Equazioni di Ricorrenza

ALGORITMI 1
David Dragomir
March 9, 2023

Metodo Iterativo

Si "srotola" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente dalla sola dimensione di n.

Considerando la seguente equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \theta(1) & \text{se } n = 0 \\ T(\frac{n}{2}) + \theta(1) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

si avrà:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + \theta(1) = T(\frac{n}{4}) + \theta(1) + \theta(1) = T(\frac{n}{8}) + \theta(1) + \theta(1) + \theta(1)$$
$$= T(\frac{n}{2^3}) + 3 \cdot \theta(1)$$

ci fermiamo quando $\frac{n}{2^i} = 1$, dunque:

$$n = 2^i \Rightarrow i = log_2 n$$
$$\Rightarrow log_2 n \cdot \theta(1) + T(1) \Rightarrow log_2 n \cdot \theta(1) + \theta(1) \simeq \theta(log_2 n)$$

Altro esempio:

$$T(n) = \begin{cases} n + T(\frac{n}{2}) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Sviluppando il termine $n + T(\frac{n}{2})$:

$$T(n) = n + T(\frac{n}{2}) = n + \frac{n}{2} + T(\frac{n}{4}) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + T(\frac{n}{8})$$
$$= \frac{n}{2^0} + \frac{n}{2^1} + \frac{n}{2^2} + T(\frac{n}{2^3}) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i} + T(\frac{n}{2^k})$$

dunque ci fermeremo quando $\frac{n}{2^k} = 1$:

$$n = 2^k \Rightarrow k = log_2 n$$

la sommatoria quindi diventerà:

$$\sum_{i=0}^{log_2 n - 1} \frac{n}{2^i} + T(1)$$

conoscendo la sommatoria notevole: $\sum_{i=0}^{n} \alpha^i = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$

$$\Downarrow$$

$$n \sum_{i=0}^{log_2 n - 1} (\frac{1}{2})^i + T(1) \Rightarrow n \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{log_2 n}}{1 - (\frac{1}{2})} + 1$$
$$= 2n \cdot (1 - \frac{1}{2^{log_2 n}}) + 1 = 2n \cdot (1 - \frac{1}{n}) + 1 = 2n \cdot (\frac{n-1}{n}) + 1$$
$$= 2n - 2 + 1 = 2n - 1 = \theta(n)$$