数值分析上机习题报告 (18)

张宏毅 1500017736

June 9, 2017

1 Problem

写一个子程序生成 d 维的 Halton 序列，并计算二重积分

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^2 y \sin(\pi x) \mathrm{d}y,$$

和 Monte-Carlo 方法比较收敛速度。

2 Solution

积分的精确值为

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x) \mathrm{d}x \int_0^2 y \mathrm{d}y = \frac{4}{\pi}.$$

为使用拟 Monte-Carlo 方法进行数值积分求解，先作适当变换使积分区域变为 $[0,1]^2$，令 $z = y/2$ 得

$$I = 4 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 z \sin(\pi x) \mathrm{d}z.$$

然后产生二维空间中的 Halton 序列 $\{(x_i, z_i)\}_{i=1}^N$，并作积分近似

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, z_i), \tag{*}$$

其中 $f(x,z) = 4z\sin(\pi x)$。Halton 序列的产生方法为，对于序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^\infty$ 中第 n 项的第 k 个分量 $\boldsymbol{x}_n^{(k)}$，将 n 按照 p_k 进制展开（p_k 为第 k 个素数），即 $n = \sum_{i=0}^r a_i p_k^i$，然后令

$$\boldsymbol{x}_n^{(k)} = \sum_{i=0}^r a_i p_k^{-i-1}$$

即可。Koksma-Hlawka 定理保证了利用 Halton 序列进行数值积分求解的理论收敛速度为 $O(\ln^2 N/N)$。若使用 Monte-Carlo 方法进行求解，则需产生服从 $[0,1]^2$ 上均匀分布的随机点列 $\{(x_i, z_i)\}_{i=1}^N$，然后再利用 (*) 式作积分估计。

表 1: 拟 M-C 方法与 M-C 方法数值结果对比

N	拟 M-C 方法误差	拟 M-C 方法收敛阶	M-C 方法误差	M-C 方法收敛阶
10	0.190216		0.028202	
100	0.026793	0.851227	0.007955	0.549611
1000	0.003194	0.923648	0.004270	0.270191
10000	0.000571	0.747874	0.000636	0.827036
100000	0.000066	0.935435	0.000135	0.672820
1000000	0.000007	0.969419	0.000043	0.495691

表 1 列出了利用 Halton 序列和 Monte-Carlo 方法进行求解时的误差及数值收敛阶。当空间维数较低且 N 充分大时，可近似认为拟 M-C 方法的收敛速度为 $O(N^{-1})$，即一阶收敛，与表中的数值收敛阶大致相符。M-C 方法的收敛速度为 $O(N^{-1/2})$，即半阶收敛，但可以看到表中的数值阶并非均稳定在 0.5 左右，这与一维空间中的情形略有不同，原因为，对于同样的样本容量 N，我们所取的随机样本在一维空间中有着较好的代表性，但在二维空间中分布却十分稀疏，从而导致 M-C 方法在多重积分的近似表现上，需要更大的 N 才能达到较高的精度。

因此，拟 Monte-Carlo 方法彻底改变了方法的统计特性，与 Monte-Carlo 方法的半阶收敛速度相比有了相当大的提高。但前者受制于其拟随机数序列的产生，其应用范围也相对比较局限，只适合应用于 $[0,1]^d$ 上光滑函数的积分近似求解，而后者的应用范围则广得多。