数值分析上机习题报告 (3)

张宏毅 1500017736

March 5, 2017

Problem

对 Runge 函数 $R(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $(x\in[-5,5])$，利用下列条件作插值逼近，并与 $R(x)$ 的图像作比较：

（3）用等距节点 $x_i=-5+i$ $(i=0,1,2,\cdots,10)$，绘出它的分段线性插值函数的图像；

（4）用等距节点 $x_i=-5+i$ $(i=0,1,2,\cdots,10)$，绘出它的分段三次 Hermite 插值函数的图像。

Solution

条件三为分段线性插值。事实上，只需在每一段区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 中，将两个端点的函数值用线性函数相连即可，因而容易写出分段线性插值函数的表达式为

$$\phi(x)=\frac{y_{i+1}(x-x_i)-y_i(x-x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i},\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\ 0\le i<n.$$

具体代码（Python）如下：

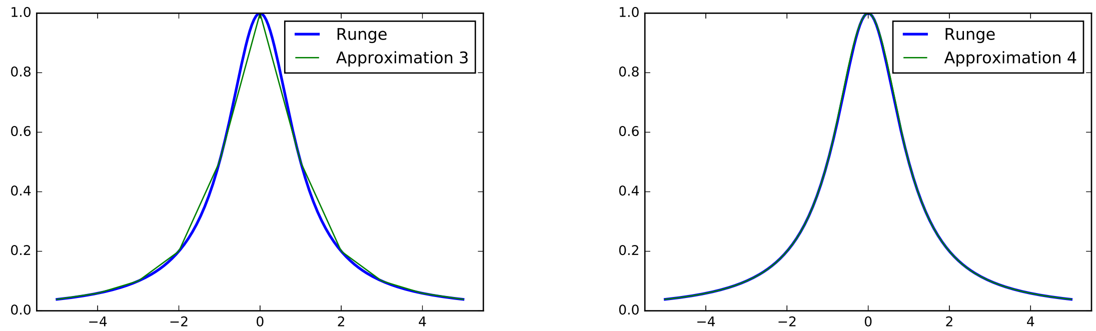
```python
# Linear Spline Interpolation
# Input: Data points, corresponding values and number of points
# Output: Interpolation function

def LinearSpline(x, y, n):
    def InterpPoly(t):
        for i in range(0, n):
            if x[i] <= t <= x[i+1]:
                return (y[i+1]*(t-x[i]) - y[i]*(t-x[i+1])) / (x[i+1]-x[i])
    return InterpPoly
```

画出分段线性插值函数的图像如图 1(a)。可以看出，分段线性插值能够达到不错的逼近效果，且由于多项式次数低，因而也有良好的数值稳定性。但也有非常明显的缺点，即光滑性非常差，在插值节点处往往不可微，这就为后续的数学处理带来了麻烦。

条件四为分段三次 Hermite 插值。我们希望在每一段区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，构造三次多项式空间 $\mathbb{P}_3$ 的一组基 $\alpha_j(x),\beta_j(x)$ $(j=i,i+1)$，使得这四个函数分别控制两个端点处的函数值和导数值。经计算可写出这组基的显式表达式：

$$\alpha_j(x)=[1-2(x-x_j)l_j'(x_j)]\cdot l_j^2(x),$$

$$\beta_j(x)=(x-x_j)l_j^2(x),$$



(a) 分段线性插值　　(b) 分段三次 Hermite 插值

图 1: Runge 函数及其不同插值函数的图像

其中 $l_j(x)$ 为 Lagrange 插值基函数（这里实际上就是线性函数）。利用这组基便容易写出该区间上的三次 Hermite 多项式

$$H_3(x) = \sum_j [f(x_j)\alpha_j(x) + f'(x_j)\beta_j(x)].$$

具体代码如下：

```
# Piecewise Cubic Hermite Interpolation
# Input: Data points, corresponding values and derivatives, number of points
# Output: Interpolation function

def HermiteInterp(x, y, d, n):
    def InterpPoly(t):
        for i in range(0, n):
            if x[i] <= t <= x[i+1]:
                delta = x[i+1]−x[i]
                ans = y[i] * (1+2*(t−x[i])/delta) * ((t−x[i+1])/delta)**2
                ans += y[i+1] * (1−2*(t−x[i+1])/delta) * ((t−x[i])/delta)**2
                ans += d[i] * (t−x[i]) * ((t−x[i+1])/delta)**2
                ans += d[i+1] * (t−x[i+1]) * ((t−x[i])/delta)**2
                return ans
    return InterpPoly
```

画出分段三次 Hermite 插值函数的图像如图 1(b)。可以看出，分段三次 Hermite 多项式既保持了低次插值多项式良好的逼近效果与数值稳定的优点，又克服了分段线性函数光滑性差的问题，是非常不错的插值逼近手段。但缺点在于需要事先知道导数的数值，而导数的数值在实践中往往并不会像现在这个例子一样那么容易得到。