Equazioni di Ricorrenza

ALGORITMI 1
David Dragomir
March 13, 2023

Metodo Iterativo

Si "srotola" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente dalla sola dimensione di n.

Considerando la seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{se } n = 0 \\ T(\frac{n}{2}) + \theta(1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

si avrà:

$$\begin{aligned} T(n) = T(\frac{n}{2}) + \theta(1) = T(\frac{n}{4}) + \theta(1) + \theta(1) = T(\frac{n}{8}) + \theta(1) + \theta(1) + \theta(1) \\ = T(\frac{n}{2^3}) + 3 \cdot \theta(1) \end{aligned}$$

ci fermiamo quando $\frac{n}{2^i} = 1$, dunque:

$$\begin{gathered} n = 2^i \Rightarrow i = log_2 n \\ \Rightarrow log_2 n \cdot \theta(1) + T(1) \Rightarrow log_2 n \cdot \theta(1) + \theta(1) \simeq \theta(log_2 n) \end{gathered}$$

Altro esempio:

$$T(n) = \begin{cases} n + T(\frac{n}{2}) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Sviluppando il termine $n + T(\frac{n}{2})$:

$$\begin{aligned} T(n) = n + T(\frac{n}{2}) = n + \frac{n}{2} + T(\frac{n}{4}) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + T(\frac{n}{8}) \\ = \frac{n}{2^0} + \frac{n}{2^1} + \frac{n}{2^2} + T(\frac{n}{2^3}) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i} + T(\frac{n}{2^k}) \end{aligned}$$

dunque ci fermeremo quando $\frac{n}{2^k} = 1$:

$$n = 2^k \Rightarrow k = log_2 n$$

la sommatoria quindi diventerà:

$$\sum_{i=0}^{log_2 n-1} \frac{n}{2^i} + T(1)$$

$$\text{conoscendo la sommatoria notevole: } \sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$n \sum_{i=0}^{log_2 n-1} (\frac{1}{2})^i + T(1) \Rightarrow n \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{log_2 n}}{1-(\frac{1}{2})} + 1$$

$$= 2n \cdot (1 - \frac{1}{2^{log_2 n}}) + 1 = 2n \cdot (1 - \frac{1}{n}) + 1 = 2n \cdot (\frac{n-1}{n}) + 1$$

$$= 2n - 2 + 1 = 2n - 1 = \theta(n)$$

Metodo di Sostituzione

Questo metodo ha come idea quella di "intuire" la soluzione di una relazione di ricorrenza ed usare l'induzione matematica per dimostrare che la soluzione è effettivamente quella intuita.

Considerando la seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{se } n = 1 \\ \theta(1) + T(n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Se sostituiamo la costante $\theta(1)$ con d nella prima equazione e con c nella seconda avremo il seguente sistema:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ c + T(n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Dobbiamo dimostrare l'ipotesi che $T(n) = \theta(n)$:

$$T(n) \leq kn$$
$$\text{Vero } \forall n$$

Applicando l'induzione matematica si può arrivare tramite varie sostituzione alla conferma dell'ipotesi iniziale:

Caso base: $n = 1$

$$T(1) \leq k \Rightarrow d \leq k$$
$$\text{Vero } \forall k \geq d$$

Ipotesi induttiva: $T(n-1) \leq k(n-1)$

$$T(n) \leq kn$$
$$T(n) = T(n-1) + c$$
Ma sappiamo per ipotesi induttiva che $T(n-1) \leq k(n-1)$, dunque:
$$T(n) = T(n-1) + c \leq k(n-1) + c = kn - k + c$$
$$= kn - (k-c) \leq kn = k - c \geq 0 \iff k \geq c$$

E dunque abbiamo confermato l'ipotesi iniziale in quanto $T(n) = \theta(n)$ perchè $T(n) \leq kn$, $\forall k \geq c$ e $\forall k \geq d$.

Altro esempio:

$$T(n) = \begin{cases} n + T(\frac{n}{2}) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Ipotesi: $T(n) = \theta(n) \Rightarrow T(n) \leq cn$:

Caso base: $n = 1$

$$(1) \leq c \Rightarrow 1 \leq c$$
$$\text{Vero } \forall c \geq 1$$

Ipotesi induttiva: $T(n') \leq cn'$

$$T(n) \leq cn$$
$$T(n) = n + T(\frac{n}{2}) \leq n + c(\frac{n}{2})$$
$$= n(1 + \frac{c}{2}) \leq cn \iff 1 + \frac{c}{2} \leq c$$
$$= \frac{2+c}{2} \leq c \Rightarrow 2 + c \leq 2c$$
$$= c \leq 2, \text{ Vera } \forall c \geq 2$$