数学物理方法

第2讲复变量的函数

Lei Du

dulei@dlut.edu.cn http://

faculty.dlut.edu.cn/dulei

数学科学学院

大连理工大学

2023 年 2 月 22 日

内容

介绍

在 $\mathbb{R}$ 的设置中,普通微积分中的概念,如序列的收敛性,或函数的连续性和可微性,都依赖于 $\mathbb{R}$ 中点的接近性概念。

为了用复数进行微积分,我们需要复数对(z_1, z_2)之间的距离 $d(z_1, z_2)$ 的概念,首要任务是解释这个概念是什么。

C上的度量

度量空间是一对 (X, d),其中 X 是一个集合,$d : X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个称为距离函数或度量的函数,它满足以下条件:对于 $x, y, z \in X$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$（对

- 称）; $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$
- (三角不等式）。
-

C上的度量

度量空间是一对 (X, d),其中 X 是一个集合,$d : X \times X \to R$ 是一个称为距离函数或度量的函数,它满足以下条件:对于 $x, y, z \in X$, $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$（对

- 称）; $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$
- (三角不等式）。
-

例子

令 $X = C$, $z1 = (x1, y1)$, $z2 = (x2, y2) \in X$ 并定义

- $d(z1, z2) = |z1 - z2| = (x1 - x2)$ $d(z1,$ 2个 $+ (y1 - y2)$ 2,或
- $z2) = |x1 - x2| + |y1 - y2|$,或$d(z1, z2)$
- $= \max\{|x1 - x2|, |y1 - y2|\}$,则$(C, d)$是一

个度量空间。

开盘、开集、闭集、紧集、连通集

- 中心为z0且半径 $r > 0$ 的空心球/圆盘 D (z0,r)定义为 $D(z0,r) := \{z \in C : |z - z0| < r\}$。
- 如果对于每个 $z \in U$,存在一个 $rz > 0$ 使得 $D(z,rz) \subset U$,则 C 的子集 U 称为开集。(z 是一个内点)
- 当 S 的每个极限点都属于 S 时,称集合 S 是闭集。(如果其补集 $X - F$ 是开集,则称集合 $F \subset X$ 是闭集。)
- 如果存在 $M > 0$ 使得对于所有 $z \in S$,$|z|$,则 C 的子集 S 称为有界的$\leqslant M$。
  因此 S 包含在复平面中一个足够大的圆盘中。
- 如果子集 $K \subset C$ 既是封闭的又是有界的,则称它是紧致的。
- 如果一个开集不能表示为两个非空不相交开集的并集,则称它是连通的。复平面上的非空开集是连通的,当且仅当它的任意两个点可以被完全位于该集合中的多边形弧 1 连接。

1我们所说的多边形弧是指由有限数量的线段组成的连续链。

开闭域（或区域）、曲线

- 复平面的非空开连通子集称为开域或开域,或简称为域。

- 复平面中的曲线或连续弧 Γ 是复平面中的点 z 的集合,由以下方程确定

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是定义在实数区间 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 上的实数变量 t 的实数连续函数,其中 $\alpha \leqslant \beta$。我们称 $z(\alpha)$ 和 $z(\beta)$ 为 Γ 的端点,$z(\alpha)$ 为起始点,$z(\beta)$ 为 Γ 的终点。如果 $z(\alpha) = z(\beta)$,Γ 称为闭合曲线。

如果方程$z0 = x(t) + iy(t)$ 满足给定范围 I 中的多个 t 值:$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$,则称z0为多点。特别地,当给定范围 I 中的两个 t 值满足上述等式时,多点称为双点。

Jordan 弧和简单闭合的 Jordan 曲线

- 如果一条曲线 Γ 没有多点,即如果存在某种参数表示,则称为若尔当弧或简单曲线

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

这样,如果t1 = t2,则 z (t1) = z (t2),即 z(t) 是一对一的。 Jordan 弧的最简单示例是直线段。

- 如果在若当弧中,起点和终点重合,即如果区间 I : α ⩽ t ⩽ β 的端点（α 和 β)对应有一个双点,并且没有其他多个点在其上,则称其为简单闭若尔当曲线或简称为闭若尔当曲线。

趋同性和连续性

如果对于每个 $\quad > 0$,存在一个索引 $N \subset \mathbb{N}$ 使得对于每个 $n > N$,则认为一个序列($z_n)_{n\in\mathbb{N}}$收敛于极限 $L|z_n - L| < \varepsilon$。从三角不等式可以得出,对于收敛序列,极限是唯一的,我们写

$$\text{林}_{n\to\infty} z_n = L。$$

趋同性和连续性

如果对于每个 > 0,存在一个索引 N ⊂ N 使得对于每个 n > N,则认为一个序列(zn)n∈N收敛于极限 L|zn − L| < ε。从三角不等式可以得出,对于收敛序列,极限是唯一的,我们写

$$\text{林}_{n\to\infty} \quad zn = L。$$

设 S 是 C 的一个子集, z0 ∈ S 和 f : S → C。如果对于每个 ε > 0,存在一个 δ > 0 使得只要 z ∈ S 满足 |z − ,则称 f 在z0处是连续的z0| < δ,则认为 |f(z) − f(z0)| < ε。

如果对于每个 z ∈ S,f 在 z 处连续,则称 f 是连续的。

定义

令 D 为复平面的任意非空点集。如果允许 z 表示 D 的任意一点,则 z 称为复变量,D 称为 z 的定义域或简称域。

如果对于某个域 D 中的每个 z 值,对应于一个或多个w 值,则称复变量w 是复变量 z 的函数。因此,如果 w 是 z 的函数,则写为 w = f(z)。我们还说 f 定义了 D 到 w 平面的映射。对应于 D 中所有 z 的值 f(z) 的总和构成了另一组复数 R,称为函数 f 的范围。

由于 $z = x + iy$,$f(z)$ 的形式为 $u + iv$,其中 u 和 v 是两个实变量 x 和 y 的函数。然后我们可以写

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)。$$

单值和多值函数

如果对于 D 中的每个 z 值,w 在 R 中仅取一个值,则定义域为 D 且范围为 R 的复变量 z 的函数 f(z) 被称为单值函数或单值函数。

如果R中的f(z)的两个或多个值对应于D中z的部分或全部值,则称f(z)为z的多值或多值函数。

功能限制

设 $f(z)$ 是在点 $z0$ 的某个邻域中定义的 z 的函数。
函数 $f(z)$ 被称为具有极限 ℓ 当 z 趋于$z0$时,对于每个正的任意数 ε,存在一个正数 δ 取决于 ε 具有以下性质

$$|f(z) - \ell| < \varepsilon$$

对于所有 z 使得 $0 < |z - z0| < \delta$ 和 $z = z0$。换句话说,存在点 $z = z0$的删除邻域,其中 $|f(z) - \ell|$可以做得尽可能小。象征性地,我们写 $\lim_{z \to z0} f(z) = \ell$。

连续性

设 G 是 C 中的一个开集,并设 $f : G \to C$。然后称 f 在 G 中的点z0处是连续的,如果给定任何正数 ε,我们通常可以根据 ε 找到一个成员 $\delta > 0$和z0这样

$$|f(z) - f(z0)| < \varepsilon$$

对于邻域 $|z - z0|$中的所有 $z \in G < z0$ 的 δ。

从上面的定义和极限的定义可以看出,f 在 $z = z0$处是连续的,如果

$$\lim_{z \to z0} f(z) = f(z0)。$$

如果一个函数在 G 中的每一点都是连续的,则称它在 G 中是连续的。

f(z)实部和虚部的连续性

如果 $f(z) = u(z, y) + iv(x, y)$,那么很容易证明 f 是 z 的连续函数当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$) 分别是 x 和 y 的连续函数。

令 f 和 g 为从 X 到 C 的连续函数,并令 $a, b \in C$。那么 $af + bg$ 和 fg 都是连续的。此外,对于 X 中的每个 x,如果 $g(x) \quad = 0$,则 f/g 是连续的。

连续函数的连续函数是连续函数;也就是说,如果 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是连续函数,则 $g \circ f$ 其中 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 是从 X 到 Z 的连续函数。

复杂的可微性

在本节中,我们将学习三个主要内容: 复可微性

1. 的定义。
2. 柯西-黎曼方程。
3. 复导数f的几何意义 ‘ (z0)。

本节的中心结果是 Cauchy-Riemann 方程对于开集函数的复可微性的必要性和 (在温和条件下)充分性。

可微性

如果 G 是 C 中的开集且 $f : G \to C$ 是函数,则称 f 在 G 中的点z0处可微,如果对于任何正数 ε,我们可以根据 ε 和可能在z0上这样

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

对于由 $|z - z_0|$定义的z0邻域中的所有 $z \in G$ <δ。

如果 f 在 G 的每个点都是可微的,那么我们说 f 在 G 上是可微的。

一个例子

示例

如果 $f(z) = \frac{3y(y-ix)}{x^6+y^2}$ $(z = 0)$, $f(0) = 0$, 证明 $\frac{f(z)-f(0)}{z-0} \to 0$ 作为 $z \to 0$ = 沿任何半径矢量但不是以任何方式 $z \to 0$。

一个例子

示例

如果 f(z) = x 6+y 2 (z = 0), f(0) = 0, 证明f(z)−f(0) z-0 → 0 作为 z → 0
沿任何半径矢量但不是以任何方式 z → 0。

证明。

令 z → 0 沿 y = mx（半径向量）。然后我们有

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)\ z}{-0} = \lim_{z\to 0} \frac{3 \times y(y - ix) +}{(X^{6个}\ y\ 2)\ (x + iy)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\ 3mx(mx - ix) +}{(X^{6个}\ m2x\ 2))\ (x + imx)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m(m - i) \cdot x^{2个}}{(m2 + x\ 4)\ (1 + im)} = 0。$$

现在,让 z → 0 沿路径 y = x ^{3个} .然后,对于 x = 0

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{和} = \lim_{x\to 0} \frac{\times^{6}\quad 3 - ix\ x}{(X^{6个} + x\ 6)\ (x + ix3)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 九}{2\ (1 + ix2)} = - \frac{我}{2个}.$$

可微性

定理

如果 $f : G \to \mathbb{C}$ 在 G 中的点z0处可微，则 f 在z0 处连续。

可微性

定理

如果 $f : G \to C$ 在 G 中的点z0处可微,则 f 在z0 处连续。

证明。

考虑以下身份:

$$\lim_{z\to z0} |f(z) - f(z0)| = \text{林} \lim_{z\to z0} \frac{|f(z) - f(z0)|}{|z - z0|} \cdot \lim_{z\to z0} |z - z0|$$

$$= f'(z0) \cdot 0$$

$$= 0$$

即 $\lim_{z\to z0} f(z) = f(z0)$。因此,f(z) 在z0 处是连续的。

这就完成了证明。 □

可微性

上述定理的逆不一定成立。

例如,函数 |z|它在 z 平面的所有有限区域中都是连续的。然而,它仅在原点处具有导数,因为当 z = z0且z0 = 0 时,我们有 f(z) = |z|

2个

2个 ,

$$\frac{f(z) - f(z0)}{z - z0} = \frac{|z|^{2个} - |z0|^{2个}}{z - z0\ z - z0} = \frac{\bar{z}z - z0\bar{z}0}{z\bar{z} - z0\bar{z}}$$

$$= \frac{+ z0\bar{z} - z0\bar{z}0\ \bar{z} - \bar{z}0 = \bar{z} + z0\ z - z0}{z - z0}$$

$$z0\ \rho(\cos \frac{\rho(\cos\theta - i\sin\theta) =}{\theta + i\sin\theta)} \bar{z} + z0(\cos 2\theta - i\sin 2\theta), = \bar{z} +$$

其中 ρ = |z − z0|和 θ = arg (z − z0)。显然,lim 存在,因为极限取决于 $\frac{f(z)-f(z0)}{z-z0}$ 才不是
$z\to z0$

arg (z − z0)。然而,当z0 = 0 时,表达式简化为 $\bar{z}$ 趋于 0 且 z 趋于 0 。

定义

定义

- 如果 f(z) 在z0的某个邻域（包括z0 的开放区域)是可微的,则函数 f 在z0处是解析的;如果函数 f 在该区域中的所有
- 点都是解析的,则函数 f 在该区域中是解析的;如果函数 f 是解析的,则它是全纯的。条
- 件是

  同义词。
- 一个解析函数是完整的,如果它的解析区域包括 C 中的所有点,有限复平面,不包括无穷大。

如果我们将一个函数描述为解析函数,而不指定任何点或区域,则意味着在某个区域内它是解析的。

微分规则

定理

如果 f 和 g 在 G 上是解析的,其中 g(z) = 0,则

1. (f±g) 2 (z)′ = f (z)′ ± 克 ′(和)。
2. (cf) 3 (z)′ = cf′ (z),其中 c 是复常量。
3. (f · g) (z)′ = f(z) · g (z)′ + g(z) · f ′(和)。
4. $\frac{F}{G}$ ′(z) = $\frac{g(z)f'(z)-f(z)g'(和)}{[g(z)]2}$ 其中 g(z) = 0。

微分规则

定理

如果 f 和 g 在 G 上是解析的,其中 g(z) = 0,则

1. (f±g) 2 (z)′ = f (z)′ ± 克 (和)′。
2. (cf) 3 (z)′ = cf′ (z),其中 c 是复常量。
3. (f · g) (z)′ = f(z) · g (z)′ + g(z) · f (和)′。
4. F G ′(z) = g(z)f ′ (z)−f(z)g ′ (和) [g(z)]2 其中 g(z) = 0。

定理（链式法则）

如果 f 和 g 分别在 G 和 Ω 上是解析的,并且假设 f(G) ⊂ Ω,则 g ◦ f 在 G 上是解析的,并且对于 G 中的所有 z,

(g ◦ f) (z)′ = 克 (f′(z))f (和)′。

链式法则表明解析函数的解析函数是解析的。

例子

示例

函数 $f(z) = z^n$其中 n 是一个正整数是一个解析函数。此外，多项式和有理函数是解析函数。

柯西-黎曼方程

定理

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 f 的域 D 的任意点 $z = x + iy$ 解析的必要条件是四个偏导数 ux , uy , uy和vx应该存在并且满足方程

$$ux = vy, \quad uy = -vx。 \tag{1}$$

(1) 中给出的方程称为柯西-黎曼方程。

柯西-黎曼方程

定理

函数 f(z) = u(x, y) + iv(x, y) 在 f 的域 D 的任意点 z = x + iy 解析的必要条件是四个偏导数 ux , uy , uy和vx应该存在并且满足方程

$$ux = vy，\quad uy = -vx。 \qquad (1)$$

(1) 中给出的方程称为柯西-黎曼方程。

例子

表明函数 f(z) = u + iv,其中

$$f(z) = \frac{3\times(1+i) - y^{3\text{个}}(1-i)}{2\times + \text{和}^{2\text{个}}}\ (z = 0), f(0) = 0,$$

是连续的并且在原点处满足柯西-黎曼方程,但是 f

(0) 不存在。

充分条件

定理

如果四个偏导数 u_x、v_x、u_y和v_y存在且连续且满足柯西-每个点 D 处的黎曼方程。

$$F'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y。$$

共轭函数

定义

如果函数 $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在域 D 中是解析函数，则两个变量 x 和 y 的函数 u 和 v 称为共轭函数功能。

谐波函数

定义

如果对于所有 $x, y \in D$,所有二阶偏导数都存在且连续且满足拉普拉斯方程,则称实值函数 $u(x, y)$ 在域 D 中是调和的,即,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

定理

如果调和函数 u 和 v 满足 Cauchy-Riemann 方程,则 $u + iv$ 是解析函数。

例子

示例

数 $u(x, y) = e$ 调和共轭 $v(x, y)$ 和解析函数 ^{x} $\cos y$ 是谐波。确定其
$f(z) = u + iv$。

例子

如果你 = x^{2} 2 - 和 和v = — 证明u 和v 都满足拉普拉斯方程x 2+y 2 ,但$u + iv$ 不是z 的解析函数。

例子

一个开集 U 上是解析的,设 $|f|$ =常数。表明 f =
持续的。

Cauchy-Riemann 方程的极坐标形式

定理

若 $f(z) = u + iv$ 为解析函数且 $z = re^{i\theta}$均为实数,证明 Cauchy- ，其中 u、v、r 和 θ 是 Riemann 方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

构造解析函数的方法

1 复平面拓扑

2 复变函数

3 复数可微性

4 复变量初等函数

电源系列

定义

幂级数是类型的无限级数

∞ ∞

n 或者 n

澳新银行 一个$(z - z0)$

n=0 n=0

其中变量 z 和常量a0、 z0通常是复数,而an与 z 无关。

电源系列

定理

幂级数 Σ anz n要么

1. 对所有 z 值收敛；
2. 仅对 z = 0 收敛； 3对于复平面中某个
3. 区域的 z。

定理（阿贝尔定理）

如果幂级数 Σ ∞ n=0 anz绝对对于所有值 which | n 对于 z 的特定值z0收敛，然后它收敛 z| < |z0|。

定理（柯西-阿达玛定理）

对于所有幂级数 Σ ∞存在一个数 R,0 ⩽ R n ⩽ ∞,称为n=0 anz收敛的半径，具有以下性质：

1. 该级数对所有 |z| 绝对收敛< R。
2. 如果 0 ⩽ ρ < R,则级数对于 |z| 均匀收敛⩽ρ。
3. 如果 |z| 则级数发散> R。

电源系列

定理

电源系列 ∞ 但n=0 $n-1$，对幂级数微分得到

∞

n ，具有与原始级数相同的收敛半径。

anz n = 0

定义

如果 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}$ anz ^{n}，则 f(z) 称为幂级数的求和函数

∞

澳新银行 ^{n} .

n=0

定理

级数的函数 f(z) $\sum_{n=0}^{\infty}$ 澳新银行 ^{n} 表示解析函数

在它的收敛圆内。

指数函数

定义

复变量 z 的指数函数 f(z) 定义为微分方程的解： f

(z) = f(z),初始值 f(0) = 1。

让我们通过设置来解决

$$f(z) = a0 + a1z + \cdot\cdot\cdot + anz^{n} + \cdot\cdot\cdot .$$

然后我们有

$$F'(z) = a1 + 2a2z + \cdot\cdot\cdot + nanz(z) = f(z)^{n-1} + \cdot\cdot\cdot .$$

因此,如果 ' 满足,则必有

$$a0 = a1, a1 = 2a2, \cdot\cdot\cdot .$$

一般来说， an − 1 = nan。由于 f(0) = 1,我们有a0 = 1。如果从上述关系中得出

$$1\ a1 = 1, a2 = 2 \quad -, \quad a3 = \frac{a2}{3个} = \frac{1个}{2 \cdot 3} = \frac{1个}{3!}, \quad 一个= \frac{1个}{n!} .$$

我们用 exp z 或 e 表示解 和 .因此我们有

$$\exp z = 1 + \Sigma \infty_{n=1} \frac{z\_}{n!} .$$

指数函数的加法定理

定理

对于所有z1和z2，

$$\exp(z_1+z_2)=\exp z_1\exp z_2。$$

证明。

我们有

$$\exp z_1 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!},\quad \exp z_2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}$$

由于以上两个级数绝对收敛,由柯西关于绝对收敛级数乘法的定理可知

$$\begin{aligned}
\exp z_1\cdot\exp z_2 &= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_2^n}{n!}\right)\\
&= 1++\frac{z_1+z_2}{1!}\quad\frac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{2!}+\cdots\\
&= 1+\frac{(z_1+z_2)}{1!}+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\cdots\\
&= \exp(z_1+z_2)。
\end{aligned}$$

指数函数的加法定理

通过归纳,我们有

$$\exp z_1 \cdot \exp z_2 \cdots \exp z_n = \exp(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)。$$

特别地,我们有

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$$

这个定理的一个有趣的结果是 exp z 永远不会消失。
因为,如果 $\exp z_1 = 0$,则恒等式

$$\exp z_1 \cdot \exp(-z_1) = 1$$

会得出 $\exp(-z_1)$不是有限的结论。但这是不可能的,因为 exp z 是 z 平面的每个有界域中的解析函数。

指数函数的简要总结

1. $\exp 0 = e^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1 \cdot (1 + i0) = 1$。
2. 对于z_1， $z_2 \in C$,$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2)$。
3. 对于 $z \in C$,$\exp z \neq 0$,且 $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$。
4. 对于 $z \in C$,$\exp(z + 2\pi i) = \exp z$。
5. 对于 $z \in C$，$|指数| = e^{再(z)}$.

三角函数

复数 z 的函数 sin z 和 cos z 被定义为在实变量的情况下通过公式

$$z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz) \sin}{2i},$$

$$\text{余弦} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2个}. \qquad (2)$$

使用（2)右侧的指数函数的幂级数,我们可以很容易地看到

$$\sin z = z - + \frac{和^{3个}}{3!} \cdot \cdot \cdot + \frac{和^{5个}}{5!} (2n+1)! \frac{(-1)\, n \cdot 和^{(2n+1)}}{} + \cdot \cdot \cdot ,$$

$$\text{余弦} = 1 - \frac{2\,z}{2!} + \frac{4\,z}{4!} - \cdot \cdot \cdot \frac{(-1)\, n \cdot z^{2n}}{+ (2n)!} + \cdot \cdot \cdot . \qquad (3)$$

由于这些幂级数中的每一个都具有无限收敛半径,因此 sin z 和 cos z 在 z 平面的每个有界域中都是解析的。

三角函数

其余三角函数的定义与实变量的情况严格类比,由

$$\tan z = \frac{\text{的儿子}}{\text{余弦 1}}', \qquad \text{婴儿床 } z = \frac{\text{余弦}}{\text{罪恶从}},$$

$$\text{秒 } z = \frac{}{\text{, 余弦}} \qquad z = \frac{1}{\text{的儿子}}.$$

级数 (3) 的逐项微分表明

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z,$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z, \sin 0 =$$

$$0, \cos 0 = 1。$$

这些结果与我们在实变函数的微积分中得到的结果是严格平行的。

欧拉方程

从（2），我们有

$$\exp(iz) = \cos z + i\sin z,$$

这被称为欧拉方程。另外，我们有

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(x + iy) \\ &= \exp x \cdot \exp(iy) \\ &= \exp x \cdot (\cos y + i\sin y)。\end{aligned} \tag{4}$$

因此 $\exp x$ 是模数，y 是 $\exp(x + iy)$ 的自变量。

sin z和cos z的加法定理

定理

对于所有z1和z2，

$$\cos(z1 + z2) = \cos z1 \cos z2 - \sin z1 \sin z2,$$

和

$$\sin(z1 + z2) = \sin z1 \cos z2 + \cos z1 \sin z2。$$

证明。

我们有

$$\exp\{i(z1 + z2)\} = \exp(iz1)\exp(iz2)。 \tag{5}$$

使用欧拉定理,从 (5) 可以得出

$$\begin{aligned} \cos(z1 + z2) + i\sin(z1 + z2) &= (\cos z1 + i\sin z1)(\cos z2 + i\sin z2) = \\ &(\cos z1 \cos z2 - \sin z1 \sin z2) + i(\sin z1 \cos z2 + \cos z1 \sin z2). \end{aligned} \tag{6}$$

分别用 -z1和-z2替换z1和z2 ,从 (6) 可以得出

$$\begin{aligned} \cos(z1 + z2) - i\sin(z1 + z2) &= (\cos z1 - i\sin z1)(\cos z2 - i\sin z2) \\ &= (\cos z1 \cos z2 - \sin z1 \sin z2) - i(\sin z1 \cos z2 + \cos z1 \sin z2). \end{aligned} \tag{7}$$

□

sin z和cos z的加法定理

将 (6) 和 (7) 相加,我们有

$$\cos(z1 + z2) = \cos z1 \cos z2 - \sin z1 \sin z2,$$

并且,从 (6) 中减去 (7),我们有

$$\sin(z1 + z2) = \sin z1 \cos z2 + \cos z1 \sin z2。$$

□

凭借公式（5)和（6)以及欧拉方程,我们得到恒等式

$$\sin2 z + \cos2 z = 1。$$

我们还可以证明,三角函数的所有基本恒等式对于三角函数来说仍然是一个复变量。

双曲函数sinh z和cosh z

复变量的双曲函数的定义方式与实变量相同。
基本公式是

$$出生\ z = \frac{1个}{2个}\ (这是^{和}\ -\ 和^{-z}), \tag{8}$$

$$\cosh z = \frac{1个}{2个}\ (这是^{和} + 和^{-z}) \tag{9}$$

在 (8) 和 (9) 的 RHS 上使用 e x和e－x的幂级数,我们可以很容易地看到

$$出生\ z = \sum_{n=0} \frac{和^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}。$$

显然,sinh z 和 cosh z 在 z 平面的每个有界域中都是规则的。双曲函数和三角函数之间的关系可以很容易地验证

$$\sin iz = i \sinh z,\ \cos iz = \cosh z,\ \sinh iz = i \sin z,\ \cosh iz = \cos z。$$

对数函数（指数函数的反函数）

log w 表示的复变量 w 的对数定义为方程的解

$$\exp z = w, \tag{10}$$

在哪里

$$z = 日志\ w。 \tag{11}$$

观察数字 0 没有对数,因为 exp z 永远不会为零。如果 z = x + iy,则对于 w = 0,(10) 可以写成

$$\exp(x + iy) = w$$

或者

$$\exp x \cdot \exp(iy) = w。$$

由于 x 和 y 是实数,我们有

$$\exp x = |w| \tag{12}$$

和

$$\exp iy = \frac{在}{|w|}. \tag{13}$$

可见,方程(12)有唯一解 x = log |w|,即正数|w|的实对数并且 (13) 的 RHS 是一个数量级为 1 的复数。

对数函数（指数函数的反函数）

因此它只有一个解,比如y0,这样 $0 \leqslant y0 < 2\pi$。现在,我们有

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y =$$
$$\cos(2n\pi + y) + i \sin(2n\pi + y)$$

其中 n = 0、1、2、· · ·。因此,每个非零复数都有无穷多个对数,它们彼此相差 2π 的整数倍。

log w 的虚部称为 w 的自变量。我们用 arg w 表示它,它在几何上被解释为正实轴与从 0 到点 w 的半线之间的角度。这意味着 arg w 具有无穷多个相差 2π 整数倍的值。满足不等式 $0 \leqslant \arg w < 2\pi$ 的 arg w 的值称为其主值。因此我们有

$$对数\ w = 对数\ |w| + 我\ \arg w。$$

让$|w| = r$ 和 $\arg w = \theta$。然后我们有

$$\log w = \log r + i\theta,\ r > 0。 \tag{14}$$

如果θ0表示 θ 的主值,我们可以写成

$$\log w = \log r + i\,(\theta 0 + 2n\pi)\,,$$

±2, · · · .我们从 (10) 和 (11) 中注意到,其中 n = 0, ±1,

$$日志（\exp z）= z。 \tag{15}$$

对数函数（指数函数的反函数）

当试图将重点放在任何复数 w 的对数的多值特征上时，它被表示为 Log w 而不是 log w。然后将符号log w保留为对应于w的主值的对数的值，即log |w|。 + iθ0，其中θ0是 arg w 的主值的主值。因此我们有

$$\log w = \log w \pm 2n\pi i$$

对于所有 n = 0、1、2、· · · ·

通过取 n 的特殊值获得的每个 Log w 称为对数的一个分支。最重要的分支当然是对应于 n = 0 的分支，它与 log w 相同，即 w 的对数的主值。

Log w的分支

正如我们上面所讨论的,Log w 是一个无限多值函数,但它可以很容易地分解为所有"分支"都是单值的。我们唯一要做的就是将 θ 的值限制在长度为 2π 的区间内。

通过对 r 和 θ 施加限制,使得 $r > 0$ 和$\theta 0 < \theta < \theta 0 + 2\pi$,由 (14) 定义的函数 log w 可以是单值和连续的,其中$\theta 0$是任何以弧度表示的固定角度。然后我们可以写

$$\log w = \log r + i\theta, \tag{16}$$

在哪里

$$r > 0, \theta 0 < \theta < \theta 0 + 2\pi。$$

请注意,对于每个固定的$\theta 0$,由 (16) 定义的函数是多值函数 Log w 的一个分支。

log w的加法定理

定理

如果w1和w2是两个复数,则

$$\log(w1w2) = \log w1 + \log w2,$$
$$\arg(w1w2) = \arg w1 + \arg w2。$$

证明。

假设 $\log w1 = z1$和 $\log w2 = z2$。那么,根据定义,我们有

$$\exp z1 = w1, \exp z2 = w2。$$

因此,根据指数函数和 (15) 的加法定理,我们有

$$\log(w1w2) = \log(\exp z1 \exp z2) = \log[\exp(z1 + z2)] = z1 + z2 = \log w1 + \log w2。$$

因此我们有

$$日志(w1w2) = 日志w1 + 日志w2。 \quad (17)$$

第二个结果,即

$$\arg(w1w2) = \arg w1 + \arg w2 \quad (18)$$

通常意义上的遵循。 □

log w的解析度

如果我们沿实轴的负半部分从-∞到0进行切割,并规定变量不与它相交,则如果D是这个切割平面中的任何有界域,则切割的任何点都不属于D, log w 在 D 中是单值且连续的。让 w 和w 是域 D 中任意两个不同的点,如果 z = log w 和 z 则 z 是 D 中的任何路径。因此,
w → w

' = 对数w' , → z 作为w' → w 沿着

$$\frac{\log w - \log w'}{w - w'} = \frac{z - z'}{\exp(z) - \exp(z')}$$

$$= \frac{z - z'}{(z - z') + \frac{1}{2}(和 - z'^2) + \frac{1}{3!}(和 - z'^3) + \cdots}$$

$$= \frac{1个}{1 + \frac{1}{2!}(z + z') + \frac{1}{3!}(和 + zz' + z'^2) + \cdots}$$

$$= \frac{1个}{1 + \frac{}{1!} + \frac{2}{出2!} + \cdots}$$

作为 z → z。然后我们有

$$\lim_{w \to w'} \frac{z - z'}{w - w'} = \frac{1个}{指数(z)} = \frac{1个}{在}$$

由此我们得出结论,ln w 是一个解析函数,并且在 D 中是正则的,其中 $\frac{1个}{在}$ 作为它的衍生物。

$\log(1+z)$的幂级数

由于 $\log(1+z)$ 是一个解析函数,在 z 平面上是规则的,并且沿实轴从 $-\infty$ 到 -1 切分,导数 $\frac{1}{1+z}$。很容易看出,在域$|z|<1$,

功能 $\frac{1}{1+z}$ 可以展开为由下式给出的收敛幂级数

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

显然,这个幂级数的和是函数的导数

$$f(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots \tag{19}$$

对于序列$\Sigma\infty$收敛的所有 z 值。我们发现定义 f(z) 的幂级数 (19) 的收敛半径为 1。因此 $F(z) = f(z) - \log(1+z)$ 是 $|z|$ 的解析函数和正则函数<1,微分系数等于零。因此,对于 $|z|<1$,F(z) 是常数。让我们让 $z = 0$。然后我们发现 $F(0) = 0$。因此 $\log(1+z)$ 可以用下式给出的幂级数表示

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

收敛于 $|z|<1$。

函数a z和z

A

我们将函数的主值定义为一个方程 和 作为由唯一确定的数字

z = 和 记录一个

其中 log a 是 Log a 的主值,我们允许 a 和 z 都是复数。
用Log a的其他值代替log a,我们可以得到a的其他值,可以称为它的辅助值。当然,所有这些都包含在表达式中 和 ,

$$\exp\{z(2\pi i + \log a)\}。$$

假设 a 是实数或复数。然后我们用方程定义 z a

个z = exp(a log z),

其中 log z 是 Log z 的主值。此外,我们观察到,对于 α 和 β 的任何值,实数和复数,

$$z^{\alpha} z^{\beta} = \exp(\alpha \log z) \exp(\beta \log z)$$
$$= \exp\{(\alpha + \beta) \log z\}。$$

因此,我们有

$$z^{\alpha} z^{b} = z^{a+b} .$$

函数a z和z

A

由于 log z 的值随着 a 穿过实轴的负半部分而突然改变 2πi
所以我们有

$$\log(x + iy) - \log(x - iy) \to 2\pi i$$

因为 $y \to 0$ 等等

$$\frac{(x + iy)^a}{(x - iy)^a} \to e^{2a\pi i}$$

当 $y \to 0$。上述极限表明 z 2πi a 的整数值,因为在这种情况下 e = A 对于实负 z 也是不连续的,除了 1。

显然,z 沿实负轴 A 在 z 平面的每个有界域 D 中是单值且连续的并且切割
从 $-\infty$ 到原点。我们可以在这样的域 D 中针对 z 的值计算 z a的导数。因此我们有

$$\frac{d}{分区} \text{个z}^{-} = \frac{d}{分区} \exp(a \log z) = \exp(a \log z) \frac{A}{和} = 一个 \frac{\exp(a \log z)}{\exp(\log z)}$$

$$= a \exp[(a - 1) \log z] =$$

$aza-1$ 。

备注:一般来说,我们有

$$1\ 2^{aa\ zz} = (z1z2)^{A} \ .$$

反三角函数

我们通过等式定义余弦函数 cos z 的反函数 $z = \cos^{-1} w$

$$余弦 = \frac{自^{来} + e^{-iz}}{2个} = w。 \tag{20}$$

求解(20),我们有

$$_{}^{2ize} - 2weiz + 1 = 0。$$

这是e中的二次方程 从 有根

$$自^{来} = \frac{2w \pm \sqrt{4w2 - 4} = w}{2个} \pm \sqrt{w2 - 1}。$$

因此 $z = -i \ln (w \pm \sqrt{w2 - 1})$。自从

$$\frac{1个}{w + \sqrt{w2 - 1}} = \frac{w - \sqrt{w2 - 1} =}{(w2 - 1)} w - \sqrt{w2 - 1}, w2 -$$

数 $w + \sqrt{w2 - 1}$ 和 $w - \sqrt{w2 - 1}$ 是倒数。

反三角函数

因此,我们有

$$\ln(w - \sqrt{w^2 - 1}) = -\ln(w + \sqrt{w^2 - 1})。\quad \cos-1$$

因此我们可以写

$$w = z = \pm i \ln(w + \sqrt{w^2 - 1})。$$

由于对数是一个多值函数,因此 cos−1 w 变为单值和解析函数,因为它是解析函数的复合。现在,我们定义反函数 sin−1 w 为

$$\sin-1\, w = \frac{\pi}{2个} - \cos-1\, w。$$

很容易证明

$$\tan-1\, w = \frac{我}{2个} \log(1 + iw) \overline{\;\;\;} 1\log$$

IE,

$$\arctan w = 2\ \frac{我}{\;}\ (i - wi + w)。$$

我们还定义反函数 cot−1 w 为

$$\cot-1\, w = \frac{\pi}{2个} - \tan-1\, w,$$

IE,

$$arccotw = 2\ \frac{\pi}{\;} - \frac{我}{2个}\ 日志(我wi + w)。$$

多值函数:分支

在定义解析函数时,我们假设解析函数必须是单值的。然而,有大量函数不是单值的,但是,当然,它们是 n 不是整数 tan−1 z 的情况。对于多值,例如 Log z, z 1/2 。设 z = r(cos θ + isin θ),其中 r 在这一端固定,考虑 w = z 和 θ 介值,由 n , 于 0 和 2π 之间。然后我们得到 w 的两个

$$w1 = |\sqrt{r}|e^{i\theta/2}, \quad w2 = |\sqrt{r}|e^{i(\theta+\pi)/2} = -|\sqrt{r}|e^{i\theta/2}$$

这些值称为二值函数 w 的两个分支。 1/3是三值函数。

同样,w = z