(e) Ein dünner Stab der Länge l rotiert um eine Achse, die senkrecht zum Stab durch seinen Mittelpunkt verläuft. Um welche Strecke muß die Drehachse verlagert werden, damit sich sein Trägheitsmoment verdoppelt.

Punkte: 5

Aufgabe 22: Umfallender Fahnenmast

Ein homogener Fahnenmast der Länge $l = 8\,\mathrm{m}$ fällt um. Welche Geschwindigkeit hat die Spitze beim Aufprall?

Punkte: 2

Aufgabe 23: Rollende Zylinder

Aufgaben zur Einführung in die Theoretische Physik I

Diese Aufgaben müssen von Studierenden des Lehramts der Primar- und Sekundarstufe I, an Sonderschulen und an beruflichen Schulen nicht bearbeitet werden.

Aufgabe 26: Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten

Die lokale Orthonormalbasis der Kugelkoordinaten ist durch

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\
\vec{e}_\theta &= (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \\
\vec{e}_\phi &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0)
\end{aligned}$$

gegeben. In dieser Aufgabe werden die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in dieser Basis hergeleitet.

(a) Schreiben Sie als ersten Schritt die Zeitableitungen der Basisvektoren $\dot{\vec{e}}_r$, $\dot{\vec{e}}_\theta$ und $\dot{\vec{e}}_\phi$ als Linearkombinationen der Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$.

(b) Schreiben Sie nun einen beliebigen Vektor als $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Bilden Sie die erste und zweite Zeitableitung $\dot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}}$, und nutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe (a).

Punkte: 6

Aufgabe 20

a) geg: $m = 1kg$ $r = 6378km = 6378 \cdot 10^3 m$ $T = 24h = 86400s$

ges: $L = ?$

Lösung: $L = r \cdot p$

$p = m \cdot v \Rightarrow p = m \cdot \omega \cdot r$

$v = \omega r$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$L = m \cdot \omega \cdot r^2 = m \frac{2\pi}{T} r^2$

$L = 1 \cdot kg \cdot \frac{2\pi}{86400s} \cdot (6378 \cdot 10^3)^2 m^2$

$= 2{,}96 \cdot 10^9 Nms$ ✓

b) geg: $f_1 = 2s^{-1}$ $I_1 = 6kgm^2$ $I_2 = 1{,}5kgm^2$

ges: $f_2 = ?$

Lösung: $I = mr^2$

$\omega_1 = 2\pi f_1 = 4\pi s^{-1}$

$\omega_2 = 2\pi f_2$

$E_{rot,1} = E_{rot,2}$

$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$

$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$

$\sqrt{\frac{I_1}{I_2} \omega_1^2} = \omega_2$

$\sqrt{\frac{I_1}{I_2} \omega_1^2} = 2\pi f_2$

$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_1}{I_2} \omega_1^2} = f_2$

$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6kgm^2}{1{,}5kgm^2} \cdot 4^2\pi^2 (s^{-1})^2}$

?

$= 4s^{-1}$ f

c) geg: r $m_1 = m$ $m_2 = 2m$

ges: $I = ?$

Lösung: $I = \mu r^2$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mu_2 = \frac{2m^2}{3m} = \frac{2}{3} m$$

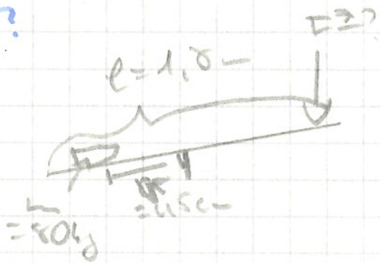
$$I = \frac{2}{3} m r^2$$ ✓ //2/3

Aufgabe 21

a) geg: $m = 80\,kg$ $l = 1{,}8\,m$ $r: 45\,cm = 0{,}45\,m$ r: Abstand

ges: $F = ?$

Lösung:



$r_2 = \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} \cdot 1{,}8\,m = 0{,}9\,m$

$$F_2 = \frac{r_1}{r_2} F_1$$

$$F_1 = m \cdot g$$

$$F_2 = \frac{r_1}{r_2} mg$$

$$F_2 = \frac{0{,}45\,m}{0{,}9\,m} \cdot 80\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

$$F_2 = 392{,}4\,N$$ f 0

b) geg: $m = 2{,}8\,g = 2{,}8 \cdot 10^{-3}\,kg$ $r = 2\,cm = 2 \cdot 10^{-2}\,m$ $v = 1 \frac{m}{s}$

ges: $L = ?$

Lösung: $L = I\omega$

$$I = \frac{2}{3} m r^2$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$L = \frac{2}{3} m v$$

$$L = \frac{2}{3} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 1 \frac{m}{s}$$

$$= 1{,}87 \cdot 10^{-3}\,Nms$$ f 0

c) geg: $m = 4\,kg$ $d = 0{,}2\,m$ $\omega = 1\,\frac{1}{s}$

ges: $E_{kin} = ?$

Lösung: $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$ $\qquad I = \frac{1}{2} m r^2$

$= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \frac{1}{4} m r^2 \omega^2$

$= \frac{3}{4} m \omega^2 r^2$

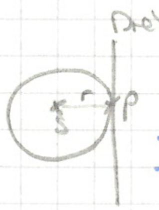
$E_{kin} = \frac{3}{4}\, 4\,kg\; 1\,\frac{1}{s^2}\; 0{,}1^2\, m^2$

$= 0{,}034$ ✓ 1

d) geg: Kugel $a = r$

ges: $I = ?$

Lösung



$I = \frac{2}{5} m r^3$

$I_P = I_S + m a^2$

$= \frac{2}{5} m r^2 + m a^2$

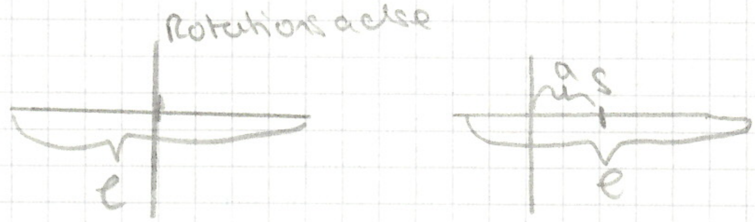
$= \frac{2}{5} m r^2 + m r^2$

$= \frac{7}{5} m r^2$ ✓ 1

e) geg: l $\quad I_2 = 2 I_1$

ges: $s = ?$

Lösung:



$I = \frac{1}{2} m r^2$

$I_P = \frac{1}{2} m r^2 + m a^2$

$2I = I + m a^2$

$I = m a^2$

$\sqrt{\frac{I}{m}} = a$

$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{8} m l^2}{m}}$

$a = l \sqrt{\frac{1}{8}}$ f 0

Aufgabe 22)

gegeben: $l = 8\,m$

Es gilt für die Mastspitze:

$E_{pot} = E_{rot}$ mit $I = I_s + m a^2$

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(I_s + m \cdot a^2)\,\omega^2$

$\hat{=}\; m \cdot g \cdot \frac{l}{2}$

mit $a = \frac{1}{2} l$

$I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$

$\omega = \frac{v}{l}$

$h = l$

$g \cdot l = \left(\frac{1}{24} l^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{4}\right) \frac{v^2}{l^2}$

$g \cdot l = \frac{1}{24} v^2 + \frac{1}{8} v^2$

$24\, g \cdot l = 4 v^2$

Ansatz richtig, aber $h = \frac{l}{2}$

$v = \sqrt{\frac{6}{2} \cdot g \cdot l}$

$\Rightarrow 1$

mit $l = 8\,m$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

$v = \sqrt{\frac{6}{2} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 8\,m} = 21{,}7\,\frac{m}{s}$

15,3

Die Mastspitze bewegt sich mit $21{,}7\,\frac{m}{s}$.

Aufgabe 23)

Wir betrachten einen Hohl- und einen Vollzylinder:

Vollzylinder:

$r_V = 5\,cm$

Hohlzylinder:

$r_{H1} = 4\,cm$

$r_{H2} = 5\,cm$

Mit folgenden Trägheitsmomenten:

$I_V = \frac{1}{2} m r^2$

$I_H = \frac{1}{2} m \cdot (r_{H_1}^2 + r_{H2}^2)$

Die Höhe der schiefen Ebene beträgt

$h = 20\,cm.$

Es gilt für die kinetische Energie eines starren Körpers:

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Sowie ~~durch~~ für die potentielle Lageenergie.

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{pot} = E_{kin}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

mit

$$v = \omega \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega = \frac{v}{r}$$

Dann ist für den Vollzylinder:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{4} m r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^2$$

$$g \cdot h = \frac{3}{4} v^2 \quad \Big| \cdot \frac{4}{3}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{\frac{4}{3} g \cdot h} = v}}$$

Mit $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$h = 0{,}2 \text{ m}$

$$\underline{\underline{V_V = 1{,}62 \frac{m}{s}}}$$ ✓ 1

Sowie für den Hohlzylinder:

mit $r = r_{H2} = 5 \cdot 10^{-2}$ m

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cdot (r_{H1}^2 + r_{H2}^2) \cdot \frac{v^2}{r_{H2}^2}$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} (r_{H1}^2 + r_{H2}^2) \cdot \frac{v^2}{r_{H2}^2}$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^2 + \frac{1}{4} r_{H1}^2 \cdot \frac{v^2}{r_{H2}^2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$2 g \cdot h = v^2 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} r_{H1} \cdot \frac{v^2}{r_{H2}^2}$$

$$2 \cdot g \cdot h = v^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{r_{H1}^2}{r_{H2}^2} \right)$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{r_{H1}^2}{r_{H2}^2}}}}}$$

mit $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, $r_{H1} = 0{,}04$ m, $r_{H2} = 0{,}05$ m

$$\underline{\underline{V_H = 1{,}47 \frac{m}{s}}}$$ ✓ 1

Der Vollzylinder bewegt sich schneller die Rampe herunter.

23/2

Aufgabe 24)

Wir betrachten ein rohes und ein hartes Ei auf einer schiefen Ebene.
Zu Beginn des Versuchs ist das rohe Ei schneller, da die Rotationsenergie, die beim festen Ei benötigt wird um den Zentkörper zu bewegen, beim rohen Ei allein in die Translationsenergie gesetzt wird. Das innere des Eis rollt also nicht mit, sondern „schwimmt" nahezu reibungsfrei im inneren der Schale.
(Um zu sagen, welches der Eier „unten schneller" ist, muss man wissen, wie ~~...~~ lang die schiefe Ebene ist. Bei einer langen Strecke erreicht das harte Ei irgendwann die Geschwindigkeit des rohen. Schneller unten ist aber das rohe Ei.)

✓ 1

Aufgabe 25)

Der Schwerpunkt der Kugel liege im Koordinatenursprung. Die Rotationsachse sei die z-Achse.

φ sei der Winkel in der x-y-Ebene, ϑ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und der z-Achse.

Dann ist

$$r_\perp = r \cdot \sin\vartheta$$

Da die Kugel homogen ist integrieren wir über die Masseteilchen:

$$I = \int_m r_\perp^2 \, dm$$

mit $\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho \, dV$

ergibt sich:

$$\int_V r_\perp^2 \rho \, dV \Leftrightarrow \rho \int_V r_\perp^2 \, dV$$

Für das Volumenelement dV gilt:

$$dV = dr \cdot r \cdot d\vartheta \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot d\varphi$$

Daraus folgt:

$$I = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

$$I = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

mit $\int_0^{2\pi} r^4 \sin^3 \vartheta \, d\varphi = r^4 \sin^3 \vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= r^4 \sin^3 \vartheta \, [\varphi]_0^{2\pi}$

$$I = \rho \cdot 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^4 \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, dr$$

mit $\int_0^\pi r^4 \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = r^4 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta$

$= r^4 \cdot \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi$

$= r^4 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right]$

$= r^4 \cdot \frac{4}{3}$

$$I = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \int_0^R r^4 \, dr$$

mit $\int_0^R r^4 \, dr = \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^R$

$= \frac{1}{5} R^5$

$$I = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{m \cdot 2\pi \cdot 4}{V \cdot 3 \cdot 5} R^5$$

Mit dem Kugelvolumen $V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$ ergibt sich gekürzt:

$$\underline{\underline{I = \frac{2}{5} m R^2}}$$

✓

2

Aufgabe 26

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\phi \\ \sin\Theta \sin\phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\Theta} = \begin{pmatrix} \cos\Theta \cos\phi \\ \cos\Theta \sin\phi \\ -\sin\Theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e_\phi} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen die Winkel Θ, ϕ als von der Zeit abhängig an.

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} \dot\theta \cos\theta \cos\phi - \dot\phi \sin\theta \sin\phi \\ \dot\theta \cos\theta \sin\phi + \dot\phi \sin\theta \cos\phi \\ -\dot\theta \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\dot\theta \sin\theta \cos\phi - \dot\phi \cos\theta \sin\phi \\ -\dot\theta \sin\theta \sin\phi + \dot\phi \cos\theta \sin\phi \\ -\dot\theta \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot\phi \cos\phi \\ -\dot\phi \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{e}}_r$ soll nun als Linearkombination aus $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ dargestellt werden:

$\dot{\vec{e}}_r = \alpha \cdot \vec{e}_\theta + \beta \cdot \vec{e}_\phi$ ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$$\dot\theta \cos\theta \cos\phi - \dot\phi \sin\theta \sin\phi = \alpha \cdot \cos\theta \cos\phi + \beta \cdot (-\sin\phi)$$
$$\dot\theta \cos\theta \sin\phi + \dot\phi \sin\theta \cos\phi = \alpha \cdot \cos\theta \sin\phi + \beta \cdot \cos\phi$$
$$-\dot\theta \sin\theta = \alpha \cdot \cancel{\cos\theta}\,(-\sin(\theta))$$

$$-\dot\theta = -\alpha$$
$$\dot\theta = \alpha$$
$$\dot\phi \sin\theta = \beta$$

Also: $\dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\, \vec{e}_\theta + \dot\phi \sin\theta\, \vec{e}_\phi$ 1

Analog für $\dot{\vec{e}}_\theta, \dot{\vec{e}}_\phi$:

$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot\theta\, \vec{e}_r + \dot\phi \cos\theta \cdot \vec{e}_\phi$ 1

$\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot\phi \sin\theta\, \vec{e}_r - \dot\phi \cos\theta\, \vec{e}_\theta$ 1

b) $\vec{r} = r \cdot \vec{e_r}$

$\dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{\vec{e_r}}$ 1

$\dot{\vec{r}} = r \cdot \left(\dot{\theta}\, \vec{e_\theta} + \dot{\phi} \sin\theta\, \vec{e_\phi} \right)$

$\underline{\underline{\dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{\theta}\, \vec{e_\theta} + r \cdot \dot{\phi} \sin\theta\, \vec{e_\phi}}}$ 1 0

$\underline{\underline{\ddot{\vec{r}} = r \cdot \left(\ddot{\theta}\, \vec{e_\theta} + \dot{\theta}\, \dot{\vec{e_\theta}} \right) + r \left(\ddot{\phi} \sin\theta\, \vec{e_\phi} + \dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta\, \vec{e_\phi} + \dot{\phi} \sin\theta\, \dot{\vec{e_\phi}} \right)}}$

1 0

20/3