数学物理方法

第4讲泰勒和洛朗系列

Lei Du

dulei@dlut.edu.cn http://

faculty.dlut.edu.cn/dulei

数学科学学院

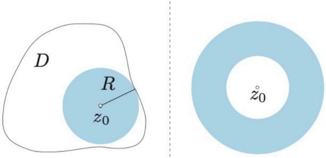
大连理工大学

2023年3月

内容

介绍

在本讲中,我们将首先了解基本结果,即全纯函数 f(z) 围绕它所在域 D 中的任何点展开幂级数。请参见下方左侧的图片。



Taylor series: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ Laurent series: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$

在本讲的第二部分,我们将学习洛朗级数,它类似于幂级数,只是项 zz0 的负整数幂也出现在展开中。这将有助于研究环形空间（尤其是穿孔圆盘)中的全纯函数。请参见右上方的图片。它们也可用于对 “奇点”进行分类,并评估一些实积分。

定义

就像真正的序列一样,给定一个序列(an)序列(sn) $n\in\mathbb{N}$ 其部分和: 的复数,可以形成一个新的 $n\in\mathbb{N}$

$$s_1 := a_1,$$

$$s_2 := a_1 + a_2,$$

$$s_3 := a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\vdots$$

定义

1. 系列 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 如果(sn) $n\in\mathbb{N}$收敛,则an收敛,并且 $\sum_{n=1}^{\infty}$ the := $\lim_{n\to\infty} s_n$。
2. 系列 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 如果(sn)发散 $n\in\mathbb{N}$ 分歧。
3. $\sum_{n=1}^{\infty}$ 如果实数级数an绝对收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}$ |一个|收敛。

定义

就像真正的序列一样,给定一个序列(an)序列(sn) 的复数,可以形成一个新的n∈N

n∈N 其部分和:

$$s1 := a1,$$

$$s2 := a1 + a2,$$

$$s3 := a1 + a2 + a3,$$

$$\vdots$$

定义

1 系列 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 如果(sn) n∈N收敛,则an收敛,并且 $\sum_{n=1}^{\infty}$ the := limn→∞ sn。

2 系列 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 如果(sn)发散 n∈N 分歧。

3个 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 如果实数级数an绝对收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}$ |一个|收敛。

定理

复数列收敛当且仅当其实部和虚部的序列

收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛⇔ 实数级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$ Re (一个)和 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 我 (一个)收敛。

系列的属性

因此,实际分析的结果可用于检验复数级数的收敛性。例如,下面两个事实很容易证明。

1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。
2. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

幂级数及其收敛域

定义

让(cn) 是一个复杂的序列（被认为是“系数”的序列）。一种表达
n∈N的类型

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{新西兰\_}$$

称为复变量 z 的幂级数。

幂级数及其收敛域

定义

让(cn) 是一个复杂的序列（被认为是“系数”的序列）。一种表达
n∈N的类型

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{新西兰\_}$$

称为复变量 z 的幂级数。

- 所有多项式都是幂级数,只有有限多个非零系数。
  多项式对所有 $z \in C$ 收敛。
- 电源系列 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 和^n 收敛于 $|z| < 1$,但如果 $|z|$ 则发散≥ 1。

幂级数及其收敛域

一个基本问题是:对于 $z \in C$ 的什么值,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} cnz\ n$收敛?

下面的结果给出了这个问题的答案。

定理

对于$\sum_{n=0}^{\infty} cnz^n$, 恰好符合以下条件之一:

1. 要么对所有 $z \in C$ 绝对收敛。
2. 或者存在唯一的非负实数 R 使得
   - $\sum_{n=0}^{\infty}$ 新西兰_ 对于所有 $z \in C$ 和 $|z|$ 是绝对收敛的< R, 和
   - $\sum_{n=0}^{\infty} cnz^n$ 对于所有 $z \in C$ 和 $|z|$ 都是发散的> R。

（上述定理中唯一的R>0称为幂级数的收敛半径,如果幂级数对所有z∈C收敛,则称幂级数具有无限收敛半径,记为"R = ∞"。）

幂级数及其收敛域

在某些情况下,以下结果有助于计算会聚半径。

定理

考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

如果 $\rho := \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在,那么

- 收敛半径为 $1/\rho$,即,如果 $\rho = 0$,则 $R = 1/\rho$。收敛半径为无限大,即,如果 $\rho = 0$,
- 则 $R = \infty$。

幂级数及其收敛域

定理

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.如果 $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$存在,那么

- 如果 L = 0,则收敛半径为 1/L。如果 L = 0,则收
- 敛半径为无限大。

幂级数是全纯的

我们已经看到多项式是具有无限收敛半径的幂级数。它们在那里当然也是全纯的。更一般地说,幂级数

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \text{新西兰\_}$$

收敛于 $|z| < R$ 实际上是全纯的,对于 $|z| < R$, 认为

$F^{'}(z) = \frac{}{dz}$ 2 2 + · · · = c1 + 2c2z + 3c3z c0 + c1z + c2z + · · · = $\sum_{n=1}^{\infty}$ cnnzn−1。

定理

让 $R > 0$ 和 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty}$ CNZ ^{n} 收敛于 $|z| < R$. 那么f $^{'}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}$ 无名氏 n−1对于 $|z| < R$。

幂级数是全纯的

我们已经看到多项式是具有无限收敛半径的幂级数。它们在那里当然也是全纯的。更一般地说,幂级数

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \text{新西兰\_}$$

收敛于 $|z| < R$ 实际上是全纯的,对于 $|z| < R$, 认为

$$F^{\prime}(z) = \frac{}{dz} \quad 2\ 2 + \cdot \cdot \cdot = c1 + 2c2z + 3c3z\ c0 + c1z + c2z + \cdot \cdot \cdot \cdot = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{cnnzn} - 1\text{。}$$

定理

让 $R > 0$ 和 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \text{CNZ}^n$ 收敛于$|z| < R$. 那么$f^{\prime}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}$ 无名氏 $n-1$对于 $|z| < R$。

通过重复应用先前的结果,我们有以下结果。

推论

设 $R > 0$ 并设 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \text{CNZ}^n$ 收敛于$|z| < R$。那么对于 $k \geqslant 1$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdot \cdot \cdot (n-k+1)\text{cnz}\, n-k \text{对于 } |z| < R.$$

特别地,对于 $n \geqslant 0$, $cn = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$。

幂级数是全纯的

取以 0 为中心的幂级数没有什么特别之处。也可以考虑

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

其中z_0是一个固定的复数。以下结果直接来自先前的定理。

推论

为了 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$，恰好符合以下条件之一：

1. 要么对所有 $z \in \mathbb{C}$ 绝对收敛。
2. 或者存在唯一的非负实数 R 使得
   - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 对 $|z-z_0|$绝对收敛$< R$, 和
   - $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ 对于 $|z-z_0|$是发散的$> R$。

幂级数是全纯的

推论

令$z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ 且 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 收敛于 $|z - z_0| < R$. 然后

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n (z - z_0)^{\text{大约}} \quad \text{对于 } |z - z_0| < R, k \geqslant 1。$$

特别地,对于 $n \geqslant 0$， $c_n = \frac{1}{\tilde{n}!} f^{(n)}(z_0)$。

泰勒级数

我们在上一节中看到,复杂的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

在它们的收敛区域是全纯的 $|z - z_0| < R$,其中 R 是收敛半径。在本节中,我们将相反地证明,如果 f 在圆盘中是全纯的 $|z - z_0| < R$,那么

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad 每当\ |z - z_0| < ,$$

其中系数可以由 f 确定。因此定义域 D 中的每个全纯函数 f 在圆盘中围绕任意点$z_0 \in D$具有幂级数展开。

泰勒级数

我们在上一节中看到,复杂的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

在它们的收敛区域是全纯的 $|z - z_0| < R$,其中 R 是收敛半径。在本节中,我们将相反地证明,如果 f 在圆盘中是全纯的 $|z - z_0| < R$,那么

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad 每当\ |z - z_0| < ,$$

其中系数可以由 f 确定。因此定义域 D 中的每个全纯函数 f 在圆盘中围绕任意点$z_0 \in D$具有幂级数展开。

定理

如果 f 在 $D(z_0, R)$ 中是全纯的 $:= \{z \in C : |z - z_0| < R\}$,则 $f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^{2个} + c_3 (z - z_0)^{3个} + \cdots$ 对于 $z \in D(z_0, R)$,其中对于 $n \geqslant 0$,

$$c_n = \frac{1个}{2\pi i} \int_C \frac{f(g)}{(\zeta - z_0)^{n+1个}} d\zeta$$

C 是以z_0为中心,以 r 为半径的圆形路径,其中 $0 < r < R$ 沿逆时针方向穿过。

泰勒级数

推论（泰勒级数）

如果

1. D 是一个域，
2. $f : D \to C$ 是全纯的，并且 $z0 \in D$，
3.

然后

$$ff(z) = f(z0) + \frac{'(z0)}{1!} f(z - z0) + \frac{(z0)}{2!}(z - z0)^{2个} + 。. . , \quad |z - z0| < ,$$

其中 R 是圆心z0包含在 D 中的最大开放圆盘的半径。另外，

$$f(n)(z0) = 2\pi i \frac{n!}{C(z - z0)} \frac{f(z)}{}^{n+1个} 打碟机,$$

其中 C 是圆心z0和半径 r的圆形路径，其中 $0 < r < R$ 沿逆时针方向穿过。

洛朗系列

洛朗级数推广了泰勒级数。事实上,虽然泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

具有项 $z - z_0$ 的非生成幂,并且收敛于圆盘中, Laurent 级数是以下类型的表达式

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n = \cdots + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots$$

它也有 $z - z_0$的负幂。

洛朗系列

例如,我们知道对于所有 $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp z = 1 + \frac{\text{和}}{1!} + \frac{2z}{2!} + \frac{3z}{3!} + \cdots$$

所以对于 $z = 0$,我们有“Laurent 级数展开”

$$\exp \frac{1\text{个}}{\text{和}} = 1 + \frac{1\text{个}}{\text{和}} + \frac{1\text{个}}{2!}\frac{1\text{个}}{2z} + + \cdots \frac{1\text{个}}{3!}\frac{1\text{个}}{3!} \ .$$

请注意,exp(1/z) 在 C\{0} 中是全纯的,它是一个以 0 为中心、内半径 r = 0 和外半径 R = +∞ 的退化环!

洛朗系列

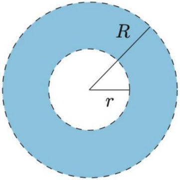
让我们首先定义$\sum_{n\in Z} c_n(z-z_0)^n$的收敛性是什么意思.

定义

洛朗系列 $\sum_{n\in Z} c_n(z-z_0)^n$ 收敛（对于 z)如果 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 收敛和 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 收敛。如果 $\sum_{n\in Z} c_n(z-z_0)^n$ 收敛,那么我们写

$$\sum_{n\in Z} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

并将其称为 Laurent 级数的总和。



z的作用 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ 收敛？

- 为了 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$，存在一些 R 使得它对 $|z - z_0|$收敛< R 和发散
  对于 $|z - z_0| > R$。
- 系列呢 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$ ？

  设置 $w := (z - z_0)^{-1}$. $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$也收敛于 $|w| < R$ 并且发散 $|w| > R$。

  然后 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$在 $1/|z - z_0|$时收敛< R,即 $|z - z_0| > 1/R =: r$, 和
  对于 $|z - z_0|$发散< 河。

Machine Translated by Google

z的作用 $\sum_{n\in Z} c_n (z - z_0)^n$ 收敛?

- 为了 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, 存在一些 R 使得它对 $|z - z_0|$收敛< R 和发散 对于 $|z - z_0| > R$。
- 系列呢 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$?

  设置 $w := (z - z_0)^{-1}$. $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$也收敛于 $|w| < R$ 并且发散 $|w| > R$。

  然后 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$在 $1/|z - z_0|$时收敛< R,即 $|z - z_0| > 1/R =: r$, 和 对于 $|z - z_0|$发散< 河。

因此 Laurent 级数收敛于环状 $\{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$ 并且如果 $|z - z_0|$中的任一个发散< r 或 $|z - z_0| > R$. 我们也会看到

1. 洛朗级数 “收敛”在一个环形空间 $\{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$ 以z0为中心,并在那里给出一个全纯函数,并且
2. 相反,如果我们在以z0为中心的圆环中有一个全纯函数,并且它的奇点位于圆环内的 “孔”中,则该函数在圆环中有洛朗级数展开。

它在它收敛的圆环中是全纯的吗?

1. 的 → $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0|$中是全纯的$< R\}$ 特别是,也在 $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$。

2. 地图

$$w \xrightarrow{g} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$$

在 $\{w \in \mathbb{C} : |w|$ 中是全纯的$<R\}$。也是映射 $z \longrightarrow (z - z_0)$全纯。所以它们的组合 $g \circ f$ 在 $F^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ 是 $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0|$中是全纯的$> r\}$,即

$$和 \xrightarrow{g \circ f} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

在 $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|\}$ 中是全纯的,因此特别是在环 $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0|$中也是$<R\}$。

它在它收敛的圆环中是全纯的吗？

1的 → $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在 $\{z \in C : |z - z_0|$中是全纯的$< R\}$ 特别是,也在 $\{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$。

2地图

$$w \xrightarrow{g} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$$

在 $\{w \in C : |w|$ 中是全纯的$<R\}$。也是映射 $z \longrightarrow (z - z_0)$全纯。所以它们的组合 $g \circ F^{-1} : C \setminus \{z_0\} \to C$ 是 f 在 $\{z \in C : |z - z_0|$中是全纯的$> r\}$,即

$$和 \xrightarrow{g \circ f} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

在 $\{z \in C : r < |z - z_0|\}$ 中是全纯的,因此特别是在环 $\{z \in C : r < |z - z_0|$中也是$<R\}$。

综上所述,我们了解到任何洛朗级数 $\sum_{n \in Z} c_n (z - z_0)^n$ 收敛于一个圆环

$\{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$ 对于某些 r、R 和映射 $z \to \sum_{n \in Z} c_n (z - z_0)^n$ 是全纯的

$\{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$。

一个简单的例子

例子

对于什么 $z \in C$ 做 Laurent 级数

$$+++z+\frac{1}{\cdot} \cdot 8z\,3\,4z\,2\,2z + z + z \cdots + \;2\,3+1$$

收敛?我们有:

- 2 1 $1+z+z$ 3 $+z$ $+\cdots$ 对 $|z|$ 收敛< 1,并且对于 $|z|$ 发散> 1。
- 1 1 1 + + 2z 4z 3 8z 5 $+\cdots<1$ 时收敛,$|z|$ 时发散> 1/2 并且发散 $|z|<1/2$。 1 2z >1,即收敛

因此,给定的 Laurent 级数在 $|z|$ 时收敛< 1 和 $|z|>1/2$,即在环内收敛 $\{z \in C : 1/2<|z|<1\}$,当 $|z|$ 时发散> 1 或当 $|z|<1/2$。

它在它收敛的圆环中是全纯的吗？

反之,环内全纯函数有洛朗级数展开是下面定理的内容。

定理

如果 f 在 A 中是全纯的 := $\{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$ 然后

$$f(z) = \sum_{n \in Z} c_n (z - z_0)^n \quad \text{对于 } z \in A \qquad (1)$$

在哪里

1 中国= $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$

2 C 是由 $C(t) = z_0 + \rho \exp(it), t \in [0, 2\pi]$ 给出的圆形路径，

3 ρ 是满足 $r < \rho < R$ 的任意数。

此外,系数在（1)中是唯一的。

它在它收敛的圆环中是全纯的吗？

反之，环内全纯函数有洛朗级数展开是下面定理的内容。

定理

如果 f 在 A 中是全纯的 $:= \{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$ 然后

$$f(z) = \sum_{n\in Z} c_n (z - z_0)^n \quad \text{对于 } z \in A \tag{1}$$

在哪里

1. 中国= $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(g)}{(g - z_0)^{n+1}} d\zeta$,
2. C 是由 $C(t) = z_0 + \rho \exp(it), t \in [0, 2\pi]$给出的圆形路径，
3. ρ 是满足 $r < \rho < R$ 的任意数。

此外，系数在（1)中是唯一的。

请注意，只有当我们考虑特定的固定环时，系数的唯一性才有效。同一个函数可能有不同的 Laurent 展开式，但在不同的环中有效。