

1 Задача

Для случайной величины X получена выборка из восьми значений:

$$5; 4; 11; 6; 8; 4; 12; 2.$$

Постройте доверительный интервал для стандартного отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0,9$.

Для нахождения 90% доверительного интервала для стандартного отклонения σ воспользуемся распределением хи-квадрат. Для этого сначала найдем несмещенную оценку дисперсии, используя формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx 6.5$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx 12.57$$

Далее находим квантили распределения хи-квадрат для уровня доверия 0.9 и числа степеней свободы $8-1=7$. Используя таблицу значений или специальный калькулятор, находим, что левый и правый квантили равны соответственно 2.17 и 14.07.

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.95,5}^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{0.05,5}^2}}.$$

$$\sqrt{\frac{7 \cdot 12.57}{14.07}} < \sigma < \sqrt{\frac{7 \cdot 12.57}{2.17}}.$$

$$2.5 < \sigma < 6.37$$

2 Задача

Для случайной величины X получен интервальный статистический ряд:

15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
2	3	9	17	10	6	3

Постройте приближенный доверительный интервал с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ для математического ожидания случайной величины X .

Для построения приближенного доверительного интервала с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ для математического ожидания случайной величины X , воспользуемся распределением студента. Сначала найдем выборочное среднее \bar{x} и выборочную дисперсию s^2 :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 x_i \cdot m_i = 52$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^7 m_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 = 200$$

где x_i - середина интервала, m_i - частота интервала, n - общее число наблюдений.

Затем найдем критическое значение $t_{\text{крит}}$ по таблице распределения Стюдента:

$$t_{\text{крит}} = t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 49} = 2$$

Построим доверительный интервал для математического ожидания X :

$$\bar{x} - \frac{t_{\text{крит}} \cdot s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \frac{t_{\text{крит}} \cdot s}{\sqrt{n}}$$

$$48.06 < \mu < 55.94$$

3 Задача

Проведено 100 испытаний по подбрасыванию монеты. При этом орел выпал 45 раз. Постройте приближенный доверительный интервал с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ для вероятности p выпадения орла.

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{45}{100} = 0.45$$

где k - число выпадений орла, n - общее число испытаний.

найдем критическое значение $Z_{\text{крит}}$ по таблице нормального распределения:

$$Z_{\text{крит}} = Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$$

$$\hat{p} - z_{\text{крит}} \sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \hat{p} + z_{\text{крит}} \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$0.35 < p < 0.55$$

4 Задача

Обследуется средняя продолжительность телефонного разговора. Сколько телефонных разговоров должно быть зафиксировано, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что отклонение

средней продолжительности зафиксированных разговоров от генеральной средней не превосходит 30 секунд, если стандартное отклонение длительности одного разговора равно 3 минутам

$$\sigma = 3$$

Найдем квантиль нормального распределения:

$$z_{\text{крит}} = z_{0.025} \approx 1.96$$

$$\frac{z_{\text{крит}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = 0.5$$

$$(2 \cdot z_{\text{крит}} \cdot \sigma)^2 = n$$

$$n \approx 139$$