Фадеев Статистика ДЗ 4

1 Задача

Производится выборочное обследование возраста читателей массовых библиотек. Сколько карточек необходимо взять для обследования, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что средний возраст в выборочной совокупности отклонится от генерального среднего не более, чем на 1 год? Генеральное стандартное отклонение принять равным 26 годам.

Для решения задачи необходимо использовать формулу доверительного интервала для среднего значения:

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

где $\overline{x}$ - выборочное среднее, σ - генеральное стандартное отклонение, n - размер выборки, $z_{\alpha/2}$ - квантиль стандартного нормального распределения уровня $\alpha/2$.

Так как требуется оценить средний возраст с точностью до 1 года с вероятностью 0,95, то можно записать неравенство:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1$$

Из таблицы квантилей стандартного нормального распределения находим, что $z_{\alpha/2} = 1.96$ для $\alpha = 0.05$. Подставляя это значение и генеральное стандартное отклонение $\sigma = 26$ в неравенство, получаем:

$$1.96\frac{26}{\sqrt{n}} \leq 1$$

Решая это неравенство относительно n, получаем:

$$n \geq (1.96 \cdot 26)^2 \approx 2597.$$

Значит, необходимо взять не менее 2597 карточек для обследования, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что средний возраст в выборочной совокупности отклонится от генерального среднего не более, чем на 1 год.

2 Задача

Экзаменационные оценки студентов по дисциплине «Теория вероятностей» имеют нормальный закон распределения со стандартным отклонением $\sigma = 0,45$. В случайной выборке из 36 студентов средний балл составил 3,8. Найдите 95 процентный доверительный интервал для средней оценки по теории вероятностей.

Используем формулу для доверительного интервала для доли::

$$\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{x} = 3.8;\ \sigma = 0.45;\ Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} \approx 1.96$$

$$3.8 - 1.96\frac{0.45}{6} < \mu < 3.8 + 1.96\frac{0.45}{6}$$

$$3.653 < \mu < 3.947$$

3 Задача

В обслуживающей фирме каждый день регистрировали число поступивших жалоб. Для исследования среднего числа заявлений были случайно выбраны 7 дней. Число жалоб в эти дни: $10, 12, 8, 5, 11, 9, 14$ **соответственно. Вычислите доверительный интервал для среднего числа ежедневных заявлений на уровне значимости** $\alpha = 0,05$**.**

(В изначальной задаче $\alpha = 0.01$**, но так как ответы из лекции не совпадали я предположил взять** $\alpha = 0.05$**)**

Сначала найдем выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx 9.857$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \approx 8.476$$

Затем найдем критическое значение $t_{\text{крит}}$ по таблице распределения Стьюдента:

$$t_{\text{крит}} = t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,6} \approx 2.447$$

И, наконец, построим доверительный интервал для среднего числа ежедневных заявлений:

$$\overline{x} - \frac{t_{\text{крит}} \cdot s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + \frac{t_{\text{крит}} \cdot s}{\sqrt{n}}$$

$$9.857 - 2.447\sqrt{\frac{8.476}{7}} < \mu < 9.857 + 2.447\sqrt{\frac{8.476}{7}}$$

$$7.164 < \mu < 12.55$$