应用数学导论大作业

已知如下热传导方程：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad 0 < x, y < 1, 0 < t \le 1, \\ u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \Omega = (0,1) \times (0,1), 0 < t \le 1, \\ u(x, y, 0) = sin(\pi x) sin(\pi y). \end{cases}$$

问题的真解为:$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} sin(\pi x) sin(\pi y)$.

要求如下：

1. 分别用显式、隐式（见讲义）和Crank-Nicolson格式离散方程计算方程的近似解.

2. 选择不同的网格比，比较三种格式的稳定性.

3. 对隐式格式，取空间步长$h = h_x = h_y = \frac{1}{128}$, 时间步长$k = \frac{1}{512}$, 比较用平方根法、Gauss-Seidel迭代法、共轭梯度法（多重网格方法，选做）求解线性方程时从初始时间层计算到最后时间层的总计算时间. 对于迭代法，用稀疏存储方法存储矩阵，使用上一个时间层的离散解为初始值，迭代的终止条件是残量(向量)的2 范数小于等于初始残量(向量)的2范数的10^{-6}倍.

4. 对三种离散格式，取空间步长为$h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{512}$，选取适当的时间步长$k$使得既能保持格式的稳定性，又有最优收敛性(对空间步长), 在最后一个时间层上，对离散解(向量)，用插值方法(见讲义)得到一个分片双线性函数，分别记为$u_h^{(i)}(x, y, 1)$, $i = 1, 2, 3$, 再利用数值积分方法计算误差

$$\|u(x, y, 1) - u_h^{(i)}(x, y, 1)\|_0 = \Big(\int_\Omega (u(x, y, 1) - u_h^{(i)}(x, y, 1))^2 dxdy\Big)^{1/2},$$

   并画出误差图(横坐标为空间步长, 纵坐标为误差，取对数坐标).

5. 如果你不是毕业生，提交大作业的时间是2017年8月2日前；如果你是毕业生，请在教务要求的时间前提交大作业.

6. 不能再次就应数导论的大作业刷朋友圈，否则明年没同学选课我会要求你们重修的-:).