

Métodos numéricos. Puntos fijo y Aitken

Camilo Andrés Buitrago Ladino, David Santiago Meneses Cifuentes

Paula Juliana Rojas Naranjo, Juan Carlos Suárez Motta

Pontificia Universidad Javeriana

Autor correspondiente: Camilo Andrés Buitrago Ladino; bu.camilo@javeriana.edu.co

Autor correspondiente: David Santiago Meneses Cifuentes; @davidsmenenes@javeriana.edu.co

Autor correspondiente: Juan Carlos Suarez Motta; @suarezjuan@javeriana.edu.co

Autor correspondiente: Paula Juliana Rojas Naranjo; @rojasnpaula@javeriana.edu.co

23/02/2021

Para encontrar los repositorios de GitHub respectivos:

Camilo Andrés Buitrago Ladino: <https://github.com/CamiloB1999/AnalisisNumerico>.

David Santiago Meneses Cifuentes: <https://github.com/santiagomeneses/Analisis-numerico-David-Meneses>.

Juan Carlos Suarez Motta: <https://github.com/2qualcuno7/JuanCarlosSuarezMotta>.

Paula Juliana Rojas Naranjo: <https://github.com/ayurojasn/AnalisisNumerico-JulianaRojas>.

1. Introducción

Hay distintos métodos para hallar raíces de una función. Para hallar raíces de una ecuación $f(x) = 0$, en ciertos casos puede expresarse la ecuación en la forma: $g(x) = x$

De este modo, al hallar las raíces de una función específica, se está encontrando el *punto fijo* de esta. Teniendo presente lo anterior, cabe aclarar que se debe entender cuándo una función tiene uno o más puntos fijos y su respectivo cálculo.

Para tener una perspectiva gráfica de este método, se presentará una gráfica para entender mejor el comportamiento del mismo.

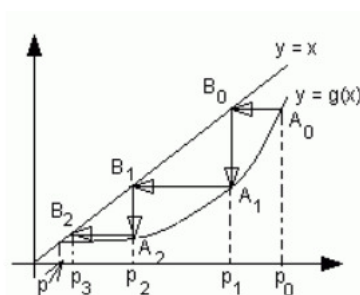


Figura 1: Gráfica 1.

La intención del método es poder llegar a un punto de intersección entre las gráficas $y=x$ con $y=g(x)$. De este modo, se identifica la raíz de $x=g(x)$.

2. Preguntas

2.1 Respecto a la posibilidad de tener más de dos raíces en este método, punto fijo lo niega.

$$g'(c) = \frac{g(p) - g(q)}{p - q} = 1$$

Figura 2: Gráfica 2.

Para la segunda parte, si hubiese dos puntos fijos p, q porque habría un número c pertenece a (a, b) . De este modo, no existiría la posibilidad de dos puntos fijos distintos.

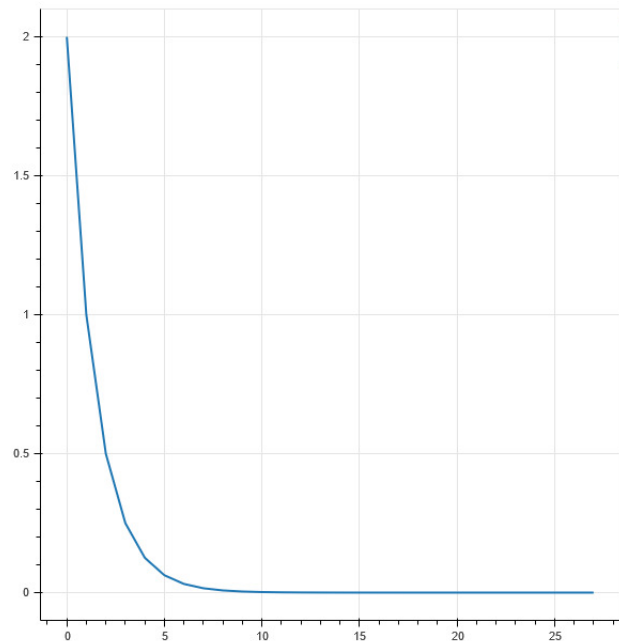
2.2 Para entender qué es lo que ocurre en el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características sí influyen en la raíz obtenida.

- Cuando la función es par, la raíz es la misma, una positiva y otra negativa.
- Cuando la función es impar, esta misma lógica no aplica y pueden ser distintas raíces.
- Cuando la función es periódica, las raíces resultantes tienen decimales infinitos.

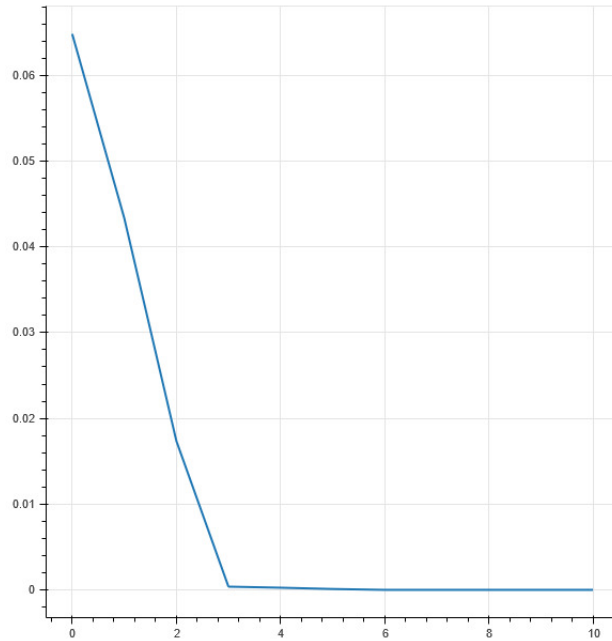
2.3 Para verificar la relación de error con los respectivos métodos, se identificaron las siguientes gráficas de convergencia. De este modo visualizar el error tal que:

$$\varepsilon_{i+1} = f(\varepsilon_i)$$

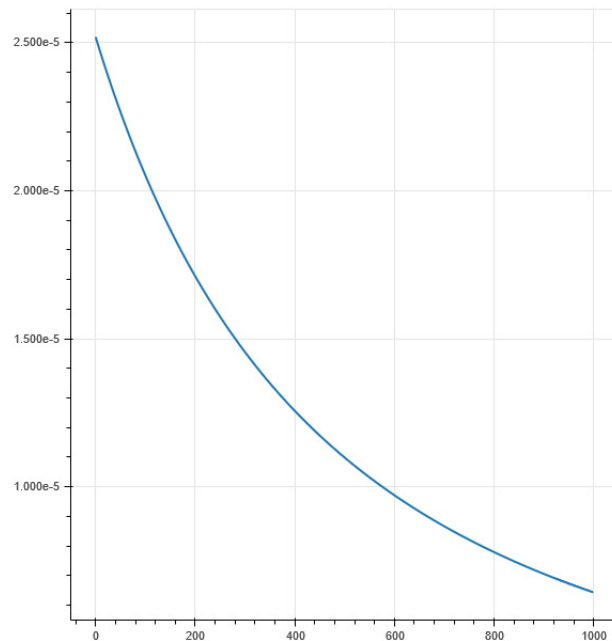
La relación de dicho error se presenta de de forma distintiva de acuerdo al error especificado y el método utilizado. Por ejemplo, para la siguiente gráfica se tiene el error por bisección con un error del $1e-08$. Se evidencia cómo decrece de forma sustanciosa mientras avanza el método.



En la gráfica siguiente se evidenciará cómo al tener un error distinto, en este caso de $1e-16$, se obtiene un decrecimiento más lineal, teniendo en cuenta el método Steffensen.



Para tener en cuenta y visualizar la certeza y constancia en el cambio generado de error, cambiando el método utilizado y el aumento de error, en este caso de $1e-56$. Se observa como se cambia el decrecimiento y en lugar de ser lineal, con el método de punto fijo se encuentra una relación logarítmica.



2.2 La aplicación del método de punto fijo plantea como condiciones indispensables para su correcto funcionamiento que se parta de una función $f(x)$ continua en un intervalo $[a,b]$. Igualmente, el método exige que, de dicha función igualada a cero, $f(x) = 0$, se pueda hallar una función de la forma $x = g(x)$ tal que $g(a) \leq a$ y $g(b) \leq b$, lo que garantiza la existencia del punto fijo en cuestión (Rodríguez, 2014). Adicionalmente, en este algoritmo se debe asegurar que al evaluar todos los valores comprendidos en el intervalo (a,b) en $g'(x)$ el resultado siempre sea estrictamente menor a 1, así: $\forall x \in (a,b) (|g'(x)| < 1)$ (Rodríguez, 2014).

Ahora bien, el método de Delta Cuadrado de Aitken consiste en un algoritmo empleado para acelerar la convergencia de secuencias, siempre y cuando estas tengan convergencia lineal. Al aplicar el método de Aitken a punto fijo se llega al método de Steffensen (Guillén, s.f.).

2.3 Para dar una explicación geométrica de este algoritmo, se debe partir de la gráfica una ecuación $f(x)$ arbitrariamente escogida, tal como se muestra a continuación:

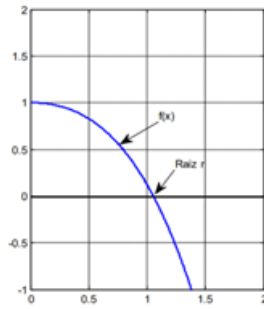


Figura 3: Gráfica 3.(Rodríguez, 2014)

Tal como se ve en la gráfica, la ecuación escogida tiene por raíz el valor de 1 dentro del intervalo $[0, 2]$. Ahora bien, tal como se mencionó en el punto anterior, se deben aplicar métodos algebraicos para poder un $g(x)$ que cumpla con las condiciones expuestas. Gráficamente el $g(x)$ para la ecuación antes expuesta, se muestra continuación:

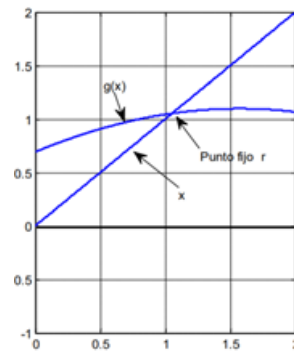


Figura 4: Gráfica 4. (Rodríguez, 2014)

En ella se ve como la intersección de la ecuación $g(x)$ con la ecuación $x = y$ justamente se da $x = 1$, exactamente el valor de la raíz buscada. De esta manera, se observa como el método de punto fijo llega al valor buscado. Los detalles del mencionado algoritmo se expondrán en el siguiente punto a manera de diagrama de flujo. 2.4 Para el algoritmo de punto fijo:

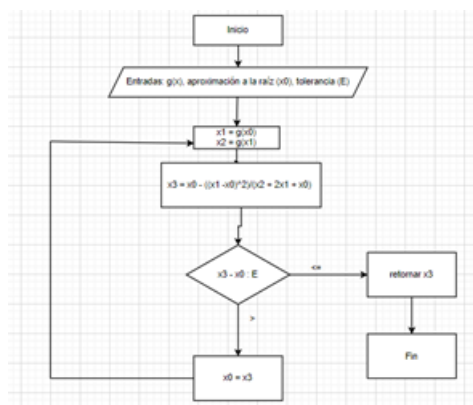


Figura 5: Modelo 1.

2.5 Para el algoritmo de Aitken:

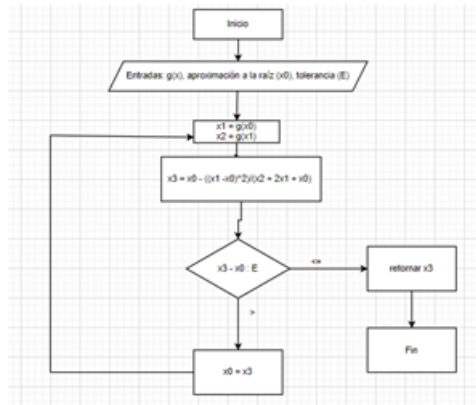


Figura 6: Modelo 2.

2.6 Raíces
A simple table:

Cuadro 1: Ecuación 1 Punto Fijo

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	40	0.73908512793905101201374918673536740243434906005859375
10e-16	85	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-32	85	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-56	85	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375

Cuadro 2: Ecuación 2 Punto Fijo

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	30	1.1141571349991103989651719530229456722736358642578125
10e-16	1000	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625
10e-32	1000	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625
10e-56	1000	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625

Cuadro 3: Ecuación 3 Punto Fijo

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	1000	0.6875557531964933133394879405386745929718017578125
10e-16	1000	0.6875557531964933133394879405386745929718017578125
10e-32	1000	0.6875557531964933133394879405386745929718017578125
10e-56	1000	0.6875557531964933133394879405386745929718017578125

Cuadro 4: Ecuación 4 Punto Fijo

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	1	14.780203831661057+0j
10e-16	1	14.780203831661057+0j
10e-32	1	14.780203831661057+0j
10e-56	1	14.780203831661057+0j

Cuadro 5: Ecuación 5 Punto Fijo

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	10	2.09455147104722261275355776888318359851837158203125
10e-16	20	2.09455147104722261275355776888318359851837158203125
10e-32	20	2.09455147104722261275355776888318359851837158203125
10e-56	20	2.09455147104722261275355776888318359851837158203125

Cuadro 6: Ecuación 1 Aitken

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	12	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-16	12	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-32	12	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-56	15	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375

Cuadro 7: Ecuación 2 Aitken

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	12	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-16	12	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-32	12	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375
10e-56	15	0.7390851332151606722931092008366249501705169677734375

Cuadro 8: Ecuación 3 Aitken

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	15	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625
10e-16	21	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625
10e-32	21	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625
10e-56	21	1.1141571408719299629552779151708818972110748291015625

Cuadro 9: Ecuación 4 Aitken

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	6	14.780203831661057+0j
10e-16	9	14.780203831661057+0j
10e-32	9	14.780203831661057+0j
10e-56	9	14.780203831661057+0j

Cuadro 10: Ecuación 5 Aitken

Tolerancia	Iteraciones	Raiz
10e-8	12	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375
10e-16	12	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375
10e-32	12	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375
10e-56	15	2.094551481542326509810436618863604962825775146484375

2,5

Pérdida de significancia:

Basándose en el enunciado del punto 1, la pérdida de significancia en el método se basa en que representa magnitudes mayores a coste de reducir la precisión después del punto decimal. La pérdida de significancia en el sistema de punto fijo se produce en operaciones matemáticas en el que el resultado es mayor al de

los operandos. En punto fijo la pérdida de significancia es bastante alta, teniendo que en cuenta que a mayor cantidad de iteraciones.

Frente a aitken se presento una pérdida de significancia mucho menor.

Iteraciones:

Frente a las iteraciones según las tablas de resultados a medida que se aumenta la tolerancia el numero de iteraciones se regula como lo mostrado en las tolerancias 10e-8,10e-16,10e-32,10e-56, aunque gracias a esto va perdiendo significancia por la naturaleza del método. Las iteraciones pueden aumentar drásticamente a medida que se aumenta la tolerancia y en algún punto normalizarse y quedarse en un número fijo de iteraciones como se muestra en la tabla de resultados. Incluso con distintas ecuaciones aunque dependiendo de la complejidad pudo llegar a contar 1000 iteraciones.

Frente a aitken en las tablas 5,6,7,8,9,10 con las tolerancias 10e-8,10e-16,10e-32,10e-56 en general se observaron muchas menos iteraciones que con respecto a punto fijo

Convergencia:

El método tiene la posibilidad de divergir en algunos casos dependiendo de la forma de la función $g(x)$, ya que se intentó uno de las ecuaciones (para ser más específicos el punto 4). En donde la gráfica divergía con un $g(x)$ erróneo:

$$\log\left(\frac{-40 * x}{b} + 1\right) * \left(\frac{68,1}{-10}\right) \quad (1)$$

El método demostró ser un método simple y flexible frente a los demás. Frente a convergencia el método demostró ser poco eficiente ya que el $g(x)$ puede ser un problema a la hora de divergir al tener una solución única. La iteración del método converge para cualquier valor inicial mientras se encuentre en el conjunto También se debe suponer que $g(x)$ es continua

2.6 Frente a la pérdida de significancia está claro que el método fallará ya que comparado con otros métodos tiende a perder significancia como mencionado anteriormente en el caso de que los resultados son mayores que los operandos. Se demostró frente a aitken que la significancia de la misma fue mucho peor según las tablas 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, se mostraron muchas menos cifras en punto fijo.

2.10 Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

Cuadro 11: Resultados			
Tolerancia	Aitken	Punto Fijo	Biseción
10e-7	12	40	28
10e-15	12	85	52
10e-31	12	85	52
10e-53	15	85	75

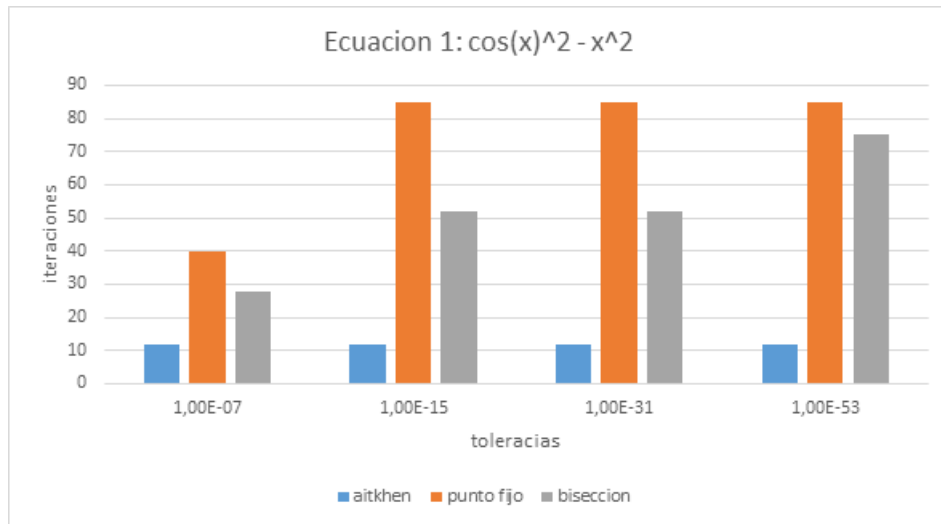


Figura 7: Grafica de barras con los resultados del cuadro 11

Observando la gráfica de los diferentes métodos aplicados para la ecuación, se puede observar que el modelo de Aitkhen se mantiene constante sin importar la tolerancia establecida para el algoritmo a costa de una menor precisión que los otros dos métodos. Por otra parte, el método de punto fijo presenta un comportamiento constante a partir de una tolerancia de 10^{-16} pero tiene el mayor número de iteraciones entre los métodos. Finalmente, el método de bisección presenta un número variable de iteraciones con respecto a las tolerancias aplicadas, sin embargo, tiene la mayor precisión de los tres métodos aplicados (comparado con el 10^{-8} de Aitkhen y 10^{-16} de Punto fijo).

Cuadro 12: Resultados			
Tolerancia	Aitken	Punto Fijo	Bisección
10e-7	15	30	29
10e-15	21	1000	1000
10e-31	21	1000	1000
10e-53	21	1000	1000 height

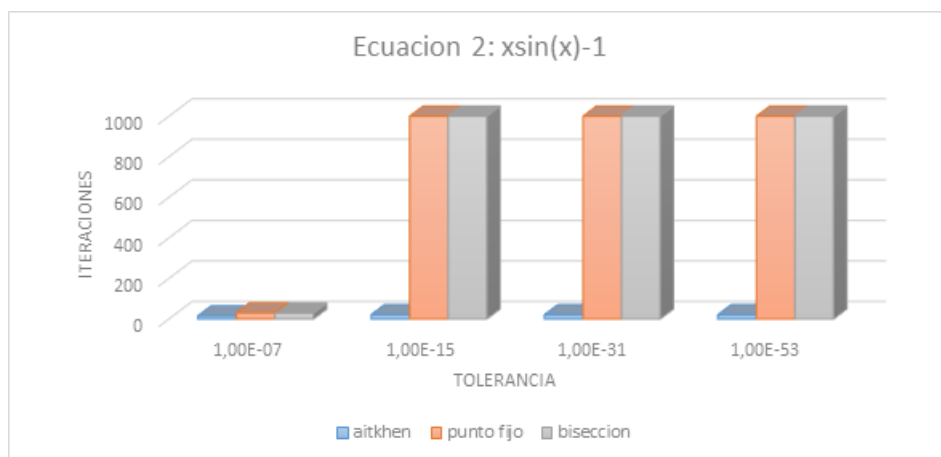


Figura 8: Grafica de barras con los resultados del cuadro 12

Observando la gráfica de los diferentes métodos aplicados para la ecuación, se puede observar que el modelo de Aitkhen tiene un valor descomunamente menor a comparación de los otros dos métodos, pero sacrificando la precisión. Por otra parte, el método de punto fijo presenta un comportamiento similar al método de bisección, a partir de una tolerancia de 10^{-16} . Finalmente, como se mencionó anteriormente, el método de bisección presenta un mismo comportamiento al método de punto fijo. Sin embargo, tiene

la mayor precisión de los tres métodos aplicados (comparado con el 10^{-8} de Aitkhen y 10^{-16} de Punto fijo).

Cuadro 13: Resultados			
Tolerancia	Aitken	Punto Fijo	Bisección
10^{-7}	33	1000	28
10^{-15}	33	1000	51
10^{-31}	33	1000	51
10^{-53}	33	1000	51

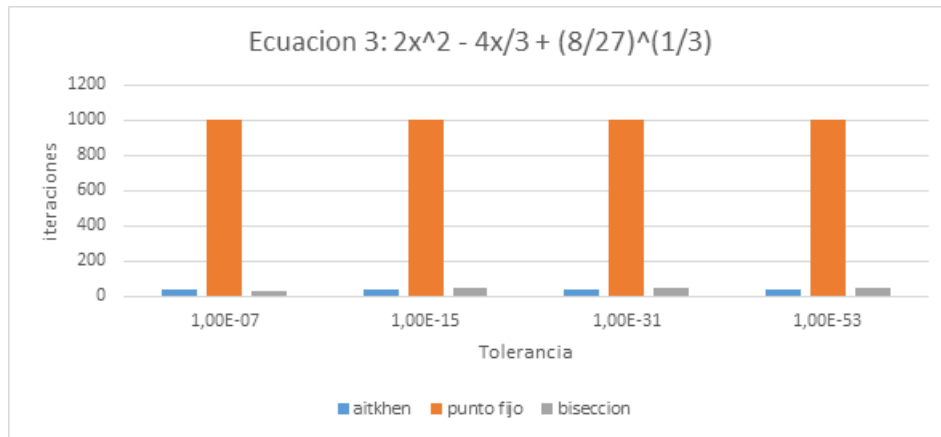


Figura 9: Grafica de barras con los resultados del cuadro 12

Observando la gráfica de los diferentes métodos aplicados para la ecuación, se puede observar que el modelo de Aitkhen se mantiene constante sin importar la tolerancia establecida para el algoritmo a costa de una menor precisión que los otros dos métodos. Por otra parte, el método de punto fijo presenta un comportamiento constante y con un número de iteraciones descomunalmente mayor comparado con los otros dos métodos. Finalmente, el método de bisección presenta un número constante de iteraciones a partir de la tolerancia 10^{-15} , sin embargo, tiene la mayor precisión de los tres métodos aplicados (comparado con el 10^{-8} de Aitkhen y 10^{-16} de Punto fijo).

Cuadro 14: Resultados			
Tolerancia	Aitken	Punto Fijo	Bisección
10^{-7}	6	1	29
10^{-15}	9	1	1000
10^{-31}	9	1	1000
10^{-53}	9	1	1000

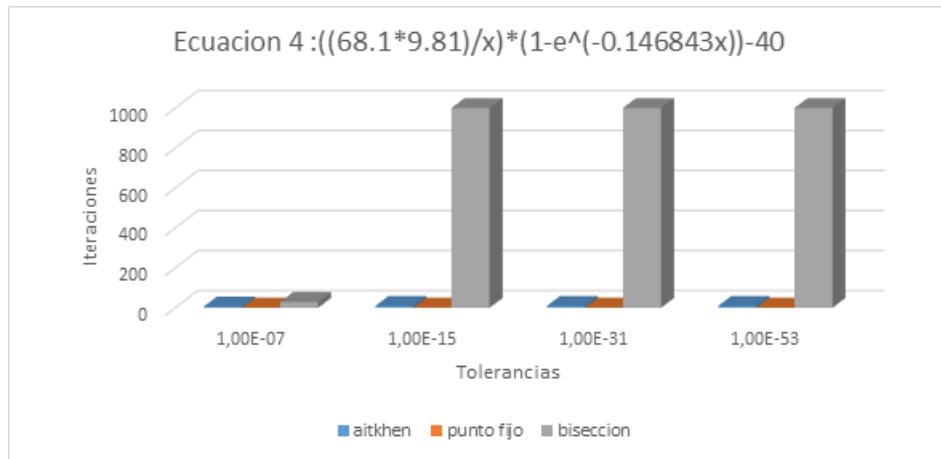


Figura 10: Grafica de barras con los resultados del cuadro 12

Observando la gráfica de los diferentes métodos aplicados para la ecuación, se puede observar que el modelo de Aitken se mantiene constante a partir de la tolerancia $10e-16$ a costa de una menor precisión que los otros dos métodos. Por otra parte, el método de punto fijo presenta un comportamiento inusual en términos de iteraciones y realiza la aproximación con solo una iteración. Finalmente, el método de bisección presenta un número constante y considerablemente mayor de iteraciones comparado con los otros dos métodos, sin embargo, tiene la mayor precisión de los tres métodos aplicados (comparado con el $10e-8$ de Aitken y $10e-16$ de Punto fijo).

Cuadro 15: Resultados			
Tolerancia	Aitken	Punto Fijo	Bisección
$10e-7$	12	10	28
$10e-15$	12	20	52
$10e-31$	12	20	52
$10e-53$	12	20	52

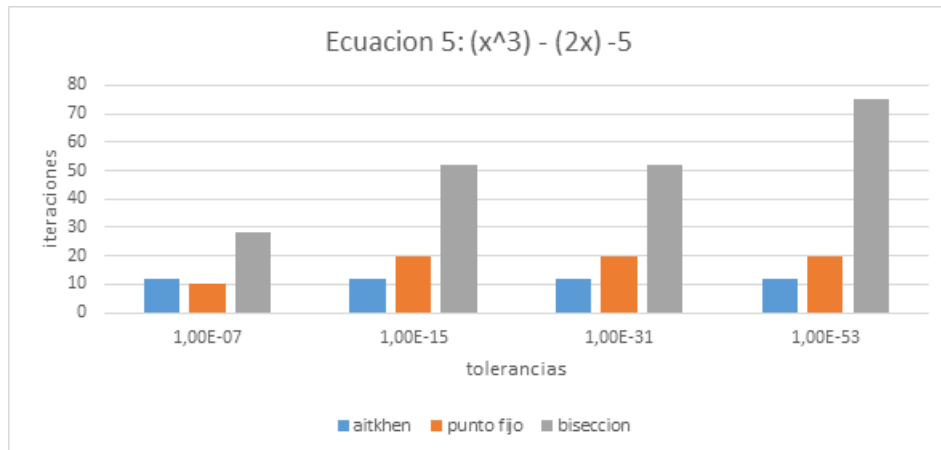


Figura 11: Grafica de barras con los resultados del cuadro 12

Observando la gráfica de los diferentes métodos aplicados para la ecuación, se puede observar que el modelo de Aitken se mantiene constante sin importar la tolerancia establecida para el algoritmo a costa de una menor precisión que los otros dos métodos. Por otra parte, el método de punto fijo presenta un comportamiento constante a partir de una tolerancia de $10e-16$ pero tiene el mayor número de iteraciones entre los métodos. Finalmente, el método de bisección presenta un número variable de iteraciones con respecto a las tolerancias aplicadas, sin embargo, tiene la mayor precisión de los tres métodos aplicados (comparado con el $10e-8$ de Aitken y $10e-16$ de Punto fijo).

2.11 Como se comporta el método con respecto al de bisección

Como se puede apreciar en la gráfica, el método de bisección tiene una mayor variación a la hora de calcular la raíz, como se puede evidenciar en su comportamiento, viendo unos saltos bastante dispares. Por otra parte, el método de punto fijo no varía de manera tan grande, dado que su forma de manejar los valores no los hace cambiar de forma drástica. A medida que se van incrementando los valores de la tolerancia este patrón se vuelve más evidente, dado que la varianza del punto fijo va disminuyendo cada vez más; este comportamiento se ve reflejado en las otras ecuaciones, menos en la 4 ya que, como Punto Fijo lo hace en una iteración, su comportamiento real no se puede apreciar en la gráfica.

Ecuación 1

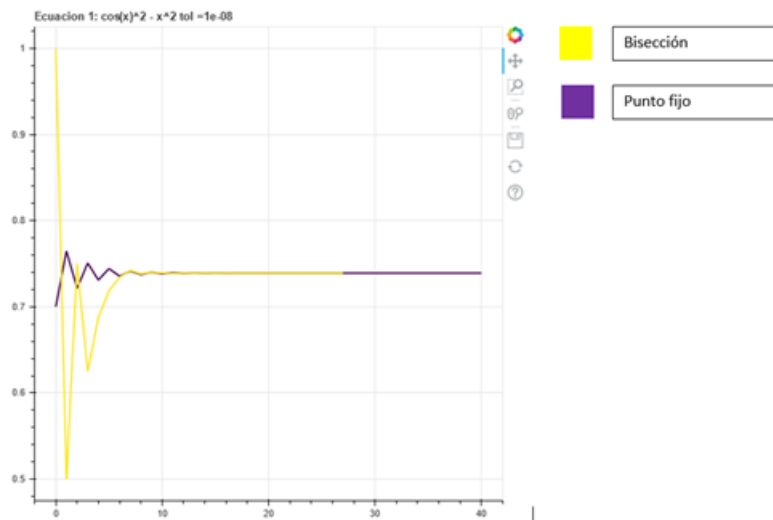


Figura 12: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 1

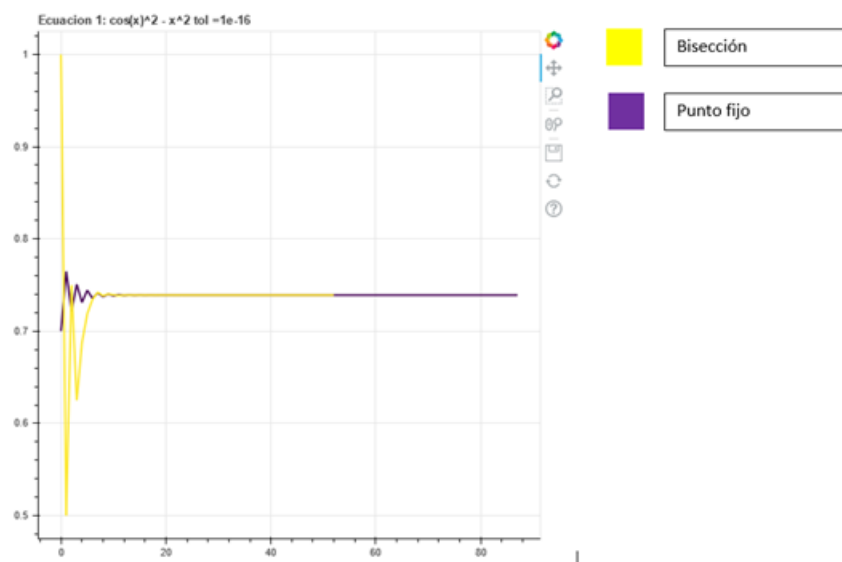


Figura 13: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 1

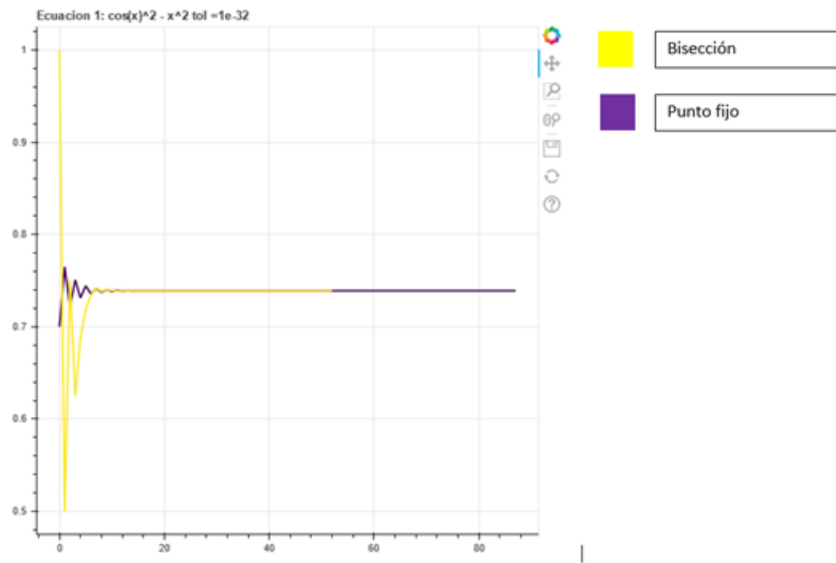


Figura 14: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 1

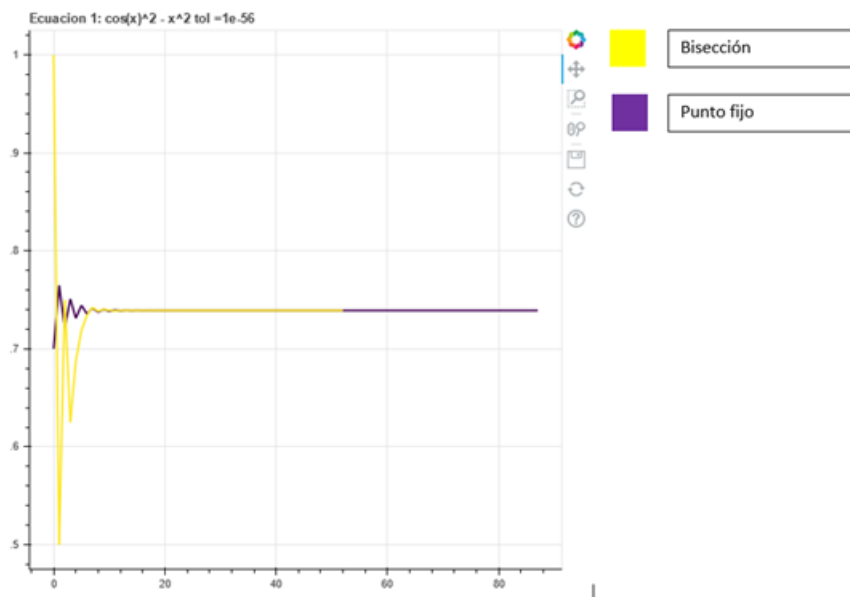


Figura 15: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 1

Ecuación 2

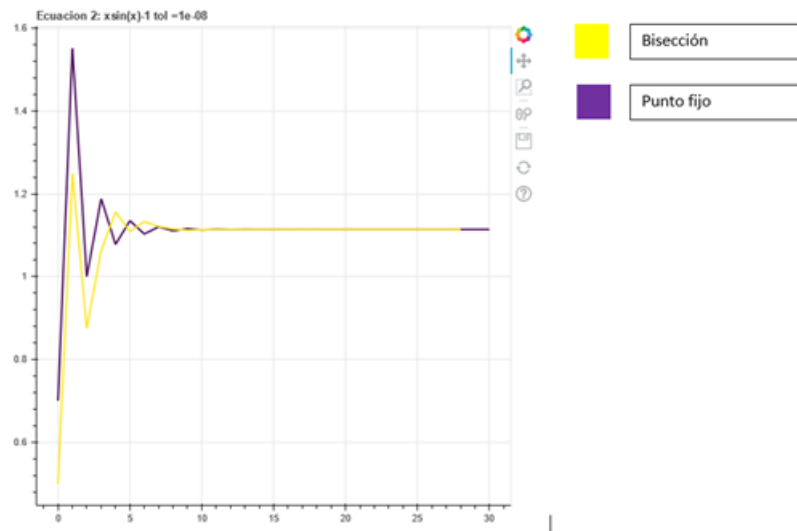


Figura 16: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 2

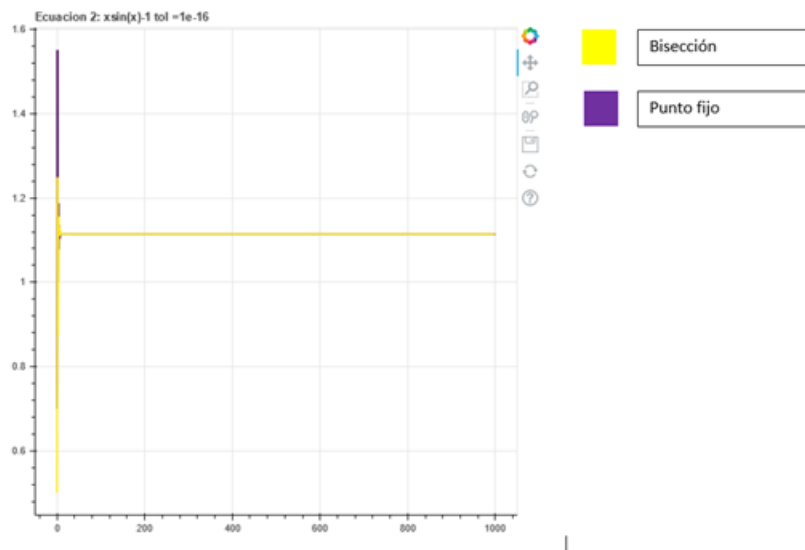


Figura 17: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 2

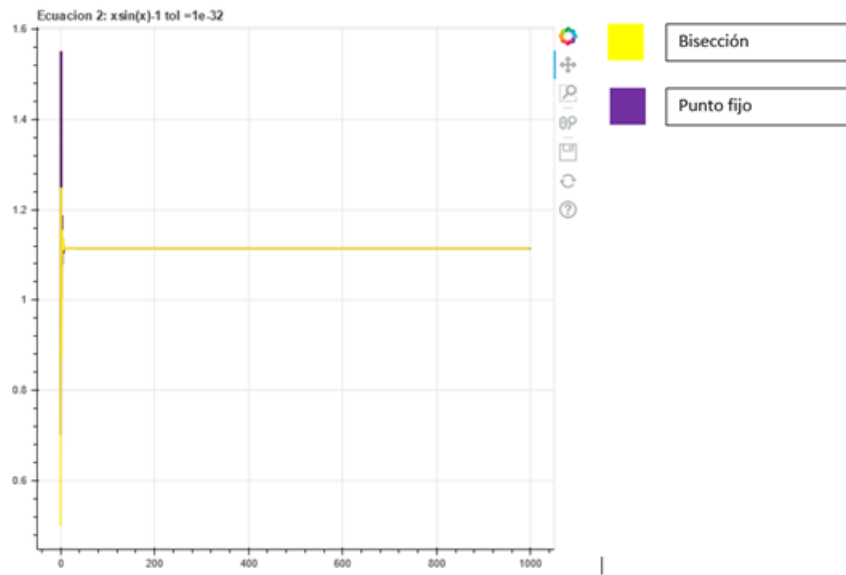


Figura 18: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 2

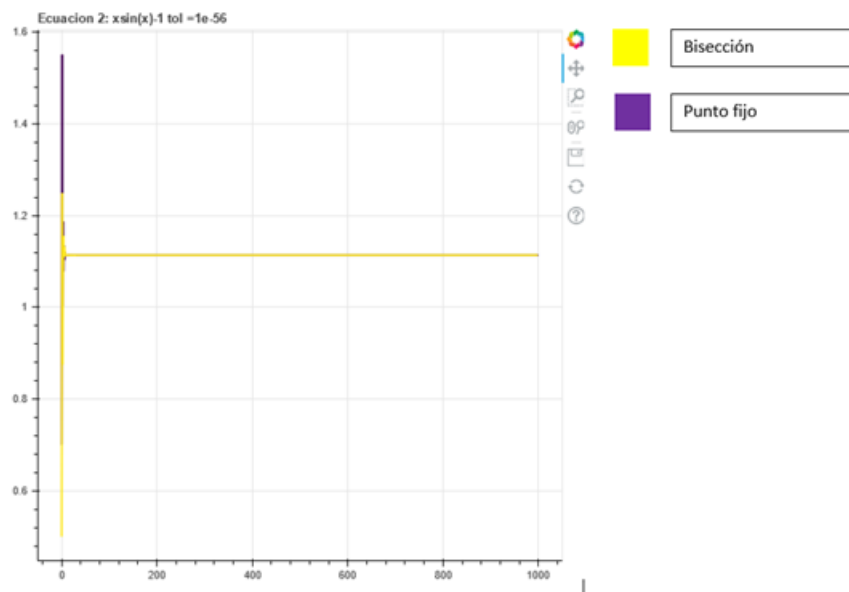


Figura 19: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 2

Ecuación 3

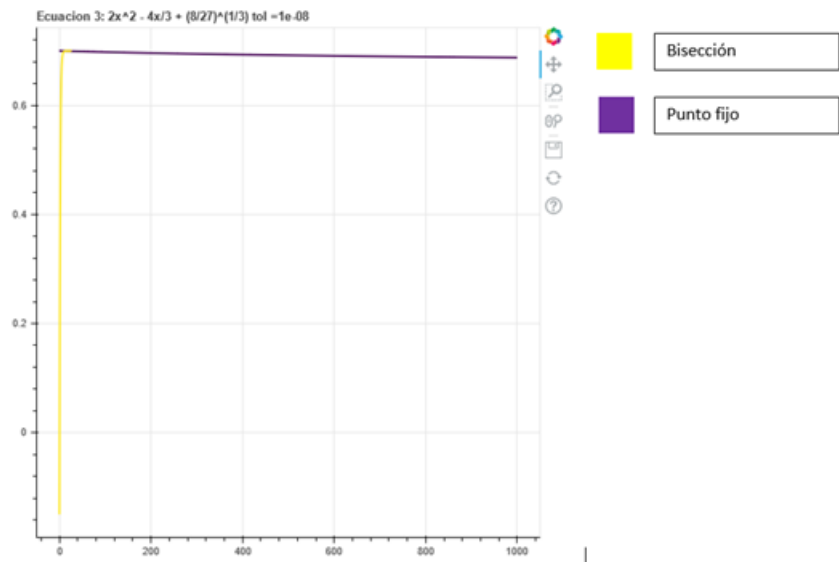


Figura 20: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 3

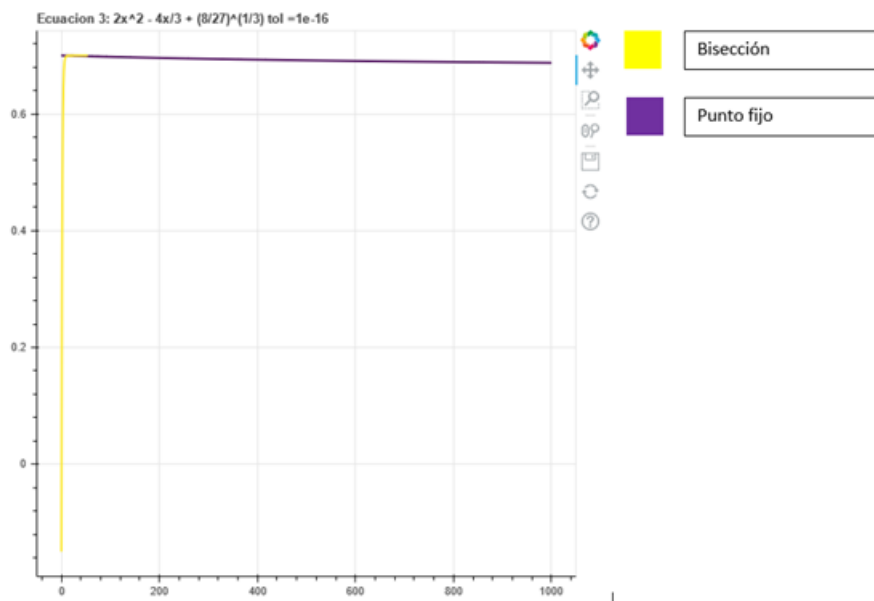


Figura 21: Grafica de barras con los resultados de la ecuacion 3

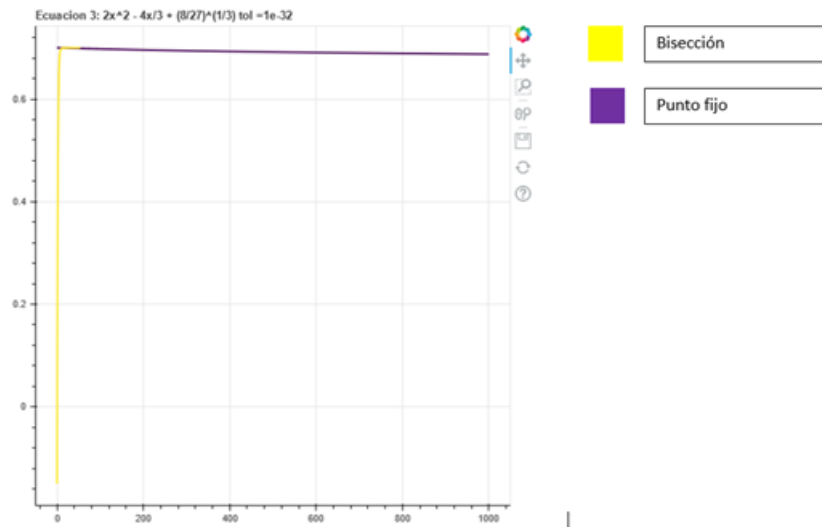


Figura 22: Gráfica con los resultados de la ecuación 3

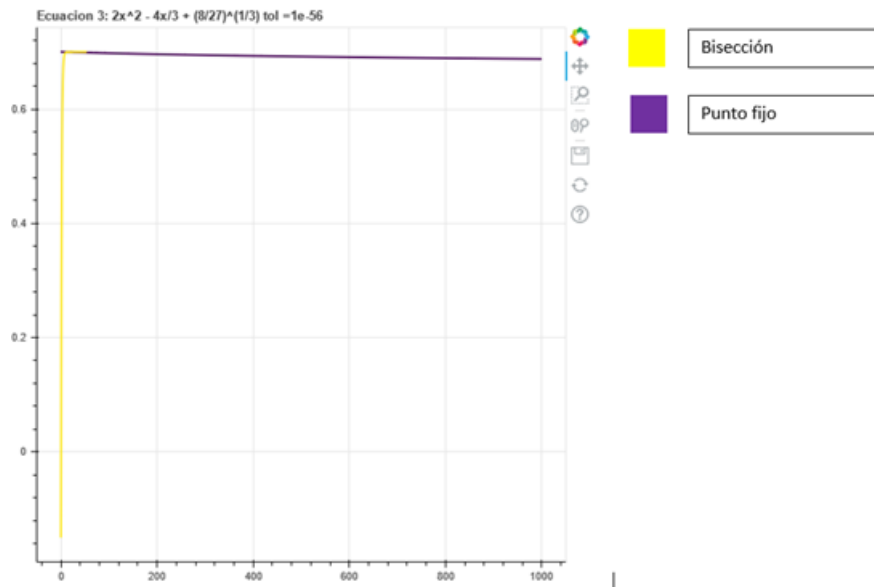


Figura 23: Gráfica con los resultados de la ecuación 3

Ecuación 4

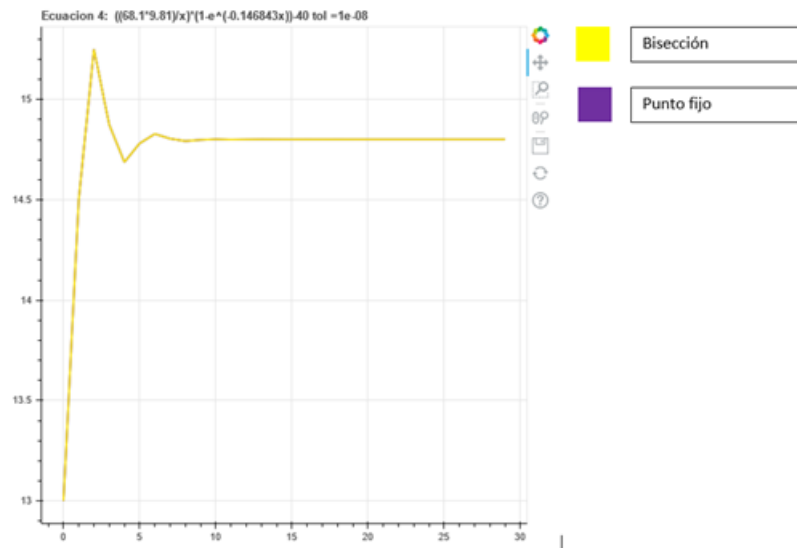


Figura 24: Gráfica con los resultados de la ecuación 4

Ecuación 5

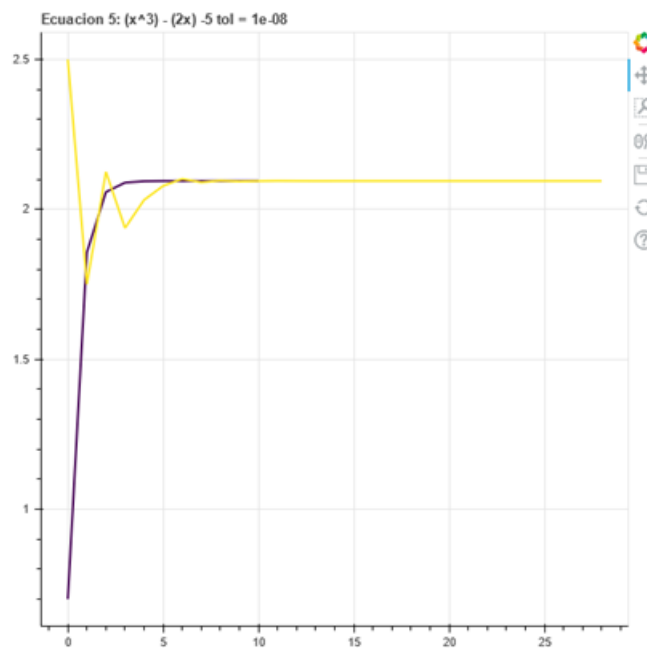


Figura 25: Gráfica con los resultados de la ecuación 5

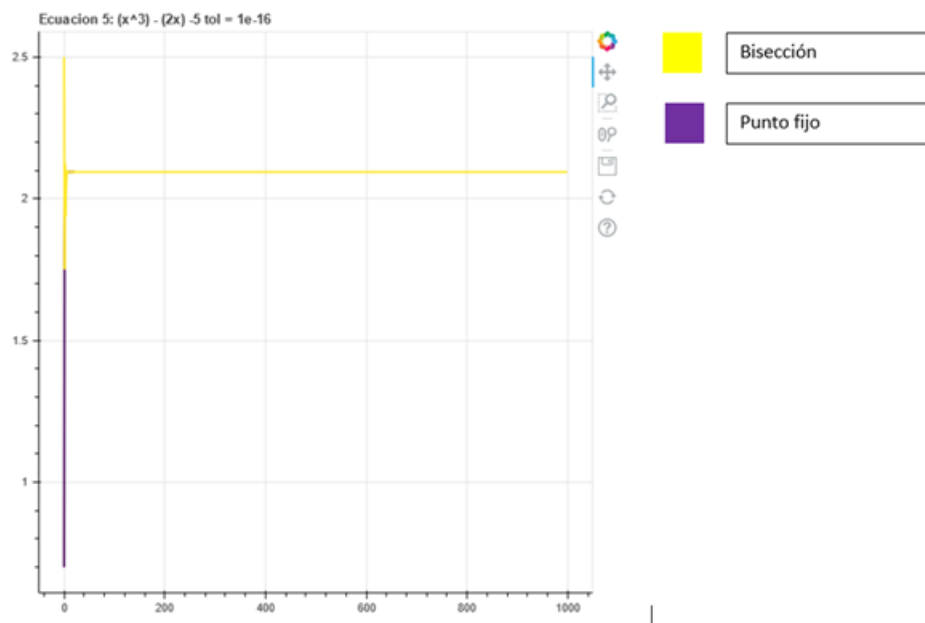


Figura 26: Gráfica con los resultados de la ecuación 5

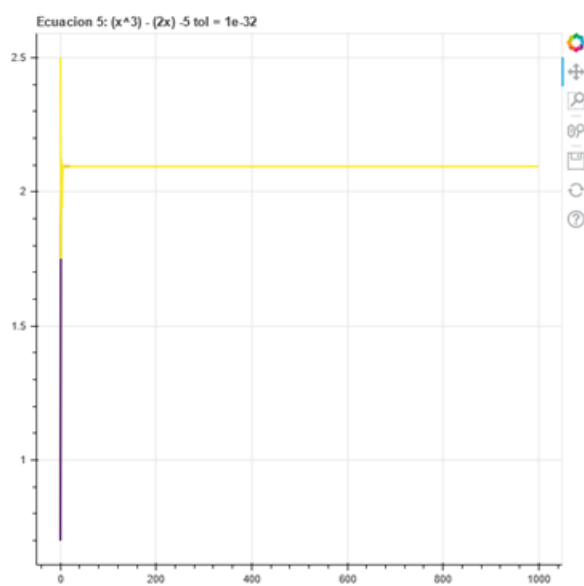


Figura 27: Gráfica con los resultados de la ecuación 5

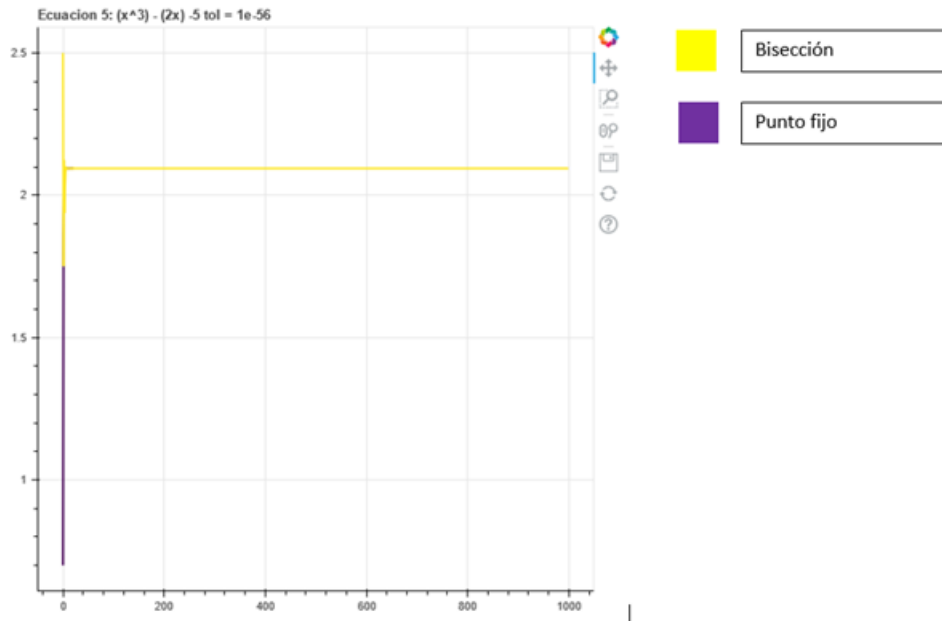


Figura 28: Gráfica con los resultados de la ecuación 5

Referencias

Guillén, A. (n.d.). Proyecto Métodos Numéricos MA-0320. Retrieved from Proyecto Métodos Numéricos MA-0320:

<https://arturoguillen90.wordpress.com/aceleracion-de-convergencia/steffensen/> Rodríguez, L. (2014). Análisis Numérico Básico. Escuela Superior Politécnica del Litoral.