El problema de la braquistòcrona usant tècniques d'optimització

Jordi Castro
Programació Matemàtica
Grau en Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística
UPC

1 Presentació del problema

Donats els dos punts $O = (0, 0)$ i $F = (a, b)$ de la Figura 1, la *braquistòcrona* és la corba $y = f(x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que recorreria un objecte per anar de O a F en el temps mínim, considerant que només actua la força de la gravetat i no hi ha fricció. La corba de distància mínima entre O i F és clarament el segment que uneix els dos punts. Calcular la braquistòcrona o corba de temps mínim no és tan immediat. L'objectiu d'aquest treball es calcular-la numèricament formulant i resolent un problema d'optimització.

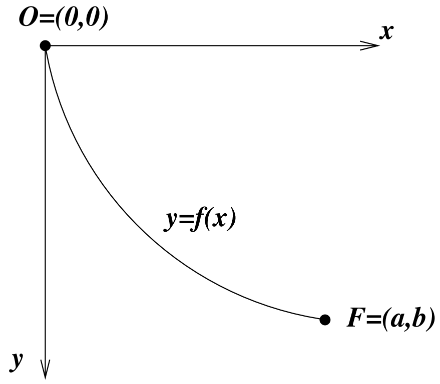

Figura 1: La braquistòcrona és la corba $y = f(x)$ de distància mínima entre $O = (0, 0)$ i $F = (a, b)$, actuant només la gravetat i sense fricció.

El problema de la braquistòcrona va ser plantejat pel matemàtic suís Johann Bernoulli a la considerada primera revista científica *Acta Eruditorum* el juny de 1696. Cinc matemàtics van proporcionar la solució correcta al problema: el mateix Johann Bernoulli, el seu germà Jakob Bernoulli, Gottfried Leibniz, Guillaume l'Hôpital, i Isaac Newton (que, segons ell mateix va admetre, va treballar de forma ininterrompuda 12 hores fins trobar la solució).

2 La solució: cicloide invertida

Els cinc matemàtics van proporcionar la mateixa solució correcta: la braquistòcrona és una *cicloide invertida* (o "cicloide de cap per avall"). Això es demostrarà analíticament a la posterior Secció 5. En aquesta secció únicament derivarem l'equació de la cicloide invertida. En el treball pràctic que fareu podeu comprovar com la solució obtinguda solucionant numèricament el problema d'optimització coincideix amb una cicloide invertida.

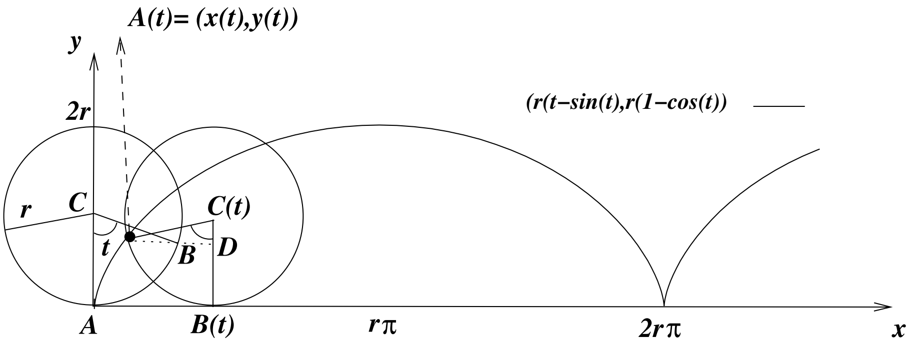

Figura 2: El punt $A = (0, 0)$ es troba a la posició $A(t) = (x(t), y(t))$ després de girar t radians.

Una cicloide és la corba definida per un punt d'un cercle que gira sense lliscar per una línia recta, com es mostra a la Figura 2. Observant la Figura 2 podem derivar l'equació paramètrica de la cicloide. Inicialment el punt A del cercle de centre C i radi r està en contacte amb la línia recta (suposem que $A = (0, 0)$ es troba a l'origen de coordenades). Després de girar un angle de t radians, el sector circular ACB es troba a la posició $A(t)C(t)B(t)$. La posició del punt $A(t) = (x(t), y(t))$ ens proporciona l'equació paramètrica de la cicloide. Notant que la distància entre A i $B(t)$ és igual a rt (això és, la longitud de l'arc entre A i B), i usant geometria bàsica sobre el triangle $A(t)DC(t)$ s'obté finalment:

$$x(t) = r(t - \sin(t)) \qquad y(t) = r(1 - \cos(t)). \tag{1}$$

3 Formulació del problema

Considerem de nou la Figura 1, amb un sistema de coordenades rectangular, on l'eix y apunta cap avall. Suposem que un cos de massa m, inicialment a O, cau per la corba fins arribar a F. En un punt $(x, f(x))$, $0 \leq x \leq a$, el cos portarà una velocitat provocada per l'accelaració de la gravetat $g = 9.8m/s^2$. Sabem per mecànica que l'energia cinètica del cos $mv^2/2$ (v és la velocitat del cos en un punt) és igual a la diferència d'energies potencials $mgf(x)$ (al punt inicial l'energia potencial és 0, ja que $f(0) = 0$). Igualant $mv^2/2 = mgf(x)$ s'obté que la velocitat puntual a $(x, f(x))$ és

$$v = \sqrt{2gf(x)}. \tag{2}$$

Considerant un increment dx molt petit a l'eix x, la distància recorreguda entre els punts $(x, f(x))$ i $(x + dx, f(x + dx))$ pot ser aproximada per la distància del segment entre els dos punts $\sqrt{dx^2 + (f(x + dx) - f(x))^2}$. Usant l'aproximació $f(x + dx) - f(x) \approx f'(x)dx$ (increment de la funció aproximadament igual a la diferencial) la distància recorreguda pot ser expressada com

$$ds = \sqrt{dx^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\; dx. \tag{3}$$

En una distància petita podem considerar que la velocitat puntual és constant i igual a (2), i llavors el temps per recórrer ds és

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{2gf(x)}}\; dx. \tag{4}$$

El temps total per anar de O a F per la corba és llavors la integral del temps entre $x = 0$ i $x = a$. El problema formulat és finalment

$$\begin{array}{ll} \min & \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \displaystyle\int_0^a \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{f(x)}}\, dx \\ \text{s.a} & f(0) = 0 \quad , \quad f(a) = b. \end{array} \tag{5}$$

El problema (5) és un problema d'optimització en dimensió infinita: no hi ha un nombre finit de variables a optimitzar, sinó que es busca, de totes les funcions, aquella que dóna el mínim valor de la integral. Aquests problemes d'optimització en dimensió infinita, on les incògnites són funcions, s'anomenen de càlcul de variacions. Els problemes que tractem al curs són en dimensió finita. És possible, però, solucionar (5) fent una discretització del problema i aplicant tècniques d'optimització. Aquest és l'objectiu de la pràctica, tal i com es descriu a la següent secció.

A la darrera Secció 5 es presenta una solució analítica al problema (5), similar a la que va proporcionar Johann Bernoulli, per si esteu interessats, però no cal de cara a realitzar el treball pràctic.

4 Solució com a problema d'optimització i treball a presentar

L'objectiu del treball és que solucioneu el problema (5) realitzant una discretització de la corba (x_i, y_i) $i = 0, \ldots, n$, essent $n + 1$ el nombre de punts considerats, de forma que $x_0 = y_0 = 0$ i $x_n = a$, $y_n = b$. Considereu un punt $F = (a, b)$ qualsevol (per exemple, $F = (1, 1)$). El problema resultant serà un problema d'optimització on la integral de (5) serà substituïda per un sumatori. Haureu d'escriure els termes $f'(x)$, $f(x)$, dx de la funció objectiu i les restriccions de (5) en funció de (x_i, y_i) $i = 0, \ldots, n$. Com major sigui n, millor serà l'aproximació que fareu de la corba. Podeu provar amb diferents valors de n creixents, i mostrar en una gràfica els punts (x_i, y_i) resultants. Arribeu, com a mínim, a discretitzacions de $n = 500$ punts. Convé doncs que n sigui un paràmetre del model.

Podeu considerar tres variants del problema d'optimització resultat de la discretització:

1. Considerar les abscisses x_i com paràmetres (valors fixats) i les ordenades y_i com les variables del problema d'optimització, és a dir trobar $y = f(x)$.
2. Considerar les ordenades y_i com paràmetres, i que x_i siguin les variables, és a dir, trobar la funció inversa $x = f^{-1}(y)$. Hauríeu de comprovar que aquesta opció proporciona un problema d'optimització convex (funció objectiu convexa), a diferència de les altres. Noteu que aquesta variant només la podeu usar quan hi hagi una única x per a una y (i això depèn de la posició del punt F que considereu).
3. Considerar tant x_i com y_i com variables.

Quina creieu que serà a priori la millor de les tres variants? Us han funcionat les tres variants igual de bé? Comproveu-ho després a la pràctica, i indiqueu el que heu trobat a l'informe.

Haureu de formular els tres models, i solucionar-los usant AMPL i algun paquet d'optimització no lineal amb restriccions (per exemple, MINOS, que s'inclou a la distribució d'AMPL). De cara a la implementació amb AMPL, haureu de tenir en compte alguns aspectes pràctics, com ara:

- Potser haureu de modificar lleugerament els límits de les variables (associats als límits d'integració i del sumatori) per evitar divisions per 0 en la funció objectiu (o les seves derivades, calculades internament per AMPL). Podeu usar valors petits, de l'ordre de 10^{-12}, per exemple.

- Si useu MINOS i una discretització prou fina (per exemple, $n = 500$), us caldrà segurament indicar a AMPL abans de fer el `solve` aquesta ordre:

```
option minos_options 'superbasics_limit= 1000';
```

  Això permet a MINOS incrementar internament les dimensions d'uns vectors associats a un tipus de variables d'optimització (anomenades *superbàsiques*). Si no feu això, segurament MINOS us retornarà el missatge

```
MINOS 5.5:  the superbasics limit (50) is too small.
```

- Podeu provar discretitzacions no-uniformes, per a que hi hagi major densitat de punts en alguna zona de l'interval. Per exemple, si proveu $x_i = a\left(\frac{i}{n}\right)^2$, $i = 0, \ldots, n$, tindreu major densitat en la part inicial del segment $[0, a]$.

- Els problemes convexos tenen bones propietats garantides per la teoria: els òptims locals són òptims globals, i els mètodes d'optimització no tenen en general problemes per trobar aquest òptim. Als problemes no-convexos això pot no passar, i llavors cal proporcionar un punt inicial "bo" per a que el paquet trobi un òptim (i no tindrem garanties de que sigui global). Per tant, recordeu que a les variants 1 i 3 del problema d'optimització potser haureu d'indicar valors inicials per a les variables.

- Si no teniu accés a una versió comercial de AMPL+MINOS no podreu executar problemes amb una discretització fina (n elevat). En aquest cas podeu usar el sistema de solució remota de problemes d'optimització anomenat NEOS disponible a

  http://www.neos-server.org/neos/.

  Per enviar un problema en format AMPL per ser solucionat amb MINOS podeu anar a a

  http://www.neos-server.org/neos/solvers/nco:MINOS/AMPL.html.

  Si voleu podeu provar altres paquets d'optimització no lineal amb restriccions alternatius que també accepten format AMPL (com IpOpt).

- En acabar l'optimització feu que AMPL us escrigui en un fitxer els punts (x_i, y_i) obtinguts per visualitzar la corba amb algun programa de gràfiques (gnuplot, Matlab, Excel, etc.).

La pràctica s'ha de fer en grups de dues persones. L'informe que presenteu ha de ser un fitxer pdf que ha de contenir:

- Primera plana que inclogui el nom de la pràctica, el nom de les dues persones del grup, i la data.

- Formulació matemàtica del problema d'optimització plantejat, amb la discretització realitzada.

- Els tres models AMPL associats a les tres variants del problema d'optimització abans descrites. S'ha de presentar la gràfica de les tres corbes obtingudes (millor una figura amb les tres gràfiques, per observar les diferències). Comproveu si les gràfiques resultants corresponen a una cicloide invertida.

- Comprovació de que la segona variant proporciona un problema d'optimització convex.

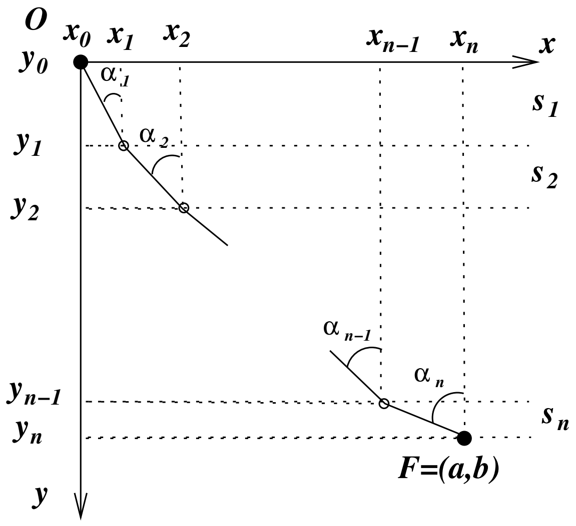

Figura 3: Aproximació de la braquistòcrona per una funció lineal per parts.

- Hi ha hagut diferències entre models? Quin dels tres ha funcionat millor? Algun ha fallat i no ha proporcionat un solució correcta? Si varíem la discretització i el nombre de punts n tots tres es comporten igual?
- Qualsevol comentari addicional que creieu convenient sobre ajustos que hagueu fet al model AMPL per fer que funcioni.

5 Càlcul analític de la braquistòcrona

Aquesta secció, que no és necessària per fer la pràctica, presenta una solució analítica al problema de la braquistòcrona similar a la realitzada per Johann Bernoulli, autor del problema, per si esteu interessats.

Considerem una versió discretitzada de la Figura 1, tal i com mostra la Figura 3. La corba està aproximada per una funció lineal per parts formada pels segments entre els punts (x_{i-1}, y_{i-1}) i (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. A mida que n és faci gran, la funció lineal per parts aproximarà millor la corba, i en el límit serà igual. La longitud del segment i de la funció lineal per parts és $\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}$, i, usant (2), la velocitat en el segment es pot considerar constant i igual a $\sqrt{2gy_i}$, $i = 1, \ldots, n$. El temps total necessari per anar de O a F a través dels segments es pot calcular com

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2}}{\sqrt{2gy_i}}. \tag{6}$$

Suposem que la Figura 3 està formada per n capes horitzontals de vidre, anomenades $s_i, i = 1, \ldots, n$ delimitades per les ordenades y_{i-1}, y_i, $i = 1, \ldots, n$. Si considerem que la velocitat de propagació de la llum a cada capa és $\sqrt{2gy_i}$, un feix de llum que vagi de O a F recorrerà la trajectòria de temps mínim, que serà una funció lineal per parts degut a la refracció de la llum. La llum, per tant, troba la solució al problema. L'angle d'incidència de la llum a la capa de vidre i és α_i, tal i com es mostra a la Figura 3. Sabem per òptica que la llei de la refracció de la llum (anomenada llei d'Snell, coneguda en temps de Bernoulli) garanteix que

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{2gy_1}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sqrt{2gy_2}} = \cdots = \frac{\sin \alpha_n}{\sqrt{2gy_n}} = K, \tag{7}$$

on K és una constant (de fet, la llei de la refracció en òptica es pot demostrar usant les condicions d'optimalitat d'un problema d'optimització). En el límit, suposant que el nombre de capes de vidre cada cop són més primes i nombroses, podem escriure (7) com

$$\frac{\sin\alpha(x)}{\sqrt{2gf(x)}} = K \quad 0 \le x \le a, \tag{8}$$

on $\alpha(x)$ és l'angle entre la recta tangent a la corba $y = f(x)$ al punt $(x, f(x))$ i l'eix vertical. La derivada de la funció $f(x)$ al punt x ens dóna la tangent de l'angle format per la mateixa recta amb l'eix horitzontal, per tant

$$f'(x) = \tan(\pi/2 - \alpha(x)) = \frac{1}{\tan\alpha(x)} = \frac{\cos\alpha(x)}{\sin\alpha(x)},$$

d'on es dedueix que

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{\cos^2\alpha(x)}{\sin^2\alpha(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}. \tag{9}$$

Combinant (8) i (9) obtenim

$$\sqrt{1+(f'(x))^2}\sqrt{f(x)} = \frac{1}{K\sqrt{2g}} = D, \tag{10}$$

on D és una constant. Per tant, denotant $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, a partir de (10) és té que la funció y ha de verificar

$$y(1+(y')^2) = D^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' = \sqrt{\frac{C-y}{y}}, \tag{11}$$

on $C = D^2$. En temps de Bernoulli se sabia que la solució de l'equació diferencial (11) era la cicloide.

Comprovem que la solució de (11) és una cicloide. Usant que $dy = y'dx$, (11) és igual a

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{\sqrt{y}\ dy}{\sqrt{C-y}}. \tag{12}$$

Usant la igualtat trigonomètrica $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, i aplicant el canvi

$$y = C\sin^2(t/2) = \frac{C}{2}(1-\cos t) \tag{13}$$

a (12) tenim

$$dx = \frac{\sqrt{C}\sin(t/2)\ d(C\sin^2(t/2))}{\sqrt{C}\cos(t/2)} = C\sin^2(t/2) = \frac{C}{2}(1-\cos t). \tag{14}$$

Integrant (14) obtenim directament

$$x = \frac{C}{2}(t - \sin t) + K_1, \tag{15}$$

on K_1 marca l'origen de x per $t = 0$. Fent $r = C/2$ a (13) i (15), i considerant que $K_1 = 0$ a (15), tenim l'equació (1) de la cicloide.