

Фадеев ДЗ 2 Семинар ТВиМС

1 Задача

Сорок участников шахматного турнира разбиваются на 4 группы по 10 человек. Найти вероятность того, что 4 самых рейтинговых участника окажутся в разных группах.

Пусть первый самый рейтинговый участник попал в одну из четырёх групп, тогда вероятность того, что второй попадет не в его группу $= \frac{30}{39}$

Вероятность того, что третий попадет в группу где нет первых двух участников $= \frac{20}{38}$

Вероятность того, что четвертый попадет в оставшуюся группу $= \frac{10}{37}$

Искомая вероятность:

$$P = \frac{30 \cdot 20 \cdot 10}{39 \cdot 38 \cdot 37}$$

2 Задача

Рассмотрим множество из N элементов, наудачу выбирается любое его подмножество. Найти вероятность того, что в подмножестве четное число элементов.

Пусть мы выбрали подмножество A , с мощностью $|A|=k$

Всего существует способов выбрать k элементов подмножества из N элементов множества C_N^k

$$\text{Общее количество комбинаций} = \sum_{k=0}^N C_N^k = 2^N$$

Количество комбинаций при которых мы берем только четное число элементов $= \sum_{k=0}^{[N/2]} C_N^{2k}$

$$\sum_{k=0}^{[N/2]} C_N^{2k} = \sum_{k=0}^{[N/2]} (C_{N-1}^{2k} + C_{N-1}^{2k-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1}^k = 2^{N-1}$$

Искомая вероятность:

$$P = \frac{2^{N-1}}{2^N} = \frac{1}{2}$$

3 Задача

В k ящиках размещают случайным образом n шаров. Найти вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым.

Общее количество комбинаций разместить n шаров в k ящиков C_{n+m-1}^{m-1}

Количество способов разместить n шаров в k ящиков чтобы в каждом ящике был хотя бы 1 шар $= C_{n-1}^{m-1}$

Вероятность того, что в каждом ящике будет хотя бы один шар:

$$Q = \frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_{n+m-1}^{m-1}} = \frac{n!(n-1)!}{(n+m-1)!(n-m)!}$$

Искомая вероятность:

$$P = 1 - Q = \frac{(n+m-1)!(n-m)! - n!(n-1)!}{(n+m-1)!(n-m)!}$$

4 Задача

На восьми карточках написаны числа: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Берут две карточки и составляют дробь. Найдите вероятность того, что она сократима.

Общее количество способов выбрать 2 карты из 8ми $= C_8^2$

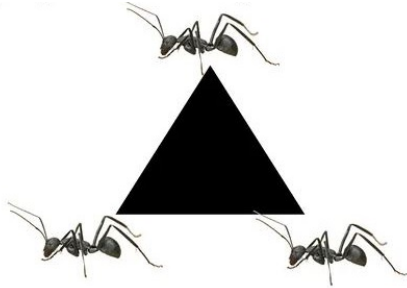
Заметим что числа 7, 11, 13 простые и не имеют общих делителей с остальными числами из множества, а остальные числа 2, 4, 6, 8, 12 четные и количество комбинаций выбрать из этих чисел $2 = C_5^2$

Искомая вероятность:

$$P = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

5 Задача

Есть треугольник с равными углами. На углах стоят по одному муравью. В какой-то момент муравьи начинают идти в другой угол вдоль стороны треугольника. В какой именно — определяется случайно. Каков шанс того, что ни один муравей не столкнётся с другим муравьём?



Так как каждый муравей может двигаться в 2х возможных направлениях независимо друг от друга общее количество путей муравьев $= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

Первый муравей может двигаться в двух возможных направлениях, для того чтобы не столкнуться с другим муравьём 2 муравей должен двигаться в противоположную сторону от 1 муравья, 3 муравей также обязан двигаться в противоположную сторону от 2 муравья, общее число благоприятных исходов $= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

Муравьи могут двигаться только по часовой и против часовой стрелки.

Искомая вероятность:

$$P = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$