数理科学基礎過去問解答解説

はじめに

これは，数理科学基礎の過去問のうち，微積パートに該当する**問題**とその**解答解説**をまとめたものである。同じ林先生のものを選んであるから，本プリントの勉強は試験にある程度役立つことが期待される。なお，不備の指摘を含めた質問は遠慮なく作成者まで。

問題一覧

問題 1
次の方程式を満たす x を求めよ。

$$\arccos \frac{5}{7} = \arcsin x - \arccos \frac{1}{5}$$

問題 2
関数 $f(x) = \left|x^3\right|$ が C^n 級となる最大の自然数 n を求めよ。ただし，$y = f(x)$ が C^∞ 級になる場合には，$n = \infty$ と答えよ。

問題 3
次の関数の原始関数を一つ見つけよ。

$$\arctan x$$

問題 4
関数 $f : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ を，$f(x) = 1/\sin x$ と定めるとき，f の逆関数の導関数を求めよ。

問題 5

逆双曲正弦関数 $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える。

(1) 等式 $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ を示せ。

(2) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x$ を求めよ。

問題 6

微分可能な関数 $y = f(x)$ に関する微分方程式

$$y' = 2\sin\frac{y}{2}$$

について考える。

(1) $\cos\dfrac{y}{2} = u$ とおいて置換積分の公式を用いることにより，解を任意定数を含む形で表せ。

(2) $f(0) = \pi$ を持つ解を，逆三角関数と双曲線関数により表せ。

(3) (2) で求めた解 $y = f(x)$ の導関数を求め，$\cosh x$ で表せ。

問題 7

つぎの二変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える。

(1) 関数 $f(x,y)$ の $(0,0)$ におけるすべての偏微分係数を求めよ。

(2) 関数 $f(x,y)$ のグラフの点 $(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ。

(3) 単位ベクトル $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2})^{-1} \\ (\sqrt{2})^{-1} \end{pmatrix}$ に対し，関数 $f(x,y)$ の $(0,0)$ における $\mathbf{e}$ 方向の微分係数を求めよ。

(4) 関数 $f(x,y)$ は $(0,0)$ において微分可能かどうか判定せよ。

問題 8

次の関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考える。関数 f のすべての連続点からなる集合を $S(f)$ とする。

$$f(x)=\begin{cases} x-x^3 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

(1) $S(f)$ を求めよ。

(2) 任意の $x\in S(f)$ において，f は連続であることを示せ。

(3) 任意の $x\in\mathbb{R}\backslash S(f)$ において，f は不連続であることを示せ。

なお，問題 1,2,3,4,5 は基本問題として小問集合になっていたものである。

解答解説

問題 1

次の方程式を満たす x を求めよ。

$$\arccos\frac{5}{7}=\arcsin x-\arccos\frac{1}{5}$$

解答

$\phi=\arccos\dfrac{5}{7}, \psi=\arccos\dfrac{1}{5}, \theta=\arcsin x$ とおく。$\phi,\psi\in[0,\pi]$ に注意すると，

$$\sin\phi=\sqrt{1-\cos^2\phi}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\sin\psi=\sqrt{1-\cos^2\psi}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

であるから，

$$\begin{aligned} x=\sin\theta=\sin(\phi+\psi)&=\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\psi \\ &=\frac{2\sqrt{6}}{7}\frac{1}{5}+\frac{5}{7}\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{12\sqrt{6}}{35}. \end{aligned}$$

解説

頻出問題である。似たような問題が複数出題されている。逆三角関数で気を付けるべきは，その値域であった。今回は ϕ,ψ の範囲が制限されることにより sin の値が一意に定まることに注意する。あとは特段注意することはない。

問題 2

関数 $f(x) = \left|x^3\right|$ が C^n 級となる最大の自然数 n を求めよ。ただし，$y = f(x)$ が C^∞ 級になる場合には，$n = \infty$ と答えよ。

解答

関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

である。明らかに，$x \neq 0$ では $f(x)$ は任意の回数微分可能でその導関数は連続であるから，$x = 0$ 周りでの振る舞いを調べる。

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to \pm 0} \frac{\pm x^3}{x} = \lim_{x \to \pm 0} (\pm x^2) = 0$$

ゆえ $f'(0)$ であり，あわせて

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

となる。さらに，

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to \pm 0} \frac{\pm 3x^2}{x} = \lim_{x \to \pm 0} (\pm 3x) = 0$$

ゆえ $f''(0)$ であり，あわせて

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases}$$

となり，$f(x)$ は C^2 級。しかし，

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \to \pm 0} \frac{\pm 6x}{x} = \pm 6$$

ゆえ $f''(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であり，$f(x)$ は C^3 級ではない。

よって求める n は $n = 2$。

解説

数理科学基礎の共通資料の確認問題そのままである。上記解答は丁寧に書いたが，$f''(x) = 6|x|$ が $x = 0$ で微分不可能であることは直接述べても問題ないだろう。共通資料の解答もそのように書いてある。

問題 3

次の関数の原始関数を一つ見つけよ。

$\arctan x$

解答

部分積分を行って,

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + const.\end{aligned}$$

ゆえ，例えば原始関数として $x \arctan x - \dfrac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

解説

$\arctan x$ のままでは積分しにくいから，部分積分で微分して簡単にすることを考える。有利関数に落ちつくはずであるから，当然積分実行可能である。

問題 4

関数 $f : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ を，$f(x) = 1/\sin x$ と定めるとき，f の逆関数の導関数を求めよ。

解答

$y = f(x)$ 即ち $x = f^{-1}(y)$ とすると，$y = 1/\sin x$ と $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ から $\cos x = \sqrt{1 - 1/y^2}$ であることに注意する。また,

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

と逆関数定理より

$$\begin{aligned}(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} &= -\frac{1/y^2}{\sqrt{1-1/y^2}} \\ &= -\frac{1}{|y|\sqrt{y^2-1}}.\end{aligned}$$

よって

$$(f^{-1}(x))' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

解説

授業で $\sec x = 1/\cos x$ の逆関数の導関数を求めたから，それと何も変わりない。定義域の制限より，$\cos x$ が正であることに注意すること。

問題 5

逆双曲正弦関数 $\mathrm{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を考える。

(1) 等式 $\mathrm{arsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ を示せ。

(2) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{arsinh}\, x$ を求めよ。

解答

(1) 実際に計算してみれば,

$$\begin{aligned}\sinh \ln(x + \sqrt{x^2+1}) &= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1} - (\sqrt{x^2+1} - x)) \\ &= x\end{aligned}$$

であるから，表式が従う。

(2) (1) を用いれば,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\mathrm{arsinh} &= \frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

解説

数理科学基礎の共通資料の確認問題そのままである。なお，(1) の表式の右辺を得るには，次のようにする。$x = \sinh y$ を y について解く。

$$\begin{aligned}x = \sinh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} &\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \,(e^y > 0 \text{ を掛けて整理した}) \\ &\Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1} \,(\because e^y > 0) \\ &\Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\end{aligned}$$

また，(2) は逆関数定理を用いても計算できる。$y = \mathrm{arsinh} x$ 即ち $x = \sinh y$ のもとで，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

である。

問題 6

微分可能な関数 $y = f(x)$ に関する微分方程式

$$y' = 2\sin\frac{y}{2}$$

について考える。

(1) $\cos\dfrac{y}{2} = u$ とおいて置換積分の公式を用いることにより，解を任意定数を含む形で表せ。

(2) $f(0) = \pi$ を持つ解を，逆三角関数と双曲線関数により表せ。

(3) (2) で求めた解 $y = f(x)$ の導関数を求め，$\cosh x$ で表せ。

解答

(1) $y = 2n\pi \, (n \in \mathbb{Z})$ は自明な解であるから，これは除いて考える。このとき，

$$\frac{1}{\sin y/2} y' = 2$$

の両辺に $\displaystyle\int dx$ をかぶせて，

$$\int \frac{1}{\sin y/2} y' \, dx = \int 2 \, dx$$

$$\int \frac{dy}{\sin y/2} = 2x + C \, (C \in \mathbb{R})$$