Фадеев Статистика ДЗ 1

1 Задача

Докажите, что:

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$$

Затем используя эту формулу и формулы задачи 1 покажите, что коэффицент асимметрии $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ и эксцесса $E_s = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ для биномиального распределения равны $\dfrac{q-p}{\sqrt{npq}}$ и $\dfrac{1-6pq}{npq}$ соответственно.

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 4\nu_1^3\nu_1 + \nu_1^4 \\ &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4\end{aligned}$$

Для Биномиального распределения:

$$\nu_1 = np$$

$$\nu_2 = \mu_2 + \nu_1^2 = npq + n^2p^2$$

$$\nu_3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k p^k q^{n-k}$$

Найдем сумму Вспомогательного ряда:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)C_n^k p^k q^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-3)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= p^3 n(n-1)(n-2) \sum_{k=0}^{n} C_{n-3}^{k-3} p^{k-3} q^{n-k} \\ &= p^3 n(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\nu_3 - 3\nu_2 + 2\nu 1 = p^3 n(n-1)(n-2) \\ &\Rightarrow \nu_3 = p^3 n(n-1)(n-2) + 3\nu_2 - 2\nu_1\end{aligned}$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = npq(2p-1)$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{npq(1-2p)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

Аналогично:

$$\nu_4 = p^3 n(n-1)(n-2) + 6\nu_3 - 11\nu_2 + 6\nu_1$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 = npq(1 - 3pq(n-2))$$

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{npq(1-3pq(n-2))}{(npq)^2} - 3 = \frac{1-6pq}{npq}$$

2 Задача

Покажите, что следующий интеграл $(C \in R)$:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-C)^2 f(x)dx$$

принимает наименьшее значение при $C = E(X)$

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-C)^2 f(x)dx = I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2C\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + C^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$I = E[X^2] - 2CE[X] + C^2$$

Для того чтобы минимизировать функцию I возмем производную по переменной C

$$\frac{dI}{dC} = 2C - 2E[X] = 0$$

Вторая производная по переменной C всегда равна 2, значит при $C = E[X]$ функция I принимает наименьшее значение.

3 Задача

Покажите, что:

(a) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

(a*) $Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$

(б) $Cov(c \cdot X, Y) = c \cdot Cov(X,Y)$ $(c \in R)$

(в) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

$$\begin{aligned}(a)\quad Var(X+Y) &= E[(X+Y)^2]-(E[X+Y])^2\\ &= E[X^2+2XY+Y^2]-(E[X]+E[Y])^2\\ &= E[X^2]+2E[XY]+E[Y^2]-(E[X]^2+2E[X]E[Y]+E[Y]^2)\\ &= Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\quad Cov(c\cdot X,Y) &= E[c\cdot X\cdot Y]-E[c\cdot X]\cdot E[Y]\\ &= c\cdot E[X\cdot Y]-c\cdot E[X]\cdot E[Y]\\ &= c\cdot Cov(X,Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^*)\quad Var(X-Y) &= D(X+(-Y))\\ &= Var(X)+Var(-Y)+2Cov(X,-Y)\\ &= Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c)\quad Cov(X+Y,Z) &= E[(X+Y)\cdot Z]-E[X+Y]\cdot E[Z]\\ &= E[X\cdot Z+Y\cdot Z]-(E[X]+E[Y])\cdot E[Z]\\ &= E[X\cdot Z]+E[Y\cdot Z]-(E[X]\cdot E[Z]+E[Y]\cdot E[Z])\\ &= Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)\end{aligned}$$

4 Задача

Для случайных величин X, Y даны их математические ожидания и дисперсии $E(X) = E(Y) = 7$, $Var(X) = Var(Y) = 90$, а также коэффициент корреляции $\rho(X,Y) = 0.4$. Найдите математическое ожидание $E[(X+Y)^2]$.

$$\begin{aligned}E[(X+Y)^2] &= E[X^2+2XY+Y^2]\\ &= E[X^2]+2E[XY]+E[Y^2]\\ &= (Var(X)+E[X]^2)+2(Cov(X,Y)+E[X]E[Y])+(Var(Y)+E[Y]^2)\\ &= 139+2\cdot 36+139=350\end{aligned}$$

5 Задача

(а) Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $E(X) = 20$ и дисперсией $Var(X) = 36$ найдите вероятность $P(X > 18.2)$.

(б) **Для нормальной случайной величины X известно, что математическое ожидание $E(X) = 40.4$ и вероятность $P(X < 35) = 0,18406$. Найдите дисперсию $Var(X)$.**

$$
\begin{aligned}
P(X > 18,2) &= 1 - P(X \leq 18,2) \\
&= 1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \leq \frac{18,2 - 20}{\sqrt{36}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-0,3\right) \approx 0,61791
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X < 35) &= \Phi\left(\frac{35 - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right) = \Phi\left(\frac{35 - 40,4}{\sqrt{Var(X)}}\right) = 0,18406 \\
&\Rightarrow \frac{-5,4}{\sqrt{Var(X)}} = -0.9 \\
&\Rightarrow \sqrt{Var(X)} = \frac{5,4}{0,9} \\
&\Rightarrow Var(X) = 6^2 = 36
\end{aligned}
$$