Фадеев ДЗ 3 Семинар ТВиМС

1 Задача

Известно, что 5% мужчин и 0.25% женщин — дальтоники. Какова вероятность того, что наугад выбранный человек — дальтоник, если выбор производится из группы, содержащей равное число мужчин и женщин?

Пусть ***M — событие, при котором выбранный человек является мужчиной***,
W — событие, при котором выбранный человек является женщиной,
D — событие, при котором выбранный человек является дальтоником.

Из формулы полной вероятности:

$$\boxed{P(D) = P(D|M)P(M) + P(D|W)P(W) = 2,625\%}$$

2 Задача

Если в условиях предыдущего примера случайно выбранный человек оказался дальтоником, какова вероятность, что это мужчина?

Из ***формулы Байеса***:

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D)}$$

$$\boxed{P(M|D) \approx 95,238\%}$$

3 Задача

Имеется n урн, в каждой из которых по 4 белых и 6 черных шаров. Последовательно, из первой урны во вторую, затем из второй в третью и т.д., перекладывается по одному шару. Найти вероятность того, что шар, извлеченный затем из последней урны, окажется белым.

Пусть A_k ***— событие, при котором из урны с индексом k вытянули белый шар.***

Вероятность вытянуть белый шар из первой урны: $P(A_1) = \frac{4}{10}$

Вероятность вытянуть белый шар из второй урны по формуле полной вероятности: $P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$

$$P(A_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

Предположим, **что при любом k** $P(A_k) = \frac{4}{10}$, докажем с помощью метода математической индукции:

а) Для **k=1** $P(A_1) = \frac{4}{10}$ верно!

б) **Докажем для k+1**

Из формулы полной вероятности:

$$P(A_{k+1}) = P(A_{k+1}|A_k)P(A_k) + P(A_{k+1}|\overline{A_k})P(\overline{A_k})$$

$$\boxed{P(A_{k+1}) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{4}{10}}$$

4 Задача

В двух урнах содержатся шары двух цветов. В первой — 2 белых и 3 черных, во второй — 2 белых и 2 черных. Эксперимент состоит в перекладывании шаров: сначала одного из первой урны во вторую, а затем одного шара из второй урны снова в первую. Какой состав шаров в первой урне наиболее вероятен?

Пусть ***A* *— событие, при котором из первой урны взяли белый шар,*** ***B* *— событие, при котором из второй урны взяли белый шар.***

Событие $A \cap B$ дает исход {{2,3};{2,2}},

событие $\overline{A} \cap \overline{B}$ также дает исход {{2,3};{2,2}},

событие $\overline{A} \cap B$ дает исход {{3,2};{1,3}},

событие $A \cap \overline{B}$ дает исход {{1,4};{3,1}}.

$$P(\{3,2\};\{1,3\}) = P(\overline{A} \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(\{1,4\};\{3,1\}) = P(A \cap \overline{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$\boxed{\text{P(\{2,3\};\{2,2\})=P(A}\cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{25}}$$

5 Задача

В известной истории про лису, притворившуюся воротником на шубу жены рыбака, плутовка оказалась не столь жадной и удовлетворилась всего одной рыбиной. Рыбак знал, что он поймал 7 карпов и 4 леща. Приехав домой, первая рыбина, которую он вытащил из повозки, оказалась лещем. Какова вероятность, что лиса полакомилась карпом?

Пусть $\boldsymbol{K}$ — ***событие, при котором лиса взяла карпа***,
$\boldsymbol{L}$ — ***событие, при котором рыбак взял леща***.

Тогда по ***формуле Байеса***:

$$P(K|L) = \frac{P(L|K)P(K)}{P(L)}$$

$$P(L) = P(L|K)P(K) + P(L|\overline{K})P(\overline{K}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{11} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{4}{11}$$

Искомая вероятность:

$$\boxed{P(K|L) = \left(\tfrac{4}{10} \cdot \tfrac{7}{11}\right) : \tfrac{4}{11} = \tfrac{7}{10}}$$