Фадеев ДЗ 4 Семинар ТВиМС

1 Задача

Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: Y и Z — от 1 до 20 с вероятностью 1/20 , а X только значения 5 и 10, при этом $P(X = 5) = 9/10$. Найдите вероятность $P(X < Y < Z)$.

Зафиксируем ***случайную величину*** $Y = k$, где $k \in \{1, 2, \dots, 20\}$, так как X и Z ***независимые случайные величины***, тогда X<k и k<Z будут ***независимыми случайными событиями***, отсюда:

$$P(X < Y < Z) = \sum_{k=1}^{20} P(Y = k)P(X < k < Z) = \sum_{k=1}^{20} P(Y = k)P(X < k)P(k < Z)$$

*Поскольку **случайная величина** X не принимает значения меньше 5, то при $k < 6$, $P(X < k) = 0$, аналогично **случайная величина** Z не принимает значения больше 20 отсюда $P(20 < Z) = 0$*

$$P(X < Y < Z) = \sum_{k=6}^{19} P(Y = k)P(X < k)P(k < Z)$$
$$P(X < Y < Z) = \frac{1}{20}\left(\frac{9}{10}\sum_{k=6}^{10} P(k < Z) + \sum_{k=11}^{19} P(k < Z)\right)$$
$$\frac{9}{10}\sum_{k=6}^{10} P(k < Z) = \frac{9}{10}\left(\frac{14}{20} + \frac{13}{20} + \frac{12}{20} + \frac{11}{20} + \frac{10}{20}\right) = \frac{54}{20}$$
$$\sum_{k=11}^{19} P(k < Z) = \frac{9}{20} + \frac{8}{20} + \ldots + \frac{1}{20} = \frac{45}{20}$$

$$\boxed{P(X < Y < Z) = \frac{1}{20}\left(\frac{54}{20} + \frac{45}{20}\right) = \frac{99}{400} = 0.2475}$$

2 Задача

Найти дисперсию случайной величины - числа попаданий в мишень при трех выстрелах, если вероятность попадания фиксирована и равна 0.7.

Пусть X_k — ***событие попадания по мишени при kтом выстреле, которая при попадании в мишень с вероятностью*** $p = 0.7$ ***принимает значение 1, а при любом другом исходе с вероятностью*** $q = 0.3$ ***принимает значение 0.***

$E[X_k] = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$
$D[X_k] = E[X_k^2] - E[X_k]^2 = (p \cdot 1^2 + q \cdot 0^2) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Используя свойство ***дисперсии независимых случайных величин*** $D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2]$ найдем ***дисперсию*** числа попаданий в мишень при трех выстрелах:

$$D[X_1 + X_2 + X_3] = D[X_1] + D[X_2] + D[X_3] = 3pq$$

$$\boxed{\mathrm{D}[\mathrm{X}_1 + X_2 + X_3] = 0.63}$$

3 Задача

Покажите, что для независимых ДСВ X и Y:
(1) МО произведения равно произведению МО.
(2) дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

(1)
$E[XY] = \sum_j \sum_k P(X = X_j; Y = Y_k) X_j Y_k = \sum_j \sum_k P(X = X_j) P(Y = Y_k) X_j Y_k$

$$\boxed{\mathrm{E[XY]} = \sum_j P(X = X_j) X_j \cdot \sum_k P(Y = Y_k) Y_k = E[X]E[Y]}$$

(2)
$D[X+Y] = E[(X+Y)^2] - E[X+Y]^2 = E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2 =$
$= (E[X^2] - E[X]^2) + (E[Y^2] - E[Y]^2) + (2E[XY] - 2E[X]E[Y])$

Из доказанного в пункте (1) $E[XY] = E[X]E[Y]$ следует:

$$\boxed{\mathrm{D[X+Y]} = (\mathrm{E[X}^2] - E[X]^2) + (E[Y^2] - E[Y]^2) = D[X] + D[Y]}$$

4 Задача

Пусть $\overline{XY} = 10X + Y$ — число, выбранное наугад из всех двузначных чисел. Докажите, что случайные величины X и Y (число единиц и число десятков) независимы.

Поскольку $\overline{XY}$ двузначное число выбранное наугад, тогда:

$X \in \{1, 2, \ldots, 9\}, Y \in \{0, 1, \ldots, 9\}$,

$\forall j, k \ P(\overline{XY} = 10X_j + Y_k) = \frac{1}{90}, \ P(X = X_j) = \frac{1}{9}, \ P(Y = Y_k) = \frac{1}{10}$

$$\boxed{\mathrm{P}(\overline{XY} = 10X_j + Y_k) = P(X = X_j) \cdot P(X = Y_k)}$$

5 Задача

Пусть X и Y независимы и $E(X) = E(Y) = 0$, покажите, что:

$$E[(X+Y)^3] = E[X^3] + E[Y^3]$$

Из свойств ***математического ожидания*** двух независимых событий:
$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
$E[XY] = E[X]E[Y]$
Из этих свойств следует, что:

$$E[(X+Y)^3] = E\left[X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3\right]$$

$$E\left[X^3 + 3YX^2 + 3XY^2 + Y^3\right] = E[X^3] + 3E[Y]E[X^2] + 3E[X]E[Y^2] + E[Y^3]$$

Поскольку $E(X) = E(Y) = 0$ получаем:

$$\boxed{\mathrm{E[(X+Y)^3]} = E[X^3] + E[Y^3]}$$