Machine Translated by Google

数学物理方法

第 7 讲　傅里叶和拉普拉斯变换

Lei Du

dulei@dlut.edu.cn http://

faculty.dlut.edu.cn/dulei

数学科学学院

大连理工大学

2023年5月

Machine Translated by Google

内容

Machine Translated by Google

Machine Translated by Google

傅立叶积分

傅立叶变换的方法可以用来解决无界区域的问题。傅里叶变换是从有限（区域)区间上的傅里叶级数演变而来的。考虑函数 f(x) 在 [−l, l] 上的傅里叶级数：

$$f(x) = \frac{a0}{2\text{个}} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{一个}\cos \frac{n\pi}{\text{升}} x + bn\text{正弦}\, x \frac{n\pi}{\text{升}} , \tag{1}$$

在哪里

$$\begin{aligned} \text{一个} &= \frac{1}{} \int_{l\,-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{n\pi}{\text{升}} \xi d\xi, \ n = 0, 1, 2, \cdots \\ bn &= \frac{\text{升}}{1\text{升}} \int_{-l} f(\xi)\ \text{正弦} \frac{n\pi}{\text{升}} \xi d\xi, \ n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

用（2)代替（1） ,我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1\text{个}}{2\text{升}} \int_{-l}^{\text{升}} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\text{个}}{\text{升}} \int_{-l}^{\text{升}} f(\xi)\ \text{余弦} \frac{n\pi}{} \xi d\xi \cos l \frac{n\pi}{\text{升}} X \\ &+ \int_{-l}^{\text{升}} f(\xi) \sin \frac{n\pi}{} \xi d\xi \sin l \frac{n\pi}{\text{升}} X \\ &= \frac{1\text{个}}{2\text{升}} \int_{-l}^{\text{升}} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\text{个}}{\text{升}} \int_{-l}^{\text{升}} f(\xi)\ \text{余弦} \frac{n\pi}{\text{升}} (\xi - x)d\xi\text{。} \end{aligned} \tag{3}$$

Machine Translated by Google

傅立叶积分

假设 f(x) 在 (−∞, +∞) 中绝对可积,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|d\xi < +\infty$。
然后

$$\frac{|a_0|}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi \quad 2l \quad \frac{1}{} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|d\xi < +\infty, \text{和} \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|d\xi = 0。$$

对于固定的x,令式(2)中的$l \to \infty$。我们得到

$$f(x) = \text{限制}_{l\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\ \text{余弦}\ \frac{n\pi}{l}(\xi - x)d\xi。$$

如果我们表示$\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $\Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l}$, 那么 f(x) 可以写成

$$f(x) = \text{限制}_{l\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n)\ \Delta\alpha_n = \text{限制}_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n)\ \Delta\alpha,$$

在哪里

$$F(\alpha_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} f(\xi)\cos\left[\alpha_n(\xi - x)\right] d\xi。$$

如果 $l \to \infty$,则 $\Delta\alpha \to 0$ 则以上和趋于定积分。因此,我们可以得到

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos[\alpha(\xi - x)]d\xi\, d\alpha。 \tag{4}$$

这个积分称为**傅里叶积分**。

Machine Translated by Google

傅里叶积分变换

通常,式(4)可以用复数形式表示。放

$$\text{余弦}\alpha(\xi - x) = \frac{\text{1个}}{\text{2个}} \, {}^{\text{这是}} i\alpha(\xi-x) + e \; -i\alpha(\xi-x) \qquad ,$$

然后

$$f(x) = 2\pi \, \frac{\text{1个}}{} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i\alpha(\xi-x) + e \; -i\alpha(\xi-x) \, d\xi da \; f(\xi) \, e$$

$$= \frac{\text{1个}}{\text{2页}} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{\, i\alpha(\xi-x)} \, d\xi da + \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{\, -i\alpha(\xi-x)} \, d\xi da$$

$$= \frac{\text{1个}}{\text{2页}} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{\, i\alpha(\xi-x)} \, d\xi da + \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{\, i\alpha(\xi-x)} \, d\xi da$$

$$= \frac{\text{1个}}{\text{2页}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{\, i\alpha(\xi-x)} \, d\xi da$$

$$= \frac{\text{1个}}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{1个}}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{\, iax d\xi} \cdot e^{-iax} \, da\text{。}$$

Machine Translated by Google

傅里叶积分变换

定义

假设函数 f(x) 是分段光滑的（分段连续可导的)并且在 $(-\infty; \infty)$ 中绝对可积,则积分

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \equiv F[f(x)]$$

称为f(x)的傅里叶积分变换,f(x)称为F(α)的傅里叶逆变换

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(a) e^{-iax} da。$$

Machine Translated by Google

傅里叶积分变换

定义

假设函数 f(x) 是分段光滑的（分段连续可导的)并且在 $(-\infty;\infty)$ 中绝对可积,则积分

$$F(\alpha)=\frac{\text{1个}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \equiv F[f(x)]$$

称为f(x)的傅里叶积分变换,f(x)称为F(α)的傅里叶逆变换

$$f(x)=\frac{\text{1个}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(a)e^{-iax}\,da。$$

定理（狄利克雷条件）

假设 f(x) 满足 Dirichlet 条件： 1 f(x) 对所有 $x\in(-\infty,+\infty)$ 是有界

- 且绝对可积的； 2 f(x) 至多有有限个极值点和第一类不连续点。
-

然后,对于任何 $x\in(-\infty,\infty)$,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)\ 2}{} = \frac{\text{1个}}{2\text{页}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{i\lambda s}\,d\lambda\, e^{-ixs}\,ds。$$

Machine Translated by Google

傅里叶积分变换

进一步，设f(x)为满足狄利克雷条件的**奇函数**，则傅里叶变换变为正弦傅里叶变换，使得

$$F_s(s)=\sqrt{\frac{2\text{个}}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\lambda)\sin(\lambda s)d\lambda \Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2\text{个}}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(s)\sin(xs)ds,$$

连同这个，

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1\text{个}}{2\text{页}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\sin s(x-\lambda)d\lambda\, ds。$$

若f(x)为满足狄利克雷条件的**偶函数**，则傅里叶变换变为余弦傅里叶变换，即

$$F_c(s)=\sqrt{\frac{2\text{个}}{\pi}}\int_0^{\infty} f(\lambda)\cos(\lambda s)d\lambda \Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2\text{个}}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(s)\cos(xs)ds,$$

并连同

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2\text{个}}=\frac{1\text{个}}{2\text{页}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos s(x-\lambda)d\lambda\, ds。$$

傅里叶积分变换

例子

求 $f(x) = e-|x|$的傅里叶变换.

回答。

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{\text{1个}}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e \cdot e \quad -|\xi|\, dx$$

$$= \frac{\text{1个}}{\sqrt{2p}} \int_{0}^{+\infty} \text{这是}-(1-i\alpha)\xi\, d\xi + \int_{-\infty}^{0} \text{这是}(1+ia)\xi\, \xi d\xi$$

$$= \frac{\text{1个}}{\sqrt{2p}} \left. \frac{-e-(1-i\alpha)\xi}{1-i\alpha} \right|_{0}^{+\infty} + \left. \frac{\text{这是}(1+ia)x}{1+i\alpha} \right|_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{\text{1个}}{\sqrt{2p}} \frac{\text{1个}}{1-i\alpha\ 1+i\alpha} + \frac{\text{1个}}{} = \frac{\text{1个}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{2个}}{(1+a2)} = \sqrt{\frac{\text{2个}}{\pi}} \frac{\text{1个}}{(1+a2)}.$$

□

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

1. 傅里叶变换是线性变换。

   认为

$$F[f] = F(\lambda) = \sqrt{\ } 2\pi \ \overset{1个}{\overline{\qquad}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e \ il\xi d\xi,$$

   那么对于任何数字 a 和 b，

$$F[af(x) + bg(x)] = aF[f] + bF[g]。$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

1 傅里叶变换是线性变换。

认为

$$F[f] = F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi,$$

那么对于任何数字 a 和 b，

$$F[af(x) + bg(x)] = aF[f] + bF[g]。$$

证明：

$$F[af + bg] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [af(\xi) + bg(\xi)]e^{i\lambda\xi}d\xi$$

=一个· $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi + b \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi$

$= aF[f] + bF[g]$。

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

2 位移定理。假设 F[f] 是 f(x) 的傅里叶变换，c 是实数常数，那么

$$F[f(x-c)] = e^{i\lambda c}F[f(x)]。$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

2 位移定理。假设 F[f] 是 f(x) 的傅里叶变换，c 是实数
常数，那么

$$F[f(x-c)] = e^{i\lambda c}F[f(x)]。$$

证明：

$$F[f(x-c)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi-c)e^{i\lambda\xi}d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)e^{i\lambda(\eta+c)}\,d\eta = e^{i\lambda c}F[f(x)]。$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

3 相似定理。假设F[f(x)] = F(λ)是f(x)的傅里叶变换，c = 0是a
常数，那么

$$F[f(cx)] = \frac{1个}{|C|} F \frac{升}{C} .$$

傅里叶变换的性质

3 相似定理。假设F[f(x)] = F(λ)是f(x)的傅里叶变换,c = 0是a 常数,那么

$$F[f(cx)] = \frac{1个}{|C|} F \frac{升}{C} .$$

证明:

$$F[f(cx)] = \sqrt{2\pi} \frac{1个}{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(c\xi)e\ il\xi d\xi$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(n)e^{\text{是}\frac{\text{我}}{C}} \frac{1}{C} d\eta \text{（如果 } c > 0\text{）}$$

或者

$$\frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{\infty}^{-\infty} f(n)e^{\text{升}\frac{\text{公}}{C}} \frac{1}{C} d\eta \text{（如果 } c < 0\text{）}$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2\pi|c|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(n)e^{\text{是}\frac{\text{我}}{C}} d\eta = \frac{1个}{|C|} F \frac{升}{C} .$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

4 微分定理。设f(x)和f在(−∞,+∞), lim f(x)=0,则|x|→∞ $f'(x)$ 是分段光滑且绝对积分的

$$F[f'(x)] = (-i\lambda)F[f(x)]。$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

4 微分定理。设f(x)和f在(−∞,+∞),lim f(x)=0,则|x|→∞ ‘(x) 是分段光滑且绝对积分的

$$F\ '(x) = (-i\lambda)F[f(x)]。$$

证明：

$$F\ '(x) = \frac{1个}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F\ '(\xi)e\ il\xi d\xi$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{\ }} f(\xi)e^{伊尔克斯}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (il) \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e\ il\xi d\xi$$

$$2\pi = (-i\lambda)F[f(x)]。$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

4微分定理。设f(x)和f在(−∞,+∞), $\lim_{|x|\to\infty}$ f(x)=0,则 $'(x)$ 是分段光滑且绝对积分的

$$F\quad '(x) = (-i\lambda)F[f(x)]。$$

证明：

$$F\quad '(x) = \frac{1个}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F\quad '(\xi)e\ il\xi d\xi$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{}}\ f(\xi)e^{伊尔克斯}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - (il)\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e\ il\xi d\xi$$

$$2\pi = (-i\lambda)F[f(x)]。$$

推论

假设f(x)和f (k) (x)(k=1,2,· · ·n)可以进行傅立叶变换运算,且f (k) (±∞)=0,k=0,1 , · · · n − 1,其中 f (0)(x) = f(x),则

$$F\ f\ (n)\ (x) = (-i\lambda)\ nF[f(x)]。$$

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

5假设存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换,并且 $F[f(x)] = F(\lambda)$，

$F[g(x)] = G(\lambda)$,则 F[f

g(x)] = $F(\lambda) \cdot G(\lambda)$； $F[f(x) \cdot g(x)] = F$

$G(\lambda)$。

Machine Translated by Google

傅里叶变换的性质

5假设存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的傅里叶变换,并且 $F[f(x)] = F(\lambda)$,

$F[g(x)] = G(\lambda)$,则 $F[f \quad g(x)] = F(\lambda)\cdot G(\lambda)$; $F[f(x)\cdot g(x)] = F \quad G(\lambda)$。

定义（卷积及其傅立叶变换）

假设存在 $F[f]$ 和 $F[g]$,则积分

$$\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi)f(\xi)d\xi$$

称为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的卷积,表示为 $f \quad g(x)$ 或 $g \quad f(x)$。
类似地,令 $F(\lambda) = F[f(x)]$,$G(\lambda) = F[g(x)]$。积分

$$\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda-s)G(s)ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda-s)F(s)ds$$

称为 $F(\lambda)$ 和 $G(\lambda)$ 的卷积,记为 $F \quad G(\lambda)$ 或 $G \quad F(\lambda)$。

傅里叶变换的性质

5证明。 （我）

F[f g(x)] = √ 1个 / 2π +∞ −∞ 1个 / √ 2p +∞ −∞ f(ξ − t)g(t)dt e ilξdξ

= 1个 / √ 2p +∞ −∞ 1个 / √ 2p +∞ −∞ f(η)e iλ(η+t) dη g(t)dη

= 1个 / √ 2p +∞ −∞ f(n)e伊立德· 1个 / √ 2p +∞ −∞ g(t)e λt dt

= F(λ) · G(λ)。

傅里叶变换的性质

5证明。（我）

$$F[f\quad g(x)] = \sqrt{\frac{1个}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi - t)g(t)dt\ e\ il\xi d\xi$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)e\ i\lambda(\eta+t)\ d\eta\ g(t)d\eta$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(n)e伊立德\cdot \quad \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{\lambda t}\ dt$$

$$= F(\lambda) \cdot G(\lambda)。$$

证明。（二）

$$F\quad G(\lambda) = \sqrt{\frac{1个}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda - s)G(s)ds$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e\ i(\lambda-s)\xi\ d\xi\ G(s)ds$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \quad \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(s)e\ -is\xi\ ds\ e\ il\xi d\xi$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot g(\xi)e\ i\lambda\xi d\xi = F[f(x) \cdot g(x)]。$$

Machine Translated by Google

傅立叶积分变换的应用

例子（一）

解决问题

$$uxx + uyy = 0, \ -\infty < x < +\infty, \ y > 0, \ u(x, 0) = f(x), \tag{5}$$

$$-\infty < x < +\infty, \tag{6}$$

$$\lim_{\to\infty} u(x, y) = 0, |x| \qquad \lim_{\to\infty} ux(x, y) = 0, |x| \tag{7}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \quad |u(x, y)| < +\infty。 \tag{8}$$

傅立叶积分变换的应用

例子（一）

解决问题

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, -\infty < x < +\infty, y > 0, u(x, 0) = f(x), -\infty \tag{5}$$

$$< x < +\infty, \tag{6}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} u_x(x, y) = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{y\to+\infty} |u(x, y)| < +\infty。 \tag{8}$$

回答。

设 V(λ, y) = F[u(x, y)],F(λ) = F[f(x)]。然后,对式（5)进行傅里叶变换,

$$F[u_{xx} + u_{yy}] = F[u_{xx}] + F[u_{yy}] = -\lambda^2 F[u] + F[u] = -\lambda^2 V + \frac{d^2V}{dy^2} = 0.$$

由(6)、(8),我们得到

$$F[u(x, 0)] = V(\lambda, 0) = F[f(x)] = F(\lambda),$$

$$\lim_{y\to\infty} |F[u(x, y)]| = \lim_{y\to\infty} |V(\lambda, y)| < +\infty。$$

Machine Translated by Google

傅立叶积分变换的应用

因此，

$$\frac{d^2V}{dy^2} - \lambda^2 V = 0, \tag{9}$$

$$V(\lambda, 0) = F(\lambda), \tag{10}$$

$$\lim_{y\to\infty} |V(\lambda, y)| < +\infty。 \tag{11}$$

求解 (9),我们有 $V(\lambda, y) = C_1(\lambda)e^{\lambda y} + C_2(\lambda)e^{-\lambda y}$。

通过（11），如果 $\lambda > 0$,则$C_1(\lambda) = 0$,或 $V(\lambda, y)$ = 如果 $\lambda < 0$,则 $C_2(\lambda) = 0$，
$$V(\lambda, y) = \begin{cases} C_2(\lambda)e^{-\lambda y} & \text{如果 } \lambda > 0 \\ C_1(\lambda)e^{\lambda y} & \text{如果 } \lambda < 0 \end{cases} = C(\lambda)e^{-|\lambda| y}。$$
通过 (10),我们得到 $C(\lambda) = F(\lambda)$,则 $V(\lambda, y) = F(\lambda)\, e^{-|\lambda| y}$。

Machine Translated by Google

傅立叶积分变换的应用

使用逆变换,我们有

$$u(x, y) = F^{-1}\left[F(\lambda)e^{-|\lambda|y}\right] = \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-|\lambda|y} e^{-ilx} d\lambda \cdot$$

$$= \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1个}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi\, e^{-|\lambda|y-i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1个}{2页} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} 这是^{-|\lambda|y+i(\xi-x)\lambda} d\lambda\, d\xi$$

$$= \frac{1个}{2页} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_{0}^{\infty} 这是^{-[y-i(\xi-x)]\lambda} d\lambda + \int_{-\infty}^{0} 这是^{[y+i(\xi-x)]\lambda} d\lambda\, d\xi$$

$$= \frac{1个}{2页} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[\frac{-e^{-[y-i(\xi-x)]\lambda}}{y-i(\xi-x)}\Bigg|_{0}^{\infty} + \frac{这是^{[y+i(\xi-x)]l}}{y+i(\xi-x)}\Bigg|_{-\infty}^{0}\right] d\xi$$

$$= \frac{1个}{2页} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left[\frac{1个}{y-i(\xi-x)} + \frac{1个}{y+i(\xi-x)}\right] d\xi$$

y − i(ξ − x) y + i(ξ − x) f(ξ) + (ξ − x)

$$= \frac{和}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{}{和^2 \quad {}^{2个}} d\xi。$$

Machine Translated by Google

狄拉克δ函数

Dirac delta 函数,定义为具有以下属性

$$\delta(x) = 0, x \quad = 0, \tag{12}$$

$$f(0) = \int_{A}^{b} f(x)\delta(x)dx, \tag{13}$$

其中 f(x) 是任何行为良好的函数,积分包括原点。作为方程式的一个特例。 (12),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1。 \tag{14}$$

从等式。 (12),δ(x) 必须是 x = 0 处的一个无限高的细尖峰,如在脉冲力或点电荷的电荷密度的描述中。问题是在通常意义上的功能中不存在这样的功能。

狄拉克δ函数

方程式中的关键属性。 (12) 可以严格地开发为函数序列的极限,一个分布。例如,delta 函数可以通过函数序列中的任何一个来近似,方程式。 (15)至(18):

$$\delta n(x) = \begin{cases} 0, x < -\frac{1}{2n} \\ n, -2n \quad \frac{1}{}\quad < x < \frac{1}{2n}, \\ 0, x > \frac{1}{2n} \end{cases} \tag{15}$$

$$\delta n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp -nx^{2\,2}, \tag{16}$$

$$\delta n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n\,2x\,2}, \tag{17}$$

$$= \frac{\sin nx}{x} \; 1 \; \delta n(x) = \frac{}{2页} \int_{-n}^{n} 和ixtdt。 \tag{18}$$

虽然所有这些序列导致 δ(x) 具有相同的属性,但它们在用于各种目的的易用性方面有所不同。等式 (15) 可用于提供积分属性等式的简单推导。 (12).式(16)便于微分。它的导数导致 Hermite 多项式。等式(18)在傅里叶分析中特别有用。在傅立叶级数理论中,Eq。(18) 经常作为 Dirichlet 内核出现(修改):

$$DN(x) = \frac{1}{2页} \frac{没有\ n + \frac{1}{2}\ X}{罪\ \frac{1}{2} \times}.$$

Machine Translated by Google

δ(x)的性质

- $\delta(-x) = \delta(x)$;
- $\delta(ax) = \delta(x)/|a|,\ a \in R$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x0) f(x) dx = f(x0)$;
- $\delta(x - a) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x - \xi) d\xi = f(x - a)$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\,'(x - x0)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} F\,'(x) \delta\,(x - x0)\, dx = -f\,'(x0)$;
- $F(\delta(x)) = \frac{1}{2p}$。

Machine Translated by Google

典型函数的傅立叶变换

例 (2)

$e^{-\alpha|t|}$ ，$\alpha > 0$。

Machine Translated by Google

典型函数的傅立叶变换

例 (2)

t| ，α > 0。

回答。

g(ω) = 1个 / 2页 ∫ 0 −∞ 这是αt+iωt dt + 1个 / 2页 ∫ ∞ 0 这是 −αt+iωt dt

= 1个 / 2页 (1个 / α + iω + 1个 / α − iω) = 1个 / 2页 · 2a / a2 + ω2 2p .

Machine Translated by Google

典型函数的傅立叶变换

例子（三）

$f(t) = 2a\ 1/2\pi/\ a$ 2个 $2 +$ 吨 ，$\alpha > 0$。

典型函数的傅立叶变换

例子（三）

$f(t) = 2a\ 1/2\pi/\ a$ $\overline{\quad\quad}$ 2 + 吨 ， $\alpha > 0$。

回答。

评估此变换的一种方法是通过轮廓积分。

$$g(\omega) = 2\pi \quad \overline{\quad} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt。 \quad \frac{2\alpha e^{i\omega t}}{(t - i\alpha)(t + i\alpha)}$$

被积函数有两个极点:$t = i\alpha$,余数为$e^{-\alpha\omega}/i$,$t = -i\alpha$,余数为 $e^{+\alpha\omega}/(-i)$。

如果 $\omega > 0$,我们的被积函数将在上半平面的大半圆上变得可以忽略不计。这

轮廓仅包含 $t = i\alpha$ 处的极点,因此我们得到 $g(\omega) = (2\pi i)$ $\frac{1}{2p}$ $\frac{e^{-a\omega}}{i}$ $(\omega > 0)$。

然而,如果 $\omega < 0$,我们必须关闭下半平面中的轮廓,以顺时针方向围绕 $t = -i\alpha$ 处的极点（从而生成负号）。这个过程产生$e^{+\alpha\omega}$

$(-2\pi i)$ $-i$

$g(\omega) =$ $\frac{1}{2p}$ $\overline{\quad\quad}$ $(\omega < 0)$。

如果 $\omega = 0$,我们无法在任何一条路径上执行轮廓积分,但是我们不需要这种复杂的方法,因为我们有基本积分 $g(0) =$

$\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{t^2+a^2}\, dt = 1$. 总之,我们有

$$g(\omega) = e^{-a|o|}\ .$$

Machine Translated by Google

典型函数的傅立叶变换

例子（四）

高斯函数e－at2的傅立叶变换 , > 0。

Machine Translated by Google

典型函数的傅立叶变换

例子（四）

高斯函数e－at2的傅立叶变换 ，＞0。

回答。

$$g(\omega) = \frac{\text{1个}}{\sqrt{2\pi}} \quad {}^{\infty}_{-\infty} \quad \text{这是} -at2\ i\omega t\ e\ ,$$

可以通过在指数中完成平方来分析评估，

$$-at2 + i\omega t = -at - \frac{i\omega}{2a}\ {}^{\text{2个}} - \frac{\text{欧}^2}{4a}\ ,$$

我们可以通过评估正方形来检查。代入该恒等式并将积分变量从 t 更改为 s = t － iω/2a,我们得到（在大 T 的限制下）

$$g(\omega) = \frac{\text{1个}}{\sqrt{2\pi}}\ \text{这是} -\omega\ 2/4a \quad {}^{T-i\omega/2a}_{-T-i\omega/2a} \quad e^{-as2} ds = \frac{\text{1个}}{\sqrt{2a}}\ \text{这是} -\omega\ 2/4a\ .$$

Machine Translated by Google

Machine Translated by Google

拉普拉斯积分变换

定义

假设 $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$ $(0 \leq s_0 < s)$ 且 $f(t)$ 是分段平滑的（记为 L-(A)），则积分 $F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau$ 称为拉普拉斯积分变换（记为 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 中的 LT），并表示 $L[f(t)] = F(p)$;积分

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp$$

称为$F(p)$ 的拉普拉斯逆变换,表示$L^{-1}[F(p)] = f(t)$。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

1. (L − T) 是线性变换

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)],$$

其中f(t)和g(t)满足L-(A),a和b为常数。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

2假设f(t)和f(t)满足L-(A),则 ‘

如果 ‘(t) = pL[f(t)] − f(0+)。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

2假设f(t)和f(t)满足L-(A),则 ‘

如果 ‘(t) = pL[f(t)] − f(0+)。

证明:

如果 ‘(t) = $\int_0^{\infty}$ F ‘(τ)e −pτ dτ

= f(τ)e $^{-pt}$ $\Big|_0^{\infty}$ + $\int_0^{\infty}$ f(τ)pe−pτ dτ

= pL[f(t)] − f(0)。

拉普拉斯变换的性质

2 假设f(t)和f(t)满足L-(A),则 ‘

$$\text{如果 } {}^{‘}(t) = pL[f(t)] - f(0+)。$$

证明:

$$\text{如果 } {}^{‘}(t) = \int_0^{\infty} F^{‘}(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

$$= f(\tau)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} f(\tau) p e^{-p\tau} d\tau$$

$$= pL[f(t)] - f(0)。$$

此外,我们有以下推论。

推论

设f(t)和f(k) (t)(k=1,· · ·n)满足L-(A),则

$$L f^{(n)}(t) = p^n \quad L[f(t)] - \frac{f(0)}{p} - \frac{F^{‘}(0)}{页^2} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}$$

其中 f(0) = f 0 + , f (k) (0) = f (k) 0 + , k = 1,· · · , n-1。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

3假设 f(t) 满足 L-(A),则

$$\frac{d}{dp}L[f(t)] = L[-tf(t)]$$

进而 $\frac{d\ nF(p)}{dpn} = L\ [(-t)\ n\ f(t)]$。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

3假设 f(t) 满足 L-(A),则

$$\frac{d}{dp} L[f(t)] = L[-tf(t)]$$

进而 $\frac{d^n F(p)}{dp^n} = L[(-t)^n f(t)]$。

证明：

$$\frac{d}{dp} L[f(t)] = \frac{d}{dp}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)(-\tau)e^{-p\tau}\,d\tau = L[-tf(t)]。$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

4假设 f(t) 满足 L-(A) 且 $\phi(t) = {}_{0}^{\text{吨}} f(\tau)d\tau$,则

$$L[\phi(t)] = \frac{1\text{个}}{p} L[f(t)] = \frac{1\text{个}}{p} F(p)。$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

4 假设 f(t) 满足 L-(A) 且 $\phi(t) = {}_0^{\text{吨}} f(\tau)d\tau$,则

$$L[\phi(t)] = \frac{\text{1个}}{p} L[f(t)] = \frac{\text{1个}}{p} F(p)\text{。}$$

证明:因为 $\phi'(t) = f(t), \phi(0) = 0$, 那么

如果 $'(t) = L[f(t)] = pL[\phi(t)] - \phi(0) \Rightarrow L[\phi(t)] = \frac{\text{1个}}{p} L[f(t)] = \frac{\text{1个}}{p} F(p)$。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

5假设 f(t) 满足 L-(A),且 F(p) = L[f(t)], $\int_p^{\infty} |F(s)|ds < +\infty$ 然后

$$\int_p^{\infty} F(s)ds = L\left[\frac{f(t)}{\text{吨}}\right].$$

拉普拉斯变换的性质

5假设 f(t) 满足 L-(A),且 F(p) = L[f(t)]，$\int_p^{\infty} |F(s)|ds < +\infty$ 然后

$$\int_p^{\infty} F(s)ds = L\left[\frac{f(t)}{\text{吨}}\right].$$

证明：

$$\int_p^{\infty} F(s)ds = \int_p^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)e^{-s\tau}\, d\tau\, ds$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) \int_p^{\infty} {}^{-s\tau\text{和}} ds\, d\tau = \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{-e^{-s\tau}}{\text{吨}}\right]_p^{\infty} d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\text{吨}} \text{这是}^{-p\tau} d\tau = L\left[\frac{f(t)}{\text{吨}}\right].$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

6 延迟定理:假设$f(t)$满足$L-(A)$, $F(p)=L[f(t)]$, $c>0$ ，然后

$$L[f(t-c)]=e^{-pc}L[f(t)]=e^{-pc}F(p)。$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

6延迟定理:假设f(t)满足L — (A), F(p) = L[f(t)], c > 0 ，然后

$$L[f(t-c)] = e^{-pc}L[f(t)] = e^{-pc}F(p)。$$

证明:

$$L[f(t-c)] = \int_0^{\infty} f(t-c)e^{-pt}dt,$$

$$= \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p(\eta+c)}\,d\eta = e^{-pc}L[f(t)]。$$

拉普拉斯变换的性质

6延迟定理:假设f(t)满足L − (A), F(p) = L[f(t)], c > 0 ，然后

$$L[f(t-c)] = e^{-pc}L[f(t)] = e^{-pc}F(p)。$$

证明:

$$L[f(t-c)] = \int_0^{\infty} f(t-c)e^{-pt}dt,$$

$$= \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p(\eta+c)}\,d\eta = e^{-pc}L[f(t)]。$$

7位移定理:设f(t)满足L-(A),F(p)=L[f(t)],则

$$F(p-p_0) = L\left[e^{p_0 t} f(t)\right]。$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

6延迟定理:假设f(t)满足L − (A), F(p) = L[f(t)], c > 0 ，然后

$$L[f(t-c)] = e^{-pc}L[f(t)] = e^{-pc}F(p)。$$

证明:

$$L[f(t-c)] = \int_0^{\infty} f(t-c)e^{-pt}dt,$$

$$= \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p(\eta+c)}\,d\eta = e^{-pc}L[f(t)]。$$

7位移定理:设f(t)满足L-(A),F(p)=L[f(t)],则

$$F(p-p_0) = L\left[e^{p_0 t} f(t)\right]。$$

证明:

$$F(p-p_0) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-p_0)t}dt = \int_0^{\infty} \text{这是}\, e^{p_0 t} f(t)e^{-p(t)}dt = L\left[e^{p_0 t} f(t)\right]。$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

7 类似定理:设f(t)满足L-(A), a > 0, F(p) = L[f(t)] ,则

$$L[f(at)] = \frac{1}{A} F \frac{p}{A} .$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

7类似定理:设f(t)满足L-(A), a > 0, F(p) = L[f(t)],则

$$L[f(at)] = \frac{1}{A} F \frac{p}{A} .$$

证明:

$$L[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt,$$

$$= \int_0^\infty f(h)e^{-\frac{p}{A}\eta} \frac{1}{A} d\eta = \frac{1}{A} F \frac{p}{A} .$$

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

定义

设f(t)和g(t)满足L(A),则积分f(t −τ)g(τ)dτ或g(t − τ)f(τ)dτ称为f(t) 和 g(t),记为 f g(t) 或 g f(t),积分 0 0

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p-q)G(q)dq \text{ 或 } \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} G(p-q)F(q)dq$$

称为 F(p) 和 G(p) 的卷积,记为 F G(p) 或 G F(p)。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

8假设f(t)和g(t)满足L-(A), F(p) = L[f(t)], G(p) = L[g(t)], 那么

(i) L[f　g(t)] = F(p) · G(p)；　L[f(t) · g(t)]

= F　G(p)。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

8假设f(t)和g(t)满足L-(A), F(p) = L[f(t)], G(p) = L[g(t)], 那么

(i) L[f g(t)] = F(p) · G(p)； L[f(t) · g(t)] = F

G(p)。

证明：(一)

$$L[f*g(t)] = \int_0^{\infty} \int_0^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt\, g(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p(\eta+\tau)}\, d\eta\, g(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p\eta}\, d\eta \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-p\tau}\, d\tau$$

= F(p) · G(p)。

Machine Translated by Google

拉普拉斯变换的性质

8 假设f(t)和g(t)满足L-(A), F(p) = L[f(t)], G(p) = L[g(t)], 那么

(i) L[f g(t)] = F(p) · G(p); L[f(t) · g(t)] = F

G(p)。

证明：(一)

$$L[f*g(t)] = \int_0^{\infty} \int_0^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\, e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt\, g(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p(\eta+\tau)}\, d\eta\, g(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\eta)e^{-p\eta}\, d\eta \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-p\tau}\, d\tau$$

$$= F(p) \cdot G(p)。$$

证明：(二)

$$F*G(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p-q)G(q)dq = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-q)t}\, dt\, G(q)dq$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} G(q)e^{qt}dq\, e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-pt}dt$$

$$= L[f(t) \cdot g(t)]。$$