数值分析上机习题报告 (12)

张宏毅 1500017736

April 28, 2017

1 Problem A

1.1 Description

设有方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

为 N 阶循环矩阵，b 是分量均为 1 的 N 维向量。对 $N=2^{10}$ 用 FFT 求解此方程组。

1.2 Solution

记 $c=(4,-1,0,\cdots,0,-1)^{\mathrm{T}}$，且设向量 c 的分量对下标以 N 为周期，则有

$$Ax=c*x.$$

设 λ_k 为 A 的特征值，$x^{(k)}$ 为相应的特征向量，那么有等式 $c*x^{(k)}=\lambda_k x^{(k)}$ 成立。两端作 DFT 可得

$$\hat{c}\circ\hat{x}^{(k)}=\lambda_k\hat{x}^{(k)}.$$

取 $\lambda_k=\hat{c}_k$ 和 $\hat{x}^{(k)}=e_k=(0,\cdots,1_{(k)},\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 即满足上式，此时有 $x^{(k)}=G\hat{x}^{(k)}=Ge_k=G_k$，其中 G 表示 Fourier 逆矩阵，G_k 表示 G 的第 k 列。合并矩阵 G 的所有列即知有等式 $AG=G\Lambda$ 成立，矩阵 $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_0,\cdots,\lambda_{N-1}\}=\operatorname{diag}\hat{c}$, 即以 $\hat{c}$ 的元素为对角元的对角矩阵。于是推出 $A=G\Lambda G^{-1}=F^{-1}\Lambda F$，其中 $F=G^{-1}$ 为 Fourier 矩阵。那么原方程组就等价于

$$Ax=b \iff F^{-1}\Lambda Fx=b \iff x=F^{-1}\Lambda^{-1}Fb.$$

若表示成 DFT 的记号，则解可简单写成

$$x=(\hat{b}/\hat{c})^{\vee},$$

其中向量除法按分量进行。整个计算的时间复杂度为 $O(N\log N)$，最终的解向量为 $x=\frac{1}{2}b$。

由此可以看出，在解以循环矩阵为系数矩阵的线性方程组上，FFT 拥有两大优点：一是 FFT 的时间复杂度更低，一般消元法的时间复杂度为 $O(N^3)$，而 FFT 只需要 $O(N\log N)$，计算更加高效；二是 FFT 比消元法拥有更强的数值稳定性，最后的数值结果也往往比消元法精确度更高。

2 Problem B

2.1 Description

求出 $u''+2u'+2u=3\cos 6t$ 的 $\pi/3$ 周期精确解，把它和 FFT 得到的离散解进行比较（在一个周期中划分，分别取 $N=16,64,256$）。

2.2 Solution

先来求微分方程的精确解。从方程形式可以验证 $u(t)$ 是 $\pi/3$ 周期的 C^∞ 函数，因而可考虑将 $u(t)$ 展开为 Fourier 级数

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos 6kt+b_k\sin 6kt).$$

代入原方程逐项微分，并比较等号两边对应项的系数，可解得方程的精确解为

$$u(t)=\frac{1}{650}(18\sin 6t-51\cos 6t).$$

下面求微分方程的数值解。首先将微分方程离散化：设将一个周期 $[0,\pi/3]$ 划分为了 N 个子区间，区间端点分别为 $t_j=jh$ $(0\le j\le N)$，其中 $h=\frac{\pi}{3N}$。若记 $u_j=u(t_j)$，$f_j=3\cos 6t_j$（假定对下标均以 N 为周期），则利用微分的中心差商公式，方程可离散化为

$$\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2}+2\cdot\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}+2u_j=f_j.$$

整理得

$$(1+h)u_{j+1}+(1-h)u_{j-1}-2(1-h^2)u_j=h^2f_j.$$

若对 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})$ 作 DFT，那么有

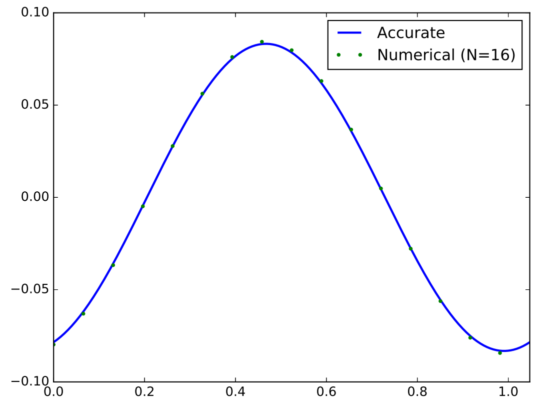
$$\begin{aligned}h^2\hat{f}_j&=\sum_{l=0}^{N-1}h^2f_l\omega^{jl}=\sum_{l=0}^{N-1}[(1+h)u_{l+1}\omega^{j(l+1)}\cdot\omega^{-j}+(1-h)u_{l-1}\omega^{j(l-1)}\cdot\omega^{j}-2(1-h^2)u_l\omega^{jl}]\\&=[(1+h)\omega^{-j}+(1-h)\omega^{j}-2(1-h^2)]\cdot\hat{u}_j\end{aligned}$$

于是可解得

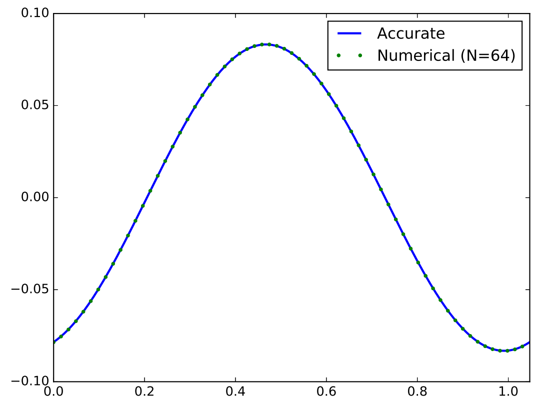
$$\hat{u}_j=\frac{h^2\hat{f}_j}{(1+h)\omega^{-j}+(1-h)\omega^{j}-2(1-h^2)}. \qquad (*)$$

因而求题给微分方程数值解的步骤如下：先对 $f=(f_0,f_1,\cdots,f_{N-1})$ 作 DFT，再利用 (*) 式通过 $\hat{f}$ 计算 $\hat{u}$，最后对 $\hat{u}$ 作 DFT 逆变换得 $u=(u_0,u_1,\cdots,u_{N-1})$，即为 $u(t)$ 的数值解。

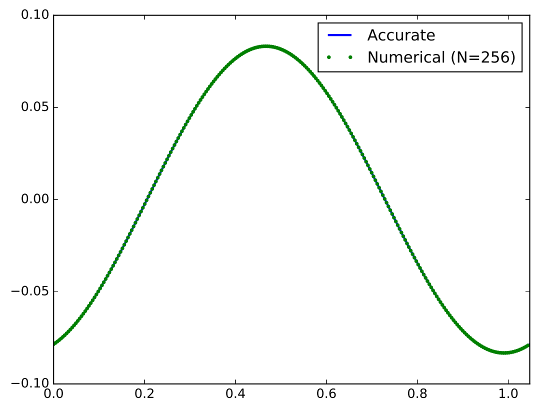
图 1 分别给出了 $N=16,64,256$ 三种情形下的 FFT 数值解与原方程精确解的对比，数值结果令人满意，且总的计算复杂度为 $O(N\log N)$ 相当高效。



(a) $N = 16$



(b) $N = 64$



(c) $N = 256$

图 1: 利用 FFT 计算的微分方程数值解与精确解对比