Фадеев ДЗ 1 семенар ТВиМС

1 Задача

Сколько натуральных целых решений имеет уравнение:

а) $$x_1 + x_2 = 7$$

б) $$x_1 + x_2 + x_3 = 13$$

Задача аналогична, задаче с шарами и ящиками:
а)

$$\mathrm{C}_6^1 = \frac{6!}{1!5!} = 6$$

б)

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = 66$$

2 Задача

Напишите на python функции, вычисляющие число перестановок, размещений, сочетаний.

```
import math
def transpose(n): #перестоновки
    return math.factorial(n)
def arange(n, k): #размещения
    return (math.factorial(n))/(math.factorial(n-k))
def combination(n, k): #сочитания
    return (math.factorial(n))/(math.factorial(k))/(math.factorial(n-k))
```

3 Задача

В кондитерском магазине продавались 3 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Задача аналогична, задаче с шарами и ящиками:

$$c_9^2 = \frac{9!}{7!2!} = 36$$

4 Задача

При игре в домино 7 игроков делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

Каждому игроку выдают 4 игральных кости:
раздать 4 кости первому игроку C_{28}^4комбинаций,
второму игроку C_{24}^4, третему C_{20}^4 и тд.
в итоге :
$C_{28}^4 C_{24}^4 C_{20}^4 \ldots C_8^4 C_4^4 = \frac{28!}{4!4!4!4!4!4!4!}$

5 Задача

докажите следующие свойства числа сочетаний:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n \ ,$$

$$\sum_{m=0}^{n} nC_n^m = n2^{n-1} \ ,$$

$$\sum_{m=0}^{n} n^2 C_n^m = n\left(n+1\right) 2^{n-2} \ ,$$

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m = 0.$$

1) Из формулы бинома Ньютона следует:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k C_n^k = (1+x)^n$$

При x=1 получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$$

ЧТД.

4) аналогично:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0^n = 0$$

ЧТД.

2) вероятно имелось в виду:

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$$

используя свойство $C_n^k = C_n^{n-k}$
сложим две такие суммы таким образом :
$2\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = (0+n)C_n^0 + (1+(n-1))C_n^1 + (2+(n-2))C_n^2 + \ldots + (k+(n-k))C_n^k + \ldots = n\sum_{k=0}^{n} C_n^k = n2^n$
отсюда :
$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$
ЧТД.

3)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = S$$

$$k^2 C_n^k = \frac{k^2 n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{k(n-(k-1))n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = k(n-(k-1))C_n^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-(k-1))C_n^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n} kC_n^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^{k-1}$$

(1)

$$n\sum_{k=0}^{n} kC_n^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)C_n^k = n\sum_{k=0}^{n-1} kC_n^k + n\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k =$$

$$= (n\sum_{k=0}^{n} kC_n^k - n^2) + (n\sum_{k=0}^{n} C_n^k - n) = n^2 2^{n-1} + 2n2^{n-1} - n^2 - n$$

(2)

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)C_n^k = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 C_n^k + \sum_{k=0}^{n-1} kC_n^k =$$

$$= (\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k - n^2) + (\sum_{k=0}^{n} kC_n^k - n) = S + n2^{n-1} - n^2 - n$$

(1)-(2):

$$n^2 2^{n-1} + 2n2^{n-1} - n2^{n-1} - S = S$$

$$n(n+1)2^{n-1} = 2S$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$$

ЧТД.