220528 <week 04 - The Poisson Process Feedback>

1 Markov property.

Def. 확률과정 $\{X_t\}$가 있을 때, 시점 $T=\{t \mid t=0,1,\cdots\}$에 대하여

$$P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n)$$
$$=P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n)$$

이 과정을 Markov Process 라 하고, 특히 이를 'Simple Markov property'라 함.

- 미래시점($t=n+1$)에서의 상태 X_{n+1}은 과거시점에서의 상태 $X_0, \cdots, X_{n-1}$과는 서로 독립.

  ↳ 즉, 미래는 현 시점 $t=n$에서의 상태에만 의존받음.

- 시간, 상태공간이 이산(discrete) 일 때 Markov Chain 이라 함.
- 시간은 연속(continuous), 상태 공간이 이산(discrete)일 때, Discontinuous Markov Process 이라 함.

  → ex) 포아송과정, 출생과정, 출생사멸과정.
- 시간, 상태공간이 연속(continuous)일 때, Continuous Markov Chain (or Diffusion Process)라 함.

  → ex) 브라운운동.

NOTE. 동일한 방법으로,

$$P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \cdots, X_n=i_n)$$
$$=P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i_n)$$

이 성립할 때 'Double Markov Process'이라 함.

2 The Poisson Process - Exercise.

Exercise 1) 어떤 자동 인쇄기에서 나오는 결과물은 약 300m 당 평균적으로 1개 정도의 오타가 관찰된다고 한다. 720m의 인쇄물에서 적어도 2개의 오타가 관찰될 확률을 구하시오.

Sol. Y = 300m 당 발생하는 오타의 수.

$Y \sim Poisson(1)$, $f(y) = \dfrac{e^{-1}(1)^y}{y!}, y=0,1,\cdots$

한편, X = 720m 당 발생하는 오타의 수.

$X \sim Poisson(2.4)$ (∵ 한 사건이 발생할 확률은 사건의 길이에 비례한다.)

$f(x) = \dfrac{e^{-2.4}(2.4)^x}{x!}, x=0,1,\cdots$

$$\Rightarrow P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-2.4}(2.4)^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-2.4}(2.4)^x}{x!}$$

Exercise 2) 어떤 사무실에 고객이 매 시간당 도착률 $\lambda=4$인 포아송과정을 따라 들어온다고 하자.

(1) 오전 9시에 문 열었을 때 10시까지 2명의 손님이 찾아올 확률을 구하여라.

(2) 또, 10시까지 2명, 11시 30분까지 5명의 손님이 들어올 확률은 얼마인가?

Sol. $\lambda=4$인 포아송과정 $\longrightarrow f(x) = \dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$ 에서 $\lambda=4$인 분포! $\dfrac{e^{-4t}(4t)^x}{x!}$

(1) $P[N(1)=2]$ (∵ 9-10시, 즉 1시간 동안 2명의 손님이 찾아오는 것이므로, $N(1)=2$)

$= \dfrac{e^{-4}4^2}{2!} = 8e^{-4}$.

(2) $P[N(1)=2, N(2.5)=5]$

$= P[N(1)=2, N(2.5)-N(1)=3]$

$= P[N(1)=2, N(1.5)=3]$ (∵ stationary increment)

$= P[N(1)=2] \times P[N(1.5)=3]$ (∵ independent increment)

$= \dfrac{e^{-4}4^2}{2!} \times \dfrac{e^{-6}6^3}{3!}$

$= 8e^{-4} \times 36e^{-6} = 288e^{-10}$.