数学物理方法

第一讲介绍

Lei Du

dulei@dlut.edu.cn http://

faculty.dlut.edu.cn/dulei

数学科学学院

大连理工大学

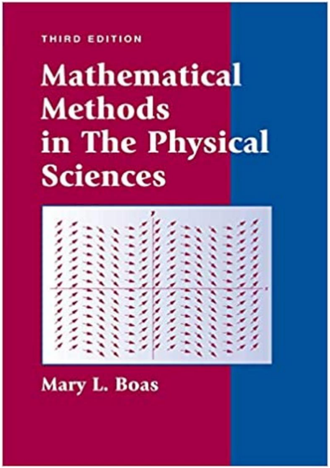
2023 年 2 月

内容

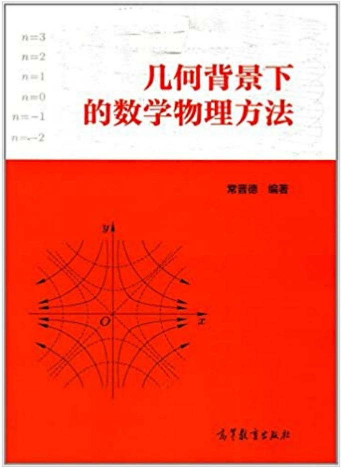
一般信息

- 上课时间:周二和周四。 (64 学分)
- 读者:雷杜
- QQ群号:685105418
- 评估:期末考试 70%,家庭作业 20%,课堂参与和出勤率 10%

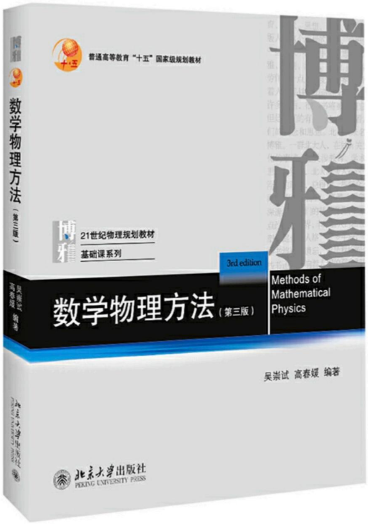
教科书


THIRD EDITION
Mathematical Methods in The Physical Sciences
Mary L. Boas

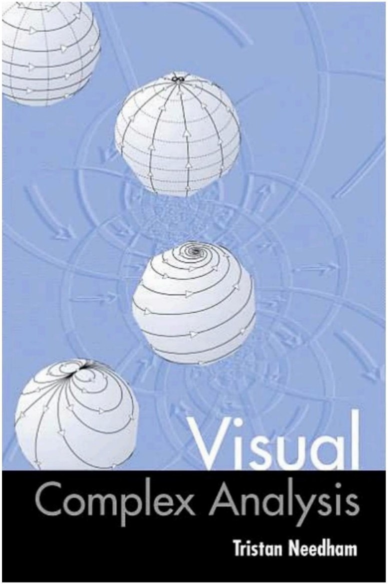
教科书



主要教材


普通高等教育"十五"国家级规划教材
21世纪物理规划教材
基础课系列
3rd edition
数学物理方法（第三版）
Methods of Mathematical Physics
吴崇试 高春媛 编著
北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

主要教材


Visual
Complex Analysis
Tristan Needham


VISUAL
COMPLEX
ANALYSIS
TURING ·05
复分析：
可视化方法
[美] 特里斯坦·尼达姆——著
齐民友——译
TRISTAN NEEDHAM
中国工信出版集团
人民邮电出版社

数学物理

1. 什么是数学物理？
2. 为什么要学数学物理？

什么是复杂分析?

1. 在实分析中,人们在实数的设置下研究微积分。
   因此,人们研究诸如实序列的收敛、实值函数的连续性、微分和积分等概念。

什么是复杂分析?

1. 在实分析中,人们在实数的设置下研究微积分。
因此,人们研究诸如实序列的收敛、实值函数的连续性、微分和积分等概念。

2. 在复数分析中,有人研究复数设置中的类似概念吗?部分正确!

什么是复杂分析?

1. 在实分析中,人们在实数的设置下研究微积分。
   因此,人们研究诸如实序列的收敛、实值函数的连续性、微分和积分等概念。

2. 在复数分析中,有人研究复数设置中的类似概念吗?部分正确!

   当一个人研究微分时,复分析的主题与真正的分析根本不同。复分析是对"复可微分"函数的研究。

什么是复杂分析?

例子

让 f : R → R 由 f(x) =

$$\begin{cases} 2\times & 如果\ x \geqslant 0 \\ 2\ \text{-}x & 如果\ x < 0 \end{cases}.$$

图:函数 f 及其导数 f 的图形

显然,f 处处可微,但 f 在 0 处不可微。

什么是复杂分析?

相比之下,我们后面会知道,如果$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$是C中的复可微函数,那么它是无限多次复可微的!!!

之所以在复数分析中出现这种奇迹,是因为复数可微性对函数施加了一些"刚性",从而使这种现象发生。

为什么要学习复分析?

复分析是所有数学的基础,在应用科学中也起着重要作用。从实轴延伸到复平面的一个主要目的是大大简化应用数学、工程等领域的大量任务。著名数学家雅克·阿达玛 (Jacques Hadamard) 简洁地表达了这一点:

> "实域中两个真理之间的最短路径通过复域。"

以下列出了研究复数分析的几个原因: PDE。如果 $f : C \to C$ 是 C 中

- 的复数可微函数,那么我们有两个关联的实值函数 $u, v : R$ f 的实部和虚部:对于 (x, y) $\in R$ 和 $v(x, y) := \mathrm{Im}(f(x, y))$.事实证明,u, v 满足一个重 $^{2个} \to R$,即 , $u(x, y) :=$ 要的基本 PDE,称为拉普拉斯方程: ∂ 2u ∂ 2u ^{2个} Re(f(x, y)) $\Delta u := = 0. + \partial y$

∂x 2 ^{2个}

为什么要学习复分析?

类似地,$\Delta v = 0$ 在 R 中也是如此。拉普拉斯方程本身很重要,因为应用中的许多问题,例如物理学,都会产生这个方程。它发生在例如静电学、稳态热传导、不可压缩流体流动、布朗运动等中。

- 真实分析。使用复分析,我们可以在实分析中计算一些积分,例如

$$ {}_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{余弦}}{1+x^{2个}}\, dx \text{ 或 } {}_{0}^{\infty} \text{余弦}^{2}\, dx。 $$

- 应用程序。许多用于解决应用程序问题的工具,例如傅立叶/拉普拉斯/z 变换,都依赖于复函数理论。这些工具反过来可用于求解微分方程。

复数分析在数学物理和工程等应用学科中占有重要地位,例如控制理论、信号处理等。

为什么要学习复分析?

- 解析数论。许多关于自然数的问题都可以使用复杂的分析工具来回答。例如,

定理（素数定理）

林
n→∞

示对
于大 n 小
于 n 的素数

的个数。

素数定理可以通过使用复杂的解析计算来证明,该计算具有称为

黎曼 zeta 函数 1 ζ(s) :=

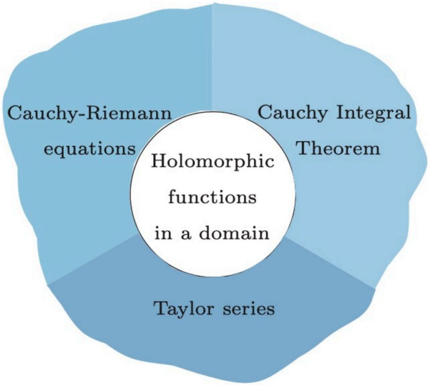
∞
n=1

1个
号。小 n

1与黎曼zeta函数相关的还有一个著名的解析数论未解问题,即黎曼猜想,即黎曼zeta函数的所有“非平凡”零点都位于复平面中的Re(s)=线上。

我们将在复数分析中学到什么

复分析的中心研究对象将是**域中的全纯函数**,即复可微函数 $f : D \to C$,其中 D 是一个“域”。



不同类型的数字:整数、有理数和实数

- 在很长一段时间内,唯一使用的数字是正整数,在现代符号中为 1、2、3、……。 . ..
- 最早的数字系统扩展是允许有理数,例如 3/7 或 11/8。这些在测量距离和重量等方面显然很有用。
- 零和负数最初没有什么意义。然而,如果允许的话,很多代数 比如减法 会变得容易得多。
- 2000 多年前的希腊人指出,即使是有理数也不足以测量所有距离,例如边长为 1 的正方形的对角线长度。与有理数一起构成实数集的无理数的发现被保密了很长一段时间。

复数的历史发展

- “复数”一词最早出现在 1831 年 CF Gauss 的文献中。

- 与流行的看法相反,从历史上看,不是需要求解二次方程,而是需要求解三次方程,这导致数学家认真对待复数。意大利数学家 Girolamo Cardano（1501-1576)描述了一个求解一般三次方程的公式。

- L. Euler (1707-1783) 是第一个引入符号 i 具有 i 虚数单位的属性。随后，2个 = 1, 即 $i = \sqrt{-1}$, 称 i 为 CF Gauss (1777-1855) 研究了实系数具有 a + ib 形式的复根的代数方程,其中 a 和 b 是实数。

复数的历史发展

大约在 16 世纪,有人看到求解像 ax2 + bx + c = 0 这样的方程

作为寻找抛物线与直线 y = −bx − c 的交点的几何问题。很容易忽略 + 1 = 0 的缺失。

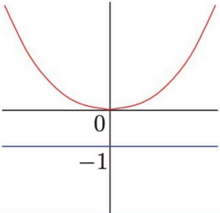
2 y =

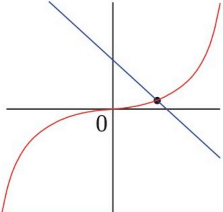
x 二次方程如 x 的实数可解性 2个

同时,Cardano 给出了求解三次 x 的公式 3个 = 3px + 2q,

x = 3个 q + q 2 3 + - 磷 3个 2 q - q - 第3 页。

立方 y = x 3个 总是与直线 y = 3px + 2q 相交。





复数的历史发展

但是对于像 x 这样的方程 ^{3个} = 15x + 4,即当 p = 5 且 q = 2 时,我们有 q = − ^{2个} 121磷 0,所以 Cardano 的公式用实数算术失败,但我们确实有一个实根,即 x = 4:

$$4个^{3个} = 64 = 60 + 4 = 15 \cdot 4 + 4。$$

在 Cardano 的工作出现三十年后,Rafael Bombelli（1526-1572)提出,也许通过使用复杂的算术,Cardano 的公式可以给出所需的实根。

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} ?= 4$$

可以检查 (2 + i) ^{3个} = 2 + 11i 和 (2 − i) ^{3个} = 2 − 11i。

因此,Bombelli 的工作确立了即使对于实际问题,复杂的算术也可能是相关的。从此,复数进入主流数学。

复数的定义

- $z = x + iy$ 形式的数字,其中 x, y 是实数2,称为复数。 ，是
- 如果 $x = 0$,即 $z = iy$,则 z 称为纯虚数,iy 表示虚数的 y 个单位3。
- 根据定义,复数是实数 x 和 y 的有序对 (x, y)。例如,$(1, 0)$,$(0, 1)$,$(0, 0)$,$(1, -2)$ 都是复数。
- 用符号 $\mathbb{R}$ 表示所有实数的集合。所有复数的集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 用 $\mathbb{C}$ 表示。因此 $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$。

---

[2] $x = \operatorname{Re} z$ 和 $y = \operatorname{Im} z$ 分别称为 z 的实部和虚部。

[3] 通常将复数 $x + i \cdot 0$ 写成 x,即把它当作 a 实数。虽然这在分析上没有任何区别,但必须在概念上区分实数 x 和复数 $x + i \cdot 0$。

C上的两个操作

设x1 + iy1和x2 + iy2是两个复数。我们将 C 上的加法 “+”和乘法 “·”定义为 :4

$$(x1, y1) + (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2),$$
$$(x1, y1) (x2, y2) = (x1x2 - y1y2, x1y2 + x2y1),$$

对于复数(x1, y1),(x2, y2)。

4假设普通算术规则适用于复数,我们发现,确实,以上两个身份成立。

观察

- 实数和复数遵循相同的基本算术定律,这一点很重要。
- 零是唯一既真实又纯虚的数字。
- 两个复数相等当且仅当它们具有相同的实部和相同的虚部。
- 短语“大于”或“小于”在复数集合中没有任何意义。

加法和乘法的基本定律

如果z1、 z2、 z3表示复数,则我们遵循:加法交换律: z1

- + z2 = z2 + z1。
- 加法结合律: z1 + (z2 + z3) = (z1 + z2) + z3。
- 乘法交换律: z1z2 = z2z1。
- 乘法结合律: z1(z2z3) = (z1z2)z3。
- 乘法分配律: z1(z2 + z3) = z1z2 + z1z3。
- 加法恒等式:(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)。因此,复数(0, 0)是加法恒等式,称为复数系的零。
- 加法逆:(x, y) + (−x, −y) = (x − x, y − y) = (0, 0)。数 (−x, −y) 是(x, y) 的加法逆元,称为复数 (x, y) 的负数,我们写成 −(x, y) = (−x, −y) .

加法和乘法的基本定律

- 乘法恒等式:$(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$。
  复数 (1, 0) 是乘法恒等式,称为单位或复数系统之一。

- 乘法逆:复数 x 的复数 (x, y) 的逆如果 ， 和 ‘ ‘ 被称为

$$(x,y)\ x',y' = (1, 0),$$

即,如果 $xx' - yy'$,坐标 $+ x' y' = (1, 0)$,然后

$$xx' - yy' = 1, \quad xy' + x'y = 0。$$

这些给

$$x' = \frac{X}{2 \times}\ 2和 + 和' = \frac{-y}{2 \times + 和^2}、$$

提供 (x, y) = (0, 0)。

两个复数的差分与除法

两个复数z1 = (x1, y1)和z2 = (x2, y2)的差由以下等式定义z1 − z2 = z1 + (−z2) = (x1, y1) + (−x2, −y2) = (x1 + (−x2), y1 + (−y2))

$$= (x1 - x2, y1 - y2)。$$

复数z1除以z2由以下等式定义

$$\frac{z1}{z2} = z1z2^{-1} = (x1, y1)(x2, y2)^{-1}$$

$$= (x1, y1)\left(\frac{x2}{x_2^2 + 和2^2}, -\frac{y2}{x_2^2 + 和2^2}\right)$$

$$= \frac{x1x2 + y1y2}{x_{2个}^{2个} + y2}, \frac{x2y1 - x1y2}{x_{2个}^{2个} + y2}$$

提供 $x_{2个}^{2个} + 和2^2 \neq 0$。

复数的几何表示

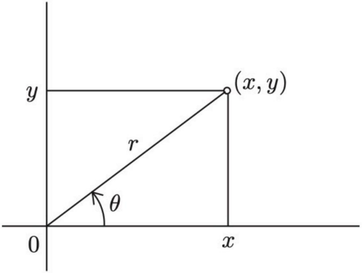


图:平面中 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的笛卡尔和极坐标表示。

复数加法的几何意义

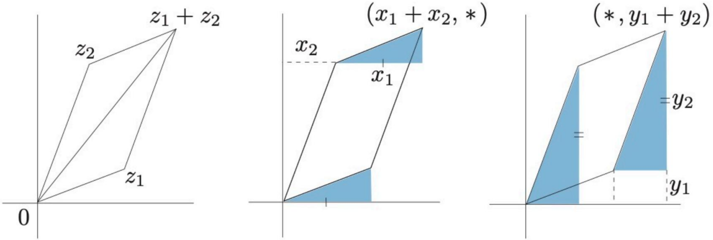


图 :两个复数相加。

复数减法的几何意义

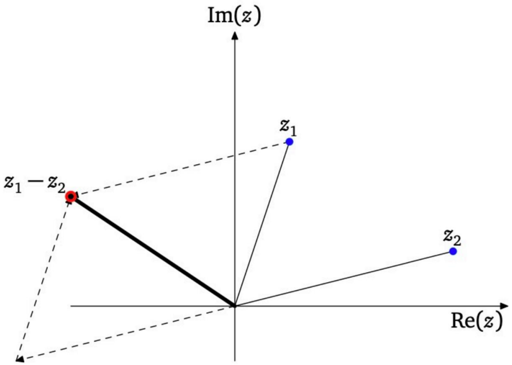


图 :两个复数的减法。

复数乘法的几何意义

对于用极坐标表示的两个复数

$$z1 = r1 (\cos θ1 + i\sin θ1), z2 = r2 (\cos θ2 + i\sin θ2),$$

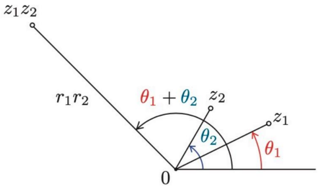
我们有那个

$$z1 \cdot z2 = r1 (\cos θ1 + i\sin θ1) \cdot r2 (\cos θ2 + i\sin θ2)$$

$$= r1r2 (\cos θ1 \cos θ2 - \sin θ1 \sin θ2 + i(\cos θ1 \sin θ2 + \cos θ2 \sin θ1)) = r1r2 (\cos (θ1 + θ2) + i\sin (θ1 + θ2))。$$

因此，

$$|z1z2| = |z1||z2| \arg(z1z2) = \arg(z1) + \arg(z2)。$$



复数乘法的几何意义:一个特例

考虑乘以 cos α + isin α,它与原点的距离为 1。如果z ∈ C,则z · (cos α + isin α) 是将连接0 到z 的直线逆时针旋转角度α 得到的。特别是,将 z 乘以

$$我 = 0 + 我 \cdot 1 = 余弦 \frac{\pi}{2} + 你 \quad \frac{\pi}{\ }$$

产生 90° 的逆时针旋转。

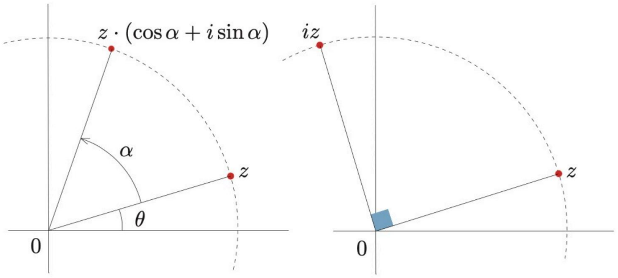


图 :乘以 cos α + isin α 产生 α 的逆时针旋转。

De Moivre 公式和n 次根

我们有所有 $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)。$$

这称为 de Moivre 公式。

De Moivre 的公式提供了一种求复数 z 的 n 次方根的简单方法,即满足 w 的复数 w 对于某些 $r \geqslant 0$ 且 $\theta \in [0, 2\pi]$ 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$).如果 $w^n = z$,其中 $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,则 $= z$。

$$w^n = \rho^n (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z。$$

因此 $\rho = \sqrt[n]{r}$。另一方面,w^n与正实轴所成的角度是 $n\alpha$,它在集合 $\{\cdots\theta - 4\pi, \theta - 2\pi, \theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \theta + 6\pi, \cdots\}$,即对于任意整数k,θ+2πk。

,

De Moivre 公式和n 次根

因此我们得到 α ∈ $\frac{\theta}{n}$ 2π + $\frac{}{n}$ k : k ∈ Z θ ，这给出了不同的 w

一个∈ $\overline{\theta n}$, $\frac{我}{n}$ + n, $\frac{2\pi}{}$ $\frac{\theta}{n}$ 2π + 2 · n, . . . , —— $\overline{n}$ + (n − 1) · $\frac{2页}{n}$.

De Moivre 公式和n 次根

因此我们得到 $\alpha \in$ $\frac{\theta}{n}$ $2\pi +$ $\frac{}{n}$ $k : k \in Z$ θ ，这给出了不同的 w

一个∈ $\overline{\theta n}$, 我 $\overline{n}$ + n , $\frac{2\pi}{}$ $\frac{\theta}{n}$ $2\pi + 2 \cdot$ n , . . . , —— $\overline{n}$ $+ (n - 1) \cdot$ $\frac{2页}{n}$.

特别是,如果 z = 1,我们将得到 n 次单位根,它们位于圆内接的 n 边正多边形的顶点处。

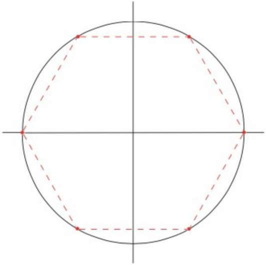


图:六个统一的六次根。

两个复数的除法

对于用极坐标表示的两个复数

$$z1 = r1\ (\cos\theta 1 + i\sin\theta 1),\ z2 = r2\ (\cos\theta 2 + i\sin\theta 2),$$

我们有那个

$$\frac{z1}{z2} = \frac{r1}{r2}(\cos(\theta 1 - \theta 2) + i\sin(\theta 1 - \theta 2))。$$

因此，

$$\frac{z1}{z2} = \frac{|z1|}{|z2|} \text{和} \arg \frac{z1}{z2} = \arg(z1) - \arg(z2)。$$

复数的模数和自变量

令 z = x + iy 为任何复数。若x=r cos θ,y=rsin θ,则2 +x+y称为幅角或z的幅值,记为 arg z或amp2称为z的模5,记为|z|和 θ = tan−1 y $\frac{}{x}$ 是 z。

几何上，|z|是点 z 到原点的距离。还，

$$\mathrm{Re}(z) = x \leqslant x \quad \overline{2\,2 + 和} \quad = |z|。$$

请注意,任何复数的模数都是其实部和虚部的单值函数,而自变量不是。

位于 −π 和 π 之间的参数值,即,

$$-\pi < \theta \leqslant \pi,或\ -\pi \leqslant \theta < \pi$$

称为参数的主值。一般来说,当我们写Arg z 时,我们指的是 z 的参数的主值。

5K。 Weierstrass 称 x + iy 的模为 x + iy 的绝对值,记为 |x + iy|。

Machine Translated by Google

复共轭

$z = x + iy$ 的复共轭 $\bar{z}$ 其中 $x, y \in \mathbb{R}$ 定义为

$$\bar{z} = x - iy。$$

很容易检查以下属性

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad z\bar{z} = |z|^2, \text{回复}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{和} \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}。$$

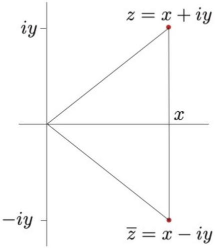


图 :复共轭是通过在实轴上反射z得到的。

立体投影

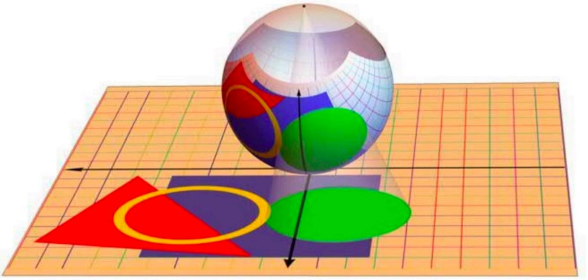


图 :线 Rez = 0 和 Imz = 0（粗体)和两个任意圆（从复平面上方的位置观察，Imz 大且正)的立体投影。北极（用黑点表示)映射到无穷大,南极映射到零。

立体投影

平面内点z=x+iy与点的对应关系

(X, Y, Z) 在球面上（满足 X ^{2个} + 和 ^{2个} + (Z − 1) = 1^{2个}) 如下：

- 平面→球体：

$$X = \frac{4倍}{2\times + 和^{2个} + 4}, \quad 和 = \frac{4岁}{2\times + 和^{2个} + 4}, \quad Z = \frac{2(x^{2个} + 和^{2个})}{2\times + 和^{2个} + 4}.$$

- 球体→平面：

$$x = \frac{2X}{2 - Z}, 和 = \frac{2年}{2 - Z}.$$

立体投影

将复数定义为球面上的点而不是平面上的点需要权衡：

- 丢失算术运算 +、、、/ 的漂亮直接插图。

- 获得更好的方法来考虑除以零。
- 也许更重要的是,球体有助于思考奇点,例如极点和分支点。

立体投影

将复数定义为球面上的点而不是平面上的点需要权衡：

- 丢失算术运算 +、、、/ 的漂亮直接插图。
- 获得更好的方法来考虑除以零。
- 也许更重要的是,球体有助于思考奇点,例如极点和分支点。

这种立体投影具有以下优良特性：

- 在局部,相交曲线之间的角度保留在平面和球体之间。
- 复平面中的圆映射到球面上的圆。
- 包含北极的球体上的圆映射到平面中的直线。