

## 1 Задача

Пусть  $X_1, X_2$  — выборка значений случайной величины  $X$  с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Рассматривается оценка дисперсии  $\sigma^2$  вида  $\hat{\sigma}^2 = c(X_1 - X_2)^2$ . Найдите такое значение константы  $c$ , при котором  $\hat{\sigma}^2$  является несмещенной оценкой  $\sigma^2$ .

Несмещенность означает, что математическое ожидание оценки равно истинному значению параметра:  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ . Найдем математическое ожидание оценки:

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(c(X_1 - X_2)^2) = cE(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2) = c(E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2))$$

Используем свойства математического ожидания:

$$E(X_1) = E(X_2) = m,$$

$$E(X_1^2) = E(X_2^2) = \sigma^2 + m^2,$$

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = m^2.$$

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(c(X_1 - X_2)^2) = c(\sigma^2 + m^2 - 2m^2 + \sigma^2 + m^2) = 2c\sigma^2$$

Чтобы оценка была несмещенной, необходимо, чтобы  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ , то есть

$$2c\sigma^2 = \sigma^2$$

Отсюда находим  $c$ :

$$c = \frac{1}{2}$$

## 2 Задача

Выборочные значения случайной величины  $X$  представлены в следующей таблице:

$x_i$	-3	-2	0	1	4
$n_i$	7	10	9	4	10

Найдите несмещенную оценку для дисперсии генеральной совокупности при условии:

а) математическое ожидание генеральной совокупности известно и равно 0;

б) математическое ожидание генеральной совокупности неизвестно.

**а)** Несмещенная оценка для дисперсии генеральной совокупности при известном математическом ожидании равна:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - m)^2$$

Вычислим оценку дисперсии:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{39} [7 \cdot (-3 - 0)^2 + 10 \cdot (-2 - 0)^2 + 9 \cdot (0)^2 + 4 \cdot (1 - 0)^2 + 10 \cdot (4 - 0)^2] = 6.675.$$

**б)** Несмещенная оценка для дисперсии генеральной совокупности при неизвестном математическом ожидании равна:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2$$

Вычислим выборочное среднее значение:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{1}{40} (7 \cdot (-3) + 10 \cdot (-2) + 9 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 10 \cdot 4) = \frac{3}{40}.$$

Вычислим оценку дисперсии:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{39} \left[ 7 \cdot \left(-3 - \frac{3}{40}\right)^2 + 10 \cdot \left(-2 - \frac{3}{40}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{3}{40}\right)^2 + 4 \cdot \left(1 - \frac{3}{40}\right)^2 + 10 \cdot \left(4 - \frac{3}{40}\right)^2 \right] \approx 6.84.$$

### 3 Задача

Имеются два наблюдения  $X_1, X_2$  случайной величины  $X$ . Рассмотрим две оценки математического ожидания  $m$  этой случайной величины:

$$1) \bar{X} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$2) \hat{X} = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

**а)** Являются ли оценки несмещенными?

**б)** Какая из оценок более эффективна?

**а)**

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2E(X) = E(X)$$

$$E(\hat{X}) = E\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{1}{3} \cdot (E(X) + 2E(X)) = E(X)$$

Обе оценки являются несмещенными

**б)**

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) = \frac{1}{2}Var(X)$$

$$Var(\hat{X}) = Var\left(\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right) = \frac{5}{9}Var(X)$$

Первая оценка  $(\bar{X})$  будет более эффективной