Notation:

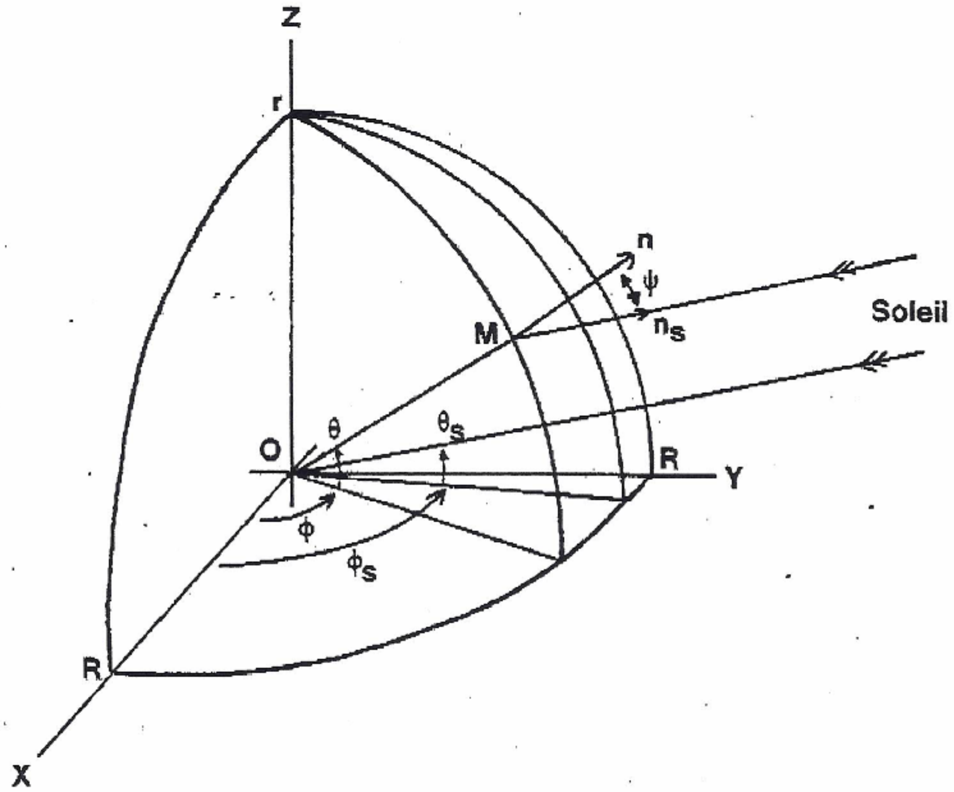
ξ_θ = fractional length of day at latitude θ.

μ_θ^J = average value of $\cos\psi$ during a Saturnian day (ψ is the Sun zenith angle at latitude θ)

($\Rightarrow \frac{\mu_\theta^J}{\xi_\theta}$ is average value of $\cos\psi$ during daytime)

APPENDICE 1

CALCUL DE L'ECLAIREMENT D'UNE PLANETE EN FONCTION DE LA LATITUDE ET DE LA SAISON



On représente la planète par un ellipsoïde de révolution d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2+y^2}{R^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 , \qquad (1)$$

où R est le rayon équatorial et r est le rayon polaire. L'axe 0_z est l'axe de rotation de la planète. Les coordonnées d'un point M à la surface s'expriment en fonction de la latitude θ et de la longitude φ comme suit:

$$x = \frac{R \cos\theta \cos\phi}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta}}$$

$$y = \frac{R \cos\theta \sin\phi}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta}} \qquad (2)$$

$$z = \frac{R \sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta}}$$

La normale $\bar{n}$ en M à l'ellipsoïde a pour coordonnées

$$X_N = \frac{\cos\theta \cos\phi}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}}$$

$$Y_N = \frac{\cos\theta \sin\phi}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}} \qquad (3)$$

$$Z_N = \frac{\frac{R^2}{r^2}\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}}$$

On repère la position du soleil à un instant donné par la latitude θ_S et la longitude ϕ_S du point subsolaire. ϕ_S varie régulièrement de 0 à 2π au cours d'une rotation de la planète sur elle-même. θ_S qui est l'angle que fait le soleil avec le plan équatorial (déclinaison solaire) varie au cours d'une révolution de la planète autour du soleil entre $-\delta$ et $+\delta$, δ étant l'obliquité de la planète. Notons que $\theta_S = -\delta$ correspond au solstice d'hiver pour l'hémisphère nord, $\theta_S = +\delta$ au solstice d'été et $\theta_S = 0$ aux équinoxes. L'angle ψ que fait le soleil avec la verticale du lieu en M est donné par la relation

$$\cos\psi = \vec{n} \cdot \vec{n}_S . \tag{4}$$

où $\vec{n}_S = \cos\theta_S \cos\phi_S \,\vec{i} + \cos\theta_S \sin\phi_S \,\vec{j} + \sin\theta_S \,\vec{k}$. A partir des relations (3) et (4), on obtient.

$$\cos\psi = \frac{\cos\theta \cos\theta_S \cos(\phi-\phi_S) + \frac{R^2}{r^2}\sin\theta \sin\theta_S}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}} ,$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\cos\psi = \frac{\cos\theta \cos\theta_S}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}} \left(\cos(\phi-\phi_S) - \alpha\right) , \tag{5}$$

en posant

$$\alpha = -\frac{R^2}{r^2}\,\frac{\sin\theta \sin\theta_S}{\cos\theta \cos\theta_S} = -\frac{R^2}{r^2}\,\mathrm{tg}\theta \,\mathrm{tg}\theta_S .$$

a - <u>Durée fractionnaire du jour</u>

La durée fractionnaire du jour ξ_θ est, par définition, la fraction de la journée planétaire pendant laquelle une région à la latitude θ est éclairée par le soleil. ξ_θ est par suite aussi égal à $\Delta\phi/2\pi$ où $\Delta\phi$ est l'intervalle des longitudes éclairées par le soleil à un instant donné. Un point M est éclairé par le soleil à condition que $\cos\psi > 0$ c'est à dire $\cos(\phi-\phi_S) > \alpha$. Plusieurs cas peuvent se présenter suivant la valeur de α:

i) $\alpha \leqslant -1$: $\cos(\phi-\phi_S) \geqslant \alpha$ à toute longitude ϕ. Une région de latitude θ est donc éclairée toute la "journée" et on a $\xi_\theta = 1$.

ii) $-1 < \alpha < 1$: soit ϕ_θ = Arcos α; le point M est éclairé si $\cos(\phi-\phi_S) > \cos\phi_\theta$, c'est à dire $\phi_S-\phi_\theta < \phi < \phi_S+\phi_\theta$. On a alors $\Delta\phi = 2\phi_\theta$ et par suite $\xi_\theta = \phi_\theta/\pi$.

iii) $\alpha \geq 1$: $\cos(\phi-\phi_S) \leq \alpha$ pour n'importe quelle longitude la latitude θ est continuellement dans la nuit, et donc $\xi_\theta = 0$.

On a donc en résumé :

$$\xi_\theta = \frac{\phi_\theta}{\pi} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{lll} \phi_\theta = 0 & \text{si} & \frac{-R^2}{r^2} \text{tg}\theta \ \text{tg}\theta_S \geq 1 \\ \phi_\theta = \text{Arcos}\left[\frac{-R^2}{r^2} \text{tg}\theta \text{tg}\theta_S\right] & \text{si} \ -1 < & \frac{-R^2}{r^2} \text{tg}\theta \ \text{tg}\theta_S < 1 \\ \phi_\theta = \pi & \text{si} & \frac{-R^2}{r^2} \text{tg}\theta \ \text{tg}\theta_S \leq -1 \end{array} \right.$$

b - Ensoleillement moyen pendant une "journée"

average value furnishes

La valeur moyenne de $\cos\psi$ sur une "journée" planétaire μ_θ^J fournit le flux solaire incident moyen à la latitude θ. On l'obtient en pratique en calculant la moyenne de $\cos\psi$ sur les longitudes éclairées à un instant donné. D'après ce qui précède, ce sont celles comprises entre $\phi_S-\phi_\theta$ et $\phi_S+\phi_\theta$. Par suite :

$$\mu_\theta^J = \langle\cos\psi\rangle_J = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_S-\phi_\theta}^{\phi_S+\phi_\theta} \frac{\cos\theta \ \cos\theta_S \cos\left[\phi-\phi_S\right] + \frac{R^2}{r^2} \sin\theta \ \sin\theta_S}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4} \sin^2\theta}} \, d\phi$$

Un calcul élémentaire conduit à :

$$\mu_\theta^J = \frac{\cos\theta \ \cos\theta_S \ \sin\phi_\theta + \frac{R^2}{r^2} \phi_\theta \sin\theta \ \sin\theta_S}{\pi \sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4} \sin^2\theta}} \qquad (6)$$

La moyenne diurne de $\cos\psi$ s'obtient évidemment en divisant $\langle\cos\psi\rangle$ par ξ_θ.

$$\mu_\theta^D = \langle\cos\psi\rangle_D = \frac{\cos\theta\,\cos\theta_S\,\dfrac{\sin\Phi_\theta}{\Phi_\theta} + \dfrac{R^2}{r^2}\sin\theta\,\sin\theta_S}{\sqrt{\cos^2\theta + \dfrac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}} \qquad (7)$$

c – Calcul de l'orbite de la planète autour du soleil

orbital period — orbital eccentricity — orbital semimajor axis

Soient T la période de révolution, e l'excentricité de l'orbite, a son demi grand axe, et δ (obliquity) l'obliquité de la planète (inclinaison de l'équateur sur le plan de l'orbite). La distance planète–soleil d et la déclinaison solaire θ_S sont calculées à un instant donné suivant la formulation donnée par Landau et Lifchitz (1969, Chap. III, § 15)

$$d = a(1 - e\cos\zeta)$$

$$t = \frac{T}{2\pi}(\zeta - e\sin\zeta)$$

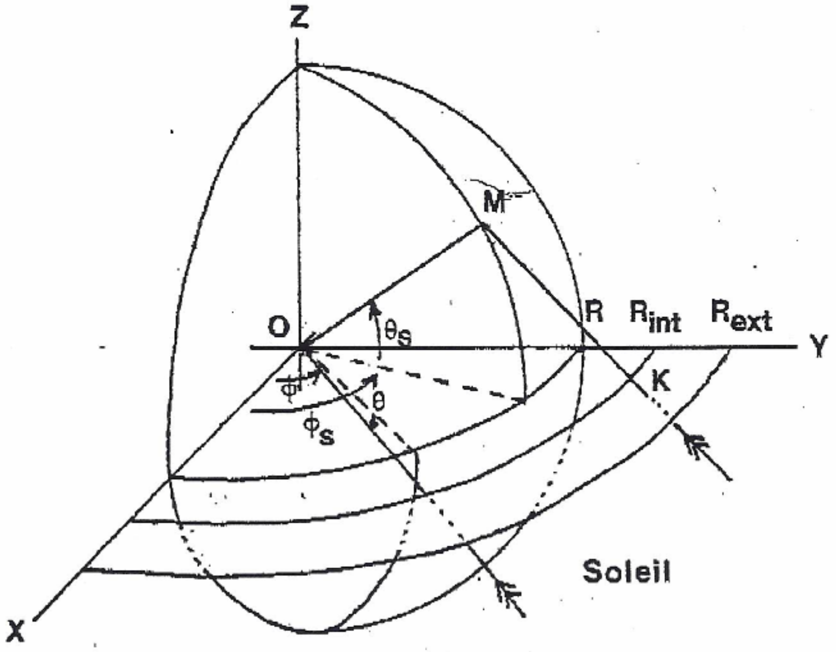
$$\cos\phi = \frac{\cos\zeta - e}{1 - e\cos\zeta}$$

$$\sin\theta_S = \sin\delta\,\sin(\phi - \phi_o)$$

ϕ est la longitude héliocentrique de la planète. On prend l'origine des temps et des longitudes $\zeta = 0$, $t = 0$, $\phi = 0$ au périhélie de l'orbite.

APPENDICE 2

CALCUL DE L'INFLUENCE DES ANNEAUX SUR L'ECLAIREMENT DE SATURNE



Les notations sont celles de l'appendice 1. Considérons un anneau situé dans le plan équatorial de Saturne, confiné entre les rayons R_{int} et R_{ext} et d'épaisseur optique τ. Le rayon du soleil atteignant reaching la planète au point M coupe cut le plan équatorial au point K de coordonnées

$$x_K = x - z \cos\phi_S/\mathrm{tg}\theta_S = \frac{R(\cos\theta \cos\phi - \sin\theta \cos\phi_S/\mathrm{tg}\theta_S)}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta}}$$

$$y_K = y - z \sin\phi_S/\mathrm{tg}\theta_S = \frac{R(\cos\theta \sin\phi - \sin\theta \sin\phi_S/\mathrm{tg}\theta_S)}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta}}$$

$$z_K = 0$$

Ce rayon est intercepté par l'anneau si $R_{int} < OK < R_{ext}$, condition qui s'écrit

$$R_{int}^2 < R^2 \frac{\left[\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\cos\phi_S/tg\theta_S\right]^2 + \left[\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\sin\phi_S/tg\theta_S\right]^2}{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta} < R_{ext}^2$$

soit encore :

$$\left[\frac{R_{int}}{R}\right]^2 < \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta/tg^2\theta_S - 2\sin\theta\cos\theta\cos(\phi-\phi_S)/tg\theta_S}{\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta} < \left[\frac{R_{ext}}{R}\right]^2 \quad (1)$$

On pose

$$\alpha_{int} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta/tg^2\theta_S - \left[\frac{R_{int}}{R}\right]^2 \left[\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta\right]}{2\sin\theta\cos\theta/tg\theta_S}$$

et $$\alpha_{ext} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta/tg^2\theta_S - \left[\frac{R_{ext}}{R}\right]^2 \left[\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\sin^2\theta\right]}{2\sin\theta\cos\theta/tg\theta_S}$$

L'hémisphère pour lequel c'est l'été (θ et θ_S de même signe) n'est pas affecté par la présence de l'anneau. On ne considérera donc ci-après que le cas où θ et θ_S sont de signe contraire. Dans ces conditions, l'équation (1) est équivalente à

$$\alpha_{int} < \cos(\phi-\phi_S) < \alpha_{ext}$$

Les latitudes qui ne sont pas du tout affectées par l'anneau sont celles pour lesquelles $\alpha_{int} > 1$ ou $\alpha_{ext} < \alpha$ (voir l'appendice 1 pour la définition de α). Si aucune de ces deux conditions n'est vérifiée, certaines longitudes sont dans l'ombre de l'anneau. On peut alors poser ϕ_{int} = Arcos α_{int} si $\alpha_{int} > -1$ ou $\phi_{int} = \pi$ si $\alpha_{int} \leq -1$ et similairement ϕ_{ext} = Arcos α_{ext} si $\alpha_{ext} < 1$ ou $\phi_{ext} = 0$ si $\alpha_{ext} \geq 1$. Avec ces notations, la condition (1) est équivalente à :

$$\phi-\phi_S \in [-\phi_{int}, -\phi_{ext}] \cup [\phi_{ext}, \phi_{int}]$$

nevertheless

Dans ces intervalles de longitudes, il faut toutefois ne considérer que celles qui seraient éclairées en l'absence de l'anneau, c'est à dire telles que:

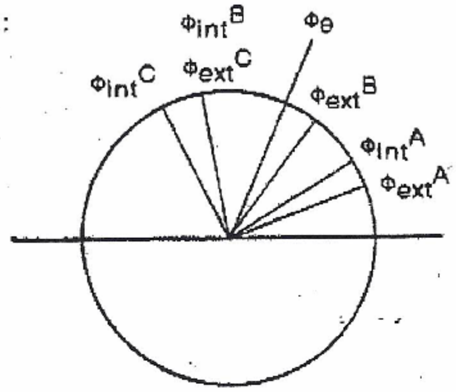
$$\phi-\phi_S \in [-\phi_e, \phi_e] \quad \text{(voir appendice 1).}$$

Toute région dont la longitude par rapport au soleil $\phi-\phi_S$ est incluse dans un des intervalles $[\phi_{ext}, \phi_{int}] \cap [0, \phi_\theta]$ ou $[-\phi_{int}, -\phi_{ext}] \cap [-\phi_\theta, 0]$ voit donc son éclairement multiplié par $e^{-\tau/\cos\theta_S}$.

Considérons maintenant l'ensemble des trois anneaux principaux de Saturne. A, B et C. Leurs caractéristiques sont :

Anneau	R_{int}/R	R_{ext}/R	τ
A	2.01	2.26	0.4
B	1.53	1.95	1.2
C	1.21	1.53	0.09

On peut définir d'après ce qui précède trois couples d'angles $(\phi_{int}^A, \phi_{ext}^A)$, $(\phi_{int}^B, \phi_{ext}^B)$ et $(\phi_{int}^C, \phi_{ext}^C)$ avec la convention habituelle $\phi_{int/ext}^{A/B/C} = 0$ (resp. π) si $\alpha_{int/ext}^{A/B/C} \geq 1$ (resp. ≤ -1). Différents cas sont alors possibles suivant la position de ϕ_θ par rapport à ces 6 angles. Prenons comme exemple la configuration suivante:



On voit alors que les longitudes telles que

$|\phi-\phi_S| \in [0 \ , \phi_{ext}^A]$ sont normalement éclairées

$|\phi-\phi_S| \in [\phi_{ext}^A, \phi_{int}^A]$ sont dans l'ombre de l'anneau A

$|\phi-\phi_S| \in [\phi_{int}^A, \phi_{ext}^B]$ sont normalement éclairées

$|\phi-\phi_S| \in [\phi_{ext}^B, \phi_\theta]$ sont dans l'ombre de l'anneau B

$|\phi-\phi_S| > \phi_\theta$ sont dans la nuit

On peut alors calculer les paramètres ξ_θ et μ_θ^J qui spécifient l'insolation à la latitude θ (cf. appendice 1) de façon simple :

$$\xi_\theta = \frac{1}{\pi}\left[\phi^A_{ext} + \left[\phi^A_{int} - \phi^A_{ext}\right] e^{-\tau_A/\cos\theta_S} + \left[\phi^B_{ext} - \phi^A_{int}\right] + \left[\phi_\theta - \phi^B_{ext}\right] e^{-\tau_B/\cos\theta_S}\right]$$

$$\mu^J_\theta = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\phi^A_{ext}} \cos\psi d\phi + e^{-\tau_A/\cos\theta_S}\int_{\phi^A_{ext}}^{\phi^A_{int}} \cos\psi d\phi + \int_{\phi^A_{int}}^{\phi^B_{ext}} \cos\psi d\phi + e^{-\tau_B/\cos\theta_S}\int_{\phi^B_{ext}}^{\phi_\theta} \cos\psi d\phi\right]$$

Soit enfin, d'après l'équation (6) de l'appendice 1 :

$$\mu^J_\theta = \left\{\frac{\cos\theta\cos\theta_S}{\pi}\left[\sin\phi^A_{ext} + e^{-\tau_A/\cos\theta_S}\left[\sin\phi^A_{int} - \sin\phi^A_{ext}\right] + \left[\sin\phi^B_{ext} - \sin\phi^A_{int}\right] + e^{-\tau_B/\cos\theta_S}\left[\sin\phi_\theta - \sin\phi^B_{ext}\right]\right] + \frac{R^2}{r^2}\sin\theta\sin\theta_S\,\xi_\theta\right\} \Bigg/ \sqrt{\cos^2\theta + \frac{R^4}{r^4}\sin^2\theta}$$

Le principe du calcul reste le même pour une configuration différente des angles ϕ_θ et $\{\phi^{A/B/C}_{int/ext}\}$.