(0) =: \tilde{\phi(x)} \\ V(0,t) = 0 \end{cases}$$

이를 얻고, "odd extension"을 이용하여 다음과 같은 해를 얻을 수 있다.

$$\tilde{V}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\tilde{\phi}_{\mathrm{odd}}(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t-s)\cdot(f(y,s)-h'(s))dyds$$

Case 2. Neumann boundary condition

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = f(x,t) & 0 < x < \infty \\ w(x,0) = \phi(x) \\ w_x(0,t) = h(t) \end{cases}$$

이를 해결하기 위하여, $W(x,t) = w(x,t) - xh(t)$를 생각하면,

$$\begin{cases} W_t - kW_{xx} = f(x,t) - xh'(t) \\ W(x,0) = \phi(x) - xh(0) =: \tilde{\phi(x)} \\ W_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

3.4 Wave with a source

다음과 같은 source가 있는 wave equation을 생각하자.

$$\text{(WS)} = \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Theorem 3.1

(WS)는 다음과 같은 형태의 unique solution을 갖는다.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \phi(s)dx + [\text{nonhomogeneous term}]$$