Фадеев ДЗ 6 Семинар ТВиМС

1 Задача

В *сфере* радиуса r с центром в точке O наугад выбирается точка M. Найти функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, равной расстоянию между точками O и M.

$$V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Пусть ОМ$=x$, тогда *функция распределения искомой случайной величины*:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Если } x < 0 \\ \frac{x^3}{r^3} & \text{Если } 0 \leq x \leq r \\ 1 & \text{Если } x > r \end{cases}$$

Плотность вероятности случайной величины:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Если } x < 0 \\ \frac{3x^2}{r^3} & \text{Если } 0 \leq x \leq r \\ 0 & \text{Если } x > r \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$E[x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{r} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{r} \frac{3x^3}{r^3}dx = \frac{3x^4}{4r^3}\bigg|_0^r = \frac{3r}{4}$$

Дисперсия:

$$E[x^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \int\limits_{0}^{r} x^2f(x)dx = \int\limits_{0}^{r} \frac{3x^4}{r^3}dx = \frac{3x^5}{5r^3}\bigg|_0^r = \frac{3r^2}{5}$$

$$D[x] = E[x^2] - E[x]^2 = \frac{48r^2 - 45r^2}{80} = \frac{3r^2}{80}$$

2 Задача

При каком значении C функция $F(x)$ будет функцией распределения некоторой случайной величины?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{C}{x} & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Выпишите плотность распределения и определите существует ли Математическое ожидание.

$$\begin{cases} \forall x \quad 0 \le F(x) \le 1 \\ \forall x \quad F(x)' \ge 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ — Выполнено
2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ — Выполнено
3)

$$F(x)' = \begin{cases} 0 & \text{если } x \le 1 \\ \dfrac{C}{x^2} & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

Функция F(x) монотонно не убывает когда $C \ge 0$, необходимо проверить данное условие на концевой точке $1 + \epsilon$:
$\lim\limits_{x \to 1+\epsilon} 1 - \frac{C}{x} = 1 - C$
Отсюда:

$$\boxed{0 \le C \le 1}$$

Для непрерывности ***функции распределения*** С должно быть равно 1

$$E[x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xF(x)'dx = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{C}{x^2}dx = \lim_{x \to \infty} C\ln(x) = \infty$$

3 Задача

При каком значении константы С $f(x)$ задает плотность распределения? После вычисления константы, найдите функцию распределения.

$$f(x) = \frac{C}{1 + x^2}$$

А что можно сказать про мат. ожидание этой величины?

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{x^2+1}dx = \mathrm{C}\operatorname{arctg} x|_{-\infty}^{\infty} = C\pi = 1$$

$$C = \frac{1}{\pi}$$

$$E[x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{C}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{C}{2}\ln(x^2+1)|_{-\infty}^{\infty}$$

Воспользуемся четностью функции x^2 :

$$E[x] = \frac{C}{2}\ln(x^2+1)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{C}{2}\lim_{x \to \infty}(ln(x^2+1) - ln(x^2+1)) = 0$$

4 Задача

Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.
Найдите $E(X)$**,** $Var(X)$**,** $Var(7 \cdot X^{5/2})$**.**

$$\boxed{\mathrm{E[x]}=\int\limits_0^1 xdx = \tfrac{1}{2}}$$

$$E[x^2] = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\mathrm{D[x]}=\mathrm{E[X^2]} - E[x]^2 = \tfrac{1}{6}}$$

$$E[7x^{5/2}] = \int\limits_0^1 7x^{5/2} dx = 2$$

$$E[(7x^{5/2})^2] = \int\limits_0^1 49x^5 dx = \frac{49}{6}$$

$$\boxed{\mathrm{D[7x^{5/2}]} = E[49x^5] - E[7x^{5/2}]^2 = \tfrac{25}{49}}$$

5 Задача

Доказать, что если график функции $f(x)$ **— плотности вероятности случайной величины** X **— симметричен относительно прямой** $x = \nu$ **и** $E(X)$ **существует, то** $E(X) = \nu$**.**

$$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\nu} xf(x)dx + \int\limits_{\nu}^{\infty} xf(x)dx$$

За счет симметрии $\forall x \exists y = 2\nu - x : f(x) = f(y)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\nu} xf(x)dx = \int\limits_{\infty}^{\nu} (2\nu - x)f(2\nu - x)d(2\nu - x) = \int\limits_{\nu}^{\infty} (2\nu - x)f(x)dx$$

$$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{\nu} xf(x)dx + \int\limits_{\nu}^{\infty} xf(x)dx = 2\nu \int\limits_{\nu}^{\infty} f(x) - \int\limits_{\nu}^{\infty} xf(x)dx + \int\limits_{\nu}^{\infty} xf(x)dx$$

$$\boxed{\mathrm{E[X]}=2\nu \int\limits_{\nu}^{\infty} f(x) = \nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = \nu}$$