Calcolo Integrale
Risoluzione esercizi

David Dragomir

1/04/2023

0.1 Integrazione per sostituzione

In questa sezione verranno risolti alcuni integrali con il **metodo di sostituzione** insieme ad alcuni casi particolari.

Question 1

$$\int_0^{\pi} sin(11x)\,dx$$

Solution: Sostituendo $y = 11x$, da cui $dy = 11dx$, si ha, sapendo che $cos(11\pi) = -1$:

$$\int_0^{\pi} sin(11x)\,dx = \int_0^{11\pi} sin(y)\,\frac{dy}{11} = -\frac{cos(y)}{11}\Big|_0^{11\pi} = -\frac{cos(11\pi) - 1}{11} = \frac{2}{11}.$$

Question 2

$$\int_0^{1} e^{4x}\,dx$$

Solution: Con la sostituzione $y = 4x$, da cui $dy = 4dx$, si ha:

$$\int_0^{1} e^{4x}\,dx = \int_0^{4} e^{y}\,\frac{dy}{4} = \frac{e^y}{4}\Big|_0^{4} = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

Question 3

$$\int_0^{1} \frac{10x}{1+5x^2}\,dx$$

Solution: Con la sostituzione $y = 1 + 5x^2$, da cui $dy = 10x\,dx$, si ha:

$$\int_0^{1} \frac{10x}{1+5x^2}\,dx = \int_1^{6} \frac{dy}{y} = ln(|y|)\Big|_1^{6} = ln(6) - ln(1) = ln(6).$$

Question 4

$$\int_0^{1} \frac{dx}{1+16x^2}\,dx$$

Solution: Con la sostituzione $y = 4x$, da cui $dy = 4dx$, si ha:

$$\int_0^{1} \frac{dx}{1+16x^2}\,dx = \int_0^{4} \frac{1}{4}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{arctan(y)}{4}\Big|_0^{4} = \frac{arctan(4) - arctan(0)}{4} = \frac{arctan(4)}{4}.$$

Question 5

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 cos(7x^3)\, dx$$

Solution: Con la sostituzione $y = 7x^3$, da cui $dy = 21x^2dx$, si ha:

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2 cos(7x^3)\, dx = \int_0^{7\pi} cos(y)\frac{dy}{21} = \frac{sin(y)}{21}\Big|_0^{7\pi} = \frac{sin(7\pi - sin(0))}{21} = 0.$$

Question 6

$$\int_0^1 \frac{dx}{6x+3}\, dx$$

Solution: Ricordando che:

$$\int \frac{dy}{ay+b} = \frac{ln(|ay+b|)}{a},$$

si ha:

$$\int_0^1 \frac{dx}{6x+3}\, dx = \frac{ln(|6x+3|)}{6}\Big|_0^1 = \frac{ln(9) - ln(3)}{6} = \frac{ln(3)}{6}.$$

Question 7

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}\, dx$$

Solution: Ricordando che:

$$\int \frac{dy}{(a-y)^2} = \int \frac{dy}{(y-a)^2} = -\frac{1}{y-a},$$

si ha:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3-x)^2}\, dx = -\frac{1}{x-3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$