Optimisation et complexité

Maher REBAI: Enseignant en informatique à l'école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci Paris la défense

EFREI, Paris

Année Universitaire : 2019-2020

Programmation mathématique linéaire

Introduction

Avant de résoudre un problème par une méthode de recherche opérationnelle, il faut tout d'abord le modéliser. Parmi les outils de modélisation:

- Les graphes (déjà vu)
- La programmation mathématique
- La simulation

De nombreux problèmes peuvent être écrits (modélisés) sous forme d'une fonction à plusieurs variables linéaire à optimiser (maximiser ou minimiser) sous des contraintes (équations et inéquations) linéaires: on parle de programme mathématique linéaire.

Introduction

- **Exemple:**

Un pays en voie de développement veut mettre en valeur une zone de 900 ha où 2 cultures sont possibles, les dattes et le blé. Les données relatives à 1 ha sont les suivantes :

	dattes	blé
- rendement en quintaux à l'hectare	75	25
- prix de vente au quintal	60	60
- main d'œuvre nécessaire (en nombre d'ouvriers)	1	2
- frais d'exploitation (hors salaires) en €	3 500	300
- eau nécessaire pour irriguer en m^3 par année	14 000	6 000

Les salaires annuels sont de 500 € par an et par personne. Les disponibilités des facteurs de production (terre, main d'œuvre et eau) sont respectivement : 900 ha, 1200 ouvriers et 14 millions de m^3 d'eau par an. Le pays cherche à maximiser le revenu national défini comme la somme des salaires versés et du bénéfice.

Introduction

- **Exemple:**
- **Mise en forme du problème**
  - **Choix des inconnues (variables de décision):**

    x = nombre d'ha de dattes
    y = nombre d'ha de blé, alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$

  - **Fonction objective (économique):**

    - salaires versés : $x \times 1 \times 500 + y \times 2 \times 500$
    - bénéfice : $(x \times 75 \times 60 - x \times 3\,500 - x \times 1 \times 500)$
      $+ (y \times 25 \times 60 - y \times 300 - y \times 2 \times 500)$

    d'où le revenu national : $\Gamma = 1\,000\,x + 1\,200\,y$

  - **Contraintes du problème**

    - pour la terre : $x + y \leq 900$ (pas = 900 !)
    - pour la main d'œuvre : $x + 2\,y \leq 1\,200$
    - pour l'eau : $14\,000\,x + 6\,000\,y \leq 14\,000\,000$,

    soit $14\,x + 6\,y \leq 14\,000$

Introduction

- **Exemple:**
- **Mise en forme du problème**

$$\text{Max } \Gamma = 1\,000\,x + 1\,200\,y$$

$$\text{sous les contraintes : } \begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ x + y \leq 900 \\ x + 2\,y \leq 1\,200 \\ 14\,x + 6\,y \leq 14\,000 \end{cases}$$

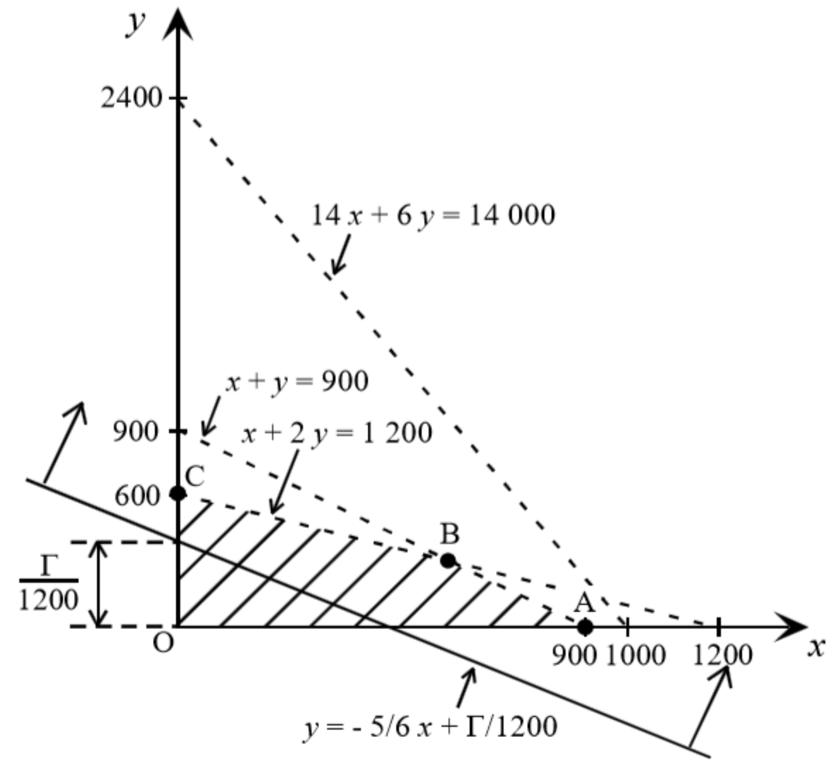
Remarques:

les inconnues et variables diverses d'un PML sont toujours positives ou nulles.

le choix du critère d'optimisation est à la charge du décideur

Méthodes de résolution d'un PML

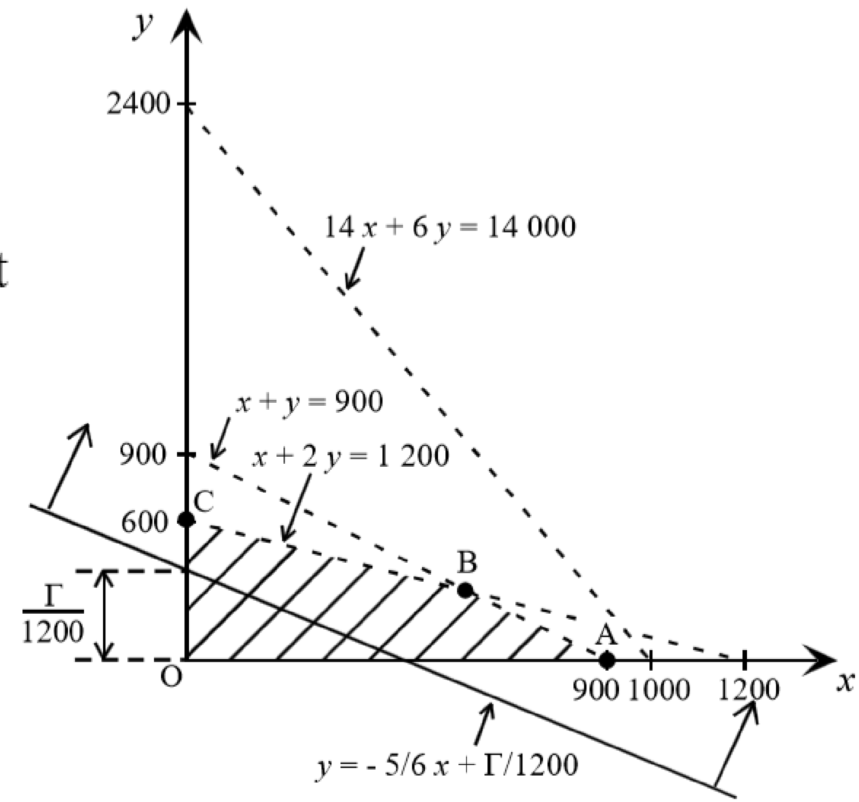
- **Méthode graphique**



- les contraintes définissent la zone admissible des solutions (ZAS) qui est le polygone OABC.
- la ZAS sera toujours un polygone pour un programme linéaire.
- tous les couples (x, y) de la droite d'équation $\Gamma = 1\,000\,x + 1\,200\,y$ (ou $y = -5/6\,x + \Gamma/1200$) correspondent à la même valeur de Γ.
- l'intersection de cette droite avec l'axe Oy donne la valeur de $\Gamma/1200$. Pour augmenter Γ, il faut donc déplacer la droite de pente fixe -5/6 vers le haut jusqu'à ce qu'elle ne traverse la ZAS qu'en un seul point (B), qui est le lieu du maximum de Γ.

Méthodes de résolution d'un PML

Méthode graphique



- l'optimum d'un PML est situé forcément en l'un des sommets de non dégénéré), ici le sommet B :

$x_B = 600$ ha, $y_B = 300$ ha et $\Gamma_B = 960\ 000$ €.

<u>remarques</u> :

- si le segment AB avait pour pente -5/6, tous ses points seraient des solutions optimales avec la même valeur de Γ (cas dégénéré)
- la résolution graphique est impossible s'il y a plus de 3 variables.

Méthodes de résolution d'un PML

Méthode des systèmes

a) on remplace les inégalités des contraintes par des égalités, ce qui introduit des variables d'écart (VE) e_1, e_2, e_3 (forcément positives ou nulles). On part donc du système (S_0) qui contient 5 variables au lieu des 2 inconnues de départ :

$$(S_0) \quad \begin{cases} x + y + e_1 = 900 \\ x + 2y + e_2 = 1\,200 \\ 14x + 6y + e_3 = 14\,000 \end{cases}$$

b) chaque sommet du polygone correspond à 2 variables nulles (dites "variables hors-base") ; ainsi O correspond à $x = 0$ et $y = 0$ (les VE e_i sont non nulles et sont dites "variables dans la base"), A correspond à $e_1 = 0$ et $y = 0$, B à $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$, et C à $x = 0$ et $e_2 = 0$. On part du sommet O ($\Gamma = 0$) et on va échanger une des variables hors-base avec une des variables dans la base (selon des critères bien définis, voir plus bas) pour se déplacer sur un autre sommet de la ZAS qui correspond à une valeur plus grande de Γ.

Méthodes de résolution d’un PML

- **Méthode des systèmes**

c) on répète alors l'opération pour atteindre le sommet optimum, suivant l'algorithme :

α) sélection de la variable entrante (v. e.) dans la base

β) sélection de la variable sortante (v. s.) de la base

γ) écriture des nouvelles variables de la base en fonction des variables hors-base pour déterminer le nouveau maximum de Γ et préparer l'itération suivante.

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des système**

(1ère itération) :

α) $\Gamma = 1\ 000\ x + 1\ 200\ y$: comme $1\ 200 > 1\ 000$, on a intérêt à rendre y non nul pour augmenter Γ le plus possible (1er critère de Dantzig), donc y = v. e.

β) les variables de la base s'écrivent en fonction des variables HB :

$e_1 = 900 - x - y$

$e_2 = 1\ 200 - x - 2\,y$

$e_3 = 14\ 000 - 14\,x - 6\,y$

or x reste HB ($x = 0$), donc :

$e_1 = 900 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 900$

$e_2 = 1\ 200 - 2\,y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1\ 200 / 2 = 600$

$e_3 = 14\ 000 - 6\,y \geq 0 \Rightarrow y \leq 14\ 000 / 6 \approx 2333$

la plus grande valeur de y vérifiant les 3 contraintes est Min (900, 600, 2333) = 600, on choisit donc e_2 comme v. s. ($e_2 = 0$), c'est le 2ème critère de Dantzig.

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des systèmes**

(1ère itération) :

α) $\Gamma = 1\ 000\ x + 1\ 200\ y$: comme 1 200 > 1 000, on a intérêt à rendre y non nul pour augmenter Γ le plus possible (1er critère de Dantzig), donc y = v. e.

β) les variables de la base s'écrivent en fonction des variables HB :

γ) on écrit les variables de la nouvelle base (e_1, y, e_3) en fonction des variables HB (x, e_2),(S_0) devient (S_1) :

$$(S_1) \begin{cases} e_1 = -1/2\, x + 1/2\, e_2 + 300 \\ y = -1/2\, x - 1/2\, e_2 + 600 \\ e_3 = -11\, x + 3\, e_2 + 10\ 400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{HB} : x = 0,\ e_2 = 0 \\ \text{Base} : e_1 = 300,\ y = 600,\ e_3 = 10\ 400 \\ \text{sommet : C avec } \Gamma_C = 720\ 000\ € \end{cases}$$

$$\Gamma = 400\, x - 600\, e_2 + 720\ 000$$

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des systèmes**

(2ème itération) :

α) $\Gamma = 400\,x - 600\,e_2 + 720\,000$ comme $400 > 0$ on a intérêt à rendre x non nul pour augmenter Γ, donc x = v. e.

β) les variables de la base s'écrivent en fonction des variables HB :

$e_1 = -1/2\,x + 1/2\,e_2 + 300$ or e_2 reste $e_1 = -1/2\,x + 300 \geq 0 \Rightarrow x \leq 600$

$y = -1/2\,x - 1/2\,e_2 + 600$ HB ($e_2 = 0$), $y = -1/2\,x + 600 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1200$

$e_3 = -11\,x + 3\,e_2 + 10\,400$ donc : $e_3 = -11\,x + 10\,400 \geq 0 \Rightarrow x \leq 10400/11$

la plus grande valeur de y vérifiant les 3 contraintes est Min (600, 1200, 10400/11) = 600, on choisit donc e_1 comme v. s. ($e_1 = 0$),

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des systèmes**

α) $\Gamma = 400\,x - 600\,e_2 + 720\,000$ comme $400 > 0$ on a intérêt à rendre x non nul pour augmenter Γ, donc x = v. e.

β) les variables de la base s'écrivent en fonction des variables HB :

γ) on écrit les variables de la nouvelle base (x, y, e_3) en fonction des variables HB (e_1, e_2),

(S_1) devient (S_2) :

$$(S_2)\quad \begin{cases} x = e_2 - 2\,e_1 + 600 \\ y = e_1 + 300 \\ e_3 = -8\,e_2 + 22\,e_1 + 3800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{HB} : e_1 = 0,\ e_2 = 0 \\ \text{Base} : x = 600,\ y = 300,\ e_3 = 3800 \\ \text{sommet} : B \text{ avec } \Gamma_B = 960\,000\ € \end{cases}$$

$$\Gamma = -800\,e_1 - 200\,e_2 + 960\,000\ €$$

Méthodes de résolution d’un PML

- **Méthode des systèmes**

$$\Gamma = -\ 800\, e_1 - 200\, e_2 + 960\ 000\ €$$

Aucune valeur ne peut améliorer la nouvelle fonction objective => Optimalité

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

$$Maximiser\ 1000x + 1200y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Sous contraintes

$$x + y + e_1 = 900$$

$$x + 2y + e_2 = 1\,200$$

$$14x + 6y + e_3 = 14\,000$$

$$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1	1	1	1	0	0	900
e_2	1	2	0	1	0	1200
e_3	14	6	0	0	1	14000
δ_{ij}	1000	1200	0	0	0	Z=0

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1	1	1	1	0	0	900/1
e_2	1	2	0	1	0	1200/2 VS
e_3	14	6	0	0	1	14000/6
δ_{ij}	1000	1200	0	0	0	Z=0
		VE	Pivot			

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1						
y	1/2	1	0	1/2	0	600 VS
e_3						
δ_{ij}	1000	1200	0	0	0	Z=0
		VE		Pivot		

e_1	1	1	1	0	0	900
-(1)	½	1	0	½	0	600
=	1/2	0	1	-1/2	0	300

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1	1/2	0	1	-1/2	0	300
y	1/2	1	0	1/2	0	600
e_3						
δ_{ij}						Z=0

Méthodes de résolution d'un PML

Méthode des tableaux

e_3	14	6	0	0	1	14000
-(6)	½	1	0	½	0	600
=	11	0	0	- 3	1	10400

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1	1/2	0	1	-1/2	0	300
y	1/2	1	0	1/2	0	600
e_3	11	0	0	- 3	1	10400
δ_{ij}						Z=

δ_{ij}	1000	1200	0	0	0
-(0)	1/2	0	1	-1/2	0
-(1200)	½	1	0	½	0
-(0)	11	0	0	- 3	1
=	400	0	0	-600	0

	VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
(0)	e_1	1/2	0	1	-1/2	0	300
(1200)	y	1/2	1	0	1/2	0	600
(0)	e_3	11	0	0	- 3	1	10400
	δ_{ij}	400	0	0	-600	0	Z=720000

Z=(0)*300+(1200)*600+(0)*10400=720000

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

VB	$1000\,x$	$1200y$	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1	1/2	0	1	-1/2	0	300/(1/2) =600
y	1/2	1	0	1/2	0	600/(1/2) =1200
e_3	11	0	0	- 3	1	10400/11
δ_{ij}	400	0	0	-600	0	Z=720000

VS

VE

Pivot

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

VB	$1000\,x$	$1200y$	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
e_1	1	0	2	-1	0	600
y						
e_3						
δ_{ij}						

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

y	1/2	1	0	1/2	0	600
-(1/2)	1	0	2	-1	0	600
=	0	1	-1	1	0	300

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
x	1	0	2	-1	0	600
y	0	1	-1	1	0	300
e_3						
δ_{ij}						Z=

e_3	11	0	0	- 3	0	10400
-(11)	1	0	2	-1	0	600
=	0	0	-22	8	0	3800

VB	1000 x	1200y	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
x	1	0	2	-1	0	600
y	0	1/2	-1	1	0	300
e_3	0	0	-22	8	0	3800
δ_{ij}						Z=

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

δ_{ij}	400	0	0	-600	0
-(400)	1	0	2	-1	0
-(1200)	0	1/2	-1	1	0
-(0)	0	0	-22	8	0
=	0	0	-800	-200	0

	VB	1000 x	1200y	0e_1	0e_2	0e_3	RHS
(1000)	x	1	0	2	-1	0	600
(1200)	y	0	1/2	-1	1	0	300
(0)	e_3	0	0	-22	8	0	3800
	δ_{ij}	0	0	-800	-200	0	Z=960000

Z=(1000)*600+(1200)*300+(0)*3800=960 000

Pas de variable entrante → Optimalité

Méthodes de résolution d'un PML

- **Méthode des tableaux**

VB	$1000\,x$	$1200y$	$0e_1$	$0e_2$	$0e_3$	RHS
x	1	0	2	-1	0	600
y	0	1/2	-1	1	0	300
e_3	0	0	-22	8	0	3800
δ_{ij}	0	0	-800	-200	0	Z=960000

remarques :

- tous les éléments de la ligne de Γ sont négatifs ou nuls, l'optimum est donc atteint,
- les variables hors base sont dans la ligne HB : $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$,
- les valeurs des variables de base sont dans la colonne R : $x = 600$, $y = 300$, $e_3 = 3\,800$,
- le tableau (T_2) correspond au point B car $x = 600$ et $y = 300$,
- les résultats (optimum en B et $\Gamma_B = 960\,000$ €) sont bien ceux obtenus par la résolution graphique.

Programme dual

- à tout programme linéaire (appelé primal) correspond un programme dual

exemple : à $\begin{cases} x + y \leq 900 & (t) \\ x + 2\,y \leq 1\,200 & (m) \\ 14\,x + 6\,y \leq 14\,000 & (e) \end{cases}$ correspond $\begin{cases} t + m + 14\,e \geq 1\,000 & (x) \\ t + 2\,m + 6\,e \geq 1\,200 & (y) \end{cases}$

Max $(1\,000\,x + 1\,200\,y)$ Min $(900\,t + 1\,200\,m + 14\,000\,e)$

0

<u>remarques</u> :

- on peut parfois donner une signification économique au programme dual,
- on passe de contraintes de type inégalité "≤" à des contraintes de type inégalité "≥" et d'une recherche d'un maximum à une recherche d'un minimum,
- à chaque contrainte du primal correspond une variable du dual et à chaque contrainte du dual correspond une variable du primal (voir ci-dessus).

- l'optimum du programme primal correspond à l'optimum du programme dual

Méthode de Simplex (cas général)

La méthode décrite précédemment ne permet de résoudre que des PML correspondant à la recherche d'un maximum en présence de contraintes linéaires de type inégalité "inférieure ou égale". Il s'agit maintenant d'étendre la méthode au cas général de la recherche d'optimum (maximum ou minimum) en présence de contraintes linéaires de type "inégalité" (≤ ou ≥) ou "égalité".

1) Formes canonique et standard :

- *Forme canonique* : - de type I : contraintes = inégalités "≤", recherche d'un maximum
  - de type II : contraintes = inégalités "≥", recherche d'un minimum
- *Forme mixte* : les contraintes sont de type "inégalité" (≤ ou ≥) ou "égalité", recherche d'un maximum ou d'un minimum.
- *Forme standard* : toutes les équations sont des égalités ; cette forme sert à la résolution algébrique du problème (simplexe).
- *Règles pour obtenir la forme standard* :

  - contrainte inégalité "≤" :
    - $x_1 + x_2 \leq 10$ devient $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ avec x_3 variable d'écart (VE) ≥ 0

Méthode de Simplex (cas général)

La méthode décrite précédemment ne permet de résoudre que des PML correspondant à la recherche d'un maximum en présence de contraintes linéaires de type inégalité "inférieure ou égale". Il s'agit maintenant d'étendre la méthode au cas général de la recherche d'optimum (maximum ou minimum) en présence de contraintes linéaires de type "inégalité" ($\leq$ ou $\geq$) ou "égalité".

1) Formes canonique et standard :

- *Règles pour obtenir la forme standard :*

- contrainte inégalité "$\leq$" :
  - $x_1 + x_2 \leq 10$ devient $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ avec x_3 variable d'écart (VE) ≥ 0
- contrainte inégalité "$\geq$" : $x_1 + x_2 \geq 10$
  - impossible d'introduire seulement une VE x_3 vérifiant $x_1 + x_2 - x_3 = 10$ car la solution initiale $x_1 = 0, x_2 = 0$ impose $x_3 = -10 \leq 0$, ce qui est interdit ;
  - en plus de la VE x_3 on introduit une variable artificielle (VA) x_4 satisfaisant l'équation $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10$; la solution initiale du problème comprend 3 variables HB ($x_1 = 0$, $x_2 = 0, x_3 = 0$) et 1 variable dans la base ($x_4 = 10$).

Méthode de Simplex (cas général)

La méthode décrite précédemment ne permet de résoudre que des PML correspondant à la recherche d'un maximum en présence de contraintes linéaires de type inégalité "inférieure ou égale". Il s'agit maintenant d'étendre la méthode au cas général de la recherche d'optimum (maximum ou minimum) en présence de contraintes linéaires de type "inégalité" (≤ ou ≥) ou "égalité".

1) Formes canonique et standard :

- *Règles pour obtenir la forme standard* :

- contrainte égalité : $x_1 + x_2 = 10$

- on introduit seulement une VA x_3 avec le signe "+" dans l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ car le second membre est positif : ainsi la solution initiale est $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (HB) et $x_3 = 10$ (B).

- fonction économique Γ :

- une VE est affectée d'un coefficient 0,
- une VA est affectée d'un coefficient $+M$ pour la recherche d'un minimum et $-M$ pour la recherche d'un maximum, où M est un nombre très grand positif, de façon à ce que la solution finale donne une VA égale à 0 : par exemple, la recherche de Max "$10\,x_1 + 20\,x_2 - M\,x_3$" oblige la variable x_3 à devenir nulle dans la solution finale.

Méthode de Simplex (cas général)

La méthode décrite précédemment ne permet de résoudre que des PML correspondant à la recherche d'un maximum en présence de contraintes linéaires de type inégalité "inférieure ou égale". Il s'agit maintenant d'étendre la méthode au cas général de la recherche d'optimum (maximum ou minimum) en présence de contraintes linéaires de type "inégalité" ($\leq$ ou $\geq$) ou "égalité".

1) Formes canonique et standard :

- **résumé** :

contraintes :	$\leq$	$\Rightarrow$	+ VE
	$\geq$	$\Rightarrow$	- VE $\pm$ VA ("$\pm$" = signe du 2ème membre)
	$=$	$\Rightarrow$	$\pm$ VA ("$\pm$" = signe du 2ème membre)
fonction économique :		$0 \times$ VE	pour Min et Max
		$+M \times$ VA	pour Min
		$-M \times$ VA	pour Max

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

$$\text{Min } (900\, t + 1\,200\, m + 14\,000\, e)$$

$$\begin{cases} t + m + 14\, e \geq 1\,000 \\ t + 2\, m + 6\, e \geq 1\,200 \end{cases}$$

- *Forme standard* :

$$\text{Min } \Gamma = 900\, t + 1\,200\, m + 14\,000\, e + 0\, x_1 + 0\, x_2 + M x_3 + M x_4$$

$$\begin{cases} t + m + 14\, e - x_1 + x_3 = 1\,000 \\ t + 2\, m + 6\, e - x_2 + x_4 = 1\,200 \end{cases}$$

avec 2 VE x_1 et x_2

2 VA x_3 et x_4

Méthode de Simplex (cas général)

1) <u>Formes canonique et standard</u> :

2) <u>Résolution d'un problème de minimisation</u> :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
X_3	1	1	14	-1	0	1	0	1000
X_4	1	2	6	0	-1	0	1	1200
δ_{ij}	900-2M	1200-3M	14000-20M	M	M	0	0	Z=2 200 M

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
X_3	1	1	14	-1	0	1	0	1000
X_4	1	2	6	0	-1	0	1	1200
δ_{ij}	900-2M	1200-3M	14000-20M ↑ VE	M	M	0	0	Z=2200 M

- variable entrante (v.e.) : correspond au coefficient le plus < 0

Méthode de Simplex (cas général)

1) <u>Formes canonique et standard</u> :

2) <u>Résolution d'un problème de minimisation</u> :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	$900\,t$	$1200m$	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
X_3	1	1	14	-1	0	1	0	1000/14 ← VS
X_4	1	2	6	0	-1	0	1	1200/6
δ_{ij}	900-2M	1200-3M	14000-20M	M	M	0	0	Z=2 200 M
			↑ VE		Pivot			

- variable sortante (v.s.) : correspond au coefficient > 0 le plus petit dans *R*

Méthode de Simplex (cas général)

1) <u>Formes canonique et standard</u> :

2) <u>Résolution d'un problème de minimisation</u> :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	$900\,t$	$1200m$	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/14	1/14	1	-1/14	0	1/14	0	1000/14
X_4								
δ_{ij}								

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

X_4 1 2 6 0 -1 0 1 1200

-(6) 1/14 1/14 1 -1/14 0 1/14 0 1000/14

= 4/7 11/7 0 3/7 -1 -3/7 1 5400/7

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/14	1/14	1	-1/14	0	1/14	0	1000/14
X_4	4/7	11/7	0	3/7	-1	- 3/7	1	5400/7
δ_{ij}								

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/14	1/14	1	-1/14	0	1/14	0	1000/14
X_4	4/7	11/7	0	3/7	-1	- 3/7	1	5400/7
δ_{ij}	-100-4M/7	200-11M/7	0	1000 - 3 M/7	M	-1000 +10M/7	0	Z= 10^6 + 5400M/7

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	$900t$	$1200m$	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/14	1/14	1	-1/14	0	1/14	0	1000/14
X_4	4/7	11/7	0	3/7	-1	- 3/7	1	5400/7
δ_{ij}	-100-4M/7	200-11M/7	0	1000 - 3M/7	M	-1000 +10M/7	0	$Z= 10^6 +$ 5400M/7
		↑ VE						

Méthode de Simplex (cas général)

1) <u>Formes canonique et standard</u> :

2) <u>Résolution d'un problème de minimisation</u> :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/14	1/14	1	-1/14	0	1/14	0	1000/14/1/14 =1000
X_4	4/7	11/7	0	3/7	-1	- 3/7	1	5400/7/11/7 =5400/11 VS
δ_{ij}	-100- 4M/7	200- 11M/7	0	1000 - 3 M/7	M	-1000 +10M/7	0	Z= 10^6 + 5400M/7
		VE						

Pivot

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1								
m	4/11	1	0	3/11	-7 /11	- 3/11	7/11	5400/11
δ_{ij}								Z=

Méthode de Simplex (cas général)

1) <u>Formes canonique et standard</u> :

2) <u>Résolution d'un problème de minimisation</u> :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

e_1	1/14	1/14	1	-1/14	0	1/14	0	1000/14
-(1/14)	4/11	1	0	3/11	-7/11	-3/11	7/11	5400/11
=	1/22	0	1	-1/11	1/22	1/11	-1/22	400/11

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/22	0	1	-1/11	1/22	1/11	-1/22	400/11
m	4/11	1	0	3/11	-7 /11	- 3/11	7/11	5400/11
δ_{ij}								Z=

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/22	0	1	-1/11	1/22	1/11	-1/22	400/11
m	4/11	1	0	3/11	-7 /11	- 3/11	7/11	5400/11
δ_{ij}	$\frac{-1900}{11}$	0	0	$\frac{10400}{11}$	$\frac{1400}{11}$	$\frac{-10400}{11}$ +M	$\frac{-1400}{11}$ +M	Z= 12.8 10^6/11
	VE							

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
e_1	1/22	0	1	-1/11	1/22	1/11	-1/22	400/11
m	4/11	1	0	3/11	-7 /11	- 3/11	7/11	5400/11
δ_{ij}	$\frac{-1900}{11}$	0	0	$\frac{10400}{11}$	$\frac{1400}{11}$	$\frac{-10400}{11}$ +M	$\frac{-1400}{11}$ +M	Z= 12.8 10^6/11
	VE							

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	14000e₁	0x₁	0x₂	Mx₃	Mx₄	RHS
e_1	1/22	0	1	-1/11	1/22	1/11	-1/22	400/11/1/22 =800 ← VS
m	4/11	1	0	3/11	-7 /11	- 3/11	7/11	5400/11/4/11 =1350
δ_{ij}	$\frac{-1900}{11}$	0	0	$\frac{10400}{11}$	$\frac{1400}{11}$	$\frac{-10400}{11}$ +M	$\frac{-1400}{11}$ +M	Z= 12.8 10^6/11
	↑ VE		Pivot					

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	14000e_1	0x_1	0x_2	Mx_3	Mx_4	RHS
t	1	0	22	-2	1	2	-2	800
m								
δ_{ij}								

Méthode de Simplex (cas général)

1) Formes canonique et standard :

2) Résolution d'un problème de minimisation :

- *Problème* : on choisit le programme dual du programme précédent

VB	900 t	1200m	$14000e_1$	$0x_1$	$0x_2$	Mx_3	Mx_4	RHS
t	1	0	22	-2	1	2	-1	800
m	0	1	-8	1	-1	-1	1	200
δ_{ij}	0	0	3800	600	300	-600+M	-300+M	Z= 960000

remarque : tous les coefficients de Γ sont ≥ 0, l'optimum est donc atteint ; la colonne *R* donne $t = 800$, $m = 200$, $\Gamma_{max} = 960\ 000$ et la ligne HB donne les variables nulles e, x_1, x_2, x_3, x_4. La ligne Γ donne les solutions du problème primal: $x_1 = 600$ et $x_2 = 300$, $e = 3\ 800$.

Théorème des écarts complémentaires

- **Primal**

$$Maximiser\ 1000x + 1200y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

Sous contraintes

$$\begin{aligned} x + y + e_1 &= 900 \\ x + 2y + e_2 &= 1\,200 \\ 14x + 6y + e_3 &= 14\,000 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \text{HB} : e_1 = 0,\ e_2 = 0 \\ \text{Base} : x = 600,\ y = 300,\ e_3 = 3\,800 \\ \text{sommet} : \text{B avec } \Gamma_B = 960\,000\ € \end{cases}$$

$$x, y, e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

- **Dual**

$$\text{Min } \Gamma = 900\,t + 1\,200\,m + 14\,000\,e + 0\,x_1 + 0\,x_2 + Mx_3 + Mx_4$$

Sous contraintes

$$\begin{cases} t + m + 14\,e - x_1 + x_3 = 1\,000 \\ t + 2\,m + 6\,e - x_2 + x_4 = 1\,200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{HB: } e = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \\ t = 800, m = 200 \\ \Gamma_{max} = 960\,000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e_1 = 0 &\Rightarrow t > 0 \\ e_2 = 0 &\Rightarrow m > 0 \\ e_3 > 0 &\Rightarrow e = 0 \\ x > 0 &\Rightarrow x_1 = 0 \\ y > 0 &\Rightarrow x_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} e_1 \times t &= 0 \\ e_2 \times m &= 0 \\ e_3 \times e &= 0 \\ x \times x_1 &= 0 \\ y \times x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Théorème des écarts complémentaires

- Quand la variable d'écart de la contrainte *j* du primal est nulle alors la *i*^{ème} variable du dual est non nulle
- Quand *i*^{ème} variable de décision du primal est non nulle alors la *j*^{ème} variable d'écart du dual est nulle
- Si l'on pose x_i comme variable de décision du primal et e_j comme variable d'écart de la contrainte *j* du primal, y_i comme variable de décision du dual et p_j comme variable d'écart de la contrainte *j* du dual, alors à l'optimalité on a: $x_i \times p_j = y_i \times e_j$

Relation Primal-Dual

Etant donnée un programme linéaire primal et son dual, une des quatre déclarations suivantes et vraie pour ce pair de problèmes :

- Si le primal a une solution optimale alors le dual a aussi une solution optimale.
- Si le primal est non-borné alors le dual est irréalisable.
- Si le dual est irréalisable alors le primal est non-bornée.
- Tous les deux problèmes sont irréalisables