

Лабораторная работа № 5-М  
“Определение моментов инерции тел  
методом крутильных колебаний”

Цель работы: определение момента инерции параллелепипеда.

Приборы и принадлежности: прибор FPV 05 (крутильный маятник), образец параллелепипеда, штангенциркуль.

**ТЕОРИЯ:**

**ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА.**

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  выражается зависимостью

$$I_z \ddot{\varphi} = M_z \quad (1)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси  $z$ ,  $M_z$  – момент сил, действующих на тело относительно той же оси  $z$ ,  $\ddot{\varphi}$  – угловое ускорение тела.

Момент инерции тела относительно заданной оси определяется выражением

$$I_z = \int r^2 dm, \quad (2)$$

где  $r$  – расстояние элемента  $dm$  тела до оси вращения. Этот интеграл берется по всем элементам массы  $m$ .

Для однородного тела с постоянной плотностью  $\rho$  выражение (2) можно преобразовать к виду

$$I_z = \rho \int_V r^2 dv, \quad (3)$$

где интегрирование ведется по объему тела  $V$ .

Поскольку ось вращения тела можно выбрать произвольно, то в общем случае существует сколь угодно большое число моментов инерции данного тела относительно этих осей.

Опыт показывает, что если тело привести во вращение вокруг произвольной выбранной оси, а затем предоставить его самому себе, то положение оси вращения в пространстве в общем случае изменится. Однако, существуют такие оси вращения тела, которые не изменяют своей ориентации в пространстве и после того, как будет установлено действие на тело внешних сил. Такие оси называются свободными осями.

Для тела любой формы с произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела свободные оси, которые называются главными осями инерции тела.

Моменты инерции относительно главных осей инерции называются главными моментами инерции тела. При отсутствии внешних воздействий устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих максимальному значениям момента инерции.

В общем случае эти моменты различны

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

Для однородного параллелепипеда главными осями инерции являются оси, проходящие через центры противоположных граней и центр масс (рис.1).

Обозначим главные моменты инерции параллелепипеда относительно осей X, Y и Z, соответственно  $I_1, I_2, I_3$ .

Можно показать [1], что

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{1}{12} m(l_2^2 + l_3^2) \\ I_2 = \frac{1}{12} m(l_1^2 + l_3^2) \\ I_3 = \frac{1}{12} m(l_1^2 + l_2^2), \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $m$ -масса параллелепипеда,  $l_1, l_2, l_3$ -его размеры, соответственно, по осям  $x, y, z$ . Момент инерции тела относительно произвольно ориентированной в пространстве оси  $z'$ , проходящей через центр масс  $O$ , можно выразить через главные моменты инерции

$$I = I_1 \cos^2 \varphi_1 + I_2 \cos^2 \varphi_2 + I_3 \cos^2 \varphi_3, \quad (5)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — углы, которые составляет ось  $z'$  с главными осями инерции  $x, y, z$ .

Отметим, что для однородного куба

$$I_1 = I_2 = I_3 = I \text{ и } I_{z'} = I(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3) = I,$$

т. к. для прямой произвольного в пространстве направления сумма квадратов косинусов направляющих углов, отсчитанных относительно осей координат, тождественно равна единице.

Таким образом, момент инерции куба относительно любой оси, проходящей через его центр масс, будет один и тот же, как и у однородного шара. Такие тела называются шаровыми волчками.



## Описание лабораторной установки и метода измерения.

Схема лабораторной установки приведена на рис.2

На основании 1, с четырьмя ножками регулируемой высоты прикреплен миллисекундомер 2. В основание 1 закреплена колонка 3, на которой при помощи прижимных винтов закреплены кронштейном 4-6.

Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 7. На кронштейне 5 закреплена стальная пластина 8, служащая основанием фотоэлектрическому датчику 9, электромагниту 10 и шкале 11. Электромагнит 10 можно перемещать вдоль пластины. Его положение относительно датчика 9 указывает на шкале 11 стрелка, прикрепленная к электромагниту. В рамке 7 можно установить тело 13, момент инерции которого  $I$  необходимо определить.

В начальный момент рамка 7 фиксируется электромагнитом при помощи флажка 12. После нажатия клавиши "Пуск" на панели миллисекундомера 2, электромагнит 10 выключается и рамка начинает совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. При повороте рамки со стороны проволоки действует момент упругих сил  $M$ , пропорциональный, в пределах упругой деформации, углу поворота  $\varphi$ :

$$M = -k\varphi, \quad (6)$$

где  $k$ -коэффициент возвращающего момента проволоки.

Подставляя (6) в уравнение (1), получим уравнение

$$(I + I_0)\varphi'' + k\varphi = 0, \quad (7)$$

где  $I_0$ - момент инерции «пустой» рамки. Это уравнение гармонических колебаний. Его решение имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (8)$$

где  $\varphi_0$ - угловая амплитуда колебаний,  $\omega = \sqrt{k(I + I_0)}$  - круговая частота,  $(\omega t + \alpha)$  - фаза колебания,  $\alpha$  - начальная фаза колебаний.

Период колебаний  $T$  выражается через круговую частоту:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{(I + I_0)/k}, \quad (9)$$

Эта формула позволяет рассчитать  $I$ , если известен коэффициент возвращающего момента  $k$  и момент инерции «пустой» рамки  $I_0$ . Однако, на практике удобно определять  $I$  следующим образом: сначала находится период колебания  $T_0$  «пустой» рамки, а потом-период колебания  $T$  рамки с установленным в нем телом. После этого для периодов  $T_0$  и  $T$  можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} T_0 = 2\pi \sqrt{I_0/k} \\ T = 2\pi \sqrt{(I_0 + I)/k} \end{cases} \quad (10)$$

Отсюда момент инерции рамки и образца определяются в виде



$$\begin{cases} I_0 = kT_0^2 / 4\pi^2 \\ I = k / 4\pi^2 (T^2 - T_0^2) \end{cases} \quad (11)$$

Если исключить  $k$  из системы уравнений (11), то получится уравнение для нахождения момента инерции исследуемого образца:

$$I = I_0 [(T/T_0)^2 - 1], \quad (12)$$

Момент инерции рамки  $I_0$  является заданным параметром, значение которого приведено на основании (см. рис. 2) экспериментальной установки.

### Порядок выполнения работы.

1. С помощью регулируемых ножек установить ось вращения рамки вертикально.
  2. Включить питание установки и нажать кнопку "сеть". На панели миллисекундомера должны высвечиваться нули.
  3. Вращая рукой рамку 7, притянуть флажок 12 к электромагниту 10 так, чтобы тот зафиксировал рамку. Клавиша "пуск" на панели миллисекундомера при этом должна быть отжата.
  4. Определить период колебаний  $T_0$  рамки. Для этого нажать клавишу "пуск". Электромагнит при этом выключается, и рамка начинает совершать колебания. В процессе колебаний на индикаторе "Период" высвечивается число полных, т.е. уже совершенных рамкой колебаний. После нажатия на клавишу «Стоп» на правом индикаторе прибора будет зафиксировано время  $t_0$ , за которое рамка совершит  $N_0$  полных колебательных циклов.
  5. Операцию повторить пять раз. Результаты занести в таблицу 1.
- ВНИМАНИЕ!** Рамка совершает затухающие колебания. Поэтому число регистрируемых колебаний  $N_0$  должно выбираться таким, чтобы амплитуда колебаний флажка 12 не была бы меньше ширины фотоэлектрического датчика 9.

Таблица: 1

Определение периода колебаний "пустой" рамки.

№ измерений	Число колебаний рамки $N_0$	Время колебаний рамки $t_0, c$	Период колебаний рамки $T_0, c$	Результат расчета средних значений	
				Среднее значение периода колебан. $T_0$	Среднеквадратичное отклонение $\Delta(T), c$
1					
2					
3					
4					
5					



6. Установить образец 13 в рамку. Для этого нужно
- а) отодвинуть гайки зажимов на подвижной балке рамки;
  - б) поднять балку, придерживая другой рукой нижнюю неподвижную сторону рамки ;
  - в) осторожно установить образец так, чтобы острое нижнего центровочного винта рамки входило в углубление на образце по какой-либо из главных осей;
  - г) придерживая рукой нижнюю сторону рамки и не допуская нагрузку на верхнюю часть проволоки, опустить подвижную балку так, чтобы конец центровочного винта вошел в нужное углубление на образце;
  - д) затянуть гайки зажимов на подвижной балке;
  - е) затянуть центровочный винт подвижной рамки, тем самым окончательно закрепляя образец в рамке. Чтобы вынуть образец из рамки, следует выполнить описанные выше пункты в обратной последовательности.

**ВНИМАНИЕ!!!** При установки образца и его последующем снятии из рамки следует выполнять пункт а)...е) так, чтобы не нагружать проволоки при перемещениях подвижной балки.

7. Несколько раз измерить время  $N$  колебаний в соответствии с п.п.3,4,5 и занести результаты в таблицу 2. Таблица 2,3,4,5, имеют ту же форму, что и 1, отличаясь от нее заголовком и индексами при обозначениях физических величин. Например, если образец установлен так, что его ось  $x$  совпадает с осью вращения рамки то обозначения физических величин имеют индекс:  $N_1, t_1, T_1$  и т.д. Соответственно при нахождении моментов инерции относительно осей  $y, z$  или произвольной оси  $AC$  (см. рис. 1) применены индексы соответственно 2,3,  $AC$
8. Выполнить измерение  $N$  и  $t$  для остальных двух главных осей, а также одной из диагональных осей (например,  $AC$ ), последовательно повторяя операции, изложенные в п.п. 6 и 7.

Результаты измерений занести в таблицы 3,4 и 5.

9. Вынуть образец из рамки. Измерить стороны параллелепипеда  $I_1, I_2, I_3$ . Согласно рис.1 принят следующий порядок обозначения сторон:

$$I_1 > I_2 > I_3$$

Результаты измерения записать в таблицу 6.

Таблица 6

Теоретические параметры и масса исследуемого образца.

Масса образца $m, \text{кг}$	Длина стороны образца		
	$l_1,$ мм	$l_2,$ мм	$l_3,$ мм

10. Выключить питание установки.

Обработка результатов измерений.

1. Рассчитать значения периодов колебаний  $T$ , средних значений  $\bar{T}$  и среднеквадратичных отклонений  $\sigma(\bar{T})$  и записать в таблицы 1, 2, 3, 4, 5.
2. Вычислить экспериментальные значения моментов инерции  $I_1, I_2, I_3$  и  $I_{AC}$  по формуле (12). Результаты записать в таблицу

Таблица 7

Сравнение экспериментальных значений  
моментов инерции с теоретическими

		Главные моменты инерции			Момент инерции относительно диагональной оси $I_{AC}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
		$I_1,$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_2,$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_3,$ $\text{кг} \cdot \text{м}^2$	
Эксперим					
Теория					
Отли- чие экспе- рим. от теории	$\Delta I$				
	$\varepsilon$				

3. Рассчитать теоретические значения главных моментов инерции  $I_1, I_2, I_3$  по формулам (4), а также момент инерции вокруг диагональной оси  $I_{AC}$  по формуле (5). Для оси AC косинусов углов  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  определяются с помощью формул:

$$\cos \varphi_1 = l_1 / l; \cos \varphi_2 = l_2 / l; \cos \varphi_3 = l_3 / l;$$

$$\text{где } l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}.$$

Результат расчетов записать в таблицу 7.

3. Найти отклонение экспериментальных значений моментов инерции от теоретических как в абсолютных единицы  $\Delta I$ , так и в относительных  $\varepsilon$ :

$$\Delta I = I_{\text{теор.}} - I_{\text{эксп.}}; \varepsilon = \Delta I / I_{\text{теор.}}$$

Результат записать в таблицу 7.

4. Сделать выводы по работе. Составить отчет.



Таблица: 2

Определение периода колебаний рамки по оси X.

№ изме- рений	Число коле- баний рамки $N_1$	Время коле- баний рамки $t_1, c$	Период коле- баний рамки $T_1, c$	Результат расчета средних значений	
				Среднее значение периода колебан. $T_1$	Среднеквадра- тичное отклоне- ние $\Delta(\bar{T}), c$
1					
2					
3					
4					
5					

Таблица: 3

Определение периода колебаний рамки по оси Y.

№ изме- рений	Число коле- баний рамки $N_2$	Время коле- баний рамки $T_2, c$	Период коле- баний рамки $T_2, c$	Результат расчета средних значений	
				Среднее значение периода колебан. $T_2$	Среднеквадра- тичное отклоне- ние $\Delta(\bar{T}), c$
1					
2					
3					
4					
5					

Таблица: 4

## Определение периода колебаний

рамки по оси Z.

№ измерения	Число колебаний рамки $N_3$	Время колебаний рамки $t_3, c$	Период колебаний рамки $T_3, c$	Результат расчета средних значений	
				Среднее значение периода колебан. $T_3$	Среднеквадратичное отклонение $\Delta(\bar{T}), c$
1					
2					
3					
4					
5					

Таблица: 5

## Определение периода колебаний

рамки по оси Z'.

№ измерения	Число колебаний рамки $N_4$	Время колебаний рамки $t_4, c$	Период колебаний рамки $T_4, c$	Результат расчета средних значений	
				Среднее значение периода колебан. $T_4$	Среднеквадратичное отклонение $\Delta(\bar{T}), c$
1					
2					
3					
4					
5					



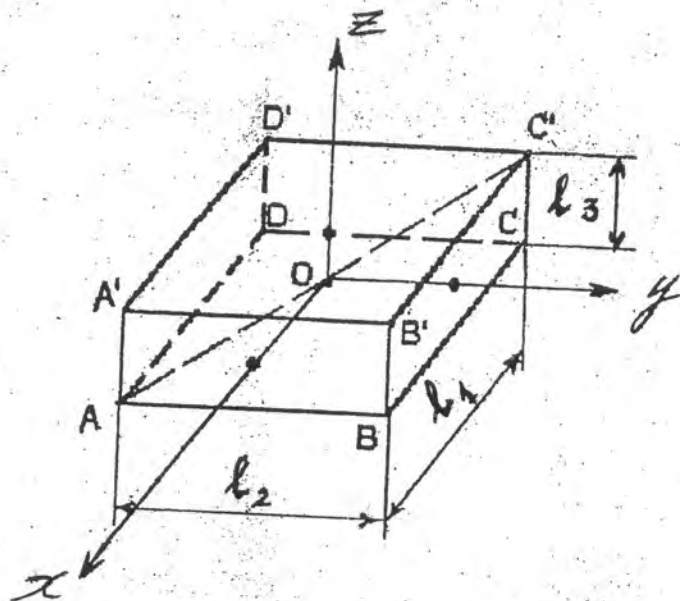


Рис. 1

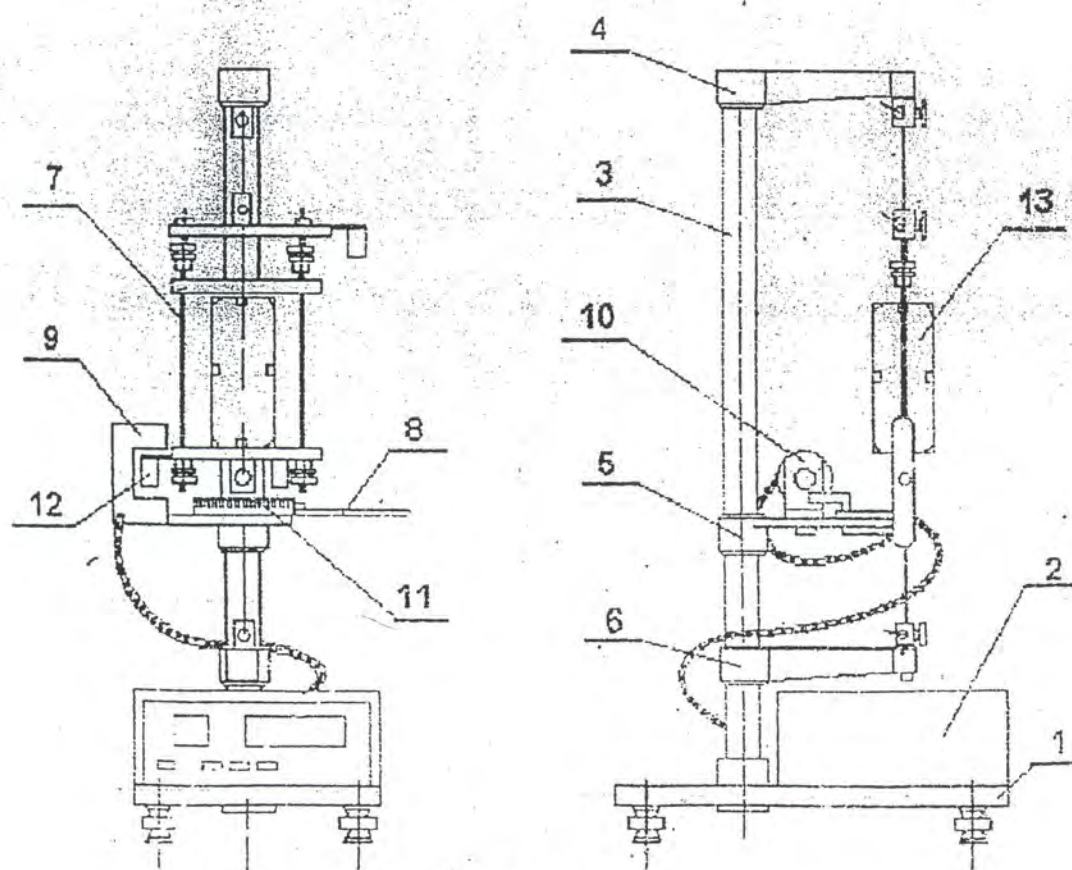


Рис. 2

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит метод крутильных колебаний?
2. Что такое момент инерции? Каков его физический смысл?
3. Что такое свободные оси, главные моменты инерции?
4. Как изменится момент инерции тела, если увеличить длину струны  $l$ , радиус струны  $r$ ?
5. Получите выражение для момента инерции параллелепипеда вокруг одной из главных осей.
6. Опишите устройство установки для данной работы и порядок выполнения работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики, т. I. - М.: Наука, 1982, §§ 38-40. Приложение III.
2. Стрелков С.П. Механика - М.: Наука, 1975, §§ 63, 64.