KAUNO TECHOLOGIJOS UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS FAKULTETAS

KOMPIUTERIŲ KATEDRA

Skaitiniai metodai ir algoritmai (P170B115)

Laboratorinis darbas nr. 2

Varianto nr. 9

Atliko:

IFF 8/3 gr. studentas

Dovydas Zamas

Priėmė:

doc. Čalnerytė Dalia

Contents

1. Uždavinys

1.1. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas

Sukurkite programą, kuri nurodytais metodais spręstų tiesinių 4 nežinomųjų lygčių sistemą. Pateikite programos veikimo rezultatus su duotomis lygtimis.

- Jei metodas leidžia, programoje turi būti įvertinti atvejai:
  a) kai lygčių sistema turi vieną sprendinį;
  b) kai lygčių sistema sprendinių neturi;
  c) kai lygčių sistema turi be galo daug sprendinių.
- Jei metodas paremtas matricos pertvarkymu, programa turi turėti galimybę pateikti tarpines matricų išraiškas kiekviename žingsnyje. Jei metodas iteracinis, grafiškai pavaizduokite, kaip atliekant iteracijas kinta santykinis sprendinio tikslumas esant kelioms skirtingoms konvergavimo daugiklio reikšmėms.
- Patikrinkite gautus sprendinius įrašydami juos į pradinę lygčių sistemą. Pateikite atsakymo ir laisvųjų narių stulpelio skirtumo elementus bent 12 skaitmenų po kablelio tikslumu.
- Gautus sprendinius patikrinkite naudodami išorinius išteklius (pvz., standartines Python bibliotekų funkcijas) ir pateikite patikrinimo rezultatus.

1.2. Netiesinių lygčių sistemų sprendimas

Duota netiesinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} Z_1(x_1, x_2) = 0 \\ Z_1(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

- Skirtinguose grafikuose pavaizduokite paviršius $Z1$ ($x1$, $x2$) ir $Z2$ ($x1$, $x2$).
- Užduotyje pateiktą netiesinių lygčių sistemą išspręskite grafiniu būdu.
- Užduotyje pateiktą netiesinių lygčių sistemą išspręskite naudodami užduotyje nurodytą metodą su laisvai pasirinktu pradiniu artiniu (išbandykite bent keturis pradinius artinius). Nurodykite iteracijų pabaigos sąlygas. Lentelėje pateikite pradinį artinį, tikslumą, iteracijų skaičių.
- Gautus sprendinius patikrinkite naudodami išorinius išteklius (pvz., standartines Python bibliotekų funkcijas) ir pateikite patikrinimo rezultatus.

2. Uždavinio sprendimas

2.1. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas

Pirmoji lygtis:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 20 \\ -3x_1 + 4x_2 - 8x_3 - x_4 = -36 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 41 \\ +5x_2 - 9x_3 + 4x_4 = -16 \end{cases}$$

Antroji lygtis:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_4 = -5 \\ 9x_1 - 6x_2 - 6x_3 + x_4 = 39 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 19 \end{cases}$$

2.1.1. Gauso metodas

- Programa įvertina atvejus:
  a) kai lygčių sistema turi vieną sprendinį;
  b) kai lygčių sistema sprendinių neturi;
  c) kai lygčių sistema turi be galo daug sprendinių.
- Programos kodo dalis:

```
if aug_matrix[aug_matrix.shape[0] - 1, aug_matrix.shape[1] - 2] == 0:
    if aug_matrix[aug_matrix.shape[0] - 1, aug_matrix.shape[1] - 1] == 0:
        return print("sprendinių be galo daug")
    else:
        return print("sprendinių nėra")
```

- Gauso metodo programos kodo dalis:

```
def GaussMethod(matrix_A, matrix_b):
    n = (np.shape(matrix_A))[0]  # lygciu skaicius nustatomas pagal ivesta
matrica A
    nb = (np.shape(matrix_b))[1]  # laisvuju nariu vektoriu skaicius
nustatomas pagal ivesta matrica b
    aug_matrix = np.hstack((matrix_A, matrix_b))  # isplestoji matrica
    print("A = \n", matrix_A[0:4, 0:4])
    print("b = \n", matrix_b[:, 0])

    # tiesioginis etapas:
    for i in range(0, n - 1):  # range pradeda 0 ir baigia n-2 (!)
        for j in range(i + 1, n):  # range pradeda i+1 ir baigia n-1
            aug_matrix[j, i:n + nb] = aug_matrix[j, i:n + nb] - aug_matrix[i,
i:n + nb] * aug_matrix[j, i] / aug_matrix[
                i, i]
            aug_matrix[j, i] = 0
        print(i + 1, "iteration")
        print(aug_matrix)
        print()

    #  atvirkstinis etapas:

    if aug_matrix[aug_matrix.shape[0] - 1, aug_matrix.shape[1] - 2] == 0:
```

```
        if aug_matrix[aug_matrix.shape[0] - 1, aug_matrix.shape[1] - 1] == 0:
            return print("sprendinių be galo daug")
        else:
            return print("sprendinių nėra")
    x = np.zeros(shape=(n, nb))
    for i in range(n - 1, -1, -1):  # range pradeda n-1 ir baigia 0 (trecias
parametras yra zingsnis)
        x[i, :] = (aug_matrix[i, n:n + nb] - aug_matrix[i, i + 1:n] * x[i +
1:n, :]) / aug_matrix[i, i]
    for i in range(len(matrix_b)):
        print("x", i + 1, "=", "{:.2f}".format(x[i, 0]))
    ans = np.zeros(shape=(n, nb))
    for i in range(0, n):
        for j in range(0, n):
            ans[i, 0] = ans[i, 0] + x[j, 0] * matrix_A[i, j]
    ansx = np.zeros(shape=(n, nb))
    # for i in range(0,n):
    #     for j in range(0,n):
    #         ansx[i,0] = ansx[i,0]+ans[i,j]
    ans.transpose()
    print()
    print("Initial matrix b")
    for i in range(len(ans)):
        print("{:.2f}".format(ans[i, 0]))
```

- Rezultatai Python konsolėje:

```
--------------------------------------------------------------------
Gauss Method
--------------------------------------------------------------------
First linear equation:
--------------------------------------------------------------------
A =
 [[ 3.  1. -1.  5.]
 [-3.  4. -8. -1.]
 [ 1. -3.  7.  6.]
 [ 0.  5. -9. -4.]]
b =
 [[ 20.]
 [-36.]
 [ 41.]
 [-16.]]
1 iteration
[[  3.          1.         -1.          5.         20.        ]
 [  0.          5.         -9.          4.        -16.        ]
 [  0.         -3.33333333  7.33333333  4.33333333  34.33333333]
 [  0.          5.         -9.         -4.        -16.        ]]


2 iteration
```

```
[[ 3.          1.         -1.          5.         20.        ]
 [ 0.          5.         -9.          4.        -16.        ]
 [ 0.          0.          1.33333333  7.         23.66666667]
 [ 0.          0.          0.         -8.          0.        ]]
```

3 iteration

```
[[ 3.          1.         -1.          5.         20.        ]
 [ 0.          5.         -9.          4.        -16.        ]
 [ 0.          0.          1.33333333  7.         23.66666667]
 [ 0.          0.          0.         -8.          0.        ]]
```

x 1 = 3.00
x 2 = 28.75
x 3 = 17.75
x 4 = -0.00

Initial matrix b
20.00
-36.00
41.00
-16.00

Second linear equation:

```
A =
 [[ 5.  2.  0.  1.]
 [ 2. -5.  0.  2.]
 [ 9. -6. -6.  1.]
 [ 1.  2.  1.  1.]]
b =
 [[19.]
 [-5.]
 [39.]
 [ 5.]]
```

1 iteration

```
[[  5.    2.    0.    1.   19. ]
 [  0.   -5.8   0.    1.6 -12.6]
 [  0.   -9.6  -6.   -0.8   4.8]
 [  0.    1.6   1.    0.8   1.2]]
```

2 iteration

```
[[ 5.          2.          0.          1.          19.        ]
 [ 0.         -5.8         0.          1.6        -12.6       ]
 [ 0.          0.         -6.         -3.44827586  25.65517241]
 [ 0.          0.          1.          1.24137931  -2.27586207]]
```

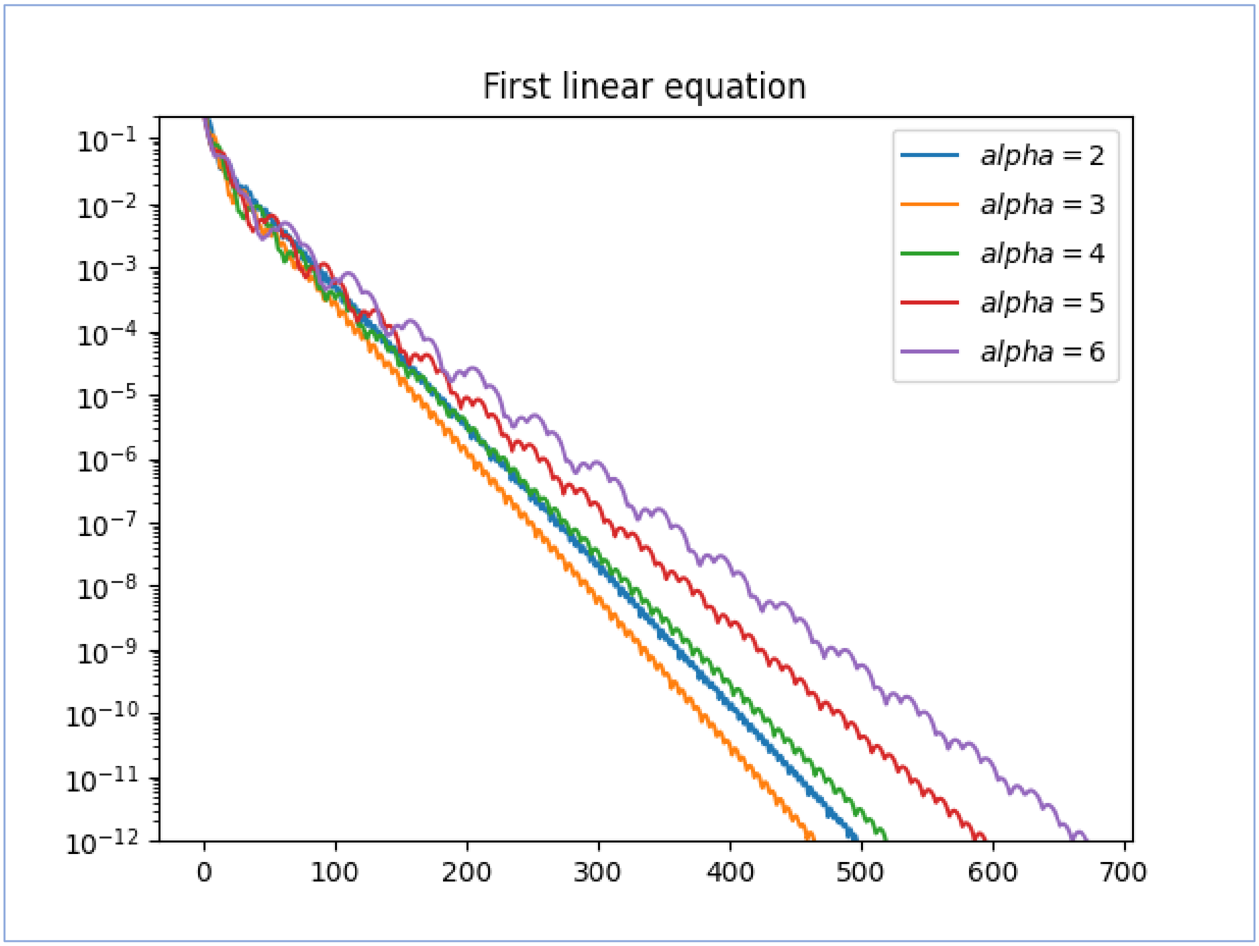
3 iteration

```
[[ 5.          2.          0.          1.          19.        ]
 [ 0.         -5.8         0.          1.6        -12.6       ]
 [ 0.          0.         -6.         -3.44827586  25.65517241]
 [ 0.          0.          0.          0.66666667   2.        ]]
```

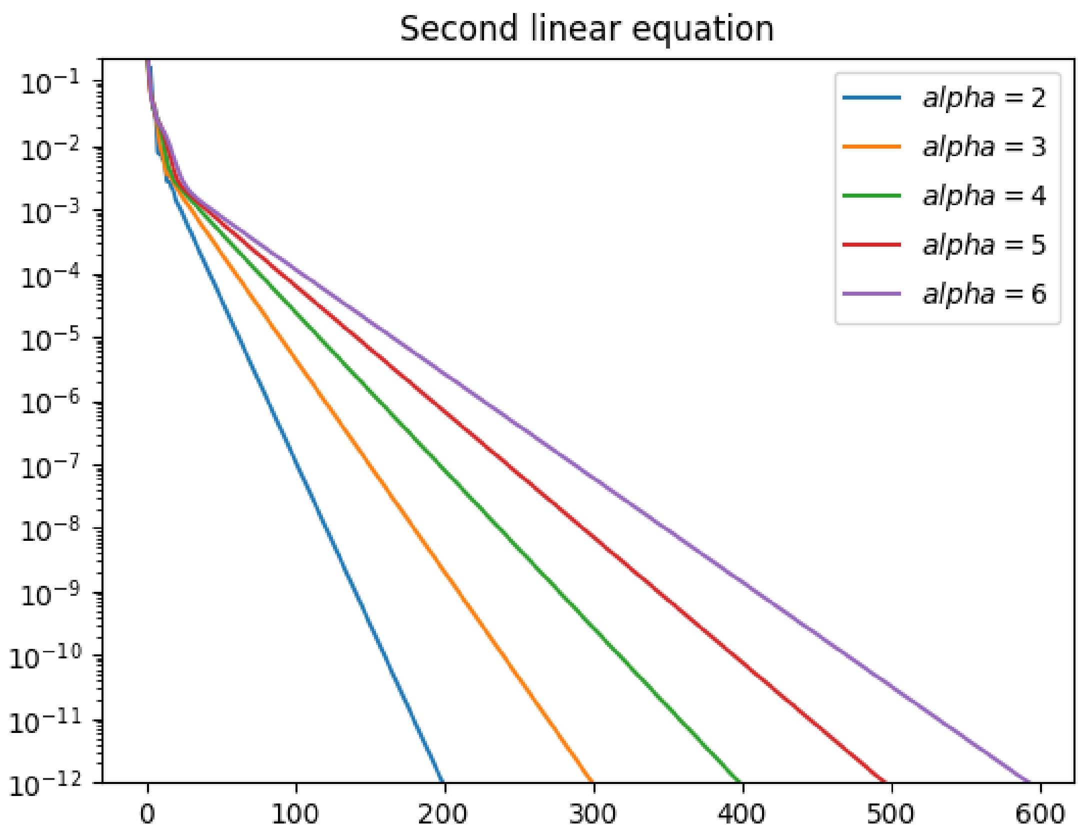
x 1 = 2.00
x 2 = 3.00
x 3 = -6.00
x 4 = 3.00

Initial matrix b
19.00
-5.00
39.00
5.00

2.1.2. Paprastųjų iteracijų metodas



pav. 1 Pirmosios lygties santykinio tikslumo kaita



pav. 2 Antrosios lygties santykinio tikslumo kaita

- Paprastųjų iteracijų programos kodo dalis:

```
def SimpleIterationMethod(A, b, alpha, max_epochs, precision):
    if np.linalg.det(A) == 0:
        return print("LinAlgErr: Singular matrix")
    n = np.shape(A)[0]
    # laisvai parinkti metodo parametrai
    Atld = np.diag(1. / np.diag(A)).dot(A) - np.diag(alpha)
    btld = np.diag(1. / np.diag(A)).dot(b)
    prec = []  # tuscias sarasas tikslumo reiksmiukaupimui
    x = np.zeros(shape=(n, 1))
    x1 = np.zeros(shape=(n, 1))
    for it in range(0, max_epochs):
        x1 = ((btld - Atld.dot(x)).transpose() / alpha).transpose()
        prec.append(
            np.linalg.norm(x1 - x, ord=np.inf) / (np.linalg.norm(x,
ord=np.inf) + np.linalg.norm(x1, ord=np.inf))
        )
        if prec[it] < precision:
            break
        x[:] = x1[:]
    print(x.transpose())
    return prec
```

- Paprastųjų iteracijų grafinio atvaizdavimo kodo dalis:

```
def plot(y, alpha, equation):
    x = np.arange(len(y))
    plt.plot(x, y, label='$alpha = {i}$'.format(i=alpha))
    plt.ylim(1e-12, 2e-1)
    plt.yscale('logit')
    plt.title(equation)
def ExecuteFirstTask():
    for i in range(2, 7):
        CONST_alpha[:] = i
        prec = SimpleIterationMethod(A1, b11, CONST_alpha, CONST_max_epochs,
CONST_e)
        plot(prec, i, "First linear equation")
    plt.legend(loc='best')
    plt.show()
```

- Rezultatai Python konsolėje:

```
----------------------------------------------------------------
Simple Iteration Method
----------------------------------------------------------------
First linear equation:
----------------------------------------------------------------
[[3.00000000e+00 2.87500000e+01 1.77500000e+01 6.58033628e-11]]
[[ 3.00000000e+00  2.87500000e+01  1.77500000e+01 -1.17059547e-10]]
[[3.00000000e+00 2.87500000e+01 1.77500000e+01 1.68171255e-10]]
[[ 3.00000000e+00  2.87500000e+01  1.77500000e+01 -1.70778947e-10]]
[[ 3.00000000e+00  2.87500000e+01  1.77500000e+01 -2.52941372e-10]]
----------------------------------------------------------------
Second linear equation:
----------------------------------------------------------------
[[ 2.  3. -6.  3.]]
[[ 2.  3. -6.  3.]]
[[ 2.  3. -6.  3.]]
[[ 2.  3. -6.  3.]]
[[ 2.  3. -6.  3.]]
----------------------------------------------------------------
Python numpy solver
----------------------------------------------------------------
First linear equation:
----------------------------------------------------------------
[[ 3.  ]
 [28.75]
 [17.75]
 [-0.  ]]
----------------------------------------------------------------
Second linear equation:
----------------------------------------------------------------
```

[[2.]
 [3.]
 [-6.]
 [3.]]

END

2.2. Netiesinių lygčių sprendimas

2.2.1. Lygtis

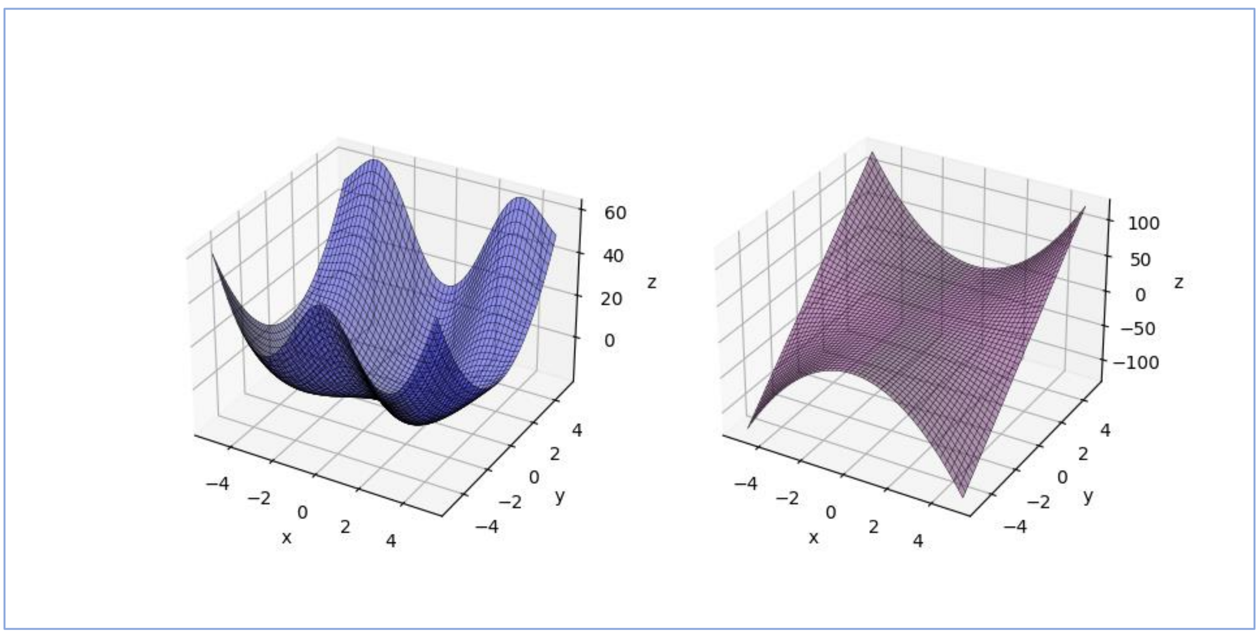
$$\begin{cases} x_1^2 + 2(x_2 - \cos x_1)^2 - 20 = 0 \\ x_1^2 x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

2.2.2. Metodas

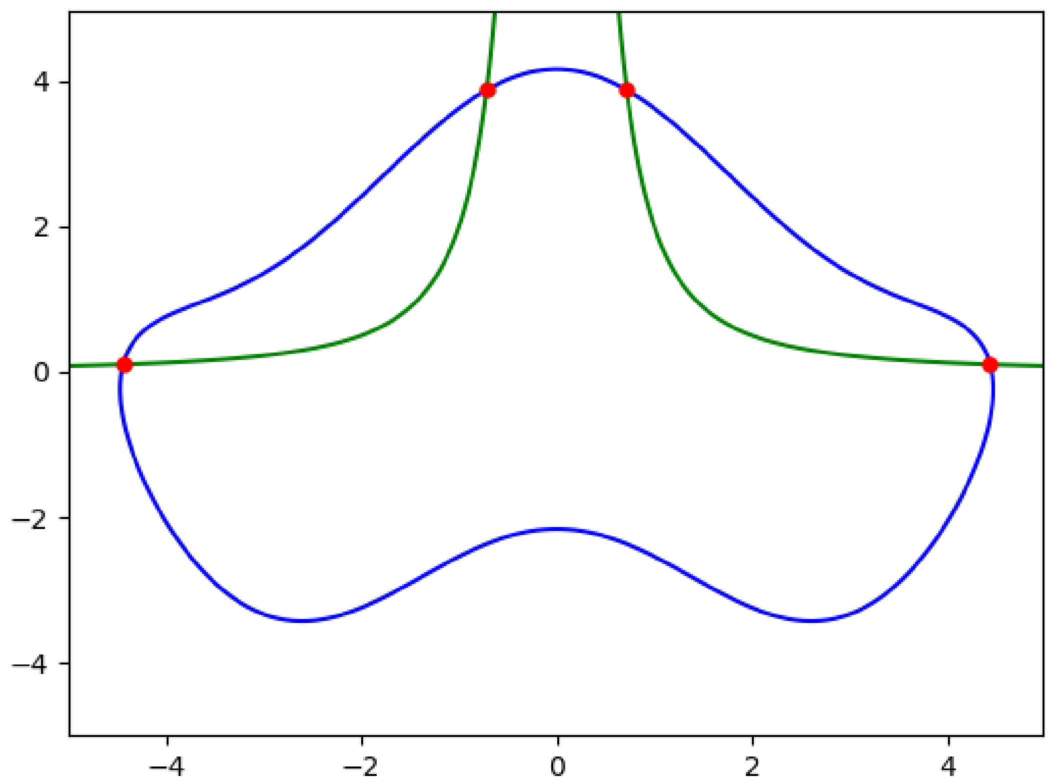
Šiai užduočiai atlikti buvo panaudotas Niutono metodas. Niutono metodo formulė:

$$x^{i+1} = x^i - \left[\frac{\partial f}{\partial x}|_{x^i}\right]^2 f(x^i)$$

Niutono metodas visuomet konverguoja, kai pradedama skaičiuoti nuo gero pradinio artinio. Kiekvienos iteracijos metu reikia apskaičiuoti funkcijos ir Jakobio matricos reikšmes.



pav. 3 Pirmosios ir antrosios lygties grafinis atvaizdavimas



pav. 4 Lygčių sistemos grafinis sprendimas

2.2.3. Niutono metodo programos kodo dalis:

```
def function(xy):
    x, y = xy
    return [x ** 2 + 2 * ((y - np.cos(x)) ** 2) - 20,
            x ** 2 * y - 2]


def jacobian(xy):
    x, y = xy
    return [[2 * x + 4 * np.sin(x) * (y - np.cos(x)), 4 * (y -
np.cos(x))],
            [2 * x * y, x ** 2]]


def iterative_newton(fun, x_init, jacobian_fun):
    max_epochs = 50
    epsilon = 1e-12

    x_last = x_init

    for epoch in range(max_epochs):
        J = np.array(jacobian_fun(x_last))
        F = np.array(fun(x_last))
```

```
        diff = np.linalg.solve(J, -F)
        x_last = x_last + diff

        # Stop condition:
        if np.linalg.norm(diff) < epsilon:
            print('convergence!, epoch:', epoch)
            break

    else:  # only if the for loop end 'naturally'
        print('not converged')

    return x_last
```

2.2.4. Rezultatai

Iteracijų pabaigos sąlygos:

- Daugiausiai iteracijų: 50
- Tikslumas: 1e-12

Pradinis artinys	Tikslumas	Iteracijų skaičius
[-5;4]	[-3.552713678800501e-15, -6.661338147750939e-16]	10
[-2;4]	[0.0, 0.0]	6
[0.5;2]	[0.0, 8.881784197001252e-16]	6
[3;0.5]	[-3.552713678800501e-15, -4.440892098500626e-16]	6

Rezultatai Python konsolėje:

Solutions by python

x1 = [-4.44160772 0.10137937]

x2 = [-0.71851577 3.87398007]

x3 = [0.71851577 3.87398007]

x4 = [4.44160772 0.10137937]

convergence!, epoch: 10

solution found at: [-4.44160772 0.10137937]

F(x1) [-3.552713678800501e-15, -6.661338147750939e-16]

convergence!, epoch: 6

solution found at: [-0.71851577 3.87398007]

F(x2) [0.0, 0.0]

convergence!, epoch: 6

solution found at: [0.71851577 3.87398007]

F(x3) [0.0, 8.881784197001252e-16]

convergence!, epoch: 6

solution found at: [4.44160772 0.10137937]

F(x4) [-3.552713678800501e-15, -4.440892098500626e-16]

3. Išvados

Pirmosios dvi užduotys buvo sėkmingai realizuotos, tačiau pastebėta, jog paprastųjų iteracijų metodas gali diverguoti netgi esant nesinguliariai lygčiai. Kad konverguotų, gali tekti sukeisti lygčių eilutes lygčių sistemoje, todėl, skaičiuojant antrosios lygties sprendinius, paprastųjų iteracijų metodu, reikėjo sukeisti lygčių eilutes vietomis. Iš **pav. 1** ir **pav. 2** galime padaryti išvadą, jog parinkus skirtingas *alpha* reikšmes, funkcijos sprendinių tikslumą pasiekia per skirting iteracijų skaičių.

Paveikslėlių sąrašas