Kapitel 4 - Northcott (Fortsetzung)

Hilfssatz 4.3:
Für jedes $x \in K \subset L$ gilt
$$H_L(x) = H_K(x)^d \qquad \text{mit } d = [L : K].$$

Beweisverlauf:
Für Einbettungen klar, da $\sigma : K \to \mathbb{C}$ genau d Einbettungen σ_i liefert. Bleiben die Primideale zu überprüfen:

(i) Betrachte $x \in \mathbb{Z}_K$ mit $x\mathbb{Z}_K = \wp^e \mathcal{A}$, $\wp \nmid \mathcal{A}$ und erweitere auf L mit $\wp_L = \prod \mathcal{Q}_i^{e_i}$, $\mathcal{Q}_i \in \mathbb{Z}_L$.

Zeige, dass $\prod |x|_{\mathcal{Q}_i} = |x|_\wp^d$.

(ii) Zeige $|x|_{\mathcal{Q}_i} = |x|_\wp^{\theta_i}$, $\theta_i > 0$ und daher $|x|_{\mathcal{Q}_i} > 1 \Leftrightarrow |x|_\wp > 1$.

(iii) Verallgemeinere auf alle $x \in K^*$, da $x = x_1/x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_K$ und die Bewertung multiplikativ ist.

(iv) Bemerke, dass jedes Primideal $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Z}_L$ eindeutig mit einem $\wp \subset \mathbb{Z}_K$ zusammenhängt.

Alles zusammen ergibt, dass das Produkt über alle $\wp$ genau dem über alle $\mathcal{Q}$ ist und die Behauptung folgt.

Satz (Northcott): Für jedes $T \in \mathbb{R}$ gilt
$$\#\{x \in K | H_K(x) \leqslant T\} < \infty.$$

Beweisverlauf:
Klar für $K = \mathbb{Q}$ wegen $H(r/s) = \max\{|r|, |s|\}$. Betrachte nun ein beliebiges x und dessen charakteristisches Polynom
$$P(t) = (t - \sigma_1(x)) \cdots (t - \sigma_d(x)) \in \mathbb{Q}[t].$$
Definiere $\mathcal{K} := \mathbb{Q}(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_d(x))$ und betrachte einen Koeffizienten q von P als Polynom in $\mathbb{Z}[\sigma_1(x), \ldots, \sigma_d(x)]$.

Schätze nun H ab mit
$$\begin{aligned} H_{\mathbb{Q}}^{[\mathcal{K}:\mathbb{Q}]}(q) &= H_{\mathcal{K}}(q) \\ &\leqslant (2T)^{d[\mathcal{K}:\mathbb{Q}]}. \end{aligned}$$

Da Northcott für $\mathbb{Q}$ gilt, haben wir also nur endlich viele Möglichkeiten q zu wählen, also ebenfalls endlich viele für P, da die q die Koeffizienten von P sind. Da x eine Nullstelle von P ist folgt die Behauptung, da es auch für x nur endlich viele Möglichkeiten geben kann.