数值分析上机习题报告 (5)

张宏毅 1500017736

March 15, 2017

1 Problem

求 $f(x)=\sin\pi x$ 在区间 $[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式 $P^*(x)$，并绘出 $f(x)$ 和 $P^*(x)$ 的图像进行比较。

2 Principles

一般地，我们希望求一个多项式 $P^*(x)\in\mathbb{P}_n$ 作为函数 $f(x)$ 的最佳平方逼近，即令

$$P^*(x)=\underset{P\in\mathbb{P}_n}{\operatorname{argmin}}\int_a^b[f(x)-P(x)]^2\mathrm{d}x.$$

设 $P(x)=\sum_{i=0}^n c_ib_i(x)$，其中 $\{b_i(x)\}_{i=0}^n$ 是多项式空间 $\mathbb{P}_n$ 的一组基，则目标优化函数为

$$I(c_0,c_1,\cdots,c_n)=\int_a^b[f(x)-\sum_{i=0}^n c_ib_i(x)]^2\mathrm{d}x.$$

令各个偏导数等于 0，即有

$$\frac{\partial I}{\partial c_j}=2\int_a^b b_j(x)\cdot[f(x)-\sum_{i=0}^n c_ib_i(x)]\mathrm{d}x=0,\quad(0\le j\le n).$$

整理可得函数 $I(c_0,c_1,\cdots,c_n)$ 的驻点满足线性方程组

$$\begin{bmatrix}(b_0,b_0)&(b_0,b_1)&\cdots&(b_0,b_n)\\(b_1,b_0)&(b_1,b_1)&\cdots&(b_1,b_n)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(b_n,b_0)&(b_n,b_1)&\cdots&(b_n,b_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,b_0)\\(f,b_1)\\\vdots\\(f,b_n)\end{bmatrix},\tag{*}$$

其中内积定义为 $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。因而对多项式空间 $\mathbb{P}_n$ 的基选取的不同，会导致线性方程组 (*) 系数矩阵性质的不同。例如当区间 $[a,b]$ 取为 $[0,1]$ 时，如果选取 $1,x,x^2,\cdots,x^n$ 作为多项式空间的基，则方程组 (*) 的系数矩阵为 Hilbert 矩阵 $H_{n+1}=(\frac{1}{i+j-1})\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$。我们知道 H_n 的条件数会随着 n 的增加而迅速增大，因而这样的计算会有非常强烈的数值不稳定性。但如果我们选取一组正交基，则方程组 (*) 的系数矩阵化为对角矩阵，在降低了线性方程组的求解复杂度的同时，还提高了计算的数值稳定性。因此正交多项式系在最佳平方逼近问题中非常重要。

3 Results

考虑到本问题中多项式的次数要求并不高，我们可以先以 $1, x, x^2$ 作为多项式空间 $\mathbb{P}_2$ 的一组基进行计算。计算时先利用数值积分得到系数矩阵（这里我们直接使用了封装好的积分方法），再通过解线性方程组得到各项系数。具体代码如下：

```
def LS_Approx(f, inf, sup, n):
   A = zeros((n+1, n+1))
   base = [(lambda arg:(lambda x:x**arg))(k) for k in range(0, 6)]

   # Compute the equation matrix
   for i in range(0, n+1):
      for j in range(0, n+1):
         A[i][j] = integrate.quad(lambda x:base[i](x)*base[j](x), inf, sup)[0]
   b = [integrate.quad(lambda x:f(x)*base[i](x), inf, sup)[0] for i in range(0, n+1)]
   c = linalg.solve(A, b)

   # Compute approximation polynomial
   def ApproxPoly(t):
      ans = 0
      for i in range(0, n+1):
         ans += c[i]*base[i](t)
      return ans
   return ApproxPoly
```

得到的最佳平方逼近多项式为

$$P^*(x) = -0.0504655 + 4.12251162x - 4.12251162x^2,\ x \in [0, 1].$$

经多方验证（利用正交多项式系计算及计算出解析解等），各系数的每一位数字均为有效数字，结果是可以接受的。画出原函数 $f(x)$ 和逼近函数 $P^*(x)$ 的图像如图 1 所示。可以看出，最佳平方逼近的目标不在于要达到与被逼近函数在多少点上取值相同，而在于整体上拟合函数 $f(x)$ 的走向和趋势等定性特征，从而能够在一定程度上减少噪音对逼近结果带来的影响。

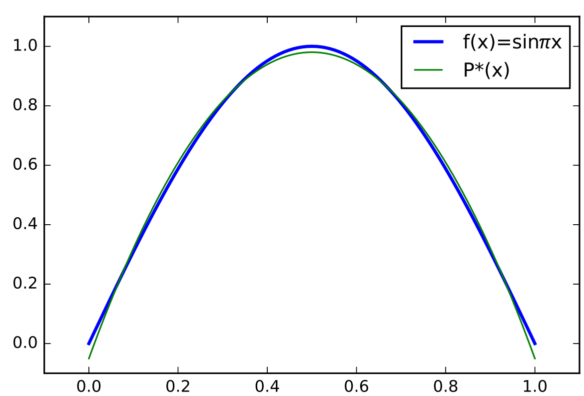

图 1: 函数 $f(x) = \sin \pi x$ 及其最佳平方逼近二次多项式 $P^*(x)$ 的图像