Partial Differential Equations

2dayclean

2025/09/02

Contents

1 Where PDEs come from

1.1 What is PDE

편미분방정식, PDE를 살펴보면 다음과 같은 요소가 있음을 알 수 있습니다. : (1) 하나보다 많은 독립변수들이 있습니다. $(x, y, z, \cdots, t, \cdots)$ (2) 우리가 알고 싶어하는 함수 u가 있어서 이 독립변수들에 의해 나타납니다. 따라서, PDE란 다음과 같습니다.

Definition

PDE는 독립변수들과 미지의 함수 u, 그리고 u의 편도함수 사이의 identity(혹은 equation)이다.

또한, 이러한 PDE의 **order**는 식에 나타나는 도함수의 가장 높은 order를 의미합니다.

Example

PDE에는 다음과 같은 예시들이 있습니다.

1. $u_x + u_y = 0$ (transport equation), 더 일반적으로는, $u_x + yu_y = 0$이나 $u_x + a(x, y)u_y = 0$ 역시 transport equation 이라고 불립니다.
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace equation), $\nabla^2 u = 0$과 같이 쓰기도 합니다.
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Wave equation)
4. $u_t - u_{xx} = 0$ (Heat equation)

1.2 Homogenity and Linearity of PDE

앞으로도 거의 계속, 2-dimensional한 case에 대해서만 다룹니다.

일반적으로, PDE를 $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \cdots) = g(x, y)$라고 쓸 수 있을 것입니다. 이를, $\mathcal{L}[u] = g$와 같이 표현하면 좋을 것입니다. 특히, 일반성을 잃지 않고, $\mathcal{L}[0] = 0$이 되도록 $\mathcal{L}$을 조작할 수 있습니다. 이러한 $\mathcal{L}$은 다음과 같이 set of function에서 set of function으로의 mapping으로 생각할 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \{\text{functions}\} &\to \{\text{functions}\} \\ v &\mapsto \mathcal{L}[v] = F(x, y, v_x, v_y, \cdots) \end{aligned}$$

특히, domain과 codomain을 $C^\infty(\Omega)$와 같이 쓰면, $\mathcal{L}$은 일종의 operator가 됩니다.

Definition 1.1

Operator $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$가 **linear**하다는 것은 다음을 만족하는 것입니다.

1. $\mathcal{L}[u+v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$
2. $\mathcal{L}[cu] = c \cdot \mathcal{L}[u]$

특히, $\mathcal{L}$이 linear하다면, $\mathcal{L}[u] = 0$은 **homogeneous linear equation**이라고 하고, $\mathcal{L}[u] = g(g \not\equiv 0)$은 **inhomogeneous linear equation**이라고 합니다.

Example

다음은 전부 homogeneous linear equation입니다.

1. $u_x + u_y = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$
2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$
3. $u_{tt} - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$
4. $u_t - u_{xx} = 0$, 이 때 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

Example

Transport equation의 일종인 $u_x + yu_y = 0$은 $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$로 나타나며 linear하고 homogeneous합니다. 반면, Burger's equation이라고 불리는 $u_x + uu_y = 0$은 linear하지 않습니다.

Example

PDE $\cos(xy^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2 + y^2)$는 $\mathcal{L} = \cos(xy^2)\dfrac{\partial}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$와 같이 나타나며 linear하고 inhomogeneous 합니다.

Proposition 1.2

Superposition Principle : Linear한 $\mathcal{L}$에 대해 $u_1, u_2, \cdots, u_n$이 $\mathcal{L}[u] = 0$의 solution이라면, constants $c_1, \cdots, c_n$에 대해 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ 또한 $\mathcal{L}[u] = 0$의 solution입니다.

이는 딱히 증명할 필요는 없을 것 같습니다.

Example 1.3

$u = u(x, y)$에 대해, $u_{xx} = 0$의 해를 찾아 봅시다.

Recall : $u = u(x)$이고 $u'' = 0$이라면, $u(x) = c_1x + c_2$이다.

해는 따라서 다음과 같습니다.

$$
\begin{aligned}
(u_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) = 0 &\Longrightarrow u_x(x, y) = f(y) \\
&\Longrightarrow u(x, y) = f(y)x + g(y)
\end{aligned}
$$

Example 1.4

$u = u(x, y)$에 대해, $u_{xx} + u = 0$의 해를 찾아봅시다.

$u'' + u = 0$의 해가 $u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$임을 recall하고 나면, $u(x, y) = f(y) \cos x + g(y) \sin x$

Example 1.5

$u = u(x, y)$에 대해, $u_{xy} = 0$의 해를 찾아보면,

$$\begin{aligned} u_{xy} = 0 &\implies (u_x)_y = 0 \\ &\implies u_x(x, y) = g(x) \\ &\implies u(x, y) = \int g(x)dx + F(y) = G(x) + F(y) \end{aligned}$$

즉, 해는 $u(x, y) = G(x) + F(y)$와 같이 나타납니다.