数值分析上机习题报告 (9)

张宏毅 1500017736

April 9, 2017

1 Problem A

1.1 Description

对于函数 $f(x) = \sin(10x) - x$，试讨论：

（1）函数共有多少个零点?

（2）任意选择两种方法，求出这个函数的所有零点。在计算中，不同的方法各有哪些需要注意的地方，请稍加分析。

1.2 Solution

由于 $|\sin(10x)| \leq 1$，故函数的零点（若存在）必然全都处于区间 $[-1, 1]$ 内。画出函数 $y = \sin(10x)$ 和 $y = x$ 的图像（如图 1）容易看出，$f(x)$ 总共有 7 个零点，且由 $f(x)$ 是奇函数可以知道，这些零点中有一个为 0，而另外三对零点均关于原点对称。

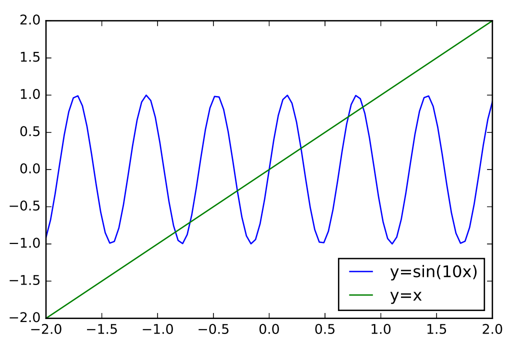

图 1: 函数 $f(x) = \sin(10x) - x$ 的零点估计

根据 $f(x)$ 的零点分布规律，我们只需求出 $f(x) = 0$ 的所有正根即可，拟分别采用二分法、不动点迭代法和 Newton 迭代法进行求解，求得 $f(x)$ 的三个正根分别为

$$x_1 = 0.28523419,\ x_2 = 0.70681744,\ x_3 = 0.84232039.$$

于是 $f(x)$ 的所有零点即为 $0,\pm x_1,\pm x_2,\pm x_3$ 共 7 个。这三种方法的计算都需要注意的一点是，它们每次运行都只能求出至多一个零点，因而如果想要求出所有的零点，可以先从图上作定性观察，人为地为每次迭代指定区间或初值，从而缩小迭代的搜索范围以提高效率。

二分法的优点是，如果存在一个零点，那么迭代最后总能收敛到这个零点，但需要注意的是区间的选取，尤其是当存在两个零点，它们之间的距离比较小时，需要小心地选取左右两个区间以求出这两个零点的近似值。不动点迭代法的缺点在于，迭代序列在不动点处不一定能保证收敛，例如在该例中，若取迭代函数 $\phi(x)=\sin(10x)$，则在零点 x_1 处，

$$|\phi'(x_1)|=|10\cos(10x_1)|\approx 9.584578>1.$$

此时的不动点迭代序列在 x_1 处便是发散的。Newton 迭代法在单根处总能保证局部收敛，因而此时根的性质以及收敛域的大小对求解结果至关重要，如果收敛域过小，初值的选取也不一定能保证最终会收敛到零点，而 Newton 迭代法的主要优点在于较快的二次收敛速度，因而可以考虑将二分法和 Newton 迭代法结合使用，兼顾收敛的情况和收敛速度的大小。

2 Problem B

2.1 Description

求非线性方程 $\cos x+1/(1+\mathrm{e}^{-2x})=0$ 的最小正根。取初值 $x_0=3$，分别考察下面的迭代格式：

（1）$x_{k+1}=\arccos(-1/(1+\mathrm{e}^{-2x_k}))$；

（2）$x_{k+1}=0.5\ln(-1/(1+1/\cos x_k))$；

（3）Newton 迭代法。

对上述每个格式，先证明它确实对应一个等价的不动点问题，从理论上分析它是否局部收敛以及收敛速度如何，然后实现该方法，验证你的结论。

2.2 Solution

为说明三个格式均对应某个等价的不动点问题 $x=\phi(x)$，只需指出相应的迭代函数 $\phi(x)$ 即可。三者对应的迭代函数分别为

$$\begin{aligned}
\phi_1(x)&=\arccos\frac{-1}{1+\mathrm{e}^{-2x}},\\
\phi_2(x)&=\frac{1}{2}\ln\frac{-1}{1+1/\cos x},\\
\phi_3(x)&=x-\frac{f(x)}{f'(x)},\quad f(x)=\cos x+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.
\end{aligned}$$

设方程最小的正根为 x^*，则可估计得

$$0<|\phi_1'(x^*)|<1,\ |\phi_2'(x^*)|>1,\ |\phi_3'(x^*)|=0.$$

因而格式一局部线性收敛，格式二在不动点处发散，格式三局部二次收敛。

格式二在迭代两次之后就超出了 $\phi_2(x)$ 的定义域，导致迭代无法继续进行下去，表现出明显的发散特征。格式一与格式三的迭代序列及绝对误差为如下表 1 所示（容差 $\epsilon = 10^{-12}$）。从绝对误差的序列可以近似看出，格式一线性收敛，即绝对误差等比例减小，而格式三二次收敛，即绝对误差大约以平方比例缩小，体现出 Newton 迭代法快速收敛的特点。

表 1: 不同格式的迭代序列

(a) 格式一

k	x_k	$\lvert x_k - x^*\rvert$
1	3.071255710145	5.1655e-03
2	3.076084254422	3.3691e-04
3	3.076399242088	2.1922e-05
4	3.076419737635	1.4262e-06
5	3.076421071012	9.2780e-08
6	3.076421157757	6.0352e-09
7	3.076421163400	3.9191e-10
8	3.076421163767	2.4787e-11
9	3.076421163791	9.0239e-13
10	3.076421163793	6.4926e-13

(b) 格式三

k	x_k	$\lvert x_k - x^*\rvert$
1	3.055327460221	2.1094e-02
2	3.073731635967	2.6895e-03
3	3.076364860380	5.6303e-05
4	3.076421138060	2.5732e-08
5	3.076421163793	7.5318e-13