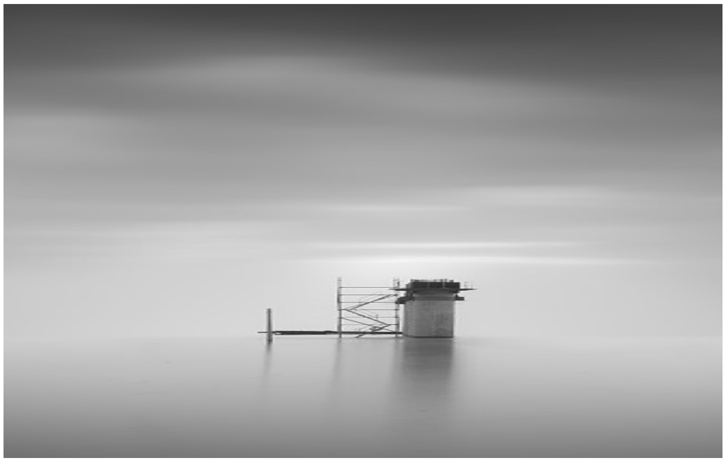
菜鸟解题集(matrix666)

yangwt

2019 年 7 月 31 日

目录



1 第一章

1.1 第一节

My title

This box is filled with an external image.

Title and interior are made partly transparent to show the image.

Here I am

II'm invisible until you find me.

Box with a watermark picture

一方面，老师上课比较“即兴”，讲的时候很多东西都是穿插着讲的，并不依循一个特定的逻辑顺序，所以在整理的过程中，就需要充分理解上课所讲的材料，理清它们的关系，然后重新归纳出一个合乎逻辑的顺序。另一方面，由于时间很紧张，很多定理和命题，老师都没有给出证明，这些证明我都在整理笔记的过程中自己独立完成了。回头看来，这个过程其实使自己受到了一个充分的数学训练——相当于把整个体系从头到尾推导了一遍。很多概念，定理，以及它们的关系，在这个过程中被充分消化了。

给框加标题

This box uses a *boxed title*. The box of the title can be formatted independently from the main box.

Theorem 1 *(Wallis formula)* 记 $2I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$$= 2\begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & (n \in 2k+1, k \in N), I_1 = 1, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & (n \in 2k, k \in N), I_0 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Theorem 2 *(Stirling formula)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \Leftrightarrow n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

证明:

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e} > 1 \Rightarrow a_n \downarrow$$

$$\text{下面试证 } a_n > 1 \Leftarrow \ln n! > \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \ln n - n$$

$$\Longleftarrow \ln(n+1) > \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - 1$$

$$\Leftarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{2}{2n+1} \quad (\textit{which is obvious})$$

$$\text{由单调有界定理定理 } a_n \text{ 的极限存在，设为 } A$$

There is nothing sadder than a dream delays until it fades forever.

Theorem 3 *(Stolz)*

1. 已知 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}=\frac{1}{2} \tag{1}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln C_{n+1}^{n+1}+\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\ln C_{n+1}^{i}-\ln C_n^i\right)}{2n+1}\quad(stolz)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{(n+1)^n}{(n)!}}{2n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}}}{2n+1}\quad(stirling)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln\left[2\pi(n+1)\right]}{2n+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Theorem 4 *(Kantorovich inequality)* 设 $a>0,\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1,0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$. 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\le\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

Theorem 5 *(Cauchy-schwarz inequality)* $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$

'' 给框加标题''

2.(1) 设 $f(x)\in C\left[a,b\right],0<m\le f(x)\le M$, 证明:

$$(b-a)^2\le\int_a^b f\left(x\right)dx\int_a^b\frac{1}{f\left(x\right)}dx\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2 \tag{2}$$

证明: 相比原不等式证明，积分形式较简单，先证左边由 Cauchy-schwarz 不等式

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\int_a^b\frac{1}{f\left(x\right)}dx\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2=(b-a)^2$$

再证右边，由

$$\frac{\left[f(x)-m\right]\left[f(x)-M\right]}{f(x)}\le 0,$$

$$\Rightarrow f(x)+\frac{mM}{f(x)}\le m+M$$

两端积分得

$$\int_a^b f(x)dx + mM\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \le (m+M)(b-a),$$

同时由 AM-GM 不等式

$$\int_a^b f(x)dx + mM\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \ge 2\sqrt{\int_a^b f(x)dx \cdot mM\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx},$$

综上可得

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

(2) 证明 Minkowski inequality

$$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(3) 设 x>0, 证明不等式:

$$\left|\int_x^{x+c} \sin t^2 dt\right| < \frac{1}{x}(c>0).$$

3. 求极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{\ln k}{k}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{n+k};$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2};$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}.$$

证明：(1)

(2) 由

$$\sin\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+k} - \frac{\sin\eta_k}{2}\frac{1}{(n+k)^2} \qquad \left(k=1,2,\cdots n, \eta_k\in(0,\frac{1}{n+k})\right)$$

以及

$$0 \le \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\eta_k}{2}\frac{1}{(n+k)^2}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin\eta_k}{2}\frac{1}{(n+k)^2}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

由夹逼准测得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\eta_k}{2}\frac{1}{(n+k)^2} = 0$$

从而

$$LHS=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

(3) 由

$$\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}-\frac{\sin\xi_k}{2}\cdot\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^2$$

$$\text{原极限}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\tfrac{k}{n}\right)\tfrac{k\pi}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\tfrac{k}{n}\right)\tfrac{\sin\xi_k}{2}\left(\tfrac{k\pi}{n^2}\right)^2.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\pi\int_0^1(1+x)\,xdx=\frac{5\pi}{6}.$$

又因

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{\sin\xi_k}{2}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^2\right|\le\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot\frac{|\sin\xi_k|}{2}\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^2\le\frac{\pi^2}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{\pi^2}{n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\to 0,$$

故原极限 $=\pi\int_0^1(1+x)\,xdx=\frac{5\pi}{6}$.

(4) 设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum\limits_{i=1}^{n^2}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n}$. 因

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\frac{dx}{1+x^2}<\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}<\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\frac{dx}{1+x^2}\quad(i=1,2,\cdots,n^2).$$

从而 $\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}}\frac{dx}{1+x^2}<S_n<\int_0^n\frac{dx}{1+x^2}.n\to\infty$ 两边趋于 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. 由夹逼准测知原极限为 $\frac{\pi}{2}$

4. 证明:

$$(1)\lim_{n\to 0}\frac{1-\prod\limits_{i=1}^{n}\cos a_ix}{x^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

$$(2)\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}(a_i,b_i,p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$$

$$(Euler-Poisson)(3)\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5. 设 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$.

解: 令 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 因为 $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$$

记 $x_i = \frac{i}{n}$, 则 $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}, A_n = n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)dx$. 令

$$J_n = n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x) - f(x_i)\right]dx,$$

由拉格朗日中值定理，$\exists\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得

$$J_n = n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)\left(x - x_i\right)dx.$$

记 m_i, M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值和最小值, 则 $m_i \le f'(\xi_i) \le M_i$,

积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)\left(x - x_i\right)dx$ 介于 $m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x - x_i\right)dx, M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x - x_i\right)dx$ 之间, 由介值定理

$$\exists\eta_i \in \left(x_{i-1}, x_i\right), \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)\left(x - x_i\right)dx = -f'(\eta_i)\frac{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}{2}.$$

于是有 $J_n = -\frac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 = -\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right) = \lim_{n\to\infty} J_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx = -\frac{1}{2}\left[f\left(1\right) - f\left(0\right)\right] = \frac{1}{4}.$$

1.2 第二节

6. 设 $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, n \in N$, 用 K_n 表示使 $H_n \ge n$ 的最小下标. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{K_{n+1}}{K_n}$.

2 第二章

3 Boxes in boxes

Box

Box inside box

Box inside box inside box

And now for something completely different: Boxes!

This	is	another	box.

4 Fit Boxes

“fit to height” 制定框的高度，框里的内容会自动调整到合适的字体大小以适应该高度。

Fit box (10cm)

由于老师讲课没有依据特定的教材（这似乎是 MIT 的风格，我在这上的所有课都没有特定教材的），而且连 lecture notes 都没有。我的做法是在堂上记下笔记，然后每周都抽出时间把笔记用 Latex 整理成 Notes。事实上，这些整理出来的 Notes 我在整理完后已经不太需要看了，真正发挥作用的是这个整理的过程，它对于知识的吸收起到了很重要的作用。一方面，老师上课比较“即兴”，讲的时候很多东西都是穿插着讲的，并不依循一个特定的逻辑顺序，所以在整理的过程中，就需要充分理解上课所讲的材料，理清它们的关系，然后重新归纳出一个合乎逻辑的顺序。另一方面，由于时间很紧张，很多定理和命题，老师都没有给出证明，这些证明我都在整理笔记的过程中自己独立完成了。回头看来，这个过程其实使自己受到了一个充分的数学训练——相当于把整个体系从头到尾推导了一遍。很多概念，定理，以及它们的关系，在这个过程中被充分消化了。

Fit box (5cm)

由于老师讲课没有依据特定的教材（这似乎是 MIT 的风格，我在这上的所有课都没有特定教材的），而且连 lecture notes 都没有。我的做法是在堂上记下笔记，然后每周都抽出时间把笔记用 Latex 整理成 Notes。事实上，这些整理出来的 Notes 我在整理完后已经不太需要看了，真正发挥作用的是这个整理的过程，它对于知识的吸收起到了很重要的作用。

一方面，老师上课比较“即兴”，讲的时候很多东西都是穿插着讲的，并不依循一个特定的逻辑顺序，所以在整理的过程中，就需要充分理解上课所讲的材料，理清它们的关系，然后重新归纳出一个合乎逻辑的顺序。另一方面，由于时间很紧张，很多定理和命题，老师都没有给出证明，这些证明我都在整理笔记的过程中自己独立完成了。回头看来，这个过程其实使自己受到了一个充分的数学训练——相当于把整个体系从头到尾推导了一遍。很多概念，定理，以及它们的关系，在这个过程中被充分消化了。

5 可断的框

该框的内容如果在当前页不能完全显示，可以自动顺延到下一页，产生断裂的框。

Breakable box

决定选数学作为 minor，从这个学期开始会上一系列的数学课。这个学期选的是 Real and Functional Analysis，这门课已经进入尾声，下周就要考试了。这门课主要讲的是测度论和勒贝格积分理论，以及一些基础的泛函分析，这些内容自己以前也自学过，不过经过一个学期的学习，还

是觉得有不少新的收获。
由于老师讲课没有依据特定的教材（这似乎是 MIT 的风格，我在这上的所有课都没有特定教材的），而且连 lecture notes 都没有。我的做法是在堂上记下笔记，然后每周都抽出时间把笔记用 Latex 整理成 Notes。事实上，这些整理出来的 Notes 我在整理完后已经不太需要看了，真正发挥作用的是这个整理的过程，它对于知识的吸收起到了很重要的作用。
一方面，老师上课比较“即兴”，讲的时候很多东西都是穿插着讲的，并不依循一个特定的逻辑顺序，所以在整理的过程中，就需要充分理解上课所讲的材料，理清它们的关系，然后重新归纳出一个合乎逻辑的顺序。另一方面，由于时间很紧张，很多定理和命题，老师都没有给出证明，这些证明我都在整理笔记的过程中自己独立完成了。回头看来，这个过程其实使自己受到了一个充分的数学训练——相当于把整个体系从头到尾推导了一遍。很多概念，定理，以及它们的关系，在这个过程中被充分消化了。

6 Theorems

Theorem 6.1: Summation of Numbers

For all natural number n it holds:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.} \tag{3}$$