

数值分析上机习题报告 (14)

张宏毅 1500017736

May 20, 2017

1 Problem A

1.1 Description

刚性比是衡量问题困难程度的重要指标，针对问题合理选择求解刚性问题的方法很重要。尝试用不同方法求解下面的初值问题：

$$\begin{cases} y_1'(t) = -0.013y_1 - 1000y_1y_2, \\ y_2'(t) = -2500y_2y_3, \\ y_3'(t) = -0.013y_1 - 1000y_1y_2 - 2500y_2y_3, \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, 10]. \quad (E_1)$$

比较它们的求解结果和计算时间，并分析它们的精度。

1.2 Solution

拟采用以下三种数值方法对初值问题进行求解。一是改进的 Euler 公式，即

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2), \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{K}_2 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{K}_1). \end{cases}$$

二是四级四阶古典 Runge-Kutta 公式，即

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4), \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \\ \mathbf{K}_2 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1), \\ \mathbf{K}_3 = \mathbf{f}(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2), \\ \mathbf{K}_4 = \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{K}_3). \end{cases}$$

三是四点 Adams-Bashforth 预估校正格式，即

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1}^* = \mathbf{y}_n + \frac{h}{24}[55\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) - 59\mathbf{f}(x_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}) + 37\mathbf{f}(x_{n-2}, \mathbf{y}_{n-2}) - 9\mathbf{f}(x_{n-3}, \mathbf{y}_{n-3})], \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{24}[9\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}^*) + 19\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) - 5\mathbf{f}(x_{n-1}, \mathbf{y}_{n-1}) + \mathbf{f}(x_{n-2}, \mathbf{y}_{n-2})]. \end{cases}$$

其中方法一（改进的 Euler 公式）为二阶方法，方法二（古典 Runge-Kutta 公式）和方法三（四点 Adams 公式）均为四阶方法。

求得的积分曲线如图 1 所示（步长 $h = 10^{-4}$ ）。由于方程 (E_1) 拥有较大的刚性比，当选取的步长过大（如 $h = 0.1, 0.01, 0.001$ ）时，求解过程中会出现非常严重的不稳定现象，基本上在五次迭代内就会出现数值结果溢出的情况，使得后续计算无法进行。因而只有取较小的步长才能保证求解的稳定性，但此时求解的时间又比较长。对于步长 $h = 10^{-4}$ ，上述三种方法的求解时间大致分别为 1.9 s、4.6 s 和 8.5 s，时间比例与各方法每次迭代所需计算的函数值个数比例大致相同。

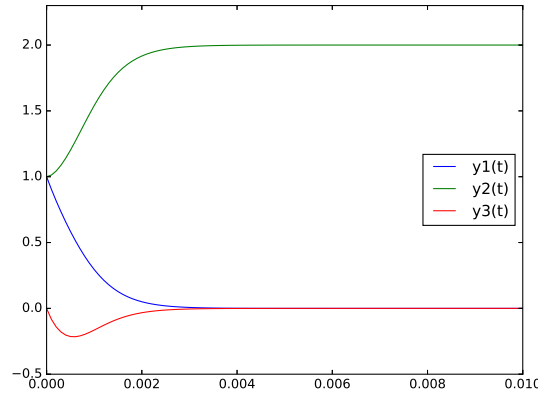


图 1: 初值问题 (E_1) 的解曲线

从图中可以看出，当 $t > 0.005$ 时，三条积分曲线几乎分别趋向于常数 $y_1(t) = 0, y_2(t) = 2, y_3(t) = 0$ 。表 1（见下页）列出了当 $0 < t \leq 0.005$ 时，三种数值方法求得的等距节点上每个函数的近似值。对比可以看出两个四阶方法所求得的数值结果更为相近，拥有更高的精度。

表 1: 三种求解方法的数值解对比 ($t \in [0, 0.005], h = 10^{-4}$)

t	改进的 Euler 公式	古典 Runge-Kutta 公式	四点 Adams 公式
0.0005	0.585507	0.584549	0.585030
	1.202033	1.199928	1.200897
	-0.212460	-0.215522	-0.214073
0.0010	0.295556	0.294527	0.294706
	1.540855	1.540516	1.540507
	-0.163589	-0.164957	-0.164787
0.0015	0.128285	0.127296	0.127380
	1.790657	1.791698	1.791585
	-0.081058	-0.081006	-0.081034
0.0020	0.050869	0.050156	0.050193
	1.915708	1.916783	1.916720
	-0.033423	-0.033061	-0.033087
0.0025	0.019362	0.018951	0.018965
	1.967779	1.968448	1.968424
	-0.012859	-0.012601	-0.012611
0.0030	0.007250	0.007042	0.007046
	1.987921	1.988266	1.988258
	-0.004829	-0.004692	-0.004695
0.0035	0.002698	0.002600	0.002602
	1.995504	1.995666	1.995664
	-0.001798	-0.001733	-0.001734
0.0040	0.001002	0.000958	0.000958
	1.998331	1.998404	1.998403
	-0.000668	-0.000639	-0.000639
0.0045	0.000372	0.000353	0.000353
	1.999381	1.999412	1.999412
	-0.000248	-0.000235	-0.000235
0.0050	0.000138	0.000130	0.000130
	1.999770	1.999784	1.999784
	-0.000092	-0.000086	-0.000087

2 Problem B

2.1 Description

考虑 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases} \quad (E_2)$$

其中 σ, ρ, β 为变化区域有一定限制的实参数。

(1) 对取定的参数值 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 选取不同的初值, 观察计算的结果有什么特点? 解的曲线是否有界, 是不是周期的或者趋于某个固定的点?

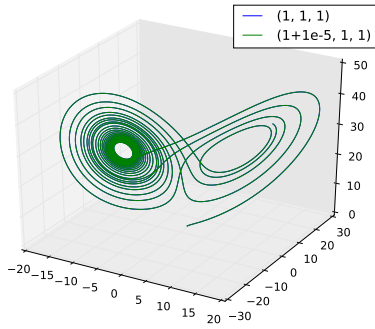
(2) 在问题允许的范围内适当改变其中的参数值, 再选取不同的初值, 观察并记录计算的结果有什

么特点? 是否发现什么不同的现象?

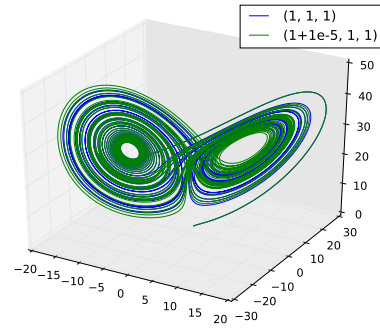
2.2 Solution

给定参数 $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$, 用四级四阶古典 Runge-Kutta 公式对方程进行数值求解, 取步长 $h = 0.001$ 。下面就一些不同的初值对方程的积分曲线的性质做了些探究。

图 2 展示了初值 $(x(0), y(0), z(0))$ 分别取 $(1, 1, 1)$ 和 $(1 + 10^{-5}, 1, 1)$ 时方程的解曲线 (以时间 t 为参数)。从图 2 可以看出, 当时间范围并不长的时候 (如图 2(a), 时间 $t \leq 20$), 两条解曲线几乎是完全重合的, 两者的差异基本可以忽略。但当时间范围比较长的时候 (如图 2(b), 时间 $t \leq 50$), 两条轨迹的差异立刻就凸显了出来。这表明, 初值的微小扰动可能会带来方程解曲线在未来不可忽略的变化。



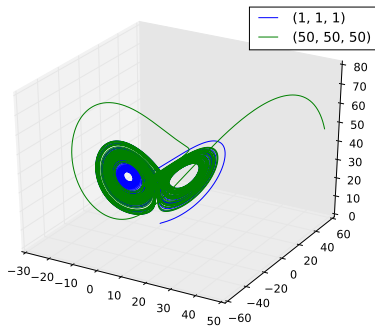
(a) $0 \leq t \leq 20$



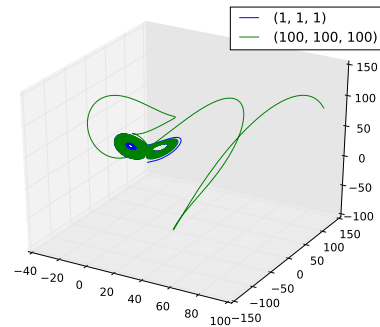
(b) $0 \leq t \leq 50$

图 2: 方程 (E_2) 的解对初值的依赖性 ($\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$)

图 3 展示了初值分别取 $(50, 50, 50)$ 和 $(100, 100, 100)$ 时方程的解曲线 ($0 \leq t \leq 50$)。可以看到, 即使初值的偏离很大, 解的轨迹在足够长的时间后总会被“吸引”到图 2 中绘出的区域, 因而解曲线总是有界的。同时可以发现, 解曲线最终基本都呈现出同样的轨迹模式, 即以两个点为中心做非周期运动。



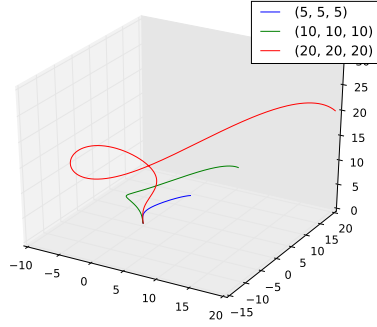
(a) 初值为 $(50, 50, 50)$



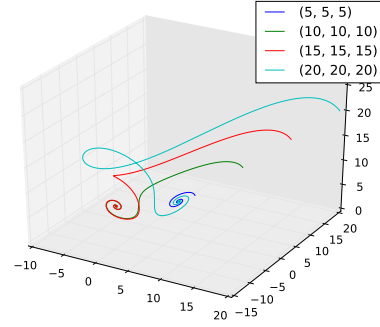
(b) 初值为 $(100, 100, 100)$

图 3: 方程 (E_2) 的解的形状特点 ($\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$)

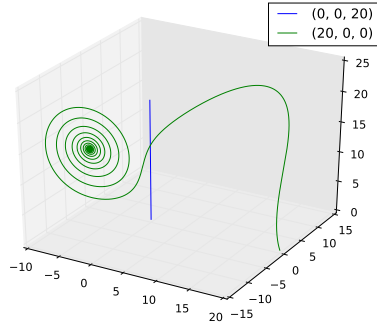
接下来我们适当改变一些方程中各参数的值来探究方程积分曲线的性质。当参数取不同值的时候，解曲线的性质可能会完全不同。以下是一些典型的与图 2 和图 3 中解曲线行为完全不同的轨迹。



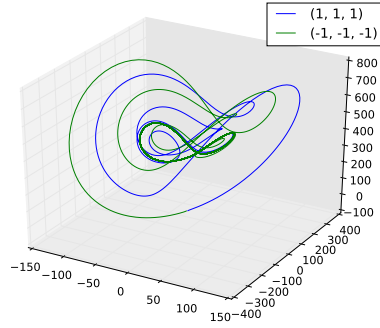
(a) $\sigma = 10, \rho = 1/2, \beta = 8/3$



(b) $\sigma = 10, \rho = 5, \beta = 8/3$



(c) $\sigma = 10, \rho = 14, \beta = 8/3$



(d) $\sigma = 10, \rho = 400, \beta = 8/3$

图 4: 不同参数及初值下解曲线的轨迹

图 4(a) 中 ($\rho = 1/2$), 三条不同的解曲线最终均收敛到了原点。图 4(b) 中 ($\rho = 5$), 不同的初值使得解曲线最终收敛到两个不同的点, 即此时收敛到的极限不唯一。图 4(c) 中 ($\rho = 14$), 绿色轨迹收敛到一个特定的点, 但蓝色轨迹表现得较为反常, 成一条直线状。图 4(d) 中 ($\rho = 400$), 不同初值的两条解曲线最终都收敛到同一个周期轨道, 但没有出现图 2 和图 3 中的混沌现象。