SE3	# Aufgabenblatt 6 Softwareentwicklung 3: Logikprogrammierung - WS 2015/2016 - W. Menzel ## Rekursive Berechnungen

Gesamtpunktzahl: 30 — Abgabe der Lösungen bis zum 30.11.2015

Hinweis: Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, dass Sie

- Prädikatsdefinitionen immer übersichtlich strukturieren und ausführlich kommentieren,
- in jedem Fall ein Prädikatsschema mit Zusicherungen für die zulässigen Datentypen und den möglichen Instanziierungsvarianten für die einzelnen Argumentpositionen angeben und
- die von Ihnen durchgeführten Tests mit ihren jeweiligen Resultaten dokumentieren und ggf. diskutieren.

Aufgabe 1: Rekursive Berechnungsvorschriften (1) — 12 Punkte
maximale Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Ein Geldbetrag, der mit einem (jährlichen) konstanten Zinsatz verzinst wird, wächst exponentiell und kann nach der rekursiven Berechnungsvorschrift

$$b_i = \begin{cases} b_i & \text{für } i = 0 \\ (1+z) * b_{i-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

ermittelt werden, wobei b_i das Guthaben nach dem i-ten Anlagejahr und z der Zinsfaktor ist (d.h. für 5% Zinsen ist $z = 0.05$).

1. Bilden Sie die angegebene Berechnungsvorschrift in ein rekursives Prolog-Prädikat mit dem Prädikatsschema

   `zins(+Anlagebetrag,+Zinsfaktor,+Anlagedauer,?Endguthaben)`

   ab und testen Sie dieses.

2. Definieren Sie ein *nichtrekursives* Prädikat mit der gleichen Signatur wie in Aufgabenteil 1 und vergleichen Sie die Berechnungsresultate.

3. Wandeln Sie ihre Lösung für Aufgabenteil 1 in ein *endrekursives* Prädikat um, d.h. der rekursive Aufruf muss das letzte Teilziel im Körper der Klausel sein.

4. Eine Bank bietet neben dem konstanten Zinssatz von 4% auch einen steigenden Zinssatz an, der sich wie folgt berechnet:
   - Es wird stets ein Basiszins von 1% gezahlt. Dazu gibt es einen Bonus-Zins, der im ersten Jahr 2% beträgt, d.h. der Gesamtzins im ersten Jahr beträgt 1%+2%=3%.
   - Im zweiten Jahr steigt der Bonus-Zins um die Hälfte des Bonus-Zinses aus dem ersten Jahr und in jedem weiteren Jahr um die Hälfte seines *Zuwachses* aus dem vorangegangenen Jahr. D.h. im zweiten Jahr erhält der Kunde einen Gesamtzins von 1%+2%+1%=4% und im dritten Jahr von 1%+2%+1%+0.5%=4.5%.

   Definieren Sie ein Prädikat zur Berechnung des Guthabens für dieses Zinsmodell. Überlegen Sie dazu, welches Rekursionsschema (nicht-endrekursiv oder endrekursiv) Ihnen für diesen Zweck besser geeignet erscheint.

5. Für welche Anlagezeiträume ist das Modell mit dem variablen Zinssatz vorteilhafter?

Aufgabe 2: Rekursive Berechnungsvorschriften (2) — 7 Punkte
maximale Bearbeitungszeit: 40 Minuten

Die Zahl π kann durch die LEIBNITZ'sche Reihenzerlegung approximiert werden:

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

1. Definieren Sie ein Prädikat, das π mit einer vorgegebenen Anzahl von Rekursionsschritten berechnet, z.B.

   ```
   ?- pi(10,Resultat).
      Resultat = 3.23232 ;
      No
   ```

   Implementieren Sie Ihr Prädikat in zwei Varianten, wobei die Berechnung einmal beim rekursiven Abstieg und zum anderen beim rekursiven Aufstieg erfolgen soll. In welchem Fall liegt Endrekursion vor?

2. Vergleichen Sie Ihre Definitionen im Hinblick auf die Verständlichkeit und das Berechnungsverhalten.

3. Implementieren Sie eine alternative Variante zur Berechnung von π mit Hilfe der WALLIS'schen Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{2i-1} \cdot \frac{2i}{2i+1}$$

und vergleichen Sie das Konvergenzverhalten mit der Berechnung in der ersten Teilaufgabe.

Aufgabe 3: Stromorientierte Verarbeitung — 7 Punkte

maximale Bearbeitungszeit: 40 Minuten

1. Implementieren Sie auf der Basis des Rekursionsschemas für die stromorientierte Verarbeitung inkrementelle Varianten der Aufgabe 2 entwickelten Prädikats für π, die die aktuellen Approximationswerte als Folge von Lösungsalternativen über das Backtracking ermitteln, z.B.:

   ```
   ?- pi_incr(3,Pi).
      Pi = 4 ;
      Pi = 2.66667 ;
      Pi = 3.46667 ;
      Pi = 2.89524 ;
   No
   ```

2. Veranschaulichen Sie sich das Konvergenzverhalten der Berechnungsvorschriften für π grafisch. Laden Sie dazu die Datei `display.pl`. Den zeitlichen Verlauf der Reihenzerlegung können Sie sich dann durch den Aufruf des Ziels

   ```
   ?- findall(X,pi_incr(15,X),L),display('pi',L).
   ```

   darstellen lassen.

   Wieviele Approximationsschritte sind erforderlich, damit bei der gegebenen Auflösung der Approximationsfehler unter die Darstellungsgenauigkeit sinkt?

Aufgabe 4: Verzweigende Rekursion — 4 Punkte

maximale Bearbeitungszeit: 20 Minuten

Binomialkoeffizienten spielen eine wichtige Rolle in der Kombinatorik. Sie lassen sich durch folgende rekursive Vorschrift berechnen:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \textit{ oder } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Implementieren Sie diese Berechnungsvorschrift durch eine rekursive Prozedur. Ist Ihre Definition endrekursiv?

Bonus: Diskutieren Sie Möglichkeiten, um den Rechenaufwand für Ihre Lösung zu reduzieren. (2 Punkte)

Bonus: Geben Sie alternative Implementierungen für die Berechnung der Binomialkoeffizienten auf der Basis der beiden folgenden Berechnungsvorschriften an und vergleichen Sie Ihre Definitionen hinsichtlich der verwendeten Rekursionsschemata, der Berechnungsergebnisse und des Berechnungsverhaltens mit der Definition aus Teilaufgabe (a). Erklären Sie die beobachtbaren Unterschiede. (5 Punkte)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}$$