Фадеев ДЗ 5 Семинар ТВиМС

1 Задача

Пусть СВ X распределена по геометрическому закону. Доказать, что:

$$\mathbf{D[X] = \frac{q}{p^2}}$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + E[X]$$

$$pq\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'' = pq\left(\frac{q}{1-q}\right)'' = \frac{2q}{p^2}$$

$$E[X^2] = \frac{2q}{p^2} + E[X] = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\boxed{\mathrm{D[X]{=}E[X^2]} - E[X]^2 = \tfrac{q}{p^2}}$$

2 Задача

Сколько в среднем подбрасываний игральной кости придется произвести до тех пор, пока хотя бы по одному разу не выпадет каждая из четных цифр 2, 4, 6?

Пусть ***случайная величина*** X — исход подбрасывания кубика,
x_1 — первое число которое выпало из множества $\{2, 4, 6\}$,
x_2 — первое число которое выпало из множества $\{2, 4, 6\}\backslash\{x_1\}$,
x_3 — первое число которое выпало из множества $\{2, 4, 6\}\backslash\{x_1, x_2\}$.

$$p_1 = P(X = x_1) = \frac{3}{6},\quad p_2 = P(X = x_2) = \frac{2}{6},\quad p_3 = P(X = x_3) = \frac{1}{6}$$

Распределение вероятности перового успеха $I_k \sim Geom(p_k)$
Используя свойство ***отсутствия памяти*** среднее количество подбрасываний:

$$\boxed{\mathrm{E[I_1} + I_2 + I_3] = E[I_1] + E[I_2] + E[I_3] = 2 + 3 + 6 = 11}$$

3 Задача

Трое учащихся независимо друг от друга сдают экзамен по математике на отлично с вероятностями 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно. Пусть X — общее число полученных ими отличных оценок. Вычислите $E[X]$ и $D[X]$.

Пусть ***случайная величина*** $Y_k \sim Bern(p_k)$ определяет сдал ли **k**тый ученик экзамен или нет, где $\mathbf{p_k = 1 - 0.1 * k}$, тогда:

$$E[X] = E[Y_1 + Y_2 + Y_3] = E[Y_1] + E[Y_2] + E[Y_3]$$

$$D[X] = D[Y_1 + Y_2 + Y_3] = D[Y_1] + D[Y_2] + D[Y_3]$$

$$E[Y_k] = p_k, \quad D[Y_k] = p_k(1 - p_k)$$

$$\boxed{\text{E[X]=2.4, D[X]=0.46}}$$

4 Задача

В данном городе малышей поздравляют с Новым годом 365 Дедов-Морозов. Оцените вероятность того, что из них:
а) ни один не родился 1 января;
б) ровно трое отмечают свой день рождения 1 января;
в) не менее трех отмечают свой день рождения 1 января?

Искомое ***случайное распределение*** $X \sim Bin(n = 365, p = \frac{1}{365})$, так как **n** относительно большое,и **p** относительно мало, данное распределение можно приблизить с помощью $X' \sim Pois(\lambda = np = 1)$.

а) $\boxed{P(X' = 0) = e^{-1} \approx 0.367879}$

б) $\boxed{P(X' = 3) = \frac{e^{-1}}{3!} \approx 0.061313}$

в) $P(X' = 1) = e^{-1}, \; P(X' = 2) = \frac{e^{-1}}{2!}$,

$$\boxed{\text{P(X'>=3)=1-P(X'=0)-P(X'=1)-P(X'=2)} \approx 0.080301}$$

5 Задача

Докажите следующее утверждение:

Если независимые случайные величины $X_1, X_2 ... X_m$ имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_m$ соответственно, то сумма $X = X_1 + X_2 + ... + X_m$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m$.

Докажем с помощью ***метода математической индукции***:

(БАЗА) при m=2, $X = X_1 + X_2,\ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

$$P(X = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k,\ X_2 = n - k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = n - k)$$

$$P(X = n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} e^{-\lambda_2}}{n - k!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

(ШАГ) $X' = X_1 + X_2 + ... + X_m$, $\lambda' = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m$,
Используя вышеупомянутый факт получаем $X' \sim Pois(\lambda')$
$X = X_1 + X_2 + ... + X_{m+1}$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{m+1}$,
$X = X' + X_{m+1},\ \lambda = \lambda' + \lambda_{m+1}$,

Используя **(БАЗУ)** получаем, что $X \sim Pois(\lambda)$

$\boxed{\textbf{ЧТД!}}$