数值分析上机习题报告 (15)

张宏毅 1500017736

May 27, 2017

1 Problem A

1.1 Description

用打靶法求解常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{2}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = \dfrac{\sin(\ln x)}{x^2},\ 1 \le x \le 2, \\ y(1) = 1,\ y(2) = 2. \end{cases}$$

其精确解为

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x),$$

其中

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{70}[8 - 12\sin(\ln 2) - 4\cos(\ln 2)], \\ c_1 &= \frac{11}{10} - c_2. \end{aligned}$$

1.2 Solution

对一般的边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ a_0 y(a) - a_1 y'(a) = \alpha, \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta. \end{cases}$$

适当选取 c_0, c_1 满足 $a_1 c_0 - a_0 c_1 = 1$，考虑初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = a_1 s - c_1 \alpha, \\ y'(a) = a_0 s - c_0 \alpha. \end{cases}$$

其中 s 为参数，用数值方法可求得问题的解 $y(x; s)$，且这一族解满足第一个边值条件，因而只需求满足第二个边值条件的 s 的值，即方程

$$\phi(s) = b_0 y(b; s) + b_1 y'(b; s) - \beta$$

的根。考虑使用 Newton 迭代法进行求解，即

$$s_{n+1} = s_n - \frac{\phi(s_n)}{\phi'(s_n)},$$

则 $\phi(s_n)$ 的值在初值问题的求解过程中已经可以求得，为求 $\phi'(s_n)$，在原方程两边对 s 求导，可知 y_s 满足微分方程

$$\begin{cases} y_s'' = f_2(x,y,y')y_s + f_3(x,y,y')y_s' \\ y_s(a) = a_1,\ y_s'(a) = a_0. \end{cases}$$

因此可将两次求微分方程数值解的过程合并为一个方程组

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = f(x,y_1,y_2), \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = f_2(x,y_1,y_2)y_3 + f_3(x,y_1,y_2)y_4. \end{cases} \tag{E_s}$$

相应的初值条件为

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)|_{x=a} = (a_1 s - c_1\alpha, a_0 s - c_0\alpha, a_1, a_0).$$

于是打靶法的算法步骤为:（1）选取初始值 s_0；（2）每次对 s_n 求解方程组 (E_s)，计算

$$\phi(s_n) = b_0 y_1(b) + b_1 y_2(b) - \beta,$$
$$\phi'(s_n) = b_0 y_3(b) + b_1 y_4(b),$$

进而求得 s_{n+1}，不断迭代直至收敛到 s^*；（3）对 s^* 求解 (E_s)，输出数值解 $y(x;s^*)$。

特别地，在该问题中，令 $a_0 = b_0 = 1, a_1 = b_1 = 0, a = \alpha = 1, b = \beta = 2, c_0 = 0, c_1 = -1$，则方程组 (E_s) 的初值条件化为

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)|_{x=1} = (1,s,0,1).$$

在实际的计算中，由于 Newton 迭代法的收敛域通常较小，因而可以考虑先用二分法给出一个较好的迭代初值，再利用 Newton 法提高收敛速度。表 1 给出了利用上述方法求解该边值问题得到的数值解（微分方程通过四级四阶 Runge-Kutta 方法求解，步长 $h = 0.01$），精度非常之高。

表 1: 边值问题的数值解与精确解比较

x	数值解	精确解	绝对误差
1.1	1.092629298471	1.092629298481	1.05e-11
1.2	1.187084840474	1.187084840484	1.01e-11
1.3	1.283382364072	1.283382364079	7.05e-12
1.4	1.381445951693	1.381445951697	3.94e-12
1.5	1.481159416998	1.481159417000	1.57e-12
1.6	1.582392460756	1.582392460756	5.64e-14
1.7	1.685013961735	1.685013961734	7.07e-13
1.8	1.788898534643	1.788898534642	8.78e-13
1.9	1.893929509212	1.893929509211	6.01e-13

2 Problem B

2.1 Description

考虑偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ 0 < x < 2\pi,\ t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=2\pi}, \\ u|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

分别运用 Euler 方法、二级二阶、三级三阶、四级四阶 Runge-Kutta 方法求解该方程。

2.2 Solution

方程的精确解为

$$u(x,t) = \sin(x-t).$$

下面考虑求数值解。考虑到 x 的定义区间有界，故我们先对 x 离散。在 $[0,2\pi]$ 上取 N 个等距节点 $x_i = ih_x\ (0 \le i < N),\ h_x = \frac{2\pi}{N}$。利用中心差商格式对 $\partial u/\partial x$ 做离散，若记 $y_i(t) = u(x_i,t)$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h_x} = 0 \quad (0 \le i < N),$$

其中 y_i 对下标以 N 为周期。于是我们就得到了一个含 N 个未知方程的常系数线性微分方程组

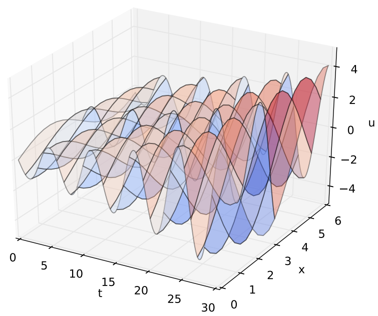
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2h_x}\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & 1 \\ 1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & -1 \\ -1 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix},$$

初值条件为

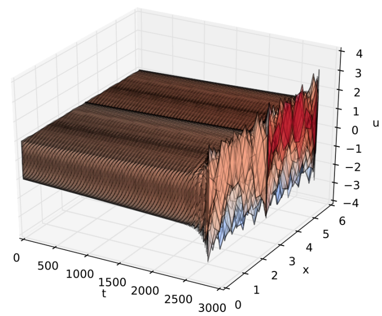
$$(y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})|_{t=0} = (\sin x_0, \sin x_1, \cdots, \sin x_{N-1}),$$

于是便可采用各种数值方法（如 Euler 方法、Runge-Kutta 方法等）对其进行求解。

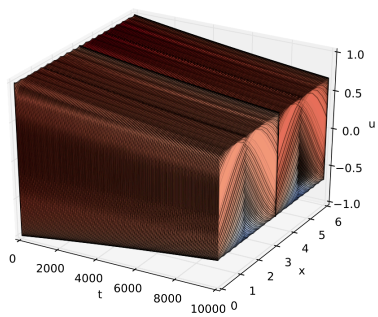
图 1 给出了四种不同精度方法求得的数值解示意图（x 方向上取等距节点数 $N = 20$，t 方向上取恒定步长 $h = 0.1$）。不同的方法具有不同的稳定性，因而在大的时间尺度上其数值表现也各不相同。一阶 Euler 方法在 $t \le 30$ 时就已表现出发散趋势，而二阶 Runge-Kutta 方法在 $t \le 2800$ 左右时才表现出较明显的发散迹象。三阶和四阶的 Runge-Kutta 方法稳定性相对较好，在 $t \le 10^4$ 的范围内均没有呈现出发散行为的迹象，但很明显，四阶方法拥有比三阶方法更好的稳定性。



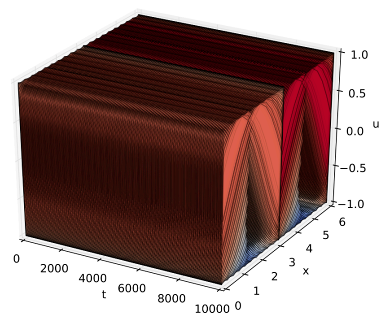
(a) 一阶 Euler 方法



(b) 二阶 Runge-Kutta 方法



(c) 三阶 Runge-Kutta 方法



(d) 四阶 Runge-Kutta 方法

图 1: 四种数值方法的解在大时间尺度上的结果比较