Optimisation et complexité

Maher REBAI: Enseignant en informatique à l'école supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci Paris la défense

EFREI, Paris

Année Universitaire : 2019-2020

Problème d'affectation

Problème posé

- **Exemple (R. Faure)**

Une administration veut affecter $n = 5$ personnes "A, B, C, D, E" aux postes "a, b, c, d, e" en maximisant la satisfaction générale. Les classements des postes sont donnés par la matrice c_{ij} de taille $n \times n$ (tableau I). c_{ij} (ligne i, colonne j) donne le classement du poste j par la personne i.

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

tableau I

Exemple d'affectation :

A-a, B-c, C-b, D-e, E-d pour un coût total de $1 + 2 + 2 + 4 + 3 = 12$.

Problème posé

- **Exemple (R. Faure)**
- **But**

le problème consiste à choisir une case et une seule par ligne et par colonne de façon à minimiser la somme des chiffres des $n = 5$ cases choisies.

Ecriture mathématique

On pose $x_{ij} = 1$ si la personne i obtient le poste j, 0 sinon

On cherche à déterminer les x_{ij} pour minimiser le coût total

On pose c_{ij} le coût d'affectation de la personne i au poste j.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

sous contraintes

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j=1 \ldots n \ (1)$$ (la personne i est affectée à un seul poste).

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i=1 \ldots n \ (2)$$ (le poste j est affecté à une seule personne)

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Résolution par la méthode hongroise

Phase 1 : obtention initiale de zéros

Phase 2 : recherche d'une solution de coût nul (un zéro par ligne et par colonne)

Phase 3 : recherche d'une solution optimale

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**

  algorithme :

  soustraire ligne par ligne le plus petit élément de la ligne

  soustraire colonne par colonne le plus petit élément de la colonne.

$\Rightarrow$ on obtient alors au moins un zéro par ligne et par colonne dans le tableau II.

	a	b	c	d	e	
A	1	2	3	4	5	-1
B	1	4	2	5	3	-1
C	3	2	1	5	4	-1
D	1	2	3	5	4	-1
E	2	1	4	3	5	-1

tableau I

	a	b	c	d	e	
A	0	1	2	3	4	-1
B	0	3	1	4	2	-1
C	2	1	0	4	3	-1
D	0	1	2	4	3	-1
E	1	0	3	2	4	-1
				-2	-2	

tableau I

	a	b	c	d	e
A	0	1	2	1	2
B	0	3	1	2	0
C	2	1	0	2	1
D	0	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2

tableau II

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**

algorithme :

soustraire ligne par ligne le plus petit élément de la ligne

soustraire colonne par colonne le plus petit élément de la colonne.

$\Rightarrow$ on obtient alors au moins un zéro par ligne et par colonne dans le tableau II.

	a	b	c	d	e
A	0	1	2	1	2
B	0	3	1	2	0
C	2	1	0	2	1
D	0	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2

tableau II

coût minimal (tableau II)
= coût minimal (tableau I) - 9

théorème :

1) la solution optimale x_{ij} pour le tableau II est la même que celle du tableau I ;

2) si on retire u_i à la ligne i et v_j à la colonne j, alors :

$$\text{coût minimal (tableau II)} = \text{coût minimal (tableau I)} - \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{n} v_j$$

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d’une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**

<u>algorithme</u> :

1) prendre la ligne contenant le moins de zéros ;
2) encadrer le premier zéro de cette ligne et barrer les autres zéros de la ligne et de la colonne du zéro encadré ;
3) retour à 1 jusqu'à impossibilité d'encadrer un zéro.

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	0
C	2	1	0	2	1
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2

tableau II

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$
C	2	1	0	2	1
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2

tableau II

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2

tableau II

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2

tableau II

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d’une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**

<u>algorithme</u> :

1) prendre la ligne contenant le moins de zéros ;
2) encadrer le premier zéro de cette ligne et barrer les autres zéros de la ligne et de la colonne du zéro encadré ;
3) retour à 1 jusqu'à impossibilité d'encadrer un zéro.

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2

tableau II

- on n'obtient pas 5 zéros encadrés, la solution n'est pas optimale ;
- coût minimal obtenu $= 4 \times 0 + 2 = 2$ (tableau II), soit $2 + 9 = 11$ pour le tableau I.

Résolution par la méthode hongroise

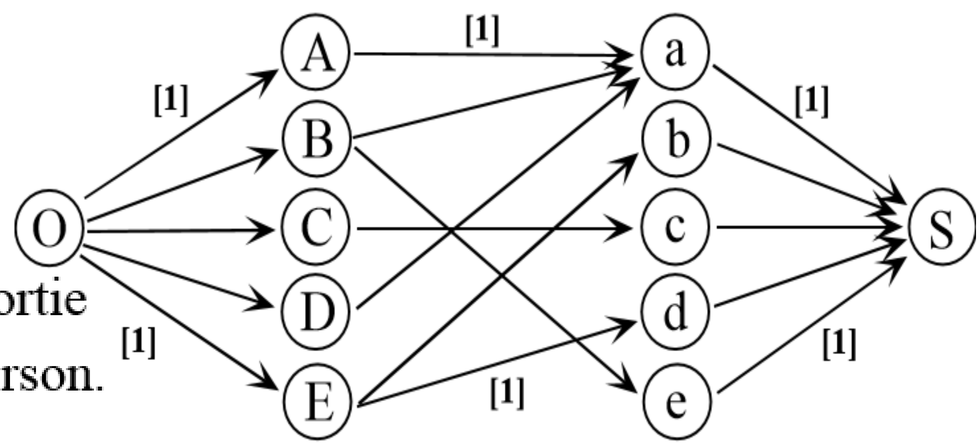
- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d'une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**

<u>vérification</u>

on peut vérifier par l'algorithme de Ford - Fulkerson que le nombre de zéros encadrés (4) est maximal.

- on crée le réseau de transport
- tous les arcs ont une capacité de 1
- pour les arcs allant des personnes aux postes, met le flot à 1 si le zéro est encadré, à 0 s'il est barré ;
- on complète les flots sur les autres arcs ;

- impossibilité de marquer la sortie par l'algorithme de Ford - Fulkerson.



Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d’une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**
- **Recherche d’une solution optimale**

<u>algorithme</u>

1) procédure de marquage des lignes et des colonnes :

a) marquer d'une croix les lignes ne contenant aucun 0 encadré (s'il n'y en a pas : FIN) ;
b) marquer d'une croix toute colonne qui a un 0 barré sur une ligne marquée ;
c) marquer d'une croix toute ligne qui a un 0 encadré dans une colonne marquée ;
d) retour à b et c jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de ligne ou de colonne à marquer ;
(si toutes les colonnes sont marquées : FIN, la solution est optimale).

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2

tableau II

	+ a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1
+ D	$\cancel{0}$	1	2	2	1
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2

tableau II

	+ a	b	c	d	e	
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2	+
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$	
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1	
+ D	$\cancel{0}$	1	2	2	1	+
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2	

tableau II

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d'une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**
- **Recherche d'une solution optimale**

<u>algorithme</u>

1) procédure de marquage des lignes et des colonnes :

2) tracer un trait horizontal sur chaque ligne non marquée et un trait vertical sur chaque colonne marquée.

	+					
	a	b	c	d	e	
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2	+
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$	
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1	
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1	+
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2	

tableau II

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d'une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**
- **Recherche d'une solution optimale**

<u>algorithme</u>

1) procédure de marquage des lignes et des colonnes :

2) tracer un trait horizontal sur chaque ligne non marquée et un trait vertical sur chaque colonne marquée.

3) choisir le plus petit élément p du tableau non rayé (il est forcément > 0)

   a) on augmente de p les éléments traversés par 2 traits

   b) on ne modifie pas les éléments traversés par 1 trait

   c) on diminue de p les éléments traversés par 0 trait.

	a +	b	c	d	e	
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2	+
B	$\cancel{0}$	3	1	2	$\boxed{0}$	
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1	
D	$\cancel{0}$	1	2	2	1	+
E	1	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2	

tableau II

Min {1,2,1,2,1,2,2,1} =1

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d'une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**
- **Recherche d'une solution optimale**

<u>algorithme</u>

1) procédure de marquage des lignes et des colonnes :

2) tracer un trait horizontal sur chaque ligne non marquée et un trait vertical sur chaque colonne marquée.

3) choisir le plus petit élément p du tableau non rayé (il est forcément > 0)

   a) on augmente de p les éléments traversés par 2 traits

   b) on ne modifie pas les éléments traversés par 1 trait

   c) on diminue de p les éléments traversés par 0 trait.

	a +	b	c	d	e	
A	$\boxed{0}$	1	2	1	2	+
B	~~0~~	3	1	2	$\boxed{0}$	
C	2	1	$\boxed{0}$	2	1	
D	~~0~~	1	2	2	1	+
E	1	~~0~~	3	$\boxed{0}$	2	

tableau II

	a +	b	c	d	e	
A	$\boxed{0}$	0	1	0	1	+
B	1	3	1	2	$\boxed{0}$	
C	3	1	$\boxed{0}$	2	1	
D	~~0~~	0	1	1	0	+
E	2	~~0~~	3	$\boxed{0}$	2	

tableau II

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d'une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**
- **Recherche d'une solution optimale**

<u>algorithme</u>

1) procédure de marquage des lignes et des colonnes :

2) tracer un trait horizontal sur chaque ligne non marquée et un trait vertical sur chaque colonne marquée.

3) choisir le plus petit élément *p* du tableau non rayé (il est forcément > 0)

   a) on augmente de *p* les éléments traversés par 2 traits

   b) on ne modifie pas les éléments traversés par 1 trait

   c) on diminue de *p* les éléments traversés par 0 trait.

4) retour à la phase 2.

	a	b	c	d	e
A	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	1	$\cancel{0}$	1
B	1	3	1	2	$\boxed{0}$
C	3	1	$\boxed{0}$	2	1
D	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	1	1	$\cancel{0}$
E	2	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	2

tableau III

- ici la sortie de l'algorithme
  car on obtient 5 zéros encadrés
- coût minimal (tableau III) = 0
  coût minimal (tableau I) = 10

A-a (1), B-e (3), C-c (1), D-b (2), E-d (3). 1+2+1+3+3=10

Résolution par la méthode hongroise

- **Obtention initiale de zéro**
- **Recherche d'une solution de coût nul (0 par ligne et colonne)**
- **Recherche d'une solution optimale**
  - Cas particulier (il existe une colonne marquée ne contenant pas de zéro encadré)

    algorithme :

    remplacer alternativement les 0 barrés (resp. encadrés) ayant servi au marquage de cette colonne (resp. ligne) par des 0 encadrés (resp. barrés)

  - *Convergence de l'algorithme* :

    rapide car obtenue en au plus n itérations puisque chaque passage en phase 3 augmente d'une unité au moins le nombre de colonnes marquées.