数值分析上机习题报告 (11)

张宏毅 1500017736

April 23, 2017

1 Problem A

1.1 Description

假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 是两个非周期的具有紧支集的向量，并设其分量分别如下：

$$x_n = \begin{cases} \sin(n/2), & n = 1, 2, \cdots, M-1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$h_n = \begin{cases} \exp(1/n), & n = 1, 2, \cdots, Q-1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

这里 $Q \le M$。取 $Q = 200, M = 500$, 利用 FFT 计算非周期的卷积

$$y_n = \sum_{q=0}^{Q-1} h_q x_{n-q},$$

并和直接用卷积定义求解进行比较。

1.2 Solution

记多项式

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n t^n = \sum_{n=0}^{M-1} x_n t^n,$$

$$H(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n t^n = \sum_{n=0}^{Q-1} h_n t^n,$$

则两个多项式的乘积

$$Y(t) = X(t)H(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l+m=n} x_l h_m t^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n t^n$$

的各项系数恰对应向量 $\boldsymbol{x}$ 和向量 $\boldsymbol{h}$ 的卷积 $\boldsymbol{y}$。考虑到 $\deg Y = M + Q - 2 = 698$，故可取 $N = 1024$，并记 $\omega = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{N}}$，则求卷积的步骤如下：

Step 1. 对 $\boldsymbol{x}$ 作 DFT 得 $\hat{\boldsymbol{x}}$，对应 $X(t)$ 在 ω^k $(0 \le k < N)$ 上的取值，对 $\boldsymbol{h}$ 同样作 DFT 得 $\hat{\boldsymbol{h}}$，对应 $H(t)$ 在 ω^k $(0 \le k < N)$ 上的取值。

Step 2. 计算 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 为向量 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{h}}$ 逐项相乘的乘积，对应 $Y(t)$ 在 ω^k $(0 \le k < N)$ 上的取值。

Step 3. 对 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 作 DFT 逆变换即得 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} * \boldsymbol{h}$。

总的时间复杂度为 $O(N \log N)$。如果直接用卷积定义进行求解，则时间复杂度为 $O(N^2)$，两者的计算效率在 N 较大时差异非常明显。当 $N = 1024$ 时，实际程序运行表明，FFT 大约需要 1.6 ms 完成计算，而直接用定义计算大约需要花 17 ms，由此可以看出快速 Fourier 变换计算的高效性。

2 Problem B

2.1 Description

设

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/10}(\sin 2t + 2\cos 4t + 0.4 \sin t \sin 50t).$$

取 $y_k = f(2k\pi/256)$ $(k = 0, 1, \cdots, 256)$ 离散 $f(t)$，利用 FFT 计算 $\hat{y}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, 256)$。因为有结论 $\hat{y}_{n-k} = \bar{\hat{y}}_k$，因此低频系数是 $\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_m$ 和 $\hat{y}_{256-m}, \cdots, \hat{y}_{256}$（对某个比较小的 m）。令 $\hat{y}_k = 0$ $(m \le k \le 256 - m, m = 6)$ 过滤掉高频项，然后对新的 $\hat{y}'_k$ 作 FFT 逆变换得到新的 y'_k。画图比较 y_k 和 y'_k 的差异，并试验不同的 m。

2.2 Solution

根据题意直接计算舍弃高频项后的向量 $\boldsymbol{y}$，并将 y_k 与 y'_k 作比较。图 1 是取 $m = 6$ 时，舍弃高频项前后 y_k 和 y'_k 在复平面上的分布情况。可以看出舍弃高频项后，如果只保留 y'_k 的实部，会有比较明显的损失。

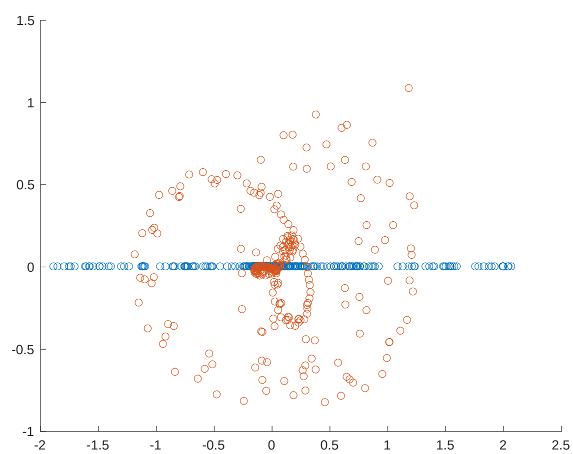
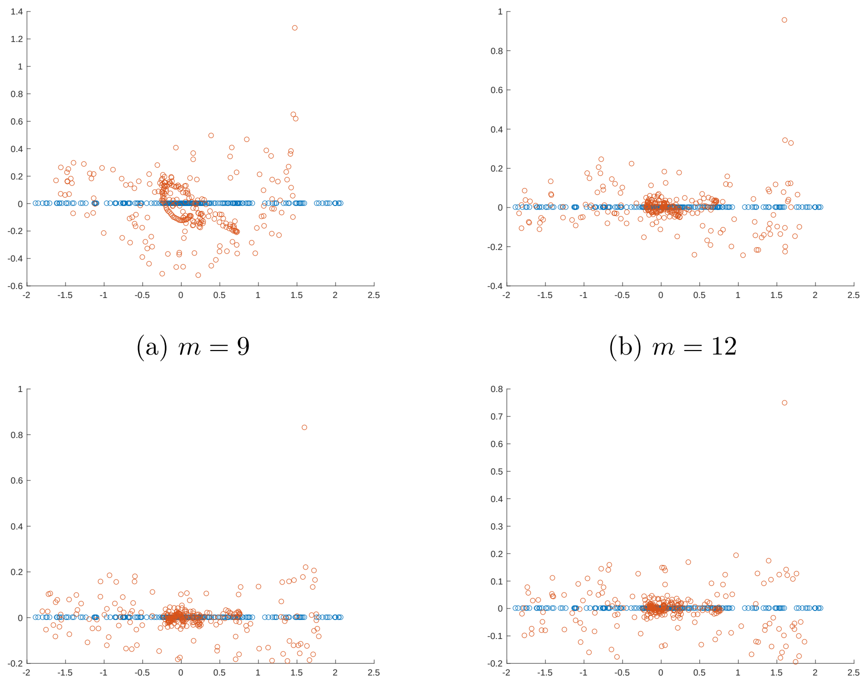


图 1: 舍弃高频项前后的分量对比 $(m = 6)$

图 2 给出了在 m 取更多不同值的情形下舍弃高频项前后的分量分布对比。一方面，随着 m 的增大，保留的频率信息越来越多，最终逆变换得到的向量与原向量的差距也就越来越小；而另一方面，当 m 继续增大时，舍弃高频项前后的差距并没有明显减小，因而可以认为低频分量所含的信息比高频分量要多得多，所以适当舍弃高频项的做法是具有一定的合理性的。



(a) $m = 9$ (b) $m = 12$

(c) $m = 15$ (d) $m = 18$

图 2: 舍弃高频项前后的分量对比 ($m > 6$)