Д. Дружкин, А. Орехова, А. Стюхина, В. Янченко

Билеты к зачету

Предмет: Алгем

Системы линейных уравнений

Определение системы линейных уравнений

Определение 1. *Системой линейных уравнений* (далее СЛУ) называют систему вида:

$$
\begin{cases}
a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n = b_1 \\
a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n = b_m,
\end{cases}
\tag{1}
$$

где $a_j^i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$, m — количество уравнений, n — количество переменных, x_j^i — неизвестные, a_j^i — коэффициенты, b_j — свободные члены.

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$ называется *матрицей коэффициентов*

$\tilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b_m \end{array}\right)$ — *расширенная матрица коэффициентов.*

Пусть $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

Тогда СЛУ можно переписать в матричном виде: $AX = B$.

СЛУ
- совместные (есть решение)
  - определённые (единственное решение)
  - неопределённые (более одного решения)
- несовместные (нет решений)

Элементарные преобразования СЛУ и строк матрицы

Определение 2. *Элементарными преобразованиями СЛУ* называются преобразования вида:

1. Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число
2. Перестановка двух уравнений
3. Умножение уравнения на число, отличное от нуля

Метод Гаусса

Определение 3. *Ведущим* элементом ненулевой строки называется её первый ненулевой элемент

Определение 4. Матрица называется *ступенчатой*, если

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк образует строго возрастающую последовательность,
2. Ненулевые строки (если они есть) стоят в конце.

Пример (Ступенчатой матрицы)**.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *Всякую матрицу путём элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Определение 5. СЛУ называется *ступенчатой*, если её расширенная матрица ступенчатая

Система однородных линейных уравнений (СОЛУ)

Определение 6. Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены уравнений равны нулю:

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_2^1x_2 + \ldots + a_n^1x_n = 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^mx_1 + a_2^mx_2 + \cdots + a_n^mx_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Однородная система всегда совместна, поскольку она всегда имеет тривиальное (нулевое) решение.

Теорема 2. *Совокупность всех решений системы однородных линейных уравнений с n неизвестными является подпространством $\mathbb{R}^n$ (в общем случае K^n).*

Совокупность всех решений произвольной совместной СЛУ есть сумма какого-либо одного решения и подпространства решений системы однородных линейных уравнений с той же матрицей коэффициентов.

□ Пусть $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ и $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — решения 2.

Тогда $\bar{u} + \bar{v}$ — решение 2, так как

$$\overbrace{a_1^1u_1 + \ldots + a_n^1u_n}^{0} + \overbrace{a_1^1v_1 + \ldots + a_n^1v_n}^{0} = 0.$$

Также $\lambda\bar{u}$ — решение 2, так как

$$\lambda\overbrace{(a_1^1u_1 + \ldots + a_n^1u_n)}^{0} = 0.$$

Следовательно совокупность всех решений СОЛУ с n неизвестными есть подпространство $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ — решение 1, $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ — решение 2.

Тогда $\bar{t} + \bar{u}$ — решение 1, так как

$$a_1^1(t_1 + u_1) + \ldots + a_n^1(t_n + u_n) = b_1$$
$$\underbrace{a_1^1t_1 + \ldots + a_n^1t_n}_{b_1} + \underbrace{a_1^1u_1 + \ldots + a_n^1u_n}_{0} = b_1.$$

Пусть $\bar{f}$ — решение 1. Тогда $\bar{p} = \bar{t} - \bar{f}$ — решение 2, так как

$$a_1^1(t_1 - f_1) + \ldots + a_n^1(t_n - f_n) =$$
$$= \underbrace{a_1^1 t_1 + \ldots + a_n^1 t_n}_{b_1} - \underbrace{(a_1^1 f_1 + \ldots + a_n^1 f_n)}_{b_1} = 0$$

Значит совокупность всех решений СЛУ есть сумма какого-либо одного решения и подпространства СОЛУ с той же матрицей коэффициентов. ■

Векторное пространтсво

Определение 7. *Векторным пространством* над полем K называется множество V с операциями сложения и умножения на элемент поля K, обладающая следующими свойствами:

1. V — аддитивная абелева группа.
2. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$
4. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
5. $1 \cdot a = a$

$\lambda, \mu \in K,\ a, b \in V$.

Определение 8. Пусть $S \subset V$. Совокупность всевозможных линейных комбинаций из векторов S называется *линейной оболочкой* множества S. Обозначние: $<S>$.

Пространство V *порождается* множеством S, если $V = <S>$.

Определение 9. Векторное пространство называется *конечномерным*, если оно порождается конечным числом векторов и бесконечномерным в противном случае.

Определение 10. *Базисом* векторного пространства называется упорядоченная максимально линейно независимая система векторов, где каждый вектор пространства линейно выражается через эту систему.

Ранг

Определение 11. Рангом *системы векторов* называется размерность её линейной оболочки.

Ранг *матрицы* — это ранг системы её строк.

Определение 12. Системы векторов $\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ и $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m\}$ называются *эквивалентными*, если каждый из векторов $\bar{b}_i$ линейно выражается через $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ и наоборот, $\bar{a}_j$ линейно выражается через $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m$, где $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$.

Это равносильно $<\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n>=<\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n>$.

Теорема 3. *Ранг матрицы равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы, к которой она приводится элементарными преобразованиями строк.*

Линейная зависимость между столбцами матриц не меняется при элементарных преобразований строк. Ранг системы её столбцов не меняется при элементарных преобразований строк.

Ранг системы строк любой матрицы равен рангу системы столбцов этой матрицы.

Теорема 4 (Кронекера-Капелли)**.** *СЛУ совместна* $\Leftrightarrow rk(A|B) = rk\ A$.

$\square$ $\Rightarrow$ Пусть система 1 совместна и $(k_1, \ldots, k_n)$ — решение СЛУ.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} k_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} k_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Последний столбец расширенной матрицы есть линейная комбинация остальных столбцов с коэффициентами $(k_1, \ldots, k_n)$. Всякий другой столбец расширенной матрицы входит в матрицу A, поэтому линейно выражается через столбцы этой матрицы. Значит система столбцов расширенной матрицы $A|B$ и A эквивалентны $\implies rk(A|B) = rk(A)$.

$\Leftarrow rk(A|B) = rk(A) \implies$ максимальная линейно независимая система столбцов A остаётся линейно независимой и в $A|B \implies$ через эту систему, а значит через систему столбцов матрицы A, линейно выражается последний столбец $A|B \implies \exists(k_1, \ldots, k_n)$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} k_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} k_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

то есть $(k_1, \ldots, k_n)$ — решение СЛУ $\implies$ СЛУ совместна. ■

Теорема 5. *Совместная СЛУ является определённой* $\Leftrightarrow$ $rk(A)$ *равен числу неизвестных.*

Теорема 6. *Размерность пространства решений СОЛУ с* n *неизвестными и матрицей коэффициентов* A *равняется* $n - rk\ A$.

□ Приводим СОЛУ путём элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Число ненулевых уравнений в ступенчатом виде равно $r = rk(A)$. Общее решение системы содержит n переменных:

$$\begin{cases} x_1 = c_1^1 x_{r+1} + c_2^1 x_{r+2} + \ldots + c_{n-r}^1 x_n \\ x_2 = c_1^2 x_{r+1} + c_2^2 x_{r+2} + \ldots + c_{n-r}^2 x_n \\ \vdots \\ x_r = c_1^r x_{r+1} + c_2^r x_{r+2} + \ldots + c_{n-r}^r x_n. \end{cases}$$

■

Частные решения:

Придавая по очереди одному из свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ значения 1, а остальным значения 0, получим решение системы:

$$\begin{aligned} &\bar{u}_1 = (c_1^1, c_1^2, \ldots, c_1^r, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\bar{u}_2 = (c_2^1, c_2^2, \ldots, c_2^r, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ &\bar{u}_{n-r} = (c_{n-r}^1, c_{n-r}^2, \ldots, c_{n-r}^r, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Докажем, что $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r}$ образуют базис пространства решений (это есть ядро линейного отображения см. определение 16).

□ $\bar{u} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\bar{u}_{n-r}$, $\bar{u}$ — решение системы.

$\bar{0} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\bar{u}_{n-r} \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0 \implies \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r}$ — линейно независимы.

Значит $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r})$ — базис пространства решений. ■

Определение 13. Всякий базис пространства решений СОЛУ называется *фундаментальной* системой решения.

Линейные отображения

Определение 14. Пусть U, V — действительные векторные пространства. *Линейным отображением* называется отображение $\varphi : U \to V$, удовлетворяющая свойствам:

1. $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$
2. $\varphi(\lambda\bar{a}) = \lambda\varphi(\bar{a})$,

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in U$

В таком случае векторные пространства U и V называются *изоморфными.*

Если U совпадает с V, то φ называется *линейным преобразованием.*

Вспомнив запись СЛУ через матрицы, получаем, что $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi(\bar{x}) = \bar{b}$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — решение СЛУ.

Пусть A — матрица коэффициентов, тогда A_φ — *матрица линейного отображения.*

Для СОЛУ: $\varphi(\bar{x}) = \bar{0}$,где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — решение СОЛУ.

Определение 15. *Образом* линейного отображения $\varphi : U \to V$ называется множество $Im\ \varphi = \{\bar{b} \in V,\ \varphi(\bar{x}) = \bar{b},\ \bar{x} \in U\}$.

Определение 16. *Ядром* линейного отображения $\varphi : U \to V$ называется множество $Ker\ \varphi = \{\bar{x} \in U :\ \varphi\bar{x} = \bar{0}\}$.

Заметим, что $Ker\ \varphi \subset U$ и $Im\ \varphi \subset V$.

Теорема 7. $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$, $\varphi(\bar{x}) = \bar{b}$
$\implies \bar{x} = \bar{a} + Ker\ \varphi$.

Определители и их приложения

Линейные формы

Определение 17. *Линейной функцией* или *линейной формой* на векторном пространстве V называется функция $\alpha: V \to \mathbb{R}$ (в общем виде $\alpha: V \to K$, где K — поле), обладающая следующими свойствами:

1. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha(\bar{x}) + \alpha(\bar{y})$
2. $\alpha(\lambda \bar{x}) = \lambda \alpha(\bar{x})$

Определение 18. *Билинейной функцией* или *билинейной формой* на векторном пространстве V называется форма $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ (паре векторов сопоставляется действительное число), линейная по каждому аргументу, то есть:

1. $\alpha(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2,\, \bar{y}) = \lambda_1 \alpha(\bar{x}_1,\, \bar{y}) + \lambda_2 \alpha(\bar{x}_2,\, \bar{y})$
2. $\alpha(\bar{x}, \gamma_1 \bar{y}_1 + \gamma_2 \bar{y}_2) = \gamma_1 \alpha(\bar{x}, \bar{y}_1) + \gamma_2 \alpha(\bar{x}, \bar{y}_2)$

Пример. Самый наглядный пример билинейной функции — скалярное произведение.

Для любых функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, функция $I(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$ является билинейной функцией на $[a, b]$.

Определение 19. *Скалярным произведением* называется билинейная форма, обладающая свойствами:

1. Симметричность $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$
2. Положительная определённость $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$ и $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

Определитель матрицы n-ого порядка

Пусть V — действительное пространство, функция $f\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \to \mathbb{R}$.

Определение 20. Функция f называется *полилинейной*, если она линейна по каждому аргументу.

Определение 21. Полилинейная функция называется *кососимметрической*, если при перестановке любых двух аргументов она умножается на -1.

Определение 22. *Определителем* квадратной матрицы $A = (a^i_j)$, i, $j = 1, \ldots, n$ называется число

$$det\ A = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} sgn(k_1, \ldots, k_n) \cdot a^1_{k_1} a^2_{k_2} \ldots a^n_{k_n},$$

где $sgn(k_1, \ldots, k_n)$ — знак перестановки.

Теорема 8. *Определитель является кососимметрической полилинейной функцией строк матрицы*

Всякая функция f на множестве квадратных матриц порядка n, являющаяся кососимметрической полилинейной функцией строк матрицы имеет вид $f(A) = f(E) \cdot det\ A$ в частности, если $f(E) = 1$, то $f(A) = det\ A$.

Определение 23. Матрица A называется *невырожденной*, если определитель матрицы A не равен нулю. ($det\ A \neq 0$).

Теорема 9 (об определителе матрицы с углом нулей)**.** *Пусть* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, *где B и C квадратные матрицы. Тогда $det\ B \cdot det\ C = det\ A$.*

Лемма. $\begin{vmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_j & \ldots & a^1_n \\ 0 & 0 & a^i_j & 0 & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a^n_1 & \ldots & a^n_j & \ldots & a^n_n \end{vmatrix} = A^i_j \cdot a^i_j$, *где A^i_j — алгебраическое дополнение элемента a^i_j и вычисляется $A^i_j = (-1)^{i+j} \cdot M^i_j$.*

M^i_j — минор элемента a^i_j.

□ Переставляя строки и столбцы приведем матрицу к виду:

$$\begin{pmatrix} a^i_j & 0 & \ldots & 0 \\ a^1_j & a^1_1 & \ldots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_j & a^n_1 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix} = det\ B \cdot det\ C = a^i_j \cdot det\ C = a^i_j A^i_j.$$

(красным отмечена матрица B, синим — C). ■

Некоторые приложения определителя

Теорема 10 (Крамера). *Если определитель матрицы коэффициентов A отличен от нуля, то система*

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_n^1x_n = b_1 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + \cdots + a_n^nx_n = b_n, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Причем $x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A}$, $i = 1, \ldots, n$, где A_i — матрица A, в которой i столбец заменяется на $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

$\square$ При элементарных преобразованиях системы уравнений в матрицах A и A_i происходит элементарные преобразования строк, следовательно формула Крамера не меняется.

Рассмотрим случай, когда $A = E$. Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \text{i столбец} \\ \downarrow \end{array}$$

$$det\ A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \cdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = b_i$$

$\Longrightarrow\ x_i = \frac{b_i}{1} = b_i \Longrightarrow$ Формула Крамера верна.

Если $det\ A = 0,\ \exists i: \ det\ A_i = 0 \Longrightarrow$ система несовместна.

Если $det\ A = \ldots = det\ A_n = 0 \Longrightarrow$ система несовместна или неопределена. $\blacksquare$

Теорема 11. *Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Тогда*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{Vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^n \end{Vmatrix}$$

(обратите внимание, что матрица транспонирована).

□ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$\underbrace{AX = E}_{\text{Уравнение относительно столбцов матрицы } X} \implies X = A^{-1}$, то есть $A \cdot X_j = E_j$

Эта система n линейных уравнений относительно элементов $x_j^1,\ x_j^2, \dots,\ x_j^n$. По формулам Крамера получим:

$$x_j^i = \frac{1}{det\ A} \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & 0 & \cdots & a_n^1 \\ a_2^1 & \cdots & 0 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^j & \cdots & 1 & \cdots & a_n^j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & 0 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \frac{A_i^j}{det\ A}.$$

■

Второй способ вычисления обратной матрицы: $(A|E)$ приводим через элементарные преобразования к $(E|A^{-1})$

Пример.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Например, } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1^1 = -2 \\ x_1^2 = 3/2 \end{cases}$$

Аналогично с вторым столбцом матрицы X.

Ранг матрицы

Определение 24. *Минором* k-го порядка матрицы A называется определитель порядка k, построенный из k^2 элементов этой матрицы, расположенныъ на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов.

Определение 25. *Рангом* ненулевой матрицы $A_{n\times m}$ называется натуральное число $k:\ 1 \le k \le min(m, n)$, удовлетворяющая двум условиям:

1. У матрицы A существует по крайней мере один минор k-го порядка, отличный от нуля. $M_k \neq 0$.

2. Если у матрицы A существует миноры $k+1$-го порядка, то все они равны нулю. $M_{k+1} = 0$

Определение 26. Если $rk\,A = k$, то любой её $M_k \neq 0$ называется *базисным* или *ранговыми*. Строки и столбцы базисного минора называются *базисами*.

Теорема 12 (о базисном миноре). *У любой матрицы A всякий столбец (строка) является линейной комбинацией базисных столбцов (строк).*

□ Пусть $rk\,A = k$ и M_k — базисный минор, расположенный в левом верхнем углу.

Построим определитель окаймляющий M_k, который получается добавлением i строки и j столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n^1 & \cdots & a_k^1 & a_j^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_j^k & \cdots & a_k^k & a_j^k \\ a_1^i & \cdots & a_k^i & a_j^i \end{vmatrix} = 0$$

(так как $rk\, A = k,\ M_k \neq 0,\ M_{k+1} = 0$)

Раскладывая Δ по элементам последней строки получим:

$$a_1^i A_1^{k+1} + \ldots + a_k^i A_k^{k+1} + a_j^i M_k = 0$$

$$a_j^i = a_1^i \frac{-A_1^{k+1}}{M_k} + \ldots + a_k^i \frac{-A_k^{k+1}}{M_k}$$

$$a_j^i = \lambda_1 a_1^i + \ldots + \lambda_k a_k^i$$

a_j^i линейно выражается через остальные

■

Алгебра многочленов

(если выполнено домашнее задание, то раздел не нужно учить) 404

Группы

Циклические группы

Определение 27. *Группой* называется множество G с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. $(ab)c = a(bc), \ \forall\, a, b, c \in G$ (ассоциативность)
2. $\exists e \in G$ (единица): $ae = ea = e\ \forall a \in G$
3. $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G$ (обратный элемент), $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Группа называется *абелевой* или *коммутативной*, если $ab = ba, \ \forall a, \ b \in G$.

В любой группе могжет быть определена степень элемента $g \in G$ с целыми показателями:

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \dots \ \cdot g}_{k}, & \text{если } k > 0 \\ e, & \text{если } k = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \dots \ \cdot g^{-1}}_{k}, & \text{если } k < 0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Определение 28. Степени элемента g образуют подгруппу группы G. Она называется *циклической* и обозначается $<g>$

Определение 29. Наименьшее из натуральных m для которого выполняется $g^m = e$ называется *порядком* элемента.

Если m не существует, то порядок g равен $+\infty$.

Обозначение: $ord\ g = m$.

Теорема 13. *Если $ord\ g = n$, то*

1. $g^m = e \Leftrightarrow n \mid m$

2. $g^k = g^l \Leftrightarrow k \equiv l (mod\ n)$

□ 1. $m = np + r, \ r < n$

$g^m = g^{np} \cdot g^r = (\underbrace{g^n}_{e})^p \cdot g^r = g^r$

$\Rightarrow \ g^m = e \implies g^r = e \implies r = 0 \Leftarrow$ так как $n \mid m$, то $r = 0$.

2. $g^k = g^l \implies g^{k-l} = e$

$\implies$ по первому утверждению $(k-l) \vdots n \implies k - l = np$

■

В аддитивной группе говорят не о степенях элемента g, а о его кратных. Обозначение: $m\ g$

Порядком элемента g в *аддитивной* группе называют наименьшее из натуральных m, такое, что $\underbrace{g+g+\ldots+g}_{m} = 0$(если m существует).

Теорема 14. *Если ord* $g = n$, *то ord* $g^k = \frac{n}{(n,k)}$, $(n,k) = \gcd(n,k)$

□ Пусть *ord* $g^k = m$ и $(n,k) = d$. Тогда $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, $(n_1, k_1) = 1$.

Так как *ord* $g = n$, то $g^n = e$. Также $(g^k)^m = e \implies km \vdots n \implies k_1 dm \vdots n_1 d \implies k_1 m \vdots n_1$

Так как $(k_1, n_1) = 1 \implies m \vdots n_1 \implies m = pn_1 = \frac{pn_1 d}{d} = \frac{pn}{d} \implies p = 1$.
$\implies$ *ord* $g^k = \frac{n}{k} = \frac{n}{(n,k)}$. ■

Определение 30. Группа G называется *циклической*, если существует такой элемент в степени которого образует группу G.

$G =< g >$ и такой элемент называется *образующим.*

Пример. $\mathbb{Z}$ аддитивная группа целых чисел является циклической с образующим элементом 1 или -1

Z_n — циклическая группа с образующим элементом [1].

Определение 31. Число элементов конечной группы называется её *порядком.*

Обозначение: $|G|$

Пример. Всякая бесконечная циклическая группа изоморфна группе целых чисел:

$f : \mathbb{Z} \to G$,

$f : k \to g^k$.

Всякая конечная цилкическая группа порядка n изоморфна группе Z_n:

$f : Z_n \to G$.

Всякая подгруппа циклической группы является циклической.

В циклической группе порядка n порядок любой подгруппы делит n и для любого делителя p числа n существует одна подгруппа порядка n.

Разбиение на смежные классы

Определение 32. Пусть G — группа, H — подгруппа группы G. Элементы $g_1,\ g_2 \in G$ сравнимы по модулю H ($g_1 \equiv g_2\ (mod\ H)$), если $g_1^{-1}g_2 \in H$.
$g_1^{-1}g_2 = h \in H \implies g_2 = g_1 h$

Отношение сравнимости по модулю H является отношением эквивалентности:

1.

$$g_1 \equiv g_1\ (mod\ H)$$
$$(g_1^{-1}g_1) = e \in H$$

2.

$$g_1 \equiv g_2\ (mod\ H) \implies g_2 \equiv g_1\ (mod\ H)$$
$$g_1^{-1}g_2 \in H \implies (g_1^{-1}g_2)^{-1} \in H, \text{так как является обратным.}$$
$$\implies (g_2^{-1}g_1 \in H) \implies g_2 \equiv g_1\ (mod\ H).$$

3.

$$g_1 \equiv g_2\ (mod\ H) \wedge g_2 \equiv g_3\ (mod\ H)$$
$$\implies g_1 \equiv g_3\ (mod\ H)$$
$$g_1^{-1}g_2 \in H,\ g_2^{-1}g_3 \in H$$
$$\implies (g_1^{-1}\underbrace{g_2) \cdot (g_2^{-1}}_{e}g_3) \in H \implies g_1^{-1}g_3 \in H$$
$$\implies g_1 \equiv g_3\ (mod\ H).$$

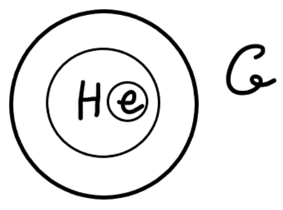


Рис. 1: Пример

Определение 33. Классы этой эквивалентности называются *левыми смежными классами* группы G подгруппы H.

Смежный класс, содержащий элемент g, имеет вид $gH = \{gh,\ h \in H\}$

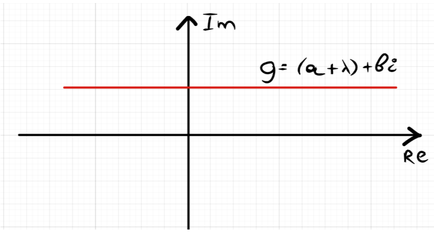
Одним из смежных классов является сама подгруппа H.

Если вместо $g_1^{-1}g_2 \in H$ взять $g_2\, g_1^{-1} \in H$, то получим другое отношение эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *правыми смежными классами.*

Пример. Смежные классы аддитивной группы $\mathbb{C}$ на подгруппе $\mathbb{R}$ изображаются на комплексной плоскости прямой параллельной оси Ox

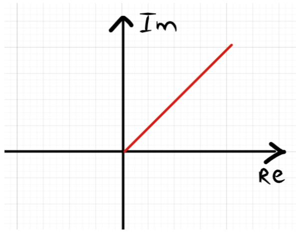
$g + \mathbb{R},\ g \in \mathbb{C}$

$g + \mathbb{R} = \{g + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$



Пример. Смежные классы мультипликативной групп $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по подгруппе $\mathbb{R}_+^*$ изображаются на комплексной плоскости лучами, исходящими из начала координат.

$g\mathbb{R}_+^* = \{g\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$



Множество левых смежных классов группы G подгруппы H обозначается G/H.

Определение 34. Число смежных классов, если оно конечно, называется *индексом* подгруппы H и обозначается $|G : H|$.

Теорема 15 (Лагранжа)**.** *Если G конечная группа, H любая её подгруппа, то $|G| = |G : H| \cdot |H|$.*

□ Все смежные классы gH содержат одно и то же количество элементов равное $|H|$. Так как эти классы образуют разбиение группы G, то порядок группы G равен произведению их числа на количество элементов подгруппы $H \implies |G| = |G : H| \cdot |H|$. ■

Определение 35. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если $gH = Hg$, то есть $\forall g \in G: \ gHg^{-1} = H$.

Обозначение: $H \lhd G$, $G \rhd H$.

В случае, если H — нормальная подгруппа группы G, то G/H называется *факторгруппой*. eH — единица этой группы.

Определение 36. $f : G_1 \to G_2$ называется *гомоморфизмом*, если $f(ab) = f(a)f(b), \ a, b \in G_1$.

Свойства:

1. $f(e) = e$

2. $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$

   $\square \quad f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e) = e \implies f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$. $\blacksquare$

3. $Im\ f = \{f(a), \ a \in G_1\}$ — образ гомоморфизма. $Im\ f \subset G_2$.

4. $Ker\ f = \{a \in G_1, \ f(a) = e\}$ — ядро.

   $Ker\ f$ есть нормальная подгруппа группа G_1.

   $\square \quad a, b \in Ker\ f$

   $f(ab) = f(a) \cdot f(b) = e \cdot e = e \implies ab \in Ker\ f$

   $a \in Ker \implies f(a^{-1}) = e^{-1} = e \implies a^{-1} \in Ker\ f \implies Kerf \subset G_1$.

   $\forall g \in G_1, \ a \in Ker\ f, \ g\,a\,g^{-1} \overset{?}{\in} Ker\ f$.

   $f(g\,a\,g^{-1}) = f(g) \cdot f(a) \cdot f(g^{-1}) = f(g) \cdot e \cdot f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = e$

   $\implies g\,a\,g^{-1} \in Ker\ f$. $\blacksquare$

5. $f(g_1) = f(g_2) \implies g_1 \equiv g_2 (mod\ Ker\ f)$

   $\square \quad f(g_1) = f(g_2) \ / \cdot f(g_1^{-1})$

   $f(g_1^{-1})f(g_1) = f(g_1^{-1})f(g_2)$

   $e = f(g_1^{-1}g_2) \implies g_1^{-1}g_2 \in Ker\ f \implies g_1 \equiv g_2 (mod\ Ker\ f)$ $\blacksquare$

6. $f(a^n) = (f(a))^n$

7. $f: \ G_1 \to G_2$

   $\forall g \in G_1$ порядок элемента $f(g)$ делит порядок g.

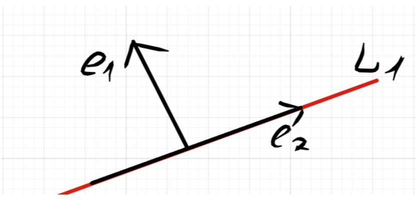
   $\square$ Пусть $ord\ g = k \implies g^k = e$

   $f(g^k) = (f(g))^k \implies (f(g))^k = e \implies ord\ f(g) = k$. $\blacksquare$

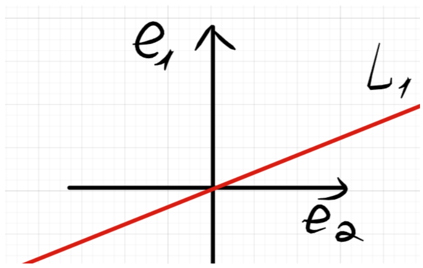
Линейные операторы и квадратичные формы

Квадратичные формы

Определение 37. Базис пространства L называется *согласованным* с подпространством L_1, если L_1 является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов.



(a) Пример согласованного базиса, так как $L_1 = <e_2>$



(b) Пример несогласованного базиса

Пример.

Определение 38. *Суммой* подпространств $L_1, L_2, \dots, L_k$ называется совокупность векторов вида $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_k$, где $\bar{u}_i \in L_i,\ i = 1, \dots, k$.

Теорема 16. *Для всякой пары подпространств $L_1,\ L_2 \in L$ существует базис пространства L, согласованный с подпространствами $L_1,\ L_2$.*

□ Пусть $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k)$ — базис $L_1 \cap L_2$.Дополним до базиса L_1 и L_2:
$(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$ — базис L_1.
$(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_p)$ — базис L_2.

Рассмотрим $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_p)$ и докажем, что векторы линейно независимы.

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, \bar{f}_j + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \, \bar{d}_j = 0$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, \bar{f}_j}_{\in L_1} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{p} \nu_j \, \bar{d}_j}_{\in L_2}$$

Векторы $(d_1, \dots, d_p) \notin L_1 \cap L_2 \implies$ равенство возможно только, если все коэффициенты равны нулю, то есть векторы линейно независимы. ■

Следствие. $dim\,(L_1 + L_2) = dim\,L_1 + dim\,L_2 - dim\,(L_1 \cap L_2)$

Определение 39. Подпространства $L_1, \ldots, L_k$ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_k = \bar{0},\ \bar{u}_i \in L_i$ следует $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \ldots = \bar{u}_k = \bar{0}$.

Определение 40. Векторное пространство L *разлагается* в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_k$, если

1. $L_1, \ldots, L_k$ — линейно независимые

2. $L_1 + \ldots + L_k = L$

Обозначение: $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$.

$\forall \bar{v} \in L\ \bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_k,\ \bar{u}_i \in L_i\ u_i$ называется *проекцией* v на L_i.

Напомним, что *линейной* функцией называют функцию $\alpha : V \to \mathbb{R}$, где V — векторное пространство (Далее $L,\ V,\ L_i,\ V_i$ — векторные пространства), если выполняются следующие условия:

1. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha(\bar{x}) = \alpha(\bar{y})$

2. $\alpha(\lambda\bar{x}) = \lambda\alpha(\bar{x})$.

$\forall\, \bar{x},\ \bar{y} \in V$.

Пример. *След квадратной матрицы* — это сумма её диагональных элементов. $tr\,A = a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n$

След квадратной матрицы есть линейная функция, заданная на множестве квадратных матриц. $\alpha(A) = tr\,A,\ V = M_{m\times n}$.

Определение 41. Линейные функции *образуют* подпространство в пространстве всех функций, заданных на V со значениями $\mathbb{R}$.

Пространство линейных функций, заданных на V, называется *сопряженным пространством* по отношению V. Обозначение: V^*.

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис V, а $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — базис V^*.

$$\varepsilon_i\,(\bar{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, если } i = j \\ 0 & \text{, если } i \neq j. \end{cases}$$

$\varepsilon_i(\bar{x}) = x_i$.

Напомним также, что *билинейной* функцией (формой) называется функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$, которая линейна по каждому аргументу.

Примером билинейной функции является след: $\alpha(A, B) = tr\,(AB)$.

Определение 42. *Ядром* билинейной функии называется подпространство $Ker\,\alpha = \{\bar{y},\ \alpha(\bar{x},\bar{y}) = 0,\ \forall\,\bar{x} \in V\}$.

Определение 43. Функция α называется *невырожденной*, если ядро состоит из нуля ($Ker\,\alpha = 0$).

Функция α является симметрической, если $\alpha\bar{x},\bar{y} = \alpha\bar{y},\bar{x}$.
Функция α является кососимметрической, если $\alpha\bar{x},\bar{y} = -\alpha\bar{y},\bar{x}$.

Определение 44. Пусть α симметрическая билинейная функция над полем K, $char\,K \neq 2$. Функция $q : V \to K$, которая определяется как $q(\bar{x}) = \alpha(\bar{x},\bar{x})$, называется *квадратичной* функцией или формой, ассоциированной с функцией α

В координатной форме квадратичную функцию можно записать так:

$$q(\bar{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Симметрическая билинейная функция может восстанавливаться по соответствующей квадратичной функции. $\alpha(\bar{x},\,\bar{y}) = \frac{1}{2}(q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y}))$.
□

$$\begin{gathered}
q(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha(\bar{x}+\bar{y},\,\bar{x}+\bar{y}) = \\
= \alpha(\bar{x},\,\bar{x}) + \alpha(\bar{y},\,\bar{x}) + \alpha(\bar{x},\,\bar{y}) + \alpha(\bar{y},\,\bar{y}) = \\
= \alpha(\bar{x},\,\bar{x}) + \alpha(\bar{y},\,\bar{y}) + 2\alpha(\bar{x},\,\bar{y}) \implies \\
2\alpha(\bar{x},\,\bar{y}) = q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})
\end{gathered}$$

■

Определение 45. Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются *ортогональными*, если $\alpha(\bar{x},\,\bar{y}) = 0$.

Определение 46. *Ортогональным дополнением* к подпространству U относительно α называется подпространство $U^{+} = \bar{y} :\ \alpha(\bar{x},\,\bar{y}) = 0,\ \forall\,\bar{x} \in U$.

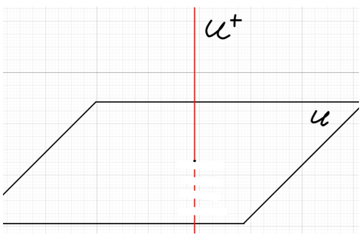


Рис. 3: Пример ортогонального дополнения к U относительно скалярного произведения

Определение 47. Подпространство U называется *невырожденным* относительно билинейной функции α, елси её ограничения на U невырожденно

Определение 48. Пусть α — симметрическая билинейная форма. Базис $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ называется *ортогональным* относительно α, если его векторы попарно ортогональны.

В ортогональном базисе верны следующие утверждения:

$$\alpha(\bar{x},\, \bar{y}) = \alpha_1\, x_1\, y_1 + \ldots + \alpha_n\, x_n\, y_n$$

$$q(\bar{x}) = \alpha(\bar{x}, \bar{x}) = \alpha_1\, x_1^2 + \ldots + \alpha_n\, x_n^2$$

$$\alpha(\bar{e}_i,\, \bar{e}_j) = 0, \text{ если } i \neq j$$

$$\alpha_i = \alpha(\bar{e}_i,\, \bar{e}_i)$$

Теорема 17. *Пусть $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис V, A — матрица функции α в этом базисе, A_k — матрица функции α на подпространстве $V_k =< \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k >$, $k \leq n$ и $\delta_k = det\, A_k$.*

Если все угловые миноры $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ отличны от нуля, то ***существует*** *единственный ортогональный базис $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$ удовлетворяющий условию $\bar{f}_k \in \bar{e}_k + V_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$.*

При этом $q(\bar{f}_k) = \alpha(\bar{f}_k,\, \bar{f}_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$.

Определение 49. Процесс построения ортогонального базиса называется процессом *ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пример. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

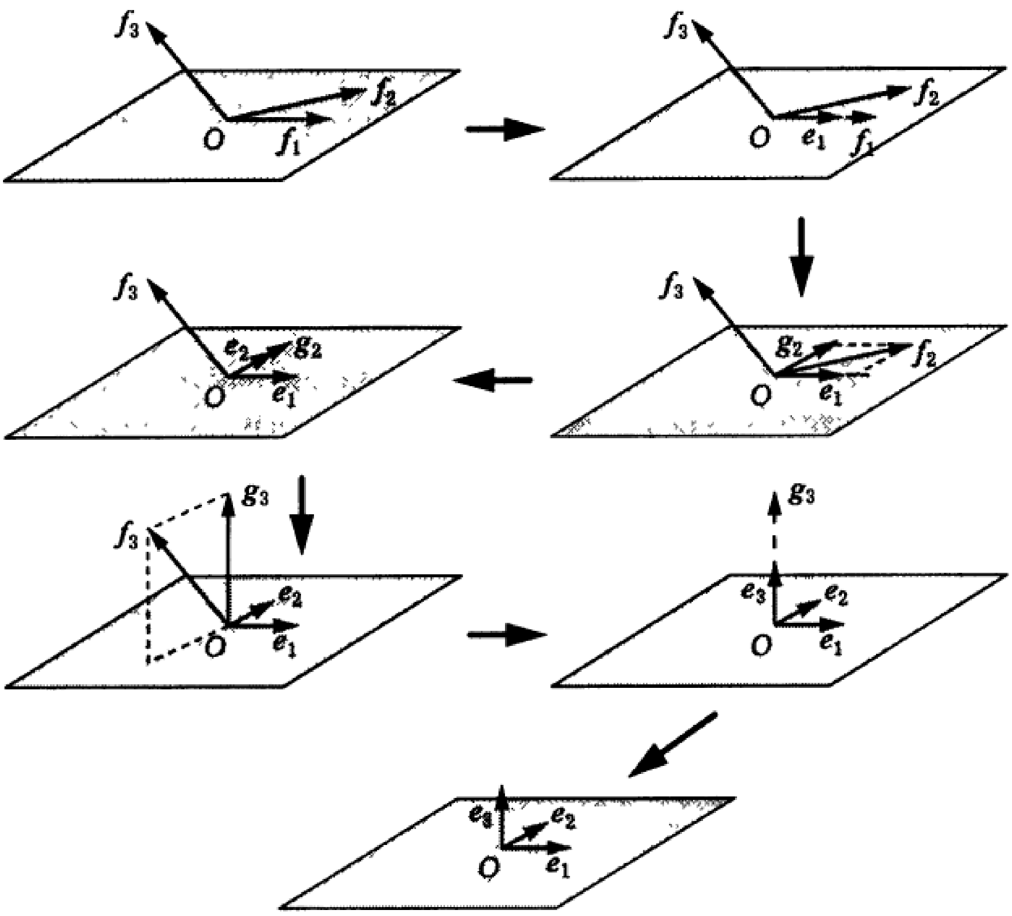


Рис. 3.4

Построение ортонормированного базиса:

$(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис $\to$ $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$ — ортогональный базис ($\bar{f}_i \perp \bar{f}_j$, $\alpha(\bar{f}_i, \bar{f}_j) = 0$ при $i \neq j$) $\to$ $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n)$ — ортонормированный базис ($|\bar{d}_i| = 1$).

Определение 50. Вещественная квадратичная форма q называется *положительно определенной*, если $q(\bar{x}) > 0, \ \bar{x} \neq \bar{0}$

Вещественная симметрическая билинейная форма назыается *положительно определенной*, если соответствующая ей квадратичная форма положительно определена.

Теорема 18 (Критерий Сильвестра)**.** *Вещественная квадратичная функция является* ***положительно определённой*** *тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы* ***положительны****.*

Канонический вид квадратичных форм

Если квадратичная функция $q : V \to \mathbb{C}$ определена на поле комплексных чисел, то путём нормировки базисных векторов квадратичную форму можно привести к виду

$$q(\bar{x}) = x_1^2 + \ldots + x_r^2,$$

где r — ранг квадратичной формы.

В случае же, когда квадратичная форма $q : V \to \mathbb{R}$ определена на поле вещественных чисел, то форму можно привести к виду

$$q(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - \ldots - x_{k+\ell}^2, \tag{3}$$

где $k + \ell$ — ранг формы.

Число k в нормальном виде квадратичной формы 3 есть *максимальная размерность подпространства*, на котором функция q положительно определена.

Теорема 19 (Закон инерции)**.** *Числа k и ℓ в нормальном виде 3 вещественной квадратичной функции не зависят от выбора базиса, в котором эта функция имеет нормальный вид.*

Пара $(k,\, \ell)$ называется ***сигнатурой*** *квадратичной функции.*

Евклидово пространство

Определение 51. *Евклидовым векторным пространством* называется действительное векторное пространство с фиксированным положительно определенной симметрической билинейной функцией. Эта функция называется *скалярным произведением.*

Определение 52. *Матрицей Грама* (в евклидовом пространстве) называется

$$G(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1,\, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1,\, \bar{e}_2) & \ldots & (\bar{e}_1,\, \bar{e}_n) \\ (\bar{e}_2,\, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2,\, \bar{e}_2) & \ldots & (\bar{e}_2,\, \bar{e}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\bar{e}_n,\, \bar{e}_1) & (\bar{e}_n,\, \bar{e}_2) & \ldots & (\bar{e}_n,\, \bar{e}_n) \end{pmatrix},$$

где $(\bar{e}_i,\, \bar{e}_j)$ — скалярное произведение. Так как функция симметрическая, то матрица симметрична относительно главной диагонали.

Матрица Грама обладают следующими свойствами:

> Определитель матрицы Грама системы n векторов равен квадрату объёма n-мерного параллелепипеда, натянутого на эти векторы. Из этого следует, что в случае трёхмерного пространства определитель Грама трёх векторов равен квадрату их смешанного произведения.

> Система векторов $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен нулю.

Пусть $L = U \oplus U^+ \implies \underbrace{\bar{x}}_{\in L} = \underbrace{\bar{y}}_{\in U} + \underbrace{\bar{z}}_{\in U_+}$, где $\bar{y}$ — ортогональная *проекция* $\bar{x}$ на U, $\bar{z}$ — ортогональная *составляющая* $\bar{x}$ относительно U.

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k)$ — ортогональный базис U.

Зная $\bar{x}$, **Как найти проекцию и составляющую?**

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{e}_k + \bar{z} \quad / \text{ Скалярно умножаем на } \bar{e}_1$$

$$(\bar{x}, \bar{e}_1) = \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \lambda_2 \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}_{=0} + \ldots + \lambda_k \underbrace{(\bar{e}_k, \bar{e}_1)}_{=0} + \underbrace{(\bar{z}, \bar{e}_1)}_{=0}$$

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_1)}{\bar{e}_1^2}$$

Проделывая аналогичные действия для всех $i = 1, \ldots, k$, получим:

$$\lambda_i = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_i)}{\bar{e}_i^2}$$

$$\implies \bar{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{x}, \bar{e}_i)}{(\bar{e}_i, \bar{e}_i)} \cdot \bar{e}_i}_{y} + \bar{z} \implies \bar{z} = \bar{x} - \bar{y}.$$

По теореме 17 мы знаем, когда существует ортогональный базис, но **Как построить ортогональный базис**

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — произвольный базис. Построим ортогональный базис $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$.

$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$

$\bar{e}_2 = \lambda_1 \bar{e}_1 + \bar{f}_2$, где $\bar{f}_2$ — ортогональная составляющая. Умножаем выражение скалярно на $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$

$(\bar{e}_2, \bar{f}_1) = \lambda_1 (\bar{e}_1, \bar{f}_1) + \underbrace{(\bar{f}_2, \bar{f}_1)}_{\substack{=0, \\ \text{так как } \bar{f}_2 \perp \bar{f}_1}}$

$\lambda_1 = \frac{(\bar{e}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \implies \bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda_1 \bar{e}_1$

$\bar{e}_3 = \lambda \bar{f}_1 + \mu \bar{f}_2 + \bar{f}_3$

Скалярно умножаем на f_1: $\lambda = \frac{(\bar{e}_3, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \implies \bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda \bar{f}_1 - \mu \bar{f}_2$

Следовательно $\bar{f}_i = \bar{e}_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} \frac{(\bar{e}_i, \bar{f}_k)}{(\bar{f}_k, \bar{f}_k)} \cdot \bar{f}_k, \ i = 1, \ldots, n$

Определение 53. Евклидовые векторные пространства V, U называются изоморфными, если существует биективное отображение $f : V \to U$ являющаяся изоморфизмом и выполняется равенство $(f(\bar{a}),\, f(\bar{b})) = (\bar{a}, \bar{b}),\ \forall\, \bar{a},\, \bar{b} \in V$.

Теорема 20. *Любые два евклидовых векторных пространства одинаковой размерности изоморфны.*

□ Пусть $dim\, V = dim\, U = n,\ U,\, V$ — векторные пространства, $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n),\ (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ — ортонормированные базисы V и U соответственно. .

Построим отображение $f : V \to U,\ f(\bar{v}_i) = \bar{u}_i,$ а значит $(f(\bar{v}_i),\, f(\bar{v}_k)) = (\bar{u}_i,\, \bar{u}_k) = \delta_{ik} = (\bar{v}_i,\, \bar{v}_k)$.

Следовательно V и U изоморфны. ■

Линейный оператор

Определение 54. *Линейным оператором* или *линейным преобразованием* векторного пространства L называется линейное отображение в себя $A : L \to L$.

Выполняются следующие условия:

1. $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\,\bar{x} + A\,\bar{y}$
2. $A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\,\bar{x}$

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис L,

$$A(\bar{e}_1) = a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + \ldots + a_1^n\bar{e}_n$$

$$\vdots$$

$$A(\bar{e}_n) = a_n^1\bar{e}_1 + a_n^2\bar{e}_2 + \ldots + a_n^n\bar{e}_n$$

$$\underbrace{(A\,\bar{e}_1, \ldots, A\,\bar{e}_n)}_{\text{матрица-строка}} = \underbrace{(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)}_{\text{матрица-строка}} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$A\,\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \bar{e}_k,\ k = 1, \ldots, n$$

Определение 55. Матрица $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора* A.

Рассмотрим переход от базиса $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ к $(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n)$:

$(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = (\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) \cdot C$, где C — матрица перехода от $(\bar{e}_i)$ к $(\bar{e}'_i)$.

$(A\,\bar{e}'_1, \ldots, A\,\bar{e}'_n) = (\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) \cdot A'$, где A' — матрица линейного оператора в базисе $(\bar{e}'_i)$. Аналогично для базиса $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$.

$(A\,\bar{e}'_1, \ldots, A\,\bar{e}'_n) = (A\,\bar{e}_1, \ldots, A\,\bar{e}_n) \cdot C = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) \cdot A\,C \implies$

$(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) \cdot A' = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) \cdot A\,C \implies$

$\underline{A' = C^{-1} \cdot A \cdot C}$

Определение 56. Подпространство $\mathcal{U} \in L$ называется *инвариантным* относительно оператора A, если $A\,(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$.

То есть $\bar{x} \in \mathcal{U} \implies A\,\bar{x} \in \mathcal{U}$.

Если $\mathcal{U} = <\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k>$, а $L = <\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_n>$ (а это всегда можно сделать), то матрица оператора A в этом базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $A_{\mathcal{U}}$ в базисе $<\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k>$, C — квадратная матрица порядка $n-k$ и D — какая-то матрица размера $k \times (n-k)$. Верно и обратное.

Если же пространство L можно разложить на сумму двух инвариантных подпространств $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$: $L = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$, то матрица линейного оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $A_{\mathcal{U}_1}$, C — матрица оператора $A_{\mathcal{U}_2}$.

Собственные векторы

Определение 57. Пусть $A : L \to L$ — линейный оператор. Вектор $\bar{x} \neq 0$ называется *собственным* вектором оператора A, если $A\,\bar{x} = \lambda\bar{x},\ \lambda \in \mathbb{R}$, где число λ — *собственное значение* оператора A, отвечающие собственному вектору $\bar{x}$.

Если $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис из собственных векторов, то матрица линейного оператора выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема 21. *Для существования* $\bar{x}$ *и* λ *необходимо и достаточно* $det\,(A-\lambda E) = 0$, *где* A — *матрица линейного оператора,* E — *единичная матрица.*

□ $A\,\bar{x} = \lambda\bar{x}$

$A\,\bar{x} - \lambda\bar{x} = 0$

$(A - \lambda E)\bar{x} = 0$ Записав в координатном виде это равенство, получим однородную систему линейных уравнений.

У этой системы есть ненулевое решение $\Leftrightarrow det\,(A - \lambda E) = 0$. ■

Определение 58. Многочлен $f_A(t) = det\,(A - tE)$ называется *характеристическим* многочленом оператора A.

Теорема 22. *Характеристический многочлен не зависит от выбора матрицы линейного оператора, то есть* $det\,(A_1 - tE) = \det(A_2 - tE)$, *где* A_1, A_2 — *матрицы линейного оператора* A *в базисе* $(\bar{e}_i)$ *и* $(\bar{e}_j)$.

□ Пусть C — матрица перехода из $\bar{e}_i$ в $\bar{e}'_i$, то есть $\bar{e}'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} C_i^j\,\bar{e}_j$

$A_2 = C^{-1} \cdot A_1 \cdot C$

$\det(A_2 - tE) = \det(C^{-1}\,A_1\,C - tE) = \det(C^{-1}\,A_1\,C - t\,C^{-1}\,C) =$

$= \det C^{-1}(A_1 - tE)C = \det C^{-1} \cdot \det(A_1 - tE) \cdot \det C =$

$= det(\underbrace{C^{-1} \cdot C}_{E}) \cdot \det(A_1 - tE) = \det(A_1 - tE)$. ■

Теорема 23. *Собственное значение оператора* A — *это корень его характеристического многочлена.*

Теорема 24. *Любой линейный оператор в комплексном линейном пространстве имеет собственный вектор*

Теорема 25. *Пусть* $A : L \to L,\ L \in \mathbb{R}$, *тогда существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

При заданном значении λ собственные векторы находятся из системы однородных линейных уравнений

$$(A - \lambda E)X = 0,$$

где X обозначает столбец координат неизвестного вектора. Вместе с нулевым вектором они составляют подпространство

$$V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda E),$$

называемое *собственным подпространством* оператора A, отвечающим собственному значению λ. Его размерность равна $n - \mathrm{rk}(A - \lambda E)$.

Теорема 26 (о собственных подпространствах, отвечающих различным собственным значениям оператора)**.** *Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ оператора A, линейно независимы.*

Теорема 27 (Необходимое и достаточное условие существования базиса из собственных векторов линейного оператора)**.** *Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора A необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *Характеристический многочлен $f_A(t)$ разлагается на линейные множители*
2. *Размерность каждого собственного подпространства равна кратности соответствующего корня многочлена $f_A(t)$.*

Линейные операторы и билинейные функции в евклидовом пространстве

Определение 59. Пусть A — линейный оператор. Тогда билинейная функция оператора A опеределяется как

$$\varphi_A(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} A \bar{y})$$

Если $\varphi_A(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_A(\bar{y}, \bar{x})$, то A называют *симметрическим* или *самосопряженным* оператором.

Теорема 28. *В ортонормированном базисе матрицы φ_A и A совпадают.*

□ Пусть $(\bar{e}_i)$ — ортонормированный базис.

$\varphi_A(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = \bar{e}_i A \bar{e}_k = \bar{e}_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j \bar{e}_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j \delta_j^i = a_k^i$, так как $\delta_j^i = 1 \Leftrightarrow i = j$. ■

Теорема 29. *Пусть $V \subset E$, $AV \subset V$. Тогда $AV^\perp \subset V^\perp$. То есть, если подпространство V инвариантно, то и его ортогональное дополнение $V^\perp$ инвариантно.*

□ $(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0},\ \bar{x} \in V,\ \bar{y} \in V^\perp$

$\bar{x} A \bar{y} = \varphi_A(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_A(\bar{y}, \bar{x}) = \bar{y} A \bar{x} = \bar{0}$

$\underbrace{\bar{x}}_{\in V} A \bar{y} = \bar{0} \implies A \bar{y} \in V^\perp \implies AV^\perp \subset V^\perp \implies$

$V^\perp$ — инвариантное подпространство. ■

Теорема 30. *Для самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.*

Теорема 31. *Пусть φ — симметрическая билинейная форма. Тогда существует такой ортонормированный базис, в котором форма имеет канонический вид:*

$$\varphi(\bar{x},\, \bar{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_n x_n y_n$$

Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве

Определение 60. В аффиной системе координат общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$$F(x,\, y) = \underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная часть}} + \underbrace{2a_{12}xy + 2a_{10}x + 2a_{20}y}_{\text{линейная часть}} + a_{00} = 0, \qquad (4)$$

в котором коэффициенты — любые действительные числа, причем a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны одновременно нулю.

Уравнение 4 можно записать в виде:

$$F(x,\, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

Лемма. *Подходящим поворотом осей координат можно добиться того, что $a'_{12} = 0$, где штрих означает соответствующий коэффициент уравнения кривой второго порядка в новой системе координат.*

□ Рассмотрим поворот:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Тогда $F(x',\, y') = a_{11}(x'\,\cos\varphi - y'\,\sin\varphi)^2 + a_{22}(x'\,\sin\varphi + y'\,\cos\varphi) + 2a_{12}(x'\,\cos\varphi - y'\,\sin\varphi) + 2a_{10}(x'\,\cos\varphi - y'\,\sin\varphi) + 2a_{20}(x'\,\sin\varphi + y'\,\cos\varphi) + a_{00} = 0$

Коэффициент при $2x'\,y'$, то есть a'_{12} равен

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

$$a_{12}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi(a_{11} - a_{22})$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

■

Выполнив поворот оси на угол φ, многочлен F примет вид:

$$F'(x',\, y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 = 0 \qquad (5)$$

Лемма. *Многочлен вида 5 параллельным переносом приводится к одному из следующих видов:*

1.
$$F'' = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \tau,\ (\lambda_1,\, \lambda_2 \neq 0) \tag{6}$$

2.
$$F'' = \lambda_2(y'')^2 + 2b_1x'',\ (\lambda_2,\, b_1 \neq 0) \tag{7}$$

3.
$$F'' = \lambda_2(y'')^2 + \tau,\ (\lambda_2 \neq 0) \tag{8}$$

□ 1. $\lambda_1,\, \lambda_2 \neq 0$

$$\begin{gathered} F'(x',\, y') = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 = \\ = \lambda_1\Big(\underbrace{x' + \frac{b_1}{\lambda_1}}_{x''}\Big)^2 + \lambda_2\Big(\underbrace{y' + \frac{b_2}{\lambda_2}}_{y''}\Big)^2 + \Big(\underbrace{b_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}}_{\tau}\Big) = \\ = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \tau, \end{gathered}$$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$ (если наоборот, то поменяем координаты местами). Возможны два случая:

1. если $b_1 \neq 0$, то

$$\begin{gathered} F'(x',\, y') = \lambda_2 {y'}^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b_0 = \\ = \lambda_2\Big(y' + \frac{b_2}{\lambda_2}\Big)^2 + 2b_1x' + \Big(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\Big) = \\ = \lambda_2\Big(\underbrace{y' + \frac{b_2}{\lambda_2}}_{y''}\Big)^2 + 2b_1\Big(\underbrace{x' + \frac{1}{2b_1}\big(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\big)}_{x''}\Big) = \\ = \lambda_2(y'')^2 + 2b_1x'' \end{gathered}$$

2. если $b_1 = 0$, то

$$\begin{gathered} F'(x',\, y') = \lambda_2 {y'}^2 + b_2y' + b_0 = \\ = \lambda_2\Big(\underbrace{y' + \frac{b_2}{\lambda_2}}_{y''}\Big)^2 + \Big(\underbrace{b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}}_{\tau}\Big) = \\ = \lambda_2(y'')^2 + \tau \end{gathered}$$

■

Теорема 32. *Для любой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих видов (называемых каноническими уравнениями):*

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a \geq b > 0)$, *эллипс*
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \ (a \geq b > 0)$, *мнимый эллипс*
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a \geq b > 0)$, *гипербола*
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \ (a \geq b > 0)$, *пара пересекающихся прямых*
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \ (a \geq b > 0)$, *пара пересекающихся мнимых прямых*
6. $y^2 = 2px, \ (p > 0)$, *парабола*
7. $y^2 - a^2 = 0, \ (a > 0)$, *пара параллельных прямых*
8. $y^2 + a^2 = 0, \ (a > 0)$, *пара мнимых параллельных прямых*
9. $y^2 = 0$ *пара совпадающих прямых*

Рассмотрим различные равенства 6–8:

1. $F'' = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \tau, \ (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$
   a) λ_1, λ_2 — одного знака, τ — противоположного. Получаем уравнение эллпипса.
   b) $\lambda_1, \lambda_2, \tau$ — одного знака. Получаем уравнение мнимого эллипса.
   c) λ_1, λ_2 — одного знака, $\tau = 0$. Пара пересекающихся мнимых прямых.
   d) λ_1, λ_2 — разных знаков, $\tau \neq 0$. Гипербола
   e) λ_1, λ_2 — разных знаков, $\tau = 0$. Пара пересекающихся прямых.
2. $F'' = \lambda_2(y'')^2 + 2b_1x'', \ (\lambda_2, b_1 \neq 0)$. Парабола
3. $F'' = \lambda_2(y'')^2 + \tau, \ (\lambda_2 \neq 0)$
   a) $\tau < 0$. Пара параллельных прямых.
   b) $\tau > 0$. Пара мнимых параллельных прямых.
   c) $\tau = 0$. Пара совпадающих прямых.

Эллипс

Эллипсом по теореме 32 была названа линия, которая в некторой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

Из уравнения 9 следует, что для всех точек эллипса $|x| \leq a$ и $|y| \leq b$

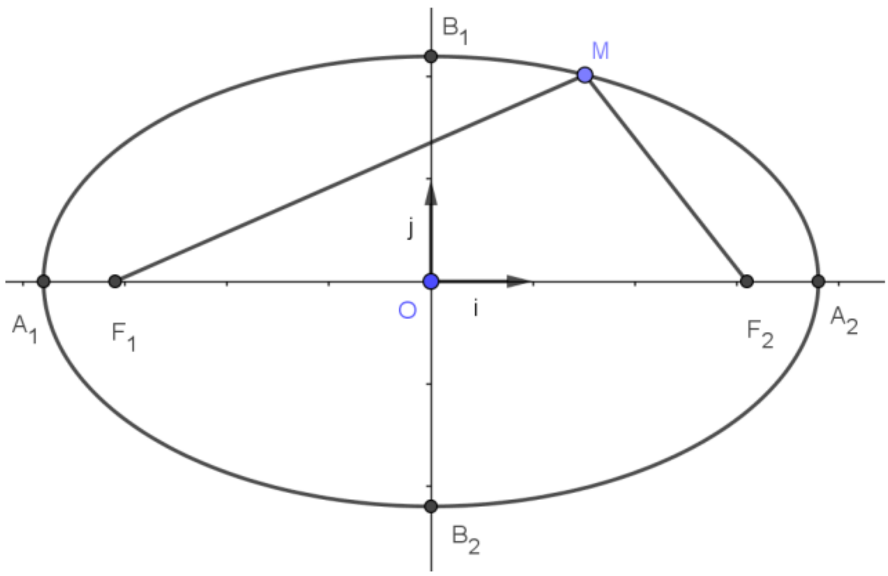


Рис. 4: Эллипс. $OA_2 = OA_1 = a,\ OB_1 = OB_2 = b$

Точки, имеющие координаты $(a,\,0)$, $(a,\,0)$, $(0,\,b)$, $(0,\,-b)$ называются *вершинами* эллипса.

С эллипсом связаны две замечательные точки, называемые его *фокусом* (на рисунке 4 отмечены точками F_1 и F_2). Пусть по определению

$$c^2 = a^2 - b^2$$

и $c \geq 0$. Тогда точки F_1 и F_2 имеют координаты $(-c,\,0)$ и $(c,\,)$ соответственно. Расстояние между фокусами называется *фокальным расстоянием.*

Если M — точка эллипса, то отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M. Их длины также называют фокальными радиусами точки M. Оказывается для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась $2a$. Учитывая это, можно дать определение эллипса:

Определение 61. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка PQ, причем $PQ > F_1F_2$.

Если точки F_1 и F_2 совпадают, то эллипс является окружностью радиуса a. В этом случае фокусы эллипса совпадают с центром окружности. Таким образом, *окружность есть частный случай эллипса.*

Эллипс имеет один центр симметрии и две оси симметрии. Центр симметрии совпадает с серединой фокального отрезка. Прямая, проходящая через фокусы, называется *первой* или *фокальной* осью симметрии, а перпендикулярная к ней ось — второй осью симметрии.

Отрезки $2a\,(A_1A_2)$ и $2b\,(B_1B_2)$ называются *большой* и *малой осями* эллипса а a и b — *большой* и *малой полуосями* эллипса.

Отношение
$$e = \frac{c}{a}$$
называется *эксцентриситетом* эллипса.

Эксцентриситет равен нулю тогда и только тогда, когда $c = 0$, т.е. когда эллипс является окружностью. Эксцентриситет эллипса заключен в пределах: $0 < e < 1$. Он характеризует форму эллипса. В самом деле, выразим $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет:

$$c = ea \implies b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2) \implies \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Отсюда видно, что чем ближе e к 0, тем ближе b к a, т.е. тем ближе эллипс по форме к окружности. Если же e приближается к 1, то его малая полуось b приближается к нулю, т.е. эллипс все более вытягивается и в пределе превращается в отрезок.

Теорема 33. *Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов вычисляется по формуле:*

$$r_1 = a + ex \text{ и } r_2 = a - ex.$$

, где r_1 и r_2 — расстояние от M до F_1 и F_2 соответственно.

□ Заметим, что $r_2^2 = (x - c)^2 + y^2$ (по т. Пифагора и так как точка F_2 имеет коориданты $(c, 0)$). Выразим y^2 из уравнения эллипса 9:

$$r_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$$

Учитывая, что $c^2 = a^2 - b^2$, получим

$$r_2^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = (a - ex)^2 \implies r_2^2 = a - ex.$$

Вспомним, что $r_1 + r_2 = 2a$. Тогда $r_1 = a + ex$. ■

Определение 62. С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его *директрисами*. Это две прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{e}$.

Уравнения директрис d_1 и d_2 следующие: $x = \pm\frac{a}{e}$.

Оказывается, для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояние до фокуса к расстоянию до соответсвтующей директрисы равнялось эксцентриситету эллипса e.

Уравнения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ называются *параметрическими уравнениями эллипса.*

Касательная к эллипсу, заданного уравнением 9, в точке $(x_0; y_0)$ определяется уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Гипербола

Гиперболой по теореме 32 была названа линия, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Из этого уравнения видно, что все точки гиперболы лежат левее точки $(-a,\ 0)$ и правее точки $(a,\ 0)$, называемые *вершинами* гиперболы.

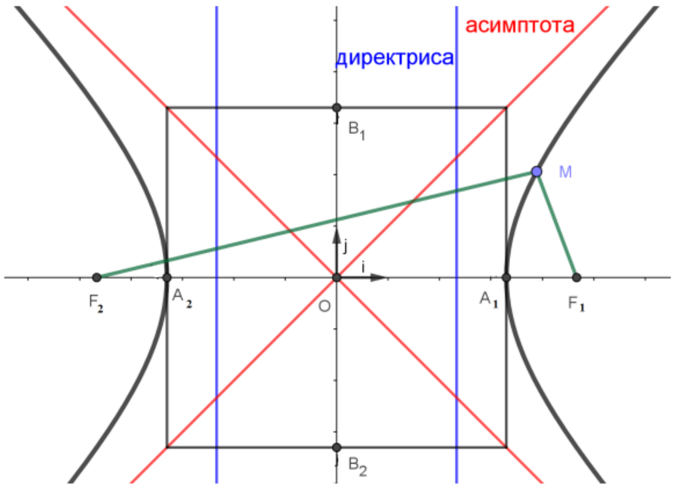


Рис. 5: Гипербола. $OA_1 = OA_2 = a$

Введём число c, положив

$$c^2 = a^2 + b^2$$

и $c > 0$. *Фокусами* гиперболы называются точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$. Расстояние между ними называется *фокальным расстоянием.*

Если точка M — точка данной гиперболы, то отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M. Их длины также называются фокальными радиусами точки M.

Теорема 34. *Для того чтобы точка M лежала на гиперболе необходимо и достаточно, чтобы разность её расстояний до фокусов по абсолютной величине равнялась $2a$.*

$\square$ $\Rightarrow$ Пусть M удовлетворяет уравнению 10. Тогда

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},\ F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Подставив значение y^2 из уравнения 10 и учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, получим:

$$F_1M = \sqrt{(\frac{c}{a}x - a)^2} = |\frac{c}{a}x - a|$$

$$F_2M = \sqrt{(\frac{c}{a}x + a)^2} = |\frac{c}{a}x + a|$$

Так как $|x| \geq a,\ \frac{c}{a} > 1$, то

$$\begin{array}{lll} F_1M = \frac{c}{a}x - a, & F_2M = \frac{c}{a}x + a, & \text{при } x > 0 \\ F_1M = -\frac{c}{a}x + a, & F_2M = -\frac{c}{a}x - a, & \text{при } x < 0 \end{array}$$

То есть $|F_1M - F_2M| = 2a$.

$\Leftarrow$ Пусть $|F_1M - F_2M| = 2a$. Тогда

$$|\sqrt{(\frac{c}{a}x - a)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a$$

Запишем это уравнение в виде

$$|\sqrt{(\frac{c}{a}x - a)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| \pm 2a$$

Возводя его в квадрат и приводя подобные члены, получим:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Снова возводя в квадрат, после преобразований получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

■

Теперь можно дать определение гиперболы:

Определение 63. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний каждой из которых от двух данных точек F_1 и F_2 равно длине данного отрезка PQ, причем $PQ < F_1F_2$.

Гипербола имеет один центр симметрии и две оси симметрии. Центр симметрии совпадает с серединой фокального отрезка. Прямая, проходящая через фокусы, называется первой или фокальной осью симметрии, а перпендикулярная к ней ось — второй или мнимой осью симметрии. Фокальная ось симметрии пересекает гиперболу в двух точках A_1 и A_2. Вторая ось симметрии не пересекает гиперболу. Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы, отрезок $A_1A_2 = 2a$ — *действительной* осью. Отрезок $2b$ — *мнимой* осью. Числа a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гипербол.

Гипербола 10 состоит из двух *ветвей* (правой и левой) и расположена симметрично относительно осей координат.

Отношение

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Так как $a < c$, то $e > 1$.

Выясним, как зависит форма гиперболы от её эксцентриситета. Так как $c^2 = a^2 + b^2$ получаем: $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ или $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{e^2 - 1}$ где α – угол между осью абсцисс и асимптотой. Отсюда следует, что больше эксцентриситет, тем больше α, т.е. тем больше гипербола «вытянута» вдоль своей мнимой оси.

Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$ вычисляется:

- Если M принадлежит правой ветке: $r_1 = ex - a$, $r_2 = ex + a$.
- Если M принадлежит левой ветке: $r_1 = -ex + a$, $r_2 = -ex - a$.

В общем виде это можно записать так:

$$r_1 = |ex - a| \text{ и } r_2 = |ex + a|$$

Определение 64. *Директрисами гиперболы* называются две прямые, перпендикулярные фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии, равном $\frac{a}{e}$.

Уравнения директрис d_1 и d_2 следующие: $x = \pm\frac{a}{e}$.

Для того, чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету e.

Гипербола также имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$. На асимптотах лежат диагонали прямоугольника, центр которого совпадает с центром гиперболы, а стороны равны и параллельны осям гиперболы.

Произведение расстояний от точки гиперболы до асимптот постоянно и равно $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

Гипербола, полуоси которой равны ($a = b$), называется *равносторонней.* Ее каноническое уравнение имеет вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

Определение 65. Гипербола, задаваемая уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называется *сопряженной* с гиперболой, задаваемой с уравнением 10. Она пересекает ось Oy в точках $B_1(b, 0)$, $B_2(-b, 0)$, не пересекает ось Ox, так что a — ее мнимая полуось, а b — действительная.

Касательная к гиперболе, задаваемая уравнением 10, в точке $(x_0; y_0)$ определяется уравнением:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Парабола

Параболой по теореме 32 была названа линия, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением:

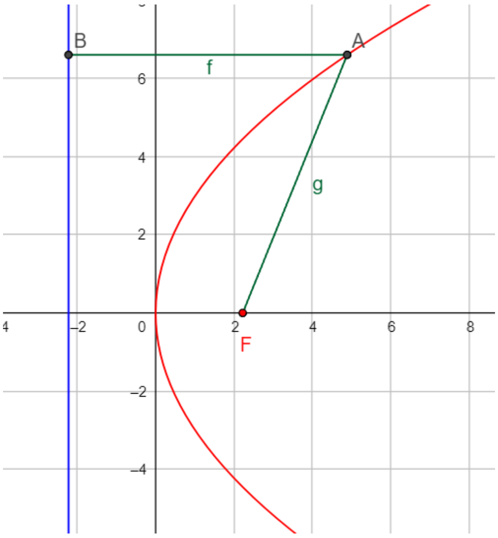
$$y^2 = 2px \tag{11}$$

при условии $p > 0$.

Из уравнения 11 вытекает, что для всех точек параболы выполняется

$$\begin{cases} x \geq 0, & \text{если } p > 0 \\ x \leq 0, & \text{если } p < 0 \end{cases}$$

.



Фокусом параболы называется точка F с координатами $(p/2, 0)$
Директрисой параболы называется прямая d с уравнением $x = -\frac{p}{2}$

Теорема 35. *Для того, чтобы точка M лежала на параболе, необходимо и достаточно, чтобы она была одинаково удалена от фокуса и от директрисы этой параболы.*

□ $\Rightarrow$ Пусть M удовлетворяет уравнению 11. Тогда

$$\rho(M,d) = |x + \frac{p}{2}|$$

$$MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + 2px} = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2} =$$

$$= |x + \frac{p}{2}| = \rho(M,d)$$

$\Leftarrow$ Пусть M одинаково удалена от фокуса и от директрисы параболы:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|$$

Возводя обе части в квадрат, получаем $y^2 = 2px$. ■

Дадим определение параболе.

Определение 66. Параболой называется множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F.

Парабола имеет одну ось симметрии, которая совпадает, при таком выборе системы координат, с осью x. При $p > 0$ парабола обращается в положительную сторону оси, а при $p < 0$ — в отрицательную. Точка $(0, 0)$ называется *вершиной* параболы.

Расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на параболе, до фокуса равно

$$r = x + \frac{p}{2}$$

Параболе приписывается эксцентриситет e $= 1$. В силу этого соглашения формула

$$\frac{r}{d} = e,$$

где r — расстояние до фокуса, а d расстояние до директрисы, верна и для параболы, и для гиперболы, и для эллипса.

Касательная к параболе $y^2 = 2px$ в точке $(x_0; y_0)$ определяется уравнением:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Директориальное свойство

Определение 67. Директрисами эллипса (гиперболы) называются две прямые, параллельные малой (мнимой) оси и отстоящие от неё на расстоянии $\frac{a}{e}$, где a - большая (действительная) полуось, e - эксцентриситет.

Окружность не имеет директрис, так как для неё $e = 0$.

Директрисы *эллипса* **не имеют** общих точек с большой осью эллипса, они не пересекают эллипс.

Директрисы *гиперболы* **пересекают** вещественную ось гиперболы, они расположены между двумя ветвями гиперболы и не пересекают эти ветви.

Теорема 36. *Эллипс (гипербола) есть множество γ' всех точек плоскости таких, что отношение расстояния от каждой точки до фокуса к расстоянию от неё до соответствующей директрисы равно эксцентриситету.*

□ Пусть γ — данный эллипс,
$F_1(c, 0)$ — фокус,
$d_1 : \ x = \frac{a}{e}$ — директриса.

Если $M(x,\, y)$ — точка плоскости, то

$$\rho(M,\, d_1) = |x - \frac{a}{e}|,\ MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Если $M \in \gamma'$, то $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, то $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = e|x-\frac{a}{e}|$. Возводя то уравнение в квадрат, получим:

$$(x-c)^2 + y^2 = (ex-a)^2 \implies x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = (ex)^2 - 2exa + a^2 \implies$$

$$x^2(1-e^2) + y^2 = 2xc - c^2 - 2xa\frac{c}{a} + a^2 \implies x^2(1-\frac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2 \implies$$

$$x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Отсюда следует, что $M \in \gamma$.

Обратно, пусть $M(x,\, y) \in \gamma$, значит, координаты точки удовлетворяют уравнению эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} =$$

$$= \sqrt{(x-c)^2 + (a^2-c^2)(1-\frac{x^2}{a^2})} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - (a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + a^2 - x^2 + c^2\frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{(a - \frac{c}{a}x)^2} =$$

$$= \sqrt{(a-ex)^2} = |a - ex|.$$

Так как $|x| \le a$ и $0 < \frac{c}{a} < 1$, то $a - \frac{c}{a}x = a - ex > 0$, поэтому

$$MF_1 = a - ex.$$

С другой стороны, $\rho(M,\, d_1) = |x - \frac{a}{e}| = \frac{a-ex}{e}$, поэтому $MF_1 = e\rho(M,\, d_1)$, то есть $M \in \gamma'$. Множество γ' совпадает с эллипсом γ.

Теорема для гиперболы доказывается точно так же, как и для эллипса. ■

Эта теорема выясняет геометрический смысл эксцентриситета эллипса или гиперболы: эксцентриситет эллипса или гиперболы есть то постоянное число, которому равно отношение расстояний от каждой точки линии до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы. Из определения параболы видно, что её точки обладают аналогичным свойством, т.е. отношение от каждой точки параболы до фокуса к расстоянию от неё до директрисы постоянно и равно единице.

Поверхности второго порядка

Определение 68. В аффиной системе координат общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ +2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0. \tag{12}$$

Коэффициенты этого уравнения — любые действительные числа, причем a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не равны одновременно нулю.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ — матрица *квадратной* части ($a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} =$ $a32$), $\begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a30 \end{pmatrix}$ — матрица *линейной* части.

Уравнение 12 можно записать в виде:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Теорема 37. *Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат, в которой она имеет один из следующих 17 видов:*

1. *Эллипсоид*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a \geq b \geq c > 0)$$

2. *Мнимый эллипсоид*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,\ (a \geq b \geq c > 0)$$

3. *Однополостный гиперболоид*
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a \geq b > 0)$$

4. *Двуполостный гиперболоид*
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ (a \geq b > 0)$$

5. *Конус (второго порядка)*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \ (a \geq b > 0)$$

6. *Мнимый конус (второго порядка)*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \ (a \geq b > 0)$$

7. *Эллиптический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \ (p \geq q > 0)$$

8. *Гиперболический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \ (p \geq q > 0)$$

9. *Эллиптический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a \geq b > 0)$$

10. *Мнимый эллиптический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \ (a \geq b > 0)$$

11. *Две мнимые пересекающие плоскости*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \ (a \geq b > 0)$$

12. *Гиперболический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a \geq b > 0)$$

13. *Две пересекающиеся плоскости*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \ (a \geq b > 0)$$

14. Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px, \ (p > 0)$$

15. Две параллельные плоскости

$$y^2 = a^2, \ (a > 0)$$

16. Две мнимые параллельные плоскости

$$y^2 = -a^2, \ (a > 0)$$

17. Две совпадающие плоскости

$$y^2 = 0$$

Метод сечений

Метод сечений применим к любой поверхности, а не только к поверхности второго порядка. Сущность метода сечений состоит в следующем.

Пусть поверхность S задана в прямоугольной системе координат уравнением $F(x, y, z) = 0$. Поверхность S пересекаем плоскостями, параллельными коориднатным плоскостям (или самими координатными плоскостями), и находим линии пересечения поверхности с этими плоскостями. По виду этих линий сечений выносится суждение о форме поверхности S.

Пример. Определите поверхность, которая задана в прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Найдем пересечение поверхности с плоскостью xOy.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Гипербола}$$

Найдем пересечение поверхности с плоскостью xOz.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Эллипс}$$

Найдем пересечение поверхности с плоскостью yOz.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{y^2}{9} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Гипербола}$$

Изобразив каждую фигуру второго порядка в соответсвтующих плоскостях, получим, что исходное уравнение — однополостный гиперболоид.

Поверхности вращения

Определение 69. Поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю окружность, полученную вращением этой точки вокруг некоторой фиксированной прямой d, называется *поверхностью вращения.*

Прямая d, вокруг которой производится вращение, называется *осью вращения.*

Вращение точки вокруг оси происходит в плоскости, перпендикулярной оси.

В сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными оси вращения, получаются окружности, которые называются *параллелями.*

Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность вращения по линиям, называемыми *меридианами.*

Определение 70. В прямоугольной системе координат $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ уравнение

$$x^2 + y^2 = f^2(z)$$

есть уравнение поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси Oz линии, заданной уравнениями:

$$x = f(z), \; y = 0.$$

Аналогично можно рассмотреть все остальные случаи расположения линии в координатных плоскостях и её вращения вокруг соответствующих осей.

№	Линия γ лежит в плоскости	Линия γ задается уравнением	Линия γ вращается вокруг оси	Уравнение поверхности вращения
1	Oxz	$x = f(z)$	Oz	$x^2 + y^2 = (f(z))^2$
2	Oxz	$z = f_1(x)$	Ox	$y^2 + z^2 = (f_1(z))^2$
3	Oxy	$x = g(y)$	Oy	$x^2 + z^2 = (g(y))^2$
4	Oxy	$y = g_1(y)$	Ox	$y^2 + z^2 = (g_1(x))^2$
5	Oyz	$y = h(z)$	Oz	$x^2 + y^2 = (h(z))^2$
6	Oyz	$z = h_1(y)$	Oy	$x^2 + z^2 = (h_1(y))^2$

Пример. В плоскости Oxz прямоугольной системе координат $Oxyz$ дана окружность $x^2 + z^2 = r^2$ с центром в начале координат радиуса r. Написать уравнение поверхности S, образованной вращением этой окружности вокруг оси Oz.

Сначала получим уравнение линии γ, в результате вращения которой вокруг оси Oz образуется поверхность. Из уравнения данной окружности находим: $x = \pm\sqrt{r^2 - z^2}$.

Здесь знаку «+» соответствует одна полуокружность, а знаку «$-$» — другая полуокружность данной окружности. Ясно, что при вращении вокруг оси Oz каждой из этих полуокружностей получается та же поверхность, что и вращении всей окружности.

Поэтому в качестве линии γ можно взять одну из указанных полуокружностей, например,

$$x = \sqrt{r^2 - z^2},\ y = 0$$

Уравнение поверхности S имеет вид:

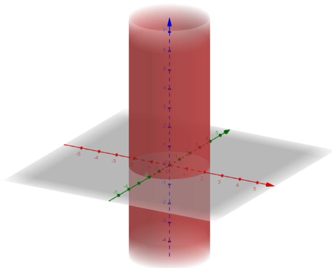
$$x^2 + y^2 = (\sqrt{r^2 - z^2})^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Таким образом, поверхностью S является сфера r с центром в начале координат.

Пример. В плоскости Oxz прямоугольной системе координат $Oxyz$ дана прямая $x = a$, параллельная оси Oz. Написать уравнение поверхности, образованной вращением этой прямой вокруг оси Oz.

Уравнение направляющей: $x = a,\ y = 0$.

Тогда поверхность вращения определяется уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. Эта поверхность называется цилиндром вращения (или прямым круговым цилиндром).



Пример. Пусть линия γ представляет собой эллипс, лежащий в координатной плоскости Oxz и задаваемый каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Чтобы составить уравнение поверхности, получаемой вращением этого эллипса вокруг оси Ox, надо разрешить уравнение относительно z:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

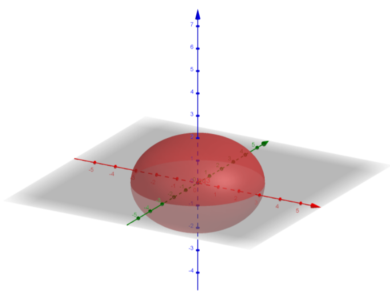
Тогда уравнение поверхности вращения имеет вид:

$$y^2 + z^2 = (\pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = c^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если данный эллипс вращается вокруг оси Oz, то уравнение эллипса нужно разрешить относительно x и прийти к следующему уравнению поверхности вращения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Каждая из этих поверхностей называется эллипсоидом вращения.



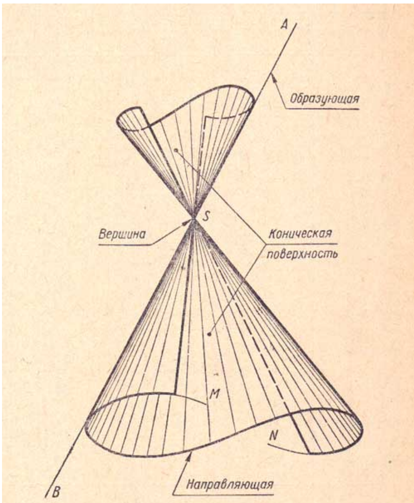
Конические поверхности

Рассмотрим поверхность, определяемую в некоторой декартовой системе координат уравнением $F(x, y, z) = 0$. Если точка M с координатами (x, y, z) принадлежит поверхности, то при любом λ точка $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ также принадлежит поверхности.

Определение 71. Поверхность, которая состоит из прямых линий, проходящих через фиксированную точку, называется *конической поверхностью* или *конусом*.

Прямые линии называются ее *образующими*, а точка — *вершиной конуса*.

Линию, лежащую на поверхности, не проходящую через вершину и пересекающую все образующие, называют *направляющей*.



Фиг. 294.

Напомним уравнение конуса второго порядка:

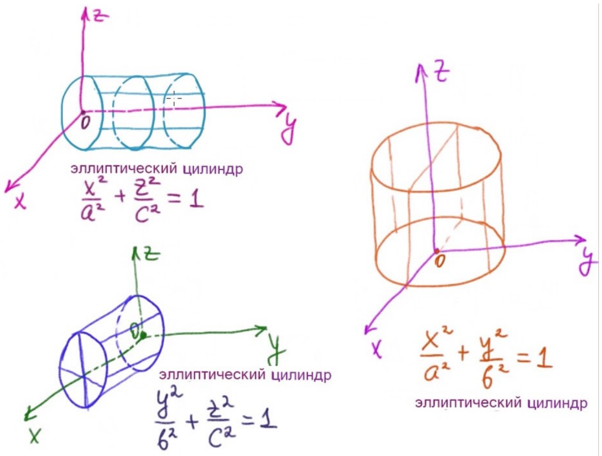
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \ \ (a \geq b > 0)$$

Цилиндрические поверхности

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности. Тогда все точки с координатами x_0, y_0, z при любых z также лежат на поверхности.

Определение 72. Поверхность, которая состоит из прямых линий, параллельных заданному направлению, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром*, а прямые линии — ее *образующими*.

Линию, лежащую на поверхности и пересекающую все образующие, называют *направляющей*.



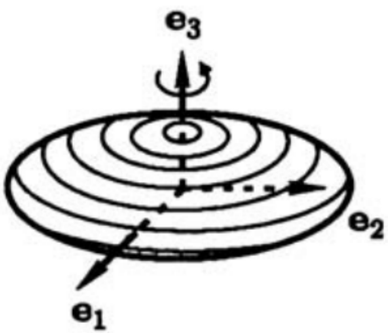
Эллипсоид

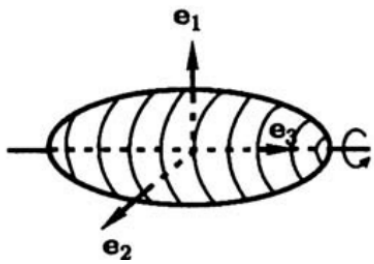
Поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

называется эллипсоидом.

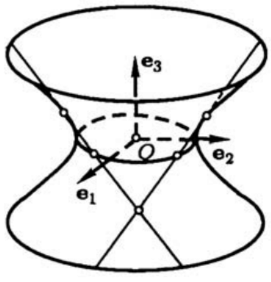
Эллипсоид получается вращением эллипсоида вдоль малой оси эллипса либо большой оси.





Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид вращения — это поверхность вращения гиперболы вокруг той оси, которая ее не пересекает.



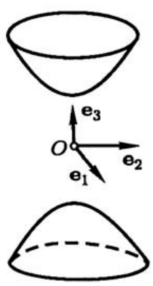
Интересное свойство однополостного гиперболоида — наличие у него *прямолинейных образующих.* Так называются прямые линии, всеми своими точками лежащие на поверхности. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, уравнения которых можно получить следующим образом. Уравнения этих образующих следующие:

$$x + y = 1 - z, \quad x - y = 1 - z.$$

Если вместе с гиперболой мы будем вращать ее асимптоты, то они опишут прямой круговой конус, называемый *асимптотическим конусом* гиперболоида вращения.

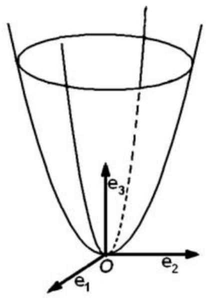
Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид вращения — это поверхность получаемая вращением гиперболы вокруг той оси, которая ее пересекает.



Эллиптический параболоид

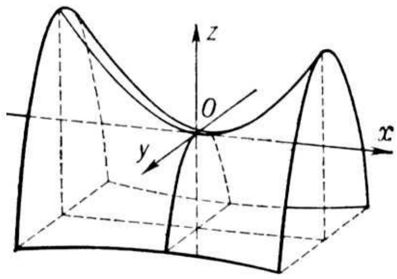
Вращая параболу $x^2 = 2pz$ вокруг ее оси симметрии, мы получаем поверхность, которая называется эллиптическим параболоидом.



Гиперболический параболоид

Поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \ (p \geq q > 0).$$



Построить гиперболический параболоид можно следующим образом: зададим две параболы и будем перемещать одну из них так, чтобы ее вершина скользила по другой, оси парабол были параллельны, параболы лежали во взаимно перпендикулярных плоскостях и ветви их были направлены в противоположные стороны. При таком перемещении подвижная парабола описывает гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид, как и однополостный гиперболоид, имеет два семейства прямолинейных образующих. Уравнения одного семейства

$$\lambda(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = \mu, \quad \mu(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2\lambda z,$$

а другого

$$\lambda'(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = \mu'. \quad \mu'(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2\lambda' z,$$

— где λ и μ произвольные параметры.

Приведение общего уравнения второго порядка на плоскости и в пространстве к каноническому виду

(если будет выполнено домашнее задание, этот вопрос не нужно учить)
404