Фадеев Статистика ДЗ 2

1 Задача

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0; b]$. Найдите оценку параметра b методом моментов. Докажите, что полученная оценка — несмещенная, состоятельная и асимптотически нормальная. Найдите показатель эффективности по Рао – Крамеру $e\left(\widehat{b}\right)$ найденной оценки.

Равномерное распределение на отрезке $[0; b]$ имеет математическое ожидание $E(X) = \frac{b}{2}$ и дисперсию $D(X) = \frac{b^2}{12}$.

Метод моментов заключается в приравнивании выборочных моментов теоретическим моментам. Первый выборочный момент:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Первый теоретический момент:

$$E(X) = \frac{b}{2}$$

Приравняем их и решим относительно b:

$$\overline{X} = \frac{b}{2} \Rightarrow \widehat{b} = 2\overline{X}$$

Теперь докажем свойства полученной оценки:

1. Несмещенность:

$$E(\widehat{b}) = E(2\overline{X}) = 2E(\overline{X}) = 2E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{2} = b$$

Таким образом, полученная оценка является несмещенной.

2. Состоятельность:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\widehat{b}) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(2\overline{X}) = 4\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\overline{X}) = 4\cdot\frac{D(X)}{n} = \frac{b^2}{3n} \to 0$$

Таким образом, полученная оценка является состоятельной.

3. Асимптотическая нормальность:

По центральной предельной теореме:

$$\frac{\left(\overline{X} - E(X)\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\overline{X})}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Отсюда следует, что:

$$\frac{\left(\widehat{b} - b\right)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\widehat{b})}} = \frac{2\left(\overline{X} - E[X]\right)}{2\sqrt{\operatorname{Var}(\overline{X})}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Таким образом, полученная оценка является асимптотически нормальной.
4. Показатель эффективности по Рао – Крамеру:

Информационное неравенство Крамера-Рао для несмещенных оценок:

$$e(\widehat{b}) = \frac{1}{n \cdot \operatorname{Var}(\widehat{b}) \cdot I(b)}$$

где $I(b)$ - информация Фишера:

$$I(b) = E\left(\left[\frac{\partial}{\partial b} \ln f(X;b)\right]^2\right) = E\left(\left[\frac{\partial}{\partial b} \ln \frac{1}{b}\right]^2\right) = \frac{1}{b^2}$$

где $f(X;b)$ - функция плотности вероятности для равномерного распределения на отрезке $[0;b]$.

Показатель эффективности:

$$e(\widehat{b}) = \frac{1}{n \cdot \operatorname{Var}(\widehat{b}) \cdot I(b)} = \frac{1}{n \cdot \frac{b^2}{3n} \cdot \frac{1}{b^2}} = 3$$

2 Задача

Известно, что случайная величина X имеет плотность распределения следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{Если } x \geq 0 \\ 0 & \text{Если } x < 0 \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Найдите по выборке $X_1, \ldots, X_n$ оценку параметра θ методом максимального правдоподобия.

Функция правдоподобия для выборки $X_1, \ldots, X_n$ имеет вид:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta^2 X_i e^{-\theta X_i} = \theta^{2n} \prod_{i=1}^{n} X_i e^{-\theta X_i}$$

Логарифмируем функцию правдоподобия:

$$\ln L(\theta) = 2n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \theta \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Находим производную логарифма функции правдоподобия по параметру θ и приравниваем её к нулю:

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

Откуда получаем оценку параметра θ методом максимального правдоподобия:

$$\hat{\theta}_{\max} = \frac{2}{\overline{X}}$$

3 Задача

Имеется случайная выборка из генеральной совокупности X с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} e^{a-x} & \text{Если } x \geq a \\ 0 & \text{Если } x < a \end{cases}$$

Найдите оценку параметра a методом моментов

Для нахождения оценки параметра a методом моментов необходимо приравнять теоретические и выборочные моменты одного порядка:

$$\mu_1' = E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{a}^{+\infty} x e^{a-x} dx == a + 1$$

Выборочное среднее:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Таким образом, приравниваем $\mu_1' = \overline{X}$ и находим оценку параметра a:

$$a + 1 = \overline{X} \Rightarrow \hat{a} = \overline{X} - 1$$

Таким образом, оценка параметра a методом моментов равна $\hat{a} = \overline{X} - 1$.

4 Задача

Для случайной величины X известна ее дисперсия σ^2, математическое ожидание m неизвестно. Требуется по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ найти несмещенную оценку величины m^2.

Докажите, что такой оценкой является статистика $T = \left(\overline{X}\right)^2 - \frac{\sigma^2}{n}$

Несмещенность означает, что $E(T) = m^2$, то есть нужно доказать, что $E(\overline{X}^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = m^2$.

Раскроем квадрат среднего: $\overline{X}^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j$

Теперь найдем математическое ожидание этого выражения:

$$E(\overline{X}^2) = E\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j)$$

Если $i \neq j$, то X_i и X_j независимы, поэтому $E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = m^2$.

Если $i = j$, то $E(X_i X_j) = E(X_i^2) = \sigma^2 + m^2$.

Таким образом, получаем:

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{n^2}\left(n(\sigma^2 + m^2) + n(n-1)m^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} + m^2$$

Итак, $E(\overline{X}^2 - \frac{\sigma^2}{n}) = m^2$, что и требовалось доказать. Значит, статистика $T = \overline{X}^2 - \frac{\sigma^2}{n}$ является несмещенной оценкой величины m^2.