西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

人工智能学院

概率论与数理统计课程大作业报告

三门问题的分析与解

姓名：杨文韬
学号：18020100245
班级：1920012

2020 年 12 月 24 日

摘要

本文介绍了三门问题的背景，从一位学者的论文中找出错误，即结果与主持人打开有山羊门的概率无关，而是与主持人是否只会选择山羊门打开有关。通过枚举法、贝叶斯公式和蒙特卡罗方法模拟得到了正确的结论，蒙特卡罗方法是一种统计模拟方法，采样越多，越近似最优解，笔者用 MATLAB 自己编写算法实现了蒙特卡罗方法，并对其进行了可视化展示，并得出一致结论：在主持人每次选择羊的门打开的情况下，选手坚持策略赢得车的概率为 $\frac{1}{3}$，而换门策略赢得汽车的概率为 $\frac{2}{3}$，故选手需要改变策略，在文章的最后，给出了一些思考与总结，指出很多悖论的产生都是因为条件限制而引起的。

关键词: 枚举法，条件概率，贝叶斯公式，蒙特卡罗方法，悖论

目录

第 1 章　问题描述与背景

蒙提霍尔问题 [1] (Monty Hall Problem) 又称三门问题、山羊汽车问题，出自美国大型游戏节目 Let's Make a Deal。

1.1　问题描述

现有三扇门，其中一扇门后是一辆车，另外两扇门后是一头山羊。选手从 1，2，3 号三扇门中选出一扇（仅标记，不打开），接着主持人再从未标记的两扇门中选出一扇打开。主持人知道每扇门后放的是什么，所以每次主持人都选择后面是羊的那扇门打开。选手有一次改变自己选择的机会。最后，打开选手最终选中的那扇门，以选手最终选择的是车为获胜。请问选手是否需要改变选择？

图 1.1 是一个简单易懂的图示解答。

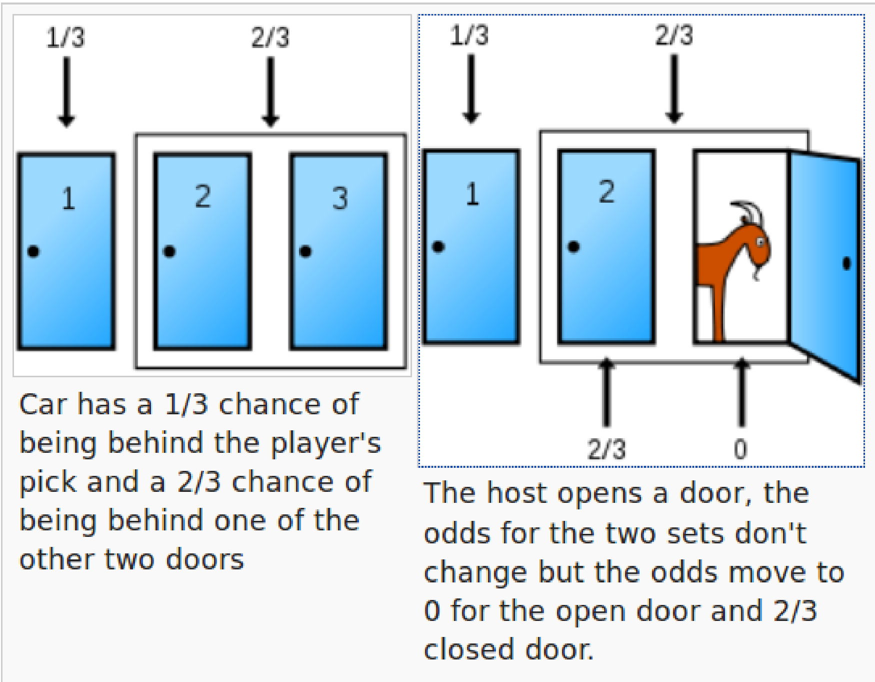


图 1.1: Monty Hall Problem

1.2　相关背景

对于此问题，主持人 Monty Hall 认为换与不换选中汽车的概率都是 $\frac{1}{2}$；1975 年 Selvin Steve 对主持人的说法提出了质疑，并利用古典概率公式给出换门和不换门选中汽车的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$，由此引发了众多的争议。

争论双方都认可的的表述有：

(1) 假设游戏开始前汽车被等概率地放置在每一扇门的后面；

(2) 游戏参与者初始选择是随机的，即在三扇门中随机地选定其中的一扇；

(3) 游戏参与者的选择和汽车的放置是相互独立的；

(4) 主持人对于门后奖品的分布知情，主持人不会打开游戏参与者初始选定的门，也不会打开有汽车的门，只会打开有山羊的门。

用 A_1, A_2, A_3 分别表示 1,2,3 号门后面是车，B_1, B_2, B_3 分别表示选手打开 1,2,3 门，C_1, C_2, C_3 分别表示主持人打开 1,2,3 号门。有部分人给出了下面的做法，基于 B_1C_3 已经发生的条件下，利用条件概率解答，由 (1) 可以确定

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3} \tag{1.1}$$

由 (1) 至 (3) 得

$$P(A_iB_j) = \frac{1}{9}, \tag{1.2}$$

$$P(A_i|B_j) = P(B_j|A_i) = \frac{1}{3}, \quad 1 \le i, j \le 3 \tag{1.3}$$

由 (4) 得

$$P(C_2|A_1B_1) = P(C_3|A_1B_1) = \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

$$P(C_3|A_2B_1) = P(C_3|A_3B_1) = 0 \tag{1.5}$$

因此，游戏参与者打开 1 号门，并且主持人打开门 3 的概率为

$$\begin{aligned}
P(B_1C_3) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_iB_1C_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B_1|A_i)P(C_3|A_iB_1) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} + 1 + 0) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

选手采用坚持策略获得汽车的概率为

$$\begin{aligned}
P(A_1|B_1C_3) &= \frac{P(A_1B_1C_3)}{P(B_1C_3)} \\
&= 6P(A_1B_1)P(C_3|A_1B_1) \\
&= 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

选手采用改变策略选 2 号门获得汽车的概率为

$$\begin{aligned} P(A_2|B_1C_3) &= \frac{P(A_2B_1C_3)}{P(B_1C_3)} \\ &= 6P(A_2B_1)P(C_3|A_2B_1) \\ &= 6 \times \frac{1}{9} \times 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

这样就得到了与 Selvin Steve 相同的结论。有学者 [2] 指出式 (1.4) 实际上并不严谨，在三门问题中没有规定主持人是以等概率在选手选剩下的山羊门中选择打开的门，为了正确计算，我们添加限制如下，

主持人在选手选剩下的有山羊门中以概率 p 打开编号最大的门。

按照之前解法的思路我们可以得到

$$\begin{aligned} P(B_1C_3) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_iB_1C_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B_1|A_i)P(C_3|A_iB_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times (p+1+0) = \frac{p+1}{9} \end{aligned}$$

选手采用坚持策略获得汽车的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1|B_1C_3) &= \frac{P(A_1B_1C_3)}{P(B_1C_3)} \\ &= \frac{9}{p+1} \times P(A_1B_1)P(C_3|A_1B_1) \\ &= \frac{9}{p+1} \times \frac{1}{9} \times p \\ &= \frac{p}{p+1} \end{aligned}$$

选手采用改变策略选 2 号门获得汽车的概率为

$$\begin{aligned} P(A_2|B_1C_3) &= \frac{P(A_2B_1C_3)}{P(B_1C_3)} \\ &= \frac{9}{p+1} \times P(A_2B_1)P(C_3|A_2B_1) \\ &= \frac{9}{p+1} \times \frac{1}{9} \times 1 \\ &= \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

由此该学者得出结论，对于任意 $p \in [0,1]$ 总有

$$\frac{p}{p+1} \leq \frac{1}{p+1}$$

即选手换门得到汽车的概率总是大于等于坚持策略获得汽车的概率。

但实际上该学者的论证过程和上面的一个思路都是错误的，至于为什么，我们之后再进行讨论。

第 2 章　理论求解

2.1　枚举法

这里我们假设第一次选择的为第一道门 (具有轮换对称性不影响结果)，其所有可能结果和最终赢得汽车 (用数字 1 表示) 的情况如下表所示：

door 1	door 2	door 3	stick	change
goat	goat	car	0	1
goat	car	goat	0	1
car	goat	goat	1	0

从表中可以看出，改变选择赢得汽车的概率是 $\frac{2}{3}$，而坚持初次选择赢得汽车的概率为 $\frac{1}{3}$。图 2.1 的树显示了如果玩家最初选择 1 号门时各种可能结局的可能性。

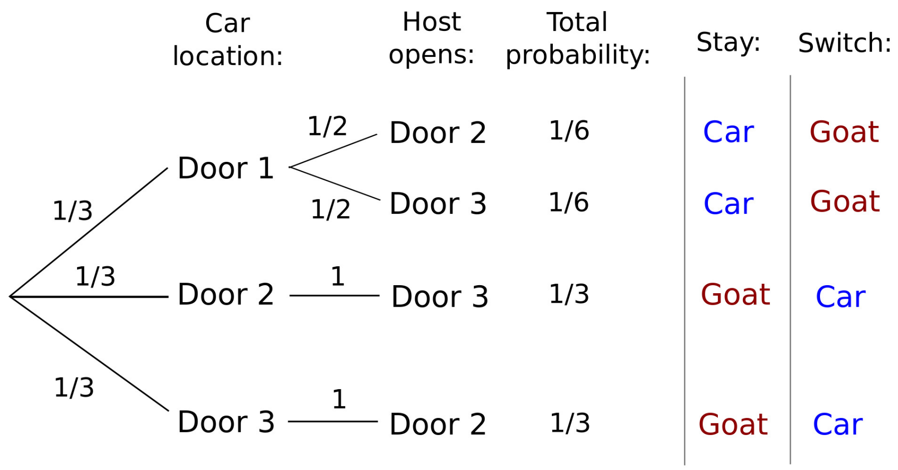


图 2.1: Monty Tree Door1

2.2　概率公式求解

在上一章中我们给出了两个证明，但其实都包含着同一个错误，即只要主持人选择打开的是含有山羊的门，那么最后得到的结果与主持人打开山羊门的概率无关，即坚持策略获得汽车的概率并非 $P(A_1|B_1C_3)$ 而是 $P(A_1|B_1)$ 或其轮换，改变策略获得汽车的概率并非 $P(A_2|B_1C_3)$ 而是 $P(A_1|B_2)+P(A_1|B_3)$ 或其轮换。

问题的关键在于：主持人知道所有门后面的情况，从而导致了结果违背我们的直觉。

下面给出贝叶斯公式的证明：假设选手选择门 A，主持人随后打开 B，用 $P(A)$ 表示门 A 后为车，$P(\overline{A})$ 表示 A 后为羊，则选手选择坚持策略获得汽车的概率为 $P(A|\overline{B})$，而选手选择改变策略获得汽车的概率为 $P(\overline{A}|\overline{B})$，下面只计算坚持策略获得汽车概率 $P(A|\overline{B})$，改变策略获得汽车概率为其对立事件，贝叶斯公式如下：

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B}|A)P(A)+P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})}$$

主持人不会打开有车的门，即 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$，另外我们有 $P(A)=\frac{1}{3}$、$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$ 和 $P(\overline{B}|A)=1$，代入公式得

$$P(A|\overline{B})=\frac{1\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

故选择坚持策略赢得汽车的概率只有 $\frac{1}{3}$，为了增大概率，应该换门。

假如主持人随意选择一扇门打开，则 $P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{1}{2}$，另外我们有 $P(A)=\frac{1}{3}$、$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$ 和 $P(\overline{B}|A)=1$，代入公式得

$$P(A|\overline{B})=\frac{1\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

可见，如果主持人随机打开一扇门，则换不换门都是一样的概率，因为并没有提供有效信息。

一个更通俗易懂的解释是：当你从三扇门中选择门 A 之后，这扇门后面是车的概率是 $\frac{1}{3}$，门 B 和门 C 有车的概率也是 1/3。但是接下来主持人会给你一个线索。如果奖品在门 B 后面，主持人会打开门 C；如果奖品在门 C 后面，主持人会打开门 B。因此，如果你选择改变策略的话，只要奖品在门 B 或门 C 后你都会赢；但是如果你选择坚持策略，只有奖品在门 A 后你才会赢。

第 3 章　模拟求解

3.1　算法描述

蒙特卡罗方法 (Monte Carlo method)，也称统计模拟方法，与它对于的是确定性算法。其基本思想，通过某种“实验”的方法，以这种事件出现的频率估计这一随机事件的概率，或者得到这个随机变量的某些数字特征。

- **蒙特卡罗方法**：采样越多，越近似最优解；
- **拉斯维加斯方法**：采样越多，越有机会找到最优解。

3.2　代码及结果

我们用蒙特卡罗算法立即可以写出下面简单的程序：

大概思路是：给出策略和实验次数，进行模拟，每次试验，变量 `car` 和 `first_choice` 分别取随机数初始化车的门和第一次选择的门。如果策略为坚持 `stick`，第一次选择的门为车的门，则赢得汽车次数 `winnings` 进行加一，否则不变；如果策略为改变 `change`，第一次选择的门不为车的门，则赢得汽车次数加一，否则不变。

```matlab
clear all; clc;

Monty_Hall_simulation('change', 100000)
Monty_Hall_simulation('stick', 100000)

function Monty_Hall_simulation(strategy, number)
    winnings = 0;
    for i = 1 : number
        car = randi([1 3], 1); % Pick a random door with car
        first_choice = randi([1 3], 1); % Pick a random door: first choice of the user
        if strcmp(strategy, 'stick') == 1 && first_choice == car
            winnings = winnings + 1; % stick strategy
        elseif strcmp(strategy, 'change') == 1 && first_choice ~= car
            winnings = winnings + 1; % change strategy
        end
    end
```

```
    disp(['The probability of winning the car in ', strategy, ' strategy is ', num2str(winnings / number)])
end
```

得到如下输出

```
命令行窗口
The probability of winning the car in change strategy is 0.66578
The probability of winning the car in stick strategy is 0.3286
fx >>
```

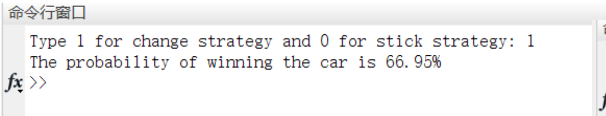
上面这个程序过于简陋了，于是我们利用矩阵重写一个并添加可视化绘图代码如下：

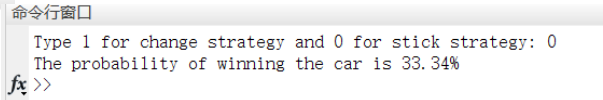
```
clear all; clc;

% A simulation of the Monty Hall game
number = 10000;
strategy = input('Type 1 for change strategy and 0 for stick strategy: ');;
winnings = 0;
probability_of_success = zeros(1,number); % 1x10000 matrix filled with zeros

for i = 1 : number
    doors = zeros(1,3);
    random_choice = randi(3,1);
    if random_choice == 1
        doors(1) = 1;
    elseif random_choice == 2
        doors(2) = 1;
    else
        doors(3) = 1;
    end
    % 1x3 matrix with two zeros and one 1
    %   0 : goat          1 : car
    players_choice = randi(3,1); % the player make a random choice
    % open a door to reveal a goat
    for j = 1:3
```

```
            if j ~= players_choice && doors(j) ~= 1
                monty_door = j;
                break
            end
        end
        % strategy to be followed
        if strategy == 1
            for k = 1 : 3
                if k ~= monty_door && k ~= players_choice
                    players_choice = k;
                    break
                end
            end
        end

        if doors(players_choice) == 1
            winnings = winnings + 1;
        end

        probability_of_success(i) = (winnings / i);
end

display(sprintf('The probability of winning the car is %.2f%%'
    , 100 * sum(probability_of_success) / number));

% make a plot
xaxis = 1:number;
figure;
plot(xaxis, probability_of_success, 'LineWidth', 2, 'Color',
    [0,0.7,0.9]);
if strategy == 1
    title('Probability with change strategy');
else
    title('Probability with stick strategy');
end
xlabel('Number of games played');
```

```
ylabel('Probability of winning the car');
hold on;
plot([0 number], [2/3 2/3], 'LineWidth', 2.5, 'Color', 'Red');
plot([0 number], [1/3 1/3], 'LineWidth', 2.5, 'Color', 'Red');
axis([0 number 0 1]);
```

得到如下输出





绘图结果为：

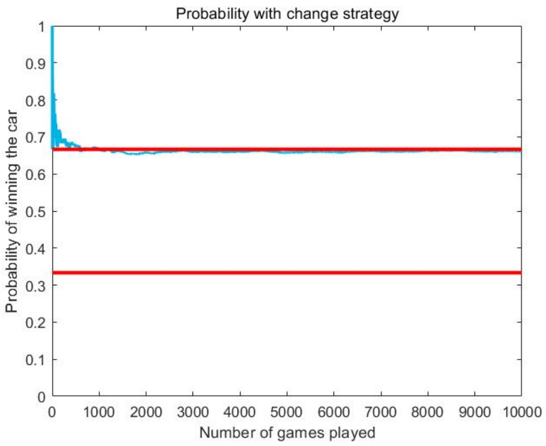


图 3.1: Probability with change strategy

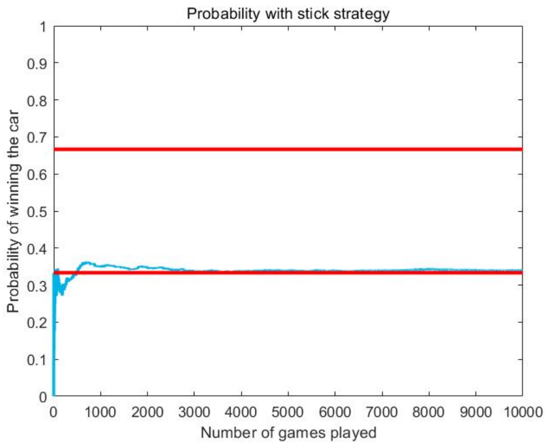


图 3.2: Probability with stick strategy

第 4 章 思考与总结

4.1 一些思考

三门问题实际上是一个非常简单的问题，主持人认为概率是 $\frac{1}{2}$ 可能是下面的原因：主持人直观地认为排除一羊后通过观察得换不换赢得汽车的概率为 $\frac{1}{2}$，即两门后一羊一车，随机赢得汽车概率为 $\frac{1}{2}$。有心理学家指出，不转换的行为可以用心理学现象解释为：

- **禀赋效应 (Endowment effect)**: 当个人一旦拥有某项物品，那么他对该物品价值的评价要比未拥有之前大大提高。也就是说人们往往会高估已选的中奖概率。
- **现状偏见 (Status quo bias)**: 即使改变现状更有利, 也不愿改变的心理。也就是说人们更愿意坚持已经做出的选择。
- 在所有其他条件相同的情况下，人们更喜欢通过无为 (Stay) 而不是行动 (Switch) 来犯错。

还可以扩展到更多门的情况，假设有 N 扇门，其中一扇门后有车，其余全为羊。则在主人打开 M 扇有羊的门后选手选择更换策略赢得汽车的概率为 $\frac{N-1}{N(N-M-1)}$ ，这是因为车在其余 $N-1$ 扇门中的一个的概率为 $\frac{N-1}{N}$，车在 $N-1$ 门中的条件下在 $N-M-1$ 个门中选择一个有车概率为 $\frac{1}{N-M-1}$，故若选择更换策略，赢得汽车的概率为 $\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N-M-1}$。对比坚持最初选择赢得汽车的概率 $\frac{1}{N}$ ，采用更换的策略显然赢得汽车的概率更大。然而注意到当 N 很大且 M 很小时，此时即使选择更换赢得汽车的概率仍很小。但是在主持人排除 $M=N-2$ 扇门后，此时更换赢得汽车的概率为 $1-\frac{1}{N}$ ，即当 N 越大，赢得汽车概率越高。

4.2 总结

三门问题给我们的启示是：人们在讨论时可能犯与主持人一样的错误或者忽略掉主持人知道哪一扇门是汽车这一信息而导致结论不一致，很多悖论的出现都是由于条件的限制，例如著名的“贝特朗悖论”[3]：“在一个圆内任意选一条弦，这条弦的弦长长于这个圆的内接等边三角形的边长的概率是多少？”，很多学者给出了三个有效但结果不同的论证。另外，笔者在查阅资料时发现，很多人的解答都是事先知道答案之后通过拼凑过程得到与结果一致的结论，而并没有进行严谨的推导。

事实上，三门问题中隐含一个非常重要的原理即**有效信息的输入能降低不确定性**。第一次选中羊的概率比选中汽车概率大，第二次选择时，如果主持人提供了有效信息，即排除一个一定是羊的门，那么显然应该换门来提高概率，而如果主持人随机选择一扇门打开，那便没有提供有效信息，即换不换门概率不会发生变化。

下面列出了一些可能有用的相关链接

https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

http://www.montyhallproblem.com/

http://www.math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html

参考文献

[1] Steve Selvin. A problem in probability (letter to the editor). *American Statistician*, 29(1):67, 1975.

[2] 李勇 and 刘璐. “三门问题”的反思. 数学通报, (9):2, 2018.

[3] 杨培恒. 关于贝特朗奇论的讨论. 陕西师大学报 *(*自然科学版*)*, 8(4):75–77, 1990.