数值分析上机习题报告 (10)

张宏毅 1500017736

April 15, 2017

1 Problem A

1.1 Description

对于非线性方程组

$$\begin{cases} (x_1+3)(x_2^3-7)+18=0, \\ \sin(x_2\mathrm{e}^{x_1}-1)=0. \end{cases} \tag{E_1}$$

（1）使用 Newton 迭代法求解，初值取为 $\boldsymbol{x}_0=(-0.5,1.4)^{\mathrm{T}}$；

（2）使用 Broyden 方法，取同 (1) 的初值求解上面问题；

（3）已知精确解为 $\boldsymbol{x}=(0,1)^{\mathrm{T}}$，通过计算每个迭代步的误差，比较这两种方法的收敛速度。它们各需要多少步迭代可以达到机器精度?

1.2 Solution

记 $f_1(\boldsymbol{x})=(x_1+3)(x_2^3-7)+18$，$f_2(\boldsymbol{x})=\sin(x_2\mathrm{e}^{x_1}-1)$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}))$，则其 Jacobi 矩阵

$$\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} x_2^3-7 & 3(x_1+3)x_2^2 \\ x_2\mathrm{e}^{x_1}\cos(x_2\mathrm{e}^{x_1}-1) & \mathrm{e}^{x_1}\cos(x_2\mathrm{e}^{x_1}-1) \end{bmatrix}.$$

根据 Newton 迭代法，每次迭代先解方程组

$$\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)})\cdot\boldsymbol{y}^{(k)}=-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}),$$

再作更新

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{y}^{(k)}.$$

为减小解方程组求 $(\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}$ 的计算开销，利用 Broyden 算法对其进行估计，每次令

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k-1)}),$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^{(k-1)}.$$

则

$$(\boldsymbol{A}^{(k)})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{(k-1)})^{-1}-\frac{[(\boldsymbol{A}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{g}-\boldsymbol{y}]\cdot\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{(k-1)})^{-1}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{(k-1)})^{-1}\boldsymbol{g}}$$

是对 $(\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}$ 的一个近似估计，由此将 Newton 迭代法近似为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - (\boldsymbol{A}^{(k)})^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

从而达到用少量的矩阵乘法和加法减小运算量的目的。

利用给定初值迭代的结果如表 1 所示，其中误差指标为 L^∞ 范数。可以看出 Newton 迭代法的收敛速度比 Broyden 算法要快，与理论上 Newton 迭代二次收敛及 Broyden 算法超线性收敛的结论相符。两个算法分别在经过 4 步和 7 步迭代后，解的误差达到机器精度。

表 1: 非线性方程组 (E_1) 的迭代收敛情况

(a) Newton 迭代法

k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$\Vert\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\Vert_2$
0	(-0.5000000000, 1.4000000000)	0.6403124237
1	(-0.0553151357, 1.0280665838)	0.0620281982
2	(-0.0001403509, 1.0001574043)	0.0002108898
3	(-0.0000000178, 1.0000000056)	0.0000000186
4	(0.0000000000, 1.0000000000)	0.0000000000

(b) Broyden 算法

k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$\Vert\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\Vert_2$
0	(-0.5000000000, 1.4000000000)	0.6403124237
1	(-0.0553151357, 1.0280665838)	0.0620281982
2	(0.0005099531, 1.0001236435)	0.0005247284
3	(-0.0002338479, 1.0000765609)	0.0002460618
4	(-0.0000408262, 1.0000135979)	0.0000430312
5	(-0.0000001328, 1.0000000453)	0.0000001403
6	(-0.0000000005, 1.0000000002)	0.0000000006
7	(0.0000000000, 1.0000000000)	0.0000000000

2 Problem B

2.1 Description

对于非线性方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\cos x_1}{81} + \dfrac{x_2^2}{9} + \dfrac{\sin x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{\sin x_1}{3} + \dfrac{\cos x_3}{3}, \\ x_3 = -\dfrac{\cos x_1}{9} + \dfrac{x_2}{3} + \dfrac{\sin x_3}{6}. \end{cases} \tag{E_2}$$

（1）使用不动点迭代法求解；

（2）在不动点，对应线性收敛速度的常数 C 是多少？如何和你实际所观察到的收敛情况加以比较？

（3）用 Newton 迭代法再求解该问题，比较收敛情况。

2.2 Solution

记向量函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(-\frac{\cos x_1}{81} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{\sin x_3}{3}, \frac{\sin x_1}{3} + \frac{\cos x_3}{3}, -\frac{\cos x_1}{9} + \frac{x_2}{3} + \frac{\sin x_3}{6} \right)^{\mathrm{T}},$$

则由 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(k)})$ 定义的迭代序列在 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的不动点 $\boldsymbol{x}^*$ 处局部收敛的一个充分条件为

$$\rho(\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)) < 1,$$

其中 ρ 表示矩阵的谱半径。经求解知方程组 (E_2) 的精确解为 $\boldsymbol{x}^* = (0, 1/3, 0)^{\mathrm{T}}$，因而有

$$\rho(\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 2/27 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}\right) \approx 0.4161 < 1.$$

因而不动点迭代序列在 $\boldsymbol{x}^*$ 处局部收敛。取初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，其迭代过程中绝对误差的变化情况如表 2(a) 所示，对应线性收敛速度的常数 C 即等于不动点处 Jacobi 矩阵的谱半径 0.4161。相应的 Newton 迭代法收敛情况如表 2(b) 所示，可以很明显看出 Newton 迭代法的收敛速度比不动点迭代要快得多。

表 2: 非线性方程组 (E_2) 的迭代收敛情况

(a) 不动点迭代法

k	$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_2$
0	0.333333333333333
10	0.000020810136545
20	0.000000003226213
30	0.000000000000502
37	0.000000000000001

(b) Newton 迭代法

k	$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_2$
0	0.333333333333333
1	0.013727284625762
2	0.000014167618320
3	0.000000000026010
4	0.000000000000000

3 Problem C

3.1 Description

下面的非线性方程组在求解的时候都会遇到一些困难，使用标准库函数或自己编写程序按给定初值求解这些问题。在每个题中，非线性求解器可能不收敛或者收敛到某个值但又不是方程组的解，试给出解释。观察收敛速度，如果比预想的要慢，试解释原因。

(1)

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases} \tag{E_3}$$

初值取 $x_1 = (1+\sqrt{3})/2, x_2 = (1-\sqrt{3})/2, x_3 = \sqrt{3}$.

(2)

$$\begin{cases} 10^4 x_1 x_2 = 1, \\ \mathrm{e}^{-x_1} + \mathrm{e}^{-x_2} = 1.0001. \end{cases} \tag{E_4}$$

初值取 $x_1 = 0, x_2 = 1$.

3.2 Solution

对方程组 (E_3)，拟采用 Newton 迭代法进行求解。最终收敛到精确解 $\boldsymbol{x}^* = (5/3, -2/3, 4/3)^{\mathrm{T}}$，迭代过程中的收敛情况如表 3 所示。从表中可以看出，总共迭代了 58 步才收敛到解，究其原因，是解向量的模在第一步迭代后变得异常大，导致之后收敛到真正解花了很长时间。而这一突变的原因在于第一次迭代时，初值点处的 Jacobi 矩阵

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是奇异矩阵，在计算机中便存储为一个条件数非常大的病态矩阵，使得第一步迭代得到的解向量有着非常大的相对误差，由此可以看出，迭代初值的选取不仅要考虑收敛域的大小，也要考虑 Jacobi 矩阵本身的性质。但值得庆幸的是最终依然收敛到了精确解。

表 3: 非线性方程组 (E_3) 的迭代收敛情况

k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_2$
0	(1.3660e+00, -3.6603e-01, 1.7321e+00)	5.8288e-01
1	(1.5903e+15, -1.5903e+15, -1.5903e+15)	2.7544e+15
10	(3.1060e+12, -3.1060e+12, -3.1060e+12)	5.3798e+12
20	(3.0332e+09, -3.0332e+09, -3.0332e+09)	5.2537e+09
30	(2.9621e+06, -2.9621e+06, -2.9621e+06)	5.1306e+06
40	(2.8940e+03, -2.8930e+03, -2.8910e+03)	5.0097e+03
50	(4.1713e+00, -3.1713e+00, -1.1713e+00)	4.3382e+00
58	(1.6667e+00, -6.6667e-01, 1.3333e+00)	5.4390e-16

对方程组 (E_4) 同样拟用 Newton 迭代法进行求解。对初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$，迭代序列最终收敛到近似解 $\boldsymbol{x}^* = (1.098\text{e-}5, 9.106)$，迭代过程中的收敛情况如表 4 所示。考虑到方程组 (E_4) 关于变元 x_1, x_2 是对称的，因而当取初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ 时，迭代序列最终会收敛到另一个近似解 $\boldsymbol{x}^{**} = (9.106, 1.098\text{e-}5)$。收敛速度为二次收敛。

表 4: 非线性方程组 (E_4) 的迭代收敛情况

k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_2$
0	(0.0000e+00, 1.0000e+00)	8.1061e+00
1	(1.0000e-04, 1.9995e+00)	7.1067e+00
8	(1.1628e-05, 8.5369e+00)	5.6925e-01
9	(1.1124e-05, 8.9702e+00)	1.3593e-01
10	(1.0990e-05, 9.0972e+00)	8.9031e-03
11	(1.0982e-05, 9.1061e+00)	3.9867e-05
12	(1.0982e-05, 9.1061e+00)	9.3621e-10
13	(1.0982e-05, 9.1061e+00)	1.3274e-10