数值分析上机习题报告 (8)

张宏毅 1500017736

April 9, 2017

1 Problem A

1.1 Description

已知积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\cos x \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{-1}{4}\right).$$

利用 Gauss-Hermite 求积公式在不同阶对应的积分节点和权数计算该积分。

1.2 Solution

带权数值积分公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{*}$$

的代数精度不超过 $2n-1$ 阶，而 Gauss 求积公式通过适当选取 A_k 和 x_k，使得公式 (*) 的代数精度恰为 $2n-1$ 阶。具体选取方法为，积分节点 x_k $(1 \le k \le n)$ 为 n 阶正交多项式的零点，求积系数

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $l_k(x)$ 为关于 x_k 的 Lagrange 插值基函数。利用相关公式计算的积分结果如表 1 所示（各阶公式具体的积分节点及权值见程序）。

表 1: Gauss-Hermite 求积结果

	精确积分 $\sqrt{\pi}\exp(-1/4)$	近似值 1.38038844704314289658
n	数值积分	绝对误差
3	1.38203307138804776244	0.00164462434490486586
6	1.38038841005073376067	0.00000003699240913591
9	1.38038844704331697955	0.00000000000017408297
12	1.38038844704314289658	0.00000000000000000000

2 Problem B

2.1 Description

求解积分方程

$$\int_0^1 (s^2+t^2)^{1/2}u(t)\mathrm{d}t = \frac{(s^2+1)^{3/2}-s^3}{3}. \tag{E}$$

（1）分别用 $n=3,\cdots,15$ 个等距积分节点 t_j，使用复合 Simpson 公式离散积分，s_i 也取同样的点，使用列主元 Gauss 消去法求解离散所得的线性代数方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$。与已知的唯一解析解 $u(t)=t$ 相比较，n 为多大时求得的结果最好？解释原因。

（2）对上面的每个 n，计算线性代数方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数，考察条件数与 n 的关系。

2.2 Solution

取等距积分节点 $t_j=j/n$ $(0\le j\le n)$，步长 $h=1/n$，则利用复合 Simpson 公式可得方程左端近似的离散积分为

$$\begin{aligned}S(h) &= \frac{h}{6}\sum_{j=0}^{n-1}\left[(s^2+t_j^2)^{\frac12}u(t_j)+4(s^2+t_{j+\frac12}^2)^{\frac12}u(t_{j+\frac12})+(s^2+t_{j+1}^2)^{\frac12}u(t_{j+1})\right]\\ &= \frac{h}{6}\left[(s^2+t_0^2)^{\frac12}u(t_0)+2\sum_{j=0}^{n-1}(s^2+t_j^2)^{\frac12}u(t_j)+(s^2+t_n^2)^{\frac12}u(t_n)+4\sum_{j=0}^{n-1}(s^2+t_{j+\frac12}^2)^{\frac12}u(t_{j+\frac12})\right].\end{aligned}$$

如果对 s 也取同样的节点 $s_i=i/n$ $(0\le i\le n)$，则可将原方程近似为一个含 $2n+1$ 个变元的线性方程组

$$\frac{h}{6}\left[r_{i,0}u(t_0)+2\sum_{j=0}^{n-1}r_{i,j}u(t_j)+r_{i,n}u(t_n)+4\sum_{j=0}^{n-1}r_{i,j+\frac12}u(t_{j+\frac12})\right]=\frac{(s_i^2+1)^{3/2}-s_i^3}{3},\quad (i=0,\frac12,\cdots,n).$$

其中 $r_{i,j}=(s_i^2+t_j^2)^{\frac12}=\sqrt{i^2+j^2}/n$。限于篇幅，我们仅列出当 $3\le n\le 8$ 时，得到的积分方程数值解及其系数矩阵的条件数，如表 2 所示。尽管列出的 n 很少，但是可以发现，病态趋势已经非常明显。

方程数值解的误差一是来自截断误差，二是来自舍入误差。设离散得到的方程组为 $Ax=b$，则截断误差向量 ϵ_1 满足 $A\epsilon_1=r$，其中 r 为 Simpson 公式的截断误差组成的向量，因而

$$||\epsilon_1||_\infty \le ||A^{-1}||_\infty ||r||_\infty.$$

若要分析截断误差趋势，则需考察 $||A^{-1}||_\infty$ 关于 n 增长的阶与 $O(1/n^4)$ 进行比较，此处略去。这里更重要的是，若设系数矩阵有误差 δA，向量 b 有误差 δb，则最后解向量的相对误差

$$\frac{||\delta x||}{||x||}\le\frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}\left(\frac{||\delta A||}{||A||}+\frac{||\delta b||}{||b||}\right).$$

注意到系数矩阵 A 的条件数 $\kappa(A)$ 随着 n 急剧增长，这表明这样计算的数值稳定性非常差，因而导致了最终非常不可靠的数值结果。

表 2: 积分方程 (E) 的数值解

(a) $n = 3, 4, 5, 6$

n	节点近似值	节点精确值	矩阵的条件数
	0.02947104	0.00000000	
	0.14343473	0.16666667	
	0.37129260	0.33333333	
3	0.52911019	0.50000000	3.3103e+06
	0.50408882	0.66666667	
	0.90471096	0.83333333	
	0.91080645	1.00000000	
	0.02167127	0.00000000	
	0.10973848	0.12500000	
	0.23683382	0.25000000	
	0.50929659	0.37500000	
4	-0.33482852	0.50000000	5.3249e+08
	1.34609433	0.62500000	
	-0.72525246	0.75000000	
	1.28821373	0.87500000	
	0.61149231	1.00000000	
	0.01709422	0.00000000	
	0.08914571	0.10000000	
	0.15709376	0.20000000	
	0.52737648	0.30000000	
	-1.41181996	0.40000000	
5	2.85908118	0.50000000	8.1512e+10
	-7.85230592	0.60000000	
	5.81671691	0.70000000	
	-7.14964829	0.80000000	
	2.67916241	0.90000000	
	-0.38964164	1.00000000	
	0.01410560	0.00000000	
	0.07512479	0.08333333	
	0.10780559	0.16666667	
	0.54580189	0.25000000	
	-2.52485782	0.33333333	
	5.36793437	0.41666667	
6	-25.11034174	0.50000000	1.2156e+13
	25.08817677	0.58333333	
	-67.18715498	0.66666667	
	33.56352378	0.75000000	
	-41.00927752	0.83333333	
	8.78715231	0.91666667	
	-4.27729545	1.00000000	

(b) $n = 7, 8$

n	节点近似值	节点精确值	矩阵的条件数
	0.01200447	0.00000000	
	0.06493453	0.07142857	
	0.07584615	0.14285714	
	0.55665106	0.21428571	
	-3.54485300	0.28571429	
	8.53639534	0.35714286	
	-54.62696094	0.42857143	
7	72.96144561	0.50000000	1.7628e+15
	-293.45388298	0.57142857	
	226.35939764	0.64285714	
	-511.13813763	0.71428571	
	207.46890313	0.78571429	
	-223.21265570	0.85714286	
	37.35693800	0.92857143	
	-20.42936970	1.00000000	
	0.01036403	0.00000000	
	0.05773717	0.06250000	
	0.03568449	0.12500000	
	0.67513805	0.18750000	
	-6.59181751	0.25000000	
	19.85340121	0.31250000	
	-182.89359182	0.37500000	
	347.55786688	0.43750000	
8	-2091.12390972	0.50000000	1.3292e+17
	2472.33948669	0.56250000	
	-9037.20185615	0.62500000	
	6282.64824943	0.68750000	
	-12969.74333371	0.75000000	
	4798.00355113	0.81250000	
	-4791.41995287	0.87500000	
	723.05622336	0.93750000	
	-394.89938666	1.00000000	