

# Nonlinear dynamics and chaos

2dayclean

2025/09/11

## Contents

<b>1</b>	<b>Flows on the Line</b>	<b>2</b>
1.1	Flows on the line . . . . .	2
1.2	Autonomous system . . . . .	2
1.3	Fixed points and its stability . . . . .	3
1.3.1	Population - growth . . . . .	4
1.3.2	Linear stability analysis . . . . .	4
1.4	Existence and Uniqueness . . . . .	4
1.4.1	Impossibility of oscillation . . . . .	5
1.5	As a Potential . . . . .	5

# 1 Flows on the Line

## 1.1 Flows on the line

Flows on the line이란  $\dot{x} = f(x)$ 와 같은 one-dimensional dynamical system을 의미하며, 이를 **flow** 혹은 **vector field**라고 부른다.

### Example

$\dot{x} = \sin(x)$ 의 해는 어떻게 주어지는가?

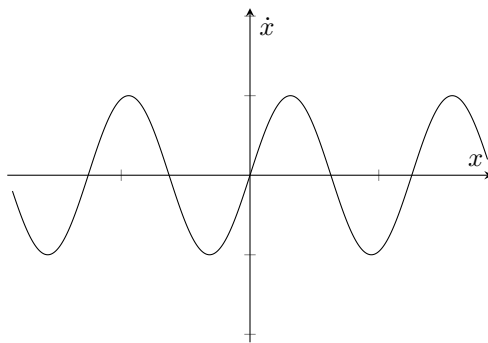
다음과 같이 변수분리법을 사용할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt \implies t = \int \csc(x) dx + C = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

따라서, initial condition  $x(0) = x_0$ 이 주어지면,

$$t = \ln \left| \frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \right|$$

와 같이 쓸 수 있다. 그러나 대체 이 해는 어떻게 생겼는가?  $x = x(t)$  꼴로 explicit하게 알 방법이 없다. Qualitative 분석을 위하여 우리는 다음과 같은  $x - \dot{x}$  plot을 이용할 수 있다.



$\dot{x} = 0$ 인 점에서는 흐름이 없고,  $\dot{x} > 0$ 인 점에서는  $x$ 가 증가하는 방향으로 흐를 것이고(flow to right),  $\dot{x} < 0$ 인 점에서는  $x$ 가 감소하는 방향으로 흐를 것이다(flow to left). 이를 이용하면 qualitative하게 해를 분석할 수 있을 것이다. (do it yourself.)

## 1.2 Autonomous system

$$\dot{x} = f(x)$$

만일  $x(t)$ 가  $x(0) = x_0$ 인 solution이라면,  $x(t - t_0)$  with  $x(t_0) = x_0$  역시 이 system의 해일 것이다.

### Proof

$t' := t - t_0$ 으로 두자. 그러면,

$$\frac{dx}{dt'}(t') = \frac{dx}{dt}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(x(t'))$$

가 되고  $x(t' = 0) = x(t = t_0) = x_0$ 이 되므로,  $x(t - t_0)$  역시 해이고 따라서 일반성을 잃지 않고  $t_0 = 0$ 을 가정할 수 있다.  $\square$

### 1.3 Fixed points and its stability

$$f(x^*) = 0$$

점  $x^*$ 를 flow의 fixed point라고 하며, critical point, equilibrium point, 혹은 steady-state라고 부르기도 한다.

**Note** : What is the difference between equilibrium and steady-state?

공통적으로는 두 상태 모두 time-invariant하다는 것이다. 그러나, **equilibrium**은  $\nabla f = 0$ , 즉 공간적으로도 uniform한 상황을 의미하고, **steady-state**는 공간적으로는 uniform하지 않을 수도 있다.

Fixed point의 stability는 다음과 같이 구분할 수 있다.

1.  $x^*$  is **stable** (혹은 *asymptotically Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로는 모두 고정점을 향할 때. 즉,

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x_0 > 0 \text{ with } |x^* - x_0| < \delta, \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^*| = 0.$$

2.  $x^*$  is **unstable** : some arbitrary small perturbation이 시간이 지남에 따라 grow할 때. 즉, stable하지 않는 모든 경우.

3.  $x^*$  is **neutrally-stable** (혹은 *Lyapunov stable*) : 고정점 근처의 경로가 계속해서 고정점 근처에 있을 때. 즉,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \varepsilon \text{ for } t > 0$$

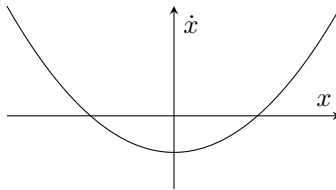
이를 좀 더 “연속” 적이게 쓰면 다음과 같다.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |\phi_t(x_0) - \phi_t(x^*)| < \varepsilon \text{ for } t > 0$$

#### Example

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

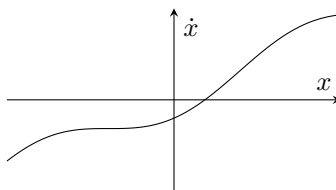
고정점은  $x^* = 1, -1$ 이고  $x = 1$ 에서 unstable,  $x = -1$ 에서 stable하다.



#### Example

$$\dot{x} = x - \cos(x)$$

고정점은 하나 존재하고, 여기서 unstable하다.



## 1.3.1 Population - growth

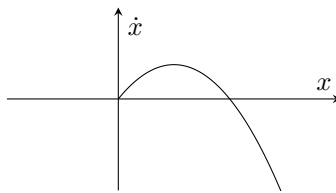
다양한 비선형 생물 시스템 중 ecosystem에 대한 연구가 제일 많이 이루어져 있고, 다루기가 상대적으로 간단하다.

$$\dot{N} = \beta N - \delta N = rN$$

여기서  $N$ 은 population,  $\beta, \delta$ 는 각각 birth rate, death rate,  $r$ 은 growth rate이다. 이 때,  $r > 0$ 이면 이 시스템은 성장하고,  $r < 0$ 이면 decay한다. 이 미분방정식의 해는 당연히  $N(t) = N_0 e^{rt}$ 일 것이다. 즉,  $r > 0$ 이면 계속해서 population이 늘어나 결국 발산한다. 그러나 현실에서는 이러한 일이 일어나지 않는다.

**More Realistic Model** :  $r = \frac{\dot{N}}{N}$ 은 상수가 될 수 없다. 일반적으로  $N$ 이 커질수록 overcrowding/competition/resource limiting에 의해  $r$ 이 줄어들 것이다.  $r = 0$ 이 되는  $N$ 을  $K$ 라고 쓰고, **Carrying capacity**라고 부르면 좋을 것이다. 즉,  $N > K$ 이면  $\dot{N} < 0$ 이 된다.

가장 간단한 모델로  $\frac{\dot{N}}{N} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ 를 생각할 수 있다. 그러면,  $\dot{N} = rN - \frac{r}{K}N^2$ 이므로, 다음과 같은 plot을 얻을 수 있다. 즉, 간단하게 분석할 수 있다.



## 1.3.2 Linear stability analysis

Stability를 qualitative하게 분석해보자.

우선, **Perturbation**을  $y(t) := x(t) - x^*$ 와 같이 정의하자. 그러면,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) \\ &= \dot{x} = f(x) = f(x^* + y) \\ &= f(x^*) + f'(x^*)y + \frac{f''(x^*)}{2}y^2 + \dots \\ &= f'(x^*)y + O(y^2) \end{aligned}$$

가 된다.

**Big-Oh Notation** : 함수  $g(y)$ 가  $g(y) = O(h(y))$  as  $y \rightarrow 0$ 이라는 것은, 상수  $K < \infty$ 가 있어서

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{g(y)}{h(y)} \right| < K$$

인 것이다.

따라서, 우리는  $\dot{y} \simeq f'(x^*)y$ 와 같이  $x^*$  근방에서의 linearization을 사용할 수 있다. 이로부터,  $y = y_0 e^{f'(x^*)t}$ 이므로,  $f'(x^*) > 0$ 이면 시간에 따라 diverge하고  $f'(x^*) < 0$ 이면 시간에 따라 converge한다. 즉,  $f'$ 의 sign은 stability를 의미하며,  $f'$ 의 크기는 수렴이 얼마나 빠른지 그 time scale을 의미한다. 특히,  $\tau := \frac{1}{|f'(x^*)|}$ 를 characteristic time-scale이라고 하며 이는 convergence rate과 관련이 있다.

이 방법은  $f'(x^*) \neq 0$ 에서만 유효하다. 이러한 fixed point를 **hyperbolic**하다고 하며, hyperbolic하지 않은 점은 다른 방법으로 분석해야 한다.

## 1.4 Existence and Uniqueness

주어진 미분방정식의 해는 유일하게 존재하는가?

공학 혹은 물리 문제에서 해가 만일 존재하지 않으면 ill-posed되어있을 가능성이 높다. (유일하지 않아도 마찬가지로 이다.) 그러나 수학적으로는 꽤 중요한 문제이다. 예를 들어,  $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, x(0) = 0$ 이라는 미분방정식은 자명히  $x(t) \equiv 0$ 이라는 solution을 갖는다. 그러나,  $x(t) = \pm \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}$  역시 주어진 방정식의 solution이며, 마찬가지로,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq t_0 \end{cases}$$

역시 solution이 된다. 이는 주어진 미분방정식의 해가 unique하지 않고 심지어 infinitely 많이 있음을 시사한다. (time-invariant하므로 위의 함수가 해가 된다.) 수학적으로는 다음과 같은 조건이 제시된다.

### Proposition 1.1

$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ 에 대해,

- 만일  $f$ 가  $x_0$ 을 포함하는 구간  $R$ 에서 continuous하다면 어떤  $\tau$ 가 존재하여 interval  $I = (-\tau, \tau)$ 에서 해가 존재한다.
- 만일  $f'$ 가 동일한 구간  $R$ 에서 continuous하다면 그 해는 유일하다.

그러나 이 해가 globally 존재하는지는 알 수 없다. 예를 들어,  $\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$ 의 해는  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서만 유일하게 존재한다.

#### 1.4.1 Impossibility of oscillation

Line에서 정의된 Time-invariant system  $\dot{x} = f(x)$ 에서는 oscillation이 절대 일어날 수 없다. 따라서, trajectory는 다음의 두 가능성만을 갖는다.

1. Trajectory는 fixed point로 approach한다.
2. Trajectory는  $\pm\infty$ 로 diverge한다.

## 1.5 As a Potential

Flow on the line  $\dot{x} = f(x)$ 는 늘 적절한  $V$ 를 생각하여  $\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$ 가 될 수 있게 할 수 있다. 이러한  $V$ 는  $V(x) = -\int f(x)dx + V_0$ 으로 주어지며, 보통 potential은  $V_0$ 은 중요하지 않고 임의적이다. 이렇게 Potential로 해석하고 나면 다음과 같은 물리적 함의를 갖는다. Trajectory 위에서의 potential  $V(x) = V(x(t))$ 는,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \left(-\frac{dV}{dx}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

이므로 늘 trajectory를 따라서 potential은 monotonically 감소해야만 한다. 또, 자명히  $\frac{dV}{dx}(x^*) = 0$ 인  $x^*$ 는 fixed point이다. linear approach에서와 같은 방법으로,

1.  $V$ 의 local minima : **stable** fixed point
2.  $V$ 의 local maxima : **unstable** fixed point

임을 알 수 있다.