Билеты к зачету

Предмет: Алгем

Системы линейных уравнений

Определение системы линейных уравнений

Определение 1. *Системой линейных уравнений* (далее СЛУ) называют систему вида:

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_n^1x_n = b_1 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_1^mx_1 + a_2^mx_2 + \cdots + a_n^mx_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_j^i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$, m — количество уравнений, n — количество переменных, x_j^i — неизвестные, a_j^i — коэффициенты, b_j — свободные члены.

$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$ называется *матрицей коэффициентов*

$\tilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b_m \end{array}\right)$ — *расширенная матрица коэффициентов.*

Пусть $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

Тогда СЛУ можно переписать в матричном виде: $AX = B$.

СЛУ
- совместные (есть решение)
  - определённые (единственное решение)
  - неопределённые (более одного решения)
- несовместные (нет решений)

Элементарные преобразования СЛУ и строк матрицы

Определение 2. *Элементарными преобразованиями СЛУ* называются преобразования вида:

1. Прибавление к одному уравнению другое, умноженное на число,

2. Перестановка двух уравнений,

3. Умножение уравнения на число, отличное от нуля.

Метод Гаусса

Определение 3. *Ведущим* элементом ненулевой строки называется её первый ненулевой элемент

Определение 4. Матрица называется *ступенчатой*, если

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк образует строго возрастающую последовательность,

2. Ненулевые строки (если они есть) стоят в конце.

Пример (Ступенчатой матрицы)**.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. *Всякую матрицу путём элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Определение 5. СЛУ называется *ступенчатой*, если её расширенная матрица ступенчатая

Система однородных линейных уравнений

Определение 6. Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены уравнений равны нулю:

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n = 0 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Однородная система всегда совместна, поскольку она всегда имеет тривиальное (нулевое) решение.

Теорема 2. *Совокупность всех решений системы однородных линейных уравнений с n неизвестными является подпространством $\mathbb{R}^n$ (в общем случае K^n).*

Совокупность всех решений произвольной совместной СЛУ есть сумма какого-либо одного решения и подпространства решений системы однородных линейных уравнений с той же матрицей коэффициентов.

$\square$ Пусть $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ и $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ — решения 2.

Тогда $\bar{u} + \bar{v}$ — решение 2, так как

$$\overbrace{a_1^1 u_1 + \ldots + a_n^1 u_n}^{0} + \overbrace{a_1^1 v_1 + \ldots + a_n^1 v_n}^{0} = 0.$$

Также $\lambda\bar{u}$ — решение 2, так как

$$\lambda\overbrace{(a_1^1 u_1 + \ldots + a_n^1 u_n)}^{0} = 0.$$

Пусть $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ — решение 1, $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ — решение 2.

Тогда $\bar{t} + \bar{u}$ — решение 1, так как

$$a_1^1(t_1 + u_1) + \ldots + a_n^1(t_n + u_n) = b_1$$
$$\underbrace{a_1^1 t_1 + \ldots + a_n^1 t_n}_{b_1} + \underbrace{a_1^1 u_1 + \ldots + a_n^1 u_n}_{0} = b_1.$$

Пусть $\bar{f}$ — решение 1. Тогда $\bar{p} = \bar{t} - \bar{f}$ — решение 2, так как

$$a_1^1(t_1 - f_1) + \ldots + a_n^1(t_n - f_n) =$$
$$= \underbrace{a_1^1 t_1 + \ldots + a_n^1 t_n}_{b_1} - \underbrace{(a_1^1 f_1 + \ldots + a_n^1 f_n)}_{b_1} = 0$$

$\blacksquare$

Векторное пространтсво

Определение 7. *Векторным пространством* над полем K называется множество V с операциями сложения и умножения на элемент поля K, обладающая следующими свойствами:

1. V — аддитивная абелева группа.
2. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$
3. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$

4. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

5. $1 \cdot a = a$

$\lambda, \mu \in K,\ a, b \in V$.

Определение 8. Пусть $S \subset V$. Совокупность всевозможных линейных комбинаций из векторов S называется *линейной оболочкой* множества S. Обозначние: $<S>$.

Пространство V *порождается* множеством S, если $V =<S>$.

Определение 9. Векторное пространство называется *конечномерным*, если оно порождается конечным числом векторов и бесконечномерным в противном случае.

Определение 10. *Базисом* векторного пространства называется упорядоченная максимально линейно независимая система векторов, где каждый вектор пространства линейно выражается через эту систему.

Ранг

Определение 11. Рангом *системы векторов* называется размерность её линейной оболочки.

Ранг *матрицы* — это ранг системы её строк.

Определение 12. Системы векторов $\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ и $\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m\}$ называются *эквивалентными*, если каждый из векторов $\bar{b}_i$ линейно выражается через $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ и наоборот, $\bar{a}_j$ линейно выражается через $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m$, где $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n$.

Это равносильно $<\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n>=<\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n>$.

Теорема 3. *Ранг матрицы равен числу ненулевых строк ступенчатой матрицы, к которой она приводится элементарными преобразованиями строк.*

Линейная зависимость между столбцами матриц не меняется при элементарных преобразований строк. Ранг системы её столбцов не меняется при элементарных преобразований строк.

Ранг системы строк любой матрицы равен рангу системы столбцов этой матрицы.

Теорема 4 (Кронекера-Капелли). *СЛУ совместна* $\Leftrightarrow rk(A|B) = rk\ A$.

□ $\Rightarrow$ Пусть система 1 совместна и $(k_1, \ldots, k_n)$ — решение СЛУ.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} k_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} k_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Последний столбец расширенной матрицы есть линейная комбинация остальных столбцов с коэффициентами $(k_1, \ldots, k_n)$. Всякий другой столбец расширенной матрицы входит в матрицу A, поэтому линейно выражается через столбцы этой матрицы. Значит система столбцов расширенной матрицы $A|B$ и A эквивалентны $\implies$ $rk(A|B) = rk(A)$.

$\Leftarrow rk(A|B) = rk(A) \implies$ максимальная линейно независимая система столбцов A остаётся линейно независимой и в $A|B \implies$ через эту систему, а значит через систему столбцов матрицы A, линейно выражается последний столбец $A|B \implies \exists(k_1, \ldots, k_n)$:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} k_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} k_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

то есть $(k_1, \ldots, k_n)$ — решение СЛУ $\implies$ СЛУ совместна. ■

Теорема 5. *Совместная СЛУ является определённой* $\Leftrightarrow$ $rk(A)$ *равен числу неизвестных.*

Теорема 6. *Размерность пространства решений СОЛУ с* n *неизвестными и матрицей коэффициентов* A *равняется* $n - rk\ A$.

□ Приводим СОЛУ путём элементарных преобразований к ступенчатому виду.

Число ненулевых уравнений в ступенчатом виде равно $rk(A)$. Общее решение системы содержит n переменных:

$$\begin{cases} x_1 = c_1^1 x_{r+1} + c_2^1 x_{r+2} + \ldots + c_{n-r}^1 x_n \\ x_2 = c_1^2 x_{r+1} + c_2^2 x_{r+2} + \ldots + c_{n-r}^2 x_n \\ \vdots \\ x_r = c_1^r x_{r+1} + c_2^r x_{r+2} + \ldots + c_{n-r}^r x_n. \end{cases}$$

■

Частные решения:

Придавая по очереди одному из свободныъ неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ значения 1, а остальным значения 0, получим решение системы:

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_1 = (c_1^1, c_1^2, \ldots, c_1^r, 1, 0, \ldots, 0)\\
&\bar{u}_2 = (c_2^1, c_2^2, \ldots, c_2^r, 0, 1, \ldots, 0)\\
&\vdots\\
&\bar{u}_{n-r} = (c_{n-r}^1, c_{n-r}^2, \ldots, c_{n-r}^r, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Докажем, что $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r}$ образуют базис пространства решений (это есть ядро линейного отображения см. определение 16).

$\square$ $\bar{u} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\bar{u}_{n-r}$, $\bar{u}$ — решение системы.

$\bar{0} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\bar{u}_{n-r} \Leftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-r} = 0 \implies \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r}$ — линейно независимы.

Значит $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-r})$ — базис пространства решений. $\blacksquare$

Определение 13. Всякий базис пространства решений СОЛУ называется *фундаментальной* системой решения.

Линейные оторбажения

Определение 14. Пусть U, V — действительные векторные пространства. *Линейным отображением* называется отображние $\varphi : U \to V$, удовлетворяющая свойствам:

1. $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$
2. $\varphi(\lambda\bar{a}) = \lambda\varphi(\bar{a})$,

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in U$

В таком случае векторные пространства U и V называются *изоморфными.*

Если U совпадает с V, то φ называется *линейным преобразованием.*

Вспомнив запись СЛУ через матрицы, получаем, что $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\varphi(\bar{x}) = \bar{b}$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — решение СЛУ.

Пусть A — матрица коэффициентов, тогда A_φ — *матрица линейного отображения.*

Для СОЛУ: $\varphi(\bar{x}) = \bar{0}$,где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — решение СОЛУ.

Определение 15. *Образом* линейного отображения $\varphi : U \to V$ называется множество $Im\,\varphi = \{\bar{b} \in V,\ \varphi(\bar{x}) = \bar{b},\ \bar{x} \in U\}$.

Определение 16. *Ядром* линейного отображения $\varphi : U \to V$ называется множество $Ker\ \varphi = \{\bar{x} \in U :\ \varphi\bar{x} = \bar{0}\}$.

Заметим, что $Ker\ \varphi \subset U$ и $Im\ \varphi \subset V$.

Теорема 7. $\varphi(\bar{a}) = \bar{b}$, $\varphi(\bar{x}) = \bar{b}$
$\implies \bar{x} = \bar{x} + Ker\ \varphi$.

Определители и их приложения

Линейные формы

Определение 17. *Линейной функцией* или *линейной формой* на векторном пространстве V называется функция $\alpha:\ V \to \mathbb{R}$ (в общем виде $\alpha:\ V \to K$, где K — поле), обладающая следующими свойствами:

1. $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha(\bar{x}) + \alpha(\bar{y})$
2. $\alpha(\lambda\bar{x}) = \lambda\alpha(\bar{x})$

Определение 18. *Билинейной функцией* или *билинейной формой* на векторном пространстве V называется форма $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ (паре векторов сопоставляется действительное число), линейная по каждому аргументу, то есть:

1. $\alpha(\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2,\, \bar{y}) = \lambda_1\alpha(\bar{x}_1,\, \bar{y}) + \lambda_2\alpha(\bar{x}_2,\, \bar{y})$
2. $\alpha(\bar{x}, \gamma_1\bar{y}_1 + \gamma_2\bar{y}_2) = \gamma_1\alpha(\bar{x}, \bar{y}_1) + \gamma_2\alpha(\bar{x}, \bar{y}_2)$

Пример. Самый наглядный пример билинейной функции — скалярное произведение.

Для любых функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых на отрезке $[a, b]$, функция $I(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ является билинейной функцией на $[a, b]$.

Определение 19. *Скалярным произведением* называется билинейная форма, обладающая свойствами:

1. Симметричность $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$
2. Положительная определённость $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$ и $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

Определитель матрицы n-ого порядка

Пусть V — действительное пространство, функция $f\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \to \mathbb{R}$.

Определение 20. Функция f называется *полилинейной*, если она линейна по каждому аргументу.

Определение 21. Полилинейная функция называется *кососимметрической*, если при перестановке любых двух аргументов она умножается на -1.

Определение 22. *Определителем* квадратной матрицы $A = (a^i_j)$, i, $j = 1, \dots, n$ называется число

$$det\ A = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} sgn(k_1, \dots, k_n) \cdot a^1_{k_1}\, a^2_{k_2} \dots a^n_{k_2},$$

где $sgn(k_1, \dots, k_n)$ — знак перестановки.

Теорема 8. *Определитель является кососимметрической полилинейной функцией строк матрицы*

Всякая функция f на множестве квадратных матриц порядка n, являющаяся кососимметрической полилинейной функцией строк матрицы имеет вид $f(A) = f(E) \cdot det\ A$ в частности, если $f(E) = 1$, то $f(A) = det\ A$.

Определение 23. Матрица A называется *невырожденной*, если определитель матрицы A не равен нулю. ($det\ A \neq 0$).

Теорема 9 (об определителе матрицы с углом нулей)**.** *Пусть $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где B и C квадратные матрицы. Тогда $det\ B \cdot det\ C = det\ A$.*

Лемма. $\begin{vmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_j & \dots & a^1_n \\ 0 & 0 & a^i_j & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_j & \dots & a^n_n \end{vmatrix} = A^i_j \cdot a^i_j$, *где A^i_j — алгебраическое дополнение элемента a^i_j и вычисляется $A^i_j = (-1)^{i+j} \cdot M^i_j$.*

M^i_j — минор элемента a^i_j.

□ Переставляя строки и столбцы приведем матрицу к виду:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{a^i_j} & 0 & \dots & 0 \\ a^1_j & \color{blue}{a^1_1} & \color{blue}{\dots} & \color{blue}{a^1_n} \\ \vdots & \color{blue}{\vdots} & \color{blue}{\ddots} & \color{blue}{\vdots} \\ a^n_j & \color{blue}{a^n_1} & \color{blue}{\dots} & \color{blue}{a^n_n} \end{pmatrix} = det\ B \cdot det\ C = a^i_j \cdot det\ C = a^i_j A^i_j.$$

(красным отмечена матрица B, синим — C). ■

Некоторые приложения определителя

Теорема 10 (Крамера)**.** *Если определитель матрицы коэффициентов A отличен от нуля, то система*

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + a_1^2x_2 + \ldots + a_n^1x_n = b_1 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + \cdots + a_n^nx_n = b_n, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Причем $x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A}$, $i = 1, \ldots, n$, *где* A_i *— матрица* A, *в которой* i *столбец заменяется на* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

□ При элементарных преобразованиях системы уравнений в матрицах A и A_i происходит элементарные преобразования строк, следовательно формула Крамера не меняется.

Рассмотрим случай, когда $A = E$. Тогда система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \text{i столбец} \\ \downarrow \end{array}$$

$$det\ A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = b_i$$

$\implies x_i = \frac{b_i}{1} = b_i \implies$ Формула Крамера верна.

Если $det\ A \implies \exists i: \ det\ A_i = 0 \implies$ система несовместна.

Если $det\ A = \ldots = det\ A_n = 0 \implies$ система несовместна или неопределена. ■

Теорема 11. *Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Тогда*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{Vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & A_n^n \end{Vmatrix}$$

(обратите внимание, что матрица транспонирована).

□ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$\underbrace{AX = E}_{\substack{\text{Уравнение относительно} \\ \text{столбцов матрицы } X}} \quad \Longrightarrow X = A^{-1}, \text{ то есть } A \cdot X_j = E_j$$

Эта система n линейных уравнений относительно элементов $x_j^1,\, x_j^2, \ldots,\, x_j^n$.

По формулам Крамера получим:

$$x_j^i = \frac{1}{det\ A} \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & 0 & \cdots & a_n^1 \\ a_2^1 & \cdots & 0 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^j & \cdots & 1 & \cdots & a_n^j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & 0 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \frac{A_i^j}{det\ A}.$$

■

Второй способ вычисления обратной матрицы: $(A|E)$ приводим через элементарные преобразования к $(E|A^{-1})$

Пример.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Например, } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1^1 = -2 \\ x_1^2 = 3/2 \end{cases}$$

Аналогично с вторым столбцом матрицы X.

Ранг матрицы

Определение 24. *Минором* k-го порядка матрицы A называется определитель порядка k, построенный из k^2 элементов этой матрицы, расположенныъ на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов.

Определение 25. *Рангом* ненулевой матрицы $A_{n\times m}$ называется натуральное число $k:\ 1 \le k \le min(m,\, n)$, удовлетворяющая двум условиям:

1. У матрицы A существует по крайней мере один минор k-го порядка, отличный от нуля. $M_k \neq 0$.

2. Если у матрицы A существует миноры $k+1$-го порядка, то все они равны нулю. $M_{k+1} = 0$

Определение 26. Если $rk\,A = k$, то любой её $M_k \neq 0$ называется *базисным* или *ранговыми*. Строки и столбцы базисного минора называются *базисами*.

Теорема 12 (о базисном миноре)**.** *У любой матрицы A всякий столбец (строка) является линейной комбинацией базисных столбцов (строк).*

□ Пусть $rk\,A = k$ и M_k — базисный минор, расположенный в левом верхнем углу.

Построим определитель окаймляющий M_k, который получается добавлением i строки и j столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n^1 & \cdots & a_k^1 & a_j^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_j^k & \cdots & a_k^k & a_j^k \\ a_1^i & \cdots & a_k^i & a_j^i \end{vmatrix} = 0$$

(так как $rk\,A = k,\ M_k \neq 0,\ M_{k+1} = 0$)

Раскладывая Δ по элементам последней строки получим:

$$a_1^i A_1^{k+1} + \ldots + a_k^i A_k^{k+1} + a_j^i M_k = 0$$

$$a_j^i = a_1^i \frac{-A_1^{k+1}}{M_k} + \ldots + a_k^i \frac{-A_k^{k+1}}{M_k}$$

$$a_j^i = \lambda_1 a_1^i + \ldots + \lambda_k a_k^i$$

a_j^i линейно выражается через остальные

■

Алгебра многочленов

(если выполнено домашнее задание, то раздел не нужно учить) 404

Группы

Циклические группы

Определение 27. *Группой* называется множество G с операцией умножения, обладающей следующими свойствами:

1. $(ab)c = a(bc),\ \forall\ a, b, c \in G$ (ассоциативность)
2. $\exists e \in G$ (единица): $ae = ea = e\ \forall a \in G$
3. $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G$ (обратный элемент), $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Группа называется *абелевой* или *коммутативной*, если $ab = ba,\ \forall a,\ b \in G$.

В любой группе могжет быть определена степень элемента $g \in G$ с целыми показателями:

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \ldots\ \cdot g}_{k}, & \text{если } k > 0 \\ e, & \text{если } k = 0\ , k \in \mathbb{Z} \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \ldots\ \cdot g^{-1}}_{k}, & \text{если } k < 0 \end{cases}$$

Определение 28. Степени элемента g образуют подгруппу группы G. Она называется *циклической* и обозначается $<g>$

Определение 29. Наименьшее из натуральных m для которого выполняется $g^m = e$ называется *порядком* элемента.

Если m не существует, то порядок g равен $+\infty$.

Обозначение: $ord\ g = m$.

Теорема 13. *Если $ord\ g = n$, то*

1. $g^m = e \Leftrightarrow n \mid m$
2. $g^k = g^l \Leftrightarrow k \equiv l (mod\ n)$

□ 1. $m = np + r,\ r < n$

$$g^m = g^{np} \cdot g^r = (\underbrace{g^n}_{e})^p \cdot g^r = g^r$$

$\Rightarrow\ g^m = e \implies g^r = e \implies r = 0 \Leftarrow$ так как $n \mid m$, то $r = 0$.

2. $g^k = g^l \implies g^{k-l} = e$

$\implies$ по первому утверждению $(k-l) \vdots n \implies k - l = np$

$\blacksquare$

В аддитивной группе говорят не о степенях элемента g, а о его кратных. Обозначение: $m\ g$

Порядком элемента g в *аддитивной* группе называют наименьшее из натуральных m, такое, что $\underbrace{g+g+\ldots+g}_{m} = 0$(если m существует).

Теорема 14. *Если ord* $g = n$, *то ord* $g^k = \frac{n}{(n,k)}$, $(n,k) = \gcd(n,k)$

$\square$ Пусть *ord* $g^k = m$ и $(n,k) = d$. Тогда $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, $(n_1, k_1) = 1$.

Так как *ord* $g = n$, то $g^n = e$. Также $(g^k)^m = e \implies km \vdots n \implies k_1 dm \vdots n_1 d \implies k_1 m \vdots n_1$

Так как $(k_1, n_1) = 1 \implies m \vdots n_1 \implies m = pn_1 = \frac{pn_1 d}{d} = \frac{pn}{d} \implies p = 1$.
$\implies$ *ord* $g^k = \frac{n}{k} = \frac{n}{(n,k)}$. $\blacksquare$

Определение 30. Группа G называется *циклической*, если существует такой элемент в степени которого образует группу G.

$G = <g>$ и такой элемент называется *образующим.*

Пример. $\mathbb{Z}$ аддитивная группа целых чисел является циклической с образующим элементом 1 или -1

Z_n — циклическая группа с образующим элементом [1].

Определение 31. Число элементов конечной группы называется её *порядком.*

Обозначение: $|G|$

Пример. Всякая бесконечная циклическая группа изоморфна группе целых чисел:

$f : \mathbb{Z} \to G$,

$f : k \to g^k$.

Всякая конечная цилкическая группа порядка n изоморфна группе Z_n:

$f : Z_n \to G$.

Всякая подгруппа циклической группы является циклической.

В циклической группе порядка n порядок любой подгруппы делит n и для любого делителя p числа n существует одна подгруппа порядка n.

Разбиение на смежные классы

Определение 32. Пусть G — группа, H — подгруппа группы G. Элементы $g_1,\ g_2 \in G$ сравнимы по модулю H ($g_1 \equiv g_2\ (mod\ H)$), если $g_1^{-1}g_2 \in H$.
$g_1^{-1}g_2 = h \in H \implies g_2 = g_1h$

Отношение сравнимости по модулю H является отношением эквивалентности:

1.

$$g_1 \equiv g_1\ (mod\ H)$$
$$(g_1^{-1}g_1) = e \in H$$

2.

$$g_1 \equiv g_2\ (mod\ H) \implies g_2 \equiv g_1\ (mod\ H)$$
$$g_1^{-1}g_2 \in H \implies (g_1^{-1}g_2)^{-1} \in H, \text{так как является обратным.}$$
$$\implies (g_2^{-1}g_1 \in H) \implies g_2 \equiv g_1\ (mod\ H).$$

3.

$$g_1 \equiv g_2\ (mod\ H) \wedge g_2 \equiv g_3\ (mod\ H)$$
$$\implies g_1 \equiv g_3\ (mod\ H)$$
$$g_1^{-1}g_2 \in H,\ g_2^{-1}g_3 \in H$$
$$\implies (g_1^{-1}\underbrace{g_2)\cdot(g_2^{-1}}_{e}g_3) \in H \implies g_1^{-1}g_3 \in H$$
$$\implies g_1 \equiv g_3\ (mod\ H).$$

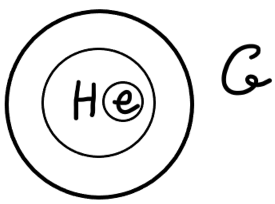


Рис. 1: Пример

Определение 33. Классы этой эквивалентности называются *левыми смежными классами* группы G подгруппы H.

Смежный класс, содержащий элемент g, имеет вид $gH = \{gh,\ h \in H\}$

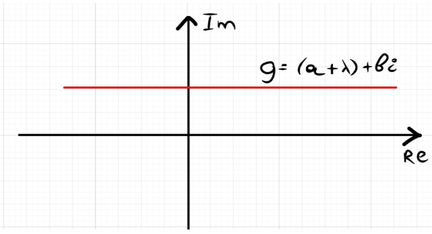
Одним из смежных классов является сама подгруппа H.

Если вместо $g_1^{-1}g_2 \in H$ взять $g_2 g_1^{-1} \in H$, то получим другое отношение эквивалентности. Классы этой эквивалентности называются *правыми смежными классами.*

Пример. Смежные классы аддитивной группы $\mathbb{C}$ на подгруппе $\mathbb{R}$ изображаются на комплексной плоскости прямой параллельной оси Ox

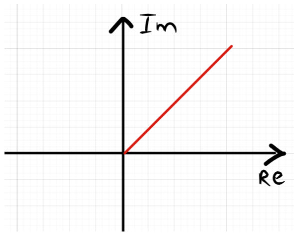
$g + \mathbb{R},\ g \in \mathbb{C}$

$g + \mathbb{R} = \{g + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$



Пример. Смежные классы мультипликативной групп $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по подгруппе $\mathbb{R}_+^*$ изображаются на комплексной плоскости лучами, исходящими из начала координат.

$g\mathbb{R}_+^* = \{g\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$



Множество левых смежных классов группы G подгруппы H обозначается G/H.

Определение 34. Число смежных классов, если оно конечно, называется *индексом* подгруппы H и обозначается $|G : H|$.

Теорема 15 (Лагранжа)**.** *Если G конечная группа, H любая её подгруппа, то $|G| = |G : H| \cdot |H|$.*

□ Все смежные классы gH содержат одно и то же количество элементов равное $|H|$. Так как эти классы образуют разбиение группы G, то порядок группы G равен произведению их числа на количество элементов подгруппы $H \implies |G| = |G : H| \cdot |H|$. ■

Определение 35. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если $gH = Hg$, то есть $\forall g \in G: \ gHg^{-1} = H$.

Обозначение: $H \lhd G$, $G \rhd H$.

В случае, если H — нормальная подгруппа группы G, то G/H называется *факторгруппой*. eH — единица этой группы.

Определение 36. $f : \ G_1 \to G_2$ называется *гомоморфизмом*, если $f(ab) = f(a)f(b), \ a, b \in G_1$.

Свойства:

1. $f(e) = e$

2. $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
   $\square \quad f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e) = e \implies f(a^{-1}) = f(a)^{-1}.$ $\blacksquare$

3. $Im\ f = \{f(a), \ a \in G_1\}$ — образ гомоморфизма. $Im\ f \subset G_2$.

4. $Ker\ f = \{a \in G_1, \ f(a) = e\}$ — ядро.

   $Ker\ f$ есть нормальная подгруппа группа G_1.
   $\square \quad a, b \in Ker\ f$

   $f(ab) = f(a) \cdot f(b) = e \cdot e = e \implies ab \in Ker\ f$

   $a \in Ker \implies f(a^{-1}) = e^{-1} = e \implies a^{-1} \in Ker\ f \implies Kerf \subset G_1$.

   $\forall g \in G_1, \ a \in Ker\ f, \ g\,a\,g^{-1} \overset{?}{\in} Ker\ f.$

   $f(g\,a\,g^{-1}) = f(g) \cdot f(a) \cdot f(g^{-1}) = f(g) \cdot e \cdot f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = e$
   $\implies g\,a\,g^{-1} \in Ker\ f.$ $\blacksquare$

5. $f(g_1) = f(g_2) \implies g_1 \equiv g_2 (mod\ Ker\ f)$
   $\square \quad f(g_1) = f(g_2) \ / \cdot f(g_1^{-1})$

   $f(g_1^{-1})f(g_1) = f(g_1^{-1})f(g_2)$

   $e = f(g_1^{-1}g_2) \implies g_1^{-1}g_2 \in Ker\ f \implies g_1 \equiv g_2(mod\ Ker\ f)$ $\blacksquare$

6. $f(a^n) = (f(a))^n$

7. $f: \ G_1 \to G_2$

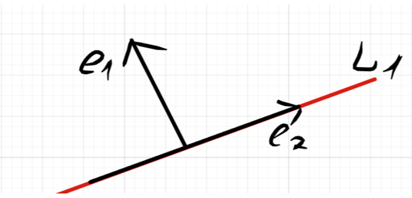
   $\forall g \in G_1$ порядок элемента $f(g)$ делит порядок g.
   $\square$ Пусть $ord\ g = k \implies g^k = e$

   $f(g^k) = (f(g))^k \implies (f(g))^k = e \implies ord\ f(g) = k.$ $\blacksquare$

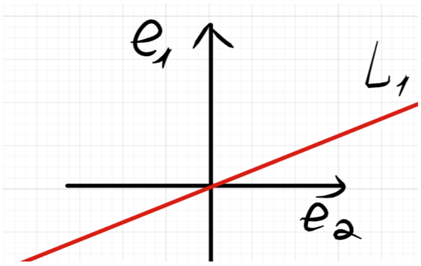
Линейные операторы и квадратичные формы

Квадратичные формы

Определение 37. Базис пространства L называется *согласованным* с подпространством L_1, если L_1 является линейной оболочкой какой-то части базисных векторов.



(a) Пример согласованного базиса, так как $L_1 = < e_2 >$



(b) Пример несогласованного базиса

Пример.

Определение 38. *Суммой* подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_k$ называется совокупность векторов вида $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_k$, где $\bar{u}_i \in L_i, \ i = 1, \ldots, k$.

Теорема 16. *Для всякой пары подпространств $L_1, \ L_2 \in L$ существует базис пространства L, согласованный с подпространствами $L_1, \ L_2$.*

□ Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k)$ — базис $L_1 \cap L_2$.Дополним до базиса L_1 и L_2:
$(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m)$ — базис L_1.
$(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_p)$ — базис L_2.

Рассмотрим $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m, \bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_p)$ и докажем, что векторы линейно независимы.

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, \bar{f}_j + \sum_{j=1}^{p} \nu_j \, \bar{d}_j = 0$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \bar{e}_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, \bar{f}_j}_{\in L_1} = \underbrace{- \sum_{j=1}^{p} \nu_j \, \bar{d}_j}_{\in L_2}$$

Векторы $(d_1, \ldots, d_p) \notin L_1 \cap L_2 \implies$ равенство возможно только, если все коэффициенты равны нулю, то есть векторы линейно независимы. ■

Следствие. $dim\,(L_1 + L_2) = dim\,L_1 + dim\,L_2 - dim\,(L_1 \cap L_2)$

Определение 39. Подпространства $L_1, \ldots, L_k$ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_k = \bar{0},\ \bar{u}_i \in L_i$ следует $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \ldots = \bar{u}_k = \bar{0}$.

Определение 40. Векторное пространство L *разлагается* в прямую сумму подпространств $L_1, \ldots, L_k$, если

1. $L_1, \ldots, L_k$ — линейно независимые
2. $L_1 + \ldots + L_k = L$

Обозначение: $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k$.

$\forall \bar{v} \in L\ \bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \ldots + \bar{u}_k,\ \bar{u}_i \in L_i\ u_i$ называется *проекцией* v на L_i.

Напомним, что *линейной* функцией называют функцию $\alpha : V \to \mathbb{R}$, где V — векторное пространство (Далее $L,\ V,\ L_i,\ V_i$ — векторные пространства), если выполняются следующие условия:

1. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha(\bar{x}) = \alpha(\bar{y})$
2. $\alpha(\lambda\bar{x}) = \lambda\alpha(\bar{x})$.

$\forall\,\bar{x},\ \bar{y} \in V$.

Пример. *След квадратной матрицы* — это сумма её диагональных элементов. $tr\,A = a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n$

След квадратной матрицы есть линейная функция, заданная на множестве квадратных матриц. $\alpha(A) = tr\,A,\ V = M_{m\times n}$.

Определение 41. Линейные функции *образуют* подпространство в пространстве всех функций, заданных на V со значениями $\mathbb{R}$.

Пространство линейных функций, заданных на V, называется *сопряженным пространством* по отношению V. Обозначение: V^*.

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис V, а $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — базис V^*.

$$\varepsilon_i\,(\bar{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, если } i = j \\ 0 & \text{, если } i \neq j. \end{cases}$$

$\varepsilon_i(\bar{x}) = x_i$.

Напомним также, что *билинейной* функцией (формой) называется функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$, которая линейна по каждому аргументу.

Примером билинейной функции является след: $\alpha(A, B) = tr\,(AB)$.

Определение 42. *Ядром* билинейной функии называется подпространство $Ker\,\alpha = \{\bar{y},\ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = 0,\ \forall\,\bar{x} \in V\}$.

Определение 43. Функция α называется *невырожденной*, если ядро состоит из нуля ($Ker\,\alpha = 0$).

Функция α является симметрической, если $\alpha\bar{x}, \bar{y} = \alpha\bar{y}, \bar{x}$.
Функция α является кососимметрической, если $\alpha\bar{x}, \bar{y} = -\alpha\bar{y}, \bar{x}$.

Определение 44. Пусть α симметрическая билинейная функция над полем K, $char\,K \neq 2$. Функция $q : V \to K$, которая определяется как $q(\bar{x}) = \alpha(\bar{x}, \bar{x})$, называется *квадратичной* функцией или формой, ассоциированной с функцией α

В координатной форме квадратичную функцию можно записать так:

$$q(\bar{x}) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Симметрическая билинейная функция может восстанавливаться по соответсвтующей квадратичной функции. $alpha(\bar{x},\, \bar{y}) = \frac{1}{2}(q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y}))$.
□

$$\begin{gathered}
q(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha(\bar{x}+\bar{y},\, \bar{x}+\bar{y}) = \\
= \alpha(\bar{x},\, \bar{x}) + \alpha(\bar{y},\, \bar{x}) + \alpha(\bar{x},\, \bar{y}) + \alpha(\bar{y},\, \bar{y}) = \\
= \alpha(\bar{x},\, \bar{x}) + \alpha(\bar{y},\, \bar{y}) + 2\alpha(\bar{x},\, \bar{y}) \implies \\
2\alpha(\bar{x},\, \bar{y}) = q(\bar{x}+\bar{y}) - q(\bar{x}) - q(\bar{y})
\end{gathered}$$

■

Определение 45. Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются *ортогональными*, если $\alpha(\bar{x},\, \bar{y}) = 0$.

Определение 46. *Ортогональным дополнением* к подпространству U относительно α называется подпространство $U^{+} = \bar{y} :\ \alpha(\bar{x},\, \bar{y}) = 0,\ \forall\, \bar{x} \in U$.

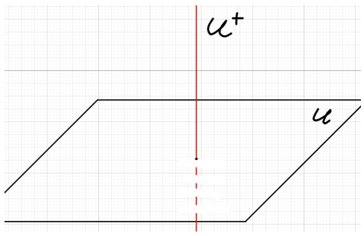


Рис. 3: Пример ортогонального дополнения к U относительно скалярного произведения

Определение 47. Подпространство U называется *невырожденным* относительно билинейной функции α, елси её ограничения на U невырожденно

Определение 48. Пусть α — симметрическая билинейная форма. Базис $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ называется *ортогональным* относительно α, если его векторы попарно ортогональны.

В ортогональном базисе верны следующие утверждения:

$$\alpha(\bar{x},\, \bar{y}) = \alpha_1\, x_1\, y_1 + \ldots + \alpha_n\, x_n\, y_n$$

$$q(\bar{x}) = \alpha(\bar{x}, \bar{x}) = \alpha_1\, x_1^2 + \ldots + \alpha_n\, x_n^2$$

$$\alpha(\bar{e}_i,\, \bar{e}_j) = 0, \text{ если } i \neq j$$

$$\alpha_i = \alpha(\bar{e}_i,\, \bar{e}_i)$$

Теорема 17. *Пусть $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис V, A — матрица функции α в этом базисе, A_k — матрица функции α на подпространстве $V_k =< \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k >$, $k \leq n$ и $\delta_k = det\, A_k$.*

*Если все угловые миноры $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ отличны от нуля, то **существует** единственный ортогональный базис $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$ удовлетворяющий условию $\bar{f}_k \in \bar{e}_k + V_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$.*

При этом $q(\bar{f}_k) = \alpha(\bar{f}_k,\, \bar{f}_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$.

Определение 49. Процесс построения ортогонального базиса называется процессом *ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пример. Прцесс ортогонализации Грама-Шмидта:

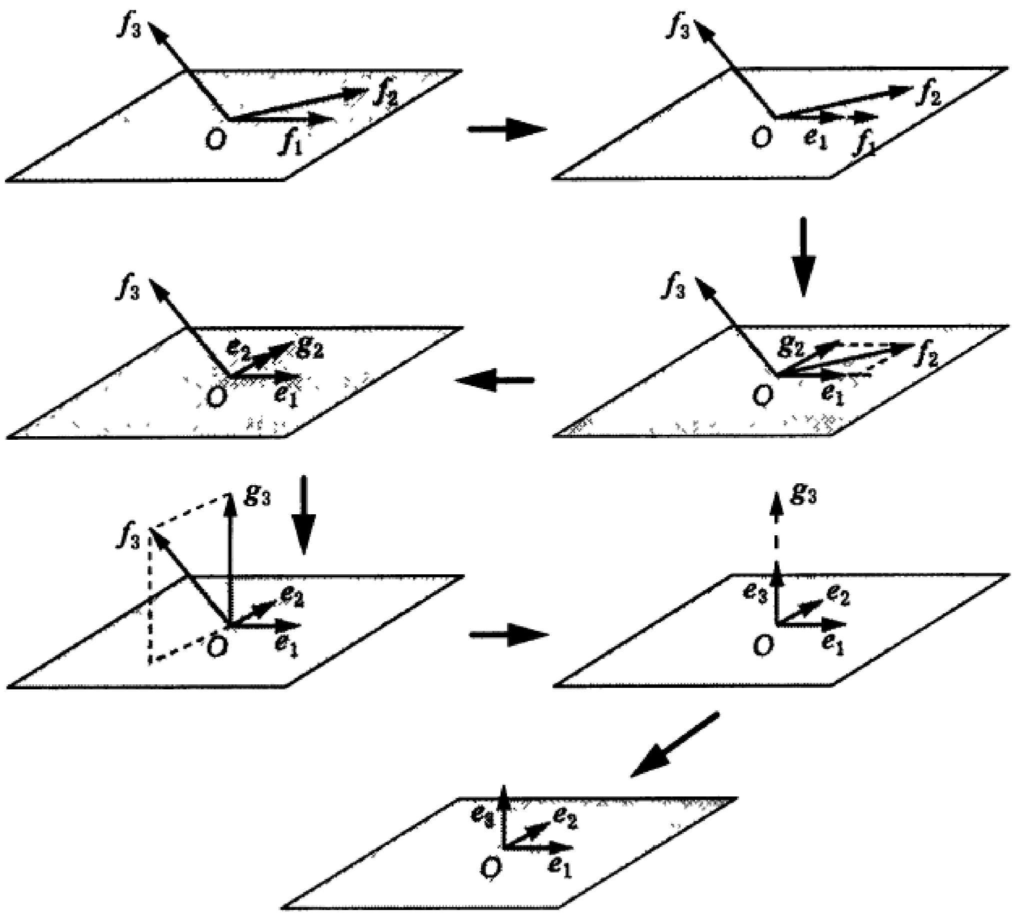


Рис. 3.4

Построение ортонормированного базиса:

$(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис $\to$ $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$ — ортогональный базис ($\bar{f}_i \perp \bar{f}_j$, $\alpha(\bar{f}_i, \bar{f}_j) = 0$ при $i \neq j$) $\to$ $(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_n)$ — ортонормированный базис ($|\bar{d}_i| = 1$).

Определение 50. Вещественная квадратичная форма q называется *положительно определенной*, если $q(\bar{x}) > 0$, $\bar{x} \neq \bar{0}$

Вещественная симметрическая билинейная форма назыается *положительно определенной*, если соответствующая ей квадратичная форма положительно определена.

Теорема 18 (Критерий Сильвестра)**.** *Вещественная квадратичная функция является* ***положительно определённой*** *тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы* ***положительны****.*

Канонический вид квадратичных форм

Если квадратичная функция $q : V \to \mathbb{C}$ определена на поле комплексных чисел, то путём нормировки базисных векторов квадратичную форму можно привести к виду

$$q(\bar{x}) = x_1^2 + \ldots + x_r^2,$$

где r — ранг квадратичной формы.

В случае же, когда квадратичная форма $q : V \to \mathbb{R}$ определена на поле вещественных чисел, то форму можно привести к виду

$$q(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - \ldots - x_{k+\ell}^2, \tag{3}$$

где $k + \ell$ — ранг формы.

Число k в нормальном виде квадратичной формы 3 есть *максимальная размерность подпространства*, на котором функция q положительно определена.

Теорема 19 (Закон инерции)**.** *Числа k и ℓ в нормальном виде 3 вещественной квадратичной функции не зависят от выбора базиса, в котором эта функция имеет нормальный вид.*

Пара $(k,\, \ell)$ называется ***сигнатурой*** *квадратичной функции.*

Евклидово пространство

Определение 51. *Евклидовым векторным пространством* называется действительное векторное пространство с фиксированным положительно определенной симметрической билинейной функцией. Эта функция называется *скалярным произведением.*

Определение 52. *Матрицей Грама* (в евклидовом пространстве) называется

$$G(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1,\, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1,\, \bar{e}_2) & \ldots & (\bar{e}_1,\, \bar{e}_n) \\ (\bar{e}_2,\, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2,\, \bar{e}_2) & \ldots & (\bar{e}_2,\, \bar{e}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\bar{e}_n,\, \bar{e}_1) & (\bar{e}_n,\, \bar{e}_2) & \ldots & (\bar{e}_n,\, \bar{e}_n) \end{pmatrix},$$

где $(\bar{e}_i,\, \bar{e}_j)$ — скалярное произведение. Так как функция симметрическая, то матрица симметрична относительно главной диагонали.

Матрица Грама обладают следующими свойствами:

Определитель матрицы Грама системы n векторов равен квадрату объёма n-мерного параллелепипеда, натянутого на эти векторы. Из этого следует, что в случае трёхмерного пространства определитель Грама трёх векторов равен квадрату их смешанного произведения.

Система векторов $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен нулю.

Пусть $L = U \oplus U^+ \implies \underbrace{\bar{x}}_{\in L} = \underbrace{\bar{y}}_{\in U} + \underbrace{\bar{z}}_{\in U_+}$, где $\bar{y}$ — ортогональная *проекция* $\bar{x}$ на U, $\bar{z}$ — ортогональная *составляющая* $\bar{x}$ относительно U.

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k)$ — ортогональный базис U.

Зная $\bar{x}$, **Как найти проекцию и составляющую?**

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{e}_k + \bar{z} \quad / \text{ Скалярно умножаем на } \bar{e}_1$$

$$(\bar{x}, \bar{e}_1) = \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) + \lambda_2 \underbrace{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}_{=0} + \ldots + \lambda_k \underbrace{(\bar{e}_k, \bar{e}_1)}_{=0} + \underbrace{(\bar{z}, \bar{e}_1)}_{=0}$$

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_1)}{\bar{e}_1^2}$$

Проделывая аналогочные действия для всех $i = 1, \ldots, k$, получим:

$$\lambda_i = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_i)}{\bar{e}_i^2}$$

$$\implies \bar{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{(\bar{x}, \bar{e}_i)}{(\bar{e}_i, \bar{e}_i)} \cdot \bar{e}_i}_{y} + \bar{z} \implies \bar{z} = \bar{x} - \bar{y}.$$

По теореме 17 мы знаем, когда существует ортогональный базис, но **Как построить ортогональный базис**

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — произвольный базис. Построим ортогональный базис $(\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n)$.

$\bar{f}_1 = \bar{e}_1$

$\bar{e}_2 = \lambda_1 \bar{e}_1 + \bar{f}_2$, где $\bar{f}_2$ — ортогональная составляющая. Умножаем выражение скалярно на $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$

$(\bar{e}_2, \bar{f}_1) = \lambda_1 (\bar{e}_1, \bar{f}_1) + \underbrace{(\bar{f}_2, \bar{f}_1)}_{\substack{=0, \\ \text{так как } \bar{f}_2 \perp \bar{f}_1}}$

$\lambda_1 = \frac{(\bar{e}_2, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \implies \bar{f}_2 = \bar{e}_2 - \lambda_1 \bar{e}_1$

$\bar{e}_3 = \lambda \bar{f}_1 + \mu \bar{f}_2 + \bar{f}_3$

Скалярно умножаем на f_1: $\lambda = \frac{(\bar{e}_3, \bar{f}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} \implies \bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda \bar{f}_1 - \mu \bar{f}_2$

Следовательно $\bar{f}_i = \bar{e}_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} \frac{(\bar{e}_i, \bar{f}_k)}{(\bar{f}_k, \bar{f}_k)} \cdot \bar{f}_k, \; i = 1, \ldots, n$

Определение 53. Евклидовые векторные пространства V, U называются изоморфными, если существует биективное отображение $f : V \to U$ являющаяся изоморфизмом и выполняется равенство $(f(\bar{a}),\, f(\bar{b})) = (\bar{a}, \bar{b}),\ \forall\, \bar{a},\, \bar{b} \in V$.

Теорема 20. *Любые два евклидовых векторных пространства одинаковой размерности изоморфны.*

□ Пусть $dim\, V = dim\, U = n,\ U,\, V$ — векторные пространства,

$(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n),\ (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ — ортонормированные базисы V и U соответственно.

Построим отображение $f : V \to U,\ f(\bar{v}_i) = \bar{u}_i,$ а значит $(f(\bar{v}_i),\, f(\bar{v}_k)) = (\bar{u}_i,\, \bar{u}_k) = \delta_{ik} = (\bar{v}_i,\, \bar{v}_k)$.

Следовательно V и U изоморфны. ■

Линейный оператор

Определение 54. *Линейным оператором* или *линейным преобразованием* векторного пространства L называется линейное отображение в себя $A : L \to L$.

Выполняются следующие условия:

1. $A(\bar{x} + \bar{y}) = A\,\bar{x} + A\,\bar{y}$
2. $A(\lambda\bar{x}) = \lambda A\,\bar{x}$

Пусть $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис L,

$$A(\bar{e}_1) = a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + \ldots + a_1^n\bar{e}_n$$

$$\vdots$$

$$A(\bar{e}_n) = a_n^1\bar{e}_1 + a_n^2\bar{e}_2 + \ldots + a_n^n\bar{e}_n$$

$$\underbrace{(A\,\bar{e}_1, \ldots, A\,\bar{e}_n)}_{\text{матрица-строка}} = \underbrace{(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)}_{\text{матрица-строка}} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$A\,\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \bar{e}_k,\ k = 1, \ldots, n$$

Определение 55. Матрица $\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного оператора* A.

Рассмотрим переход от базиса $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ к $(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n)$:

$(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = (\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) \cdot C$, где C — матрица перехода от $(\bar{e}_i)$ к $(\bar{e}'_i)$.

$(A\,\bar{e}'_1, \ldots, A\,\bar{e}'_n) = (\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) \cdot A'$, где A' — матрица линейного оператора в базисе $(\bar{e}'_i)$. Аналогично для базиса $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$.

$(A\,\bar{e}'_1, \ldots, A\,\bar{e}'_n) = (A\,\bar{e}_1, \ldots, A\,\bar{e}_n) \cdot C = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) \cdot A\,C \implies$

$(\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n) \cdot A' = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) \cdot A\,C \implies$

$\underline{A' = C^{-1} \cdot A \cdot C}$

Определение 56. Подпространство $\mathcal{U} \in L$ называется *инвариантным* относительно оператора A, если $A\,(\mathcal{U}) \in \mathcal{U}$.

То есть $\bar{x} \in \mathcal{U} \implies A\,\bar{x} \in \mathcal{U}$.

Если $\mathcal{U} =< \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k >$, а $L =< \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_n >$ (а это всегда можно сделать), то матрица оператора A в этом базисе имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $A_{\mathcal{U}}$ в базисе $< \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k >$, C — квадратная матрица порядка $n - k$ и D — какая-то матрица размера $k \times (n-k)$. Верно и обратное.

Если же пространство L можно разложить на сумму двух инвариантных подпространств $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$: $L = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$, то матрица линейного оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $A_{\mathcal{U}_1}$, C — матрица оператора $A_{\mathcal{U}_2}$.

Собственные векторы

Определение 57. Пусть $A : L \to L$ — линейный оператор. Вектор $\bar{x} \neq 0$ называется *собственным* вектором оператора A, если $A\,\bar{x} = \lambda\bar{x},\ \lambda \in \mathbb{R}$, где число λ — *собственное значение* оператора A, отвечающие собственному вектору $\bar{x}$.

Если $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ — базис из собственных векторов, то матрица линейного оператора выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема 21. *Для существования $\bar{x}$ и λ необходимо и достаточно $det\,(A-\lambda E)=0$, где A — матрица линейного оператора, E — единичная матрица.*

□ $A\,\bar{x}=\lambda\bar{x}$

$A\,\bar{x}-\lambda\bar{x}=0$

$(A-\lambda E)\bar{x}=0$ Записав в координатном виде это равенство, получим однородную систему линейных уравнений.

У этой системы есть ненулевое решение $\Leftrightarrow det\,(A-\lambda E)=0$. ■

Определение 58. Многочлен $f_A(t)=det\,(A-tE)$ называется *характеристическим* многочленом оператора A.

Теорема 22. *Характеристический многочлен не зависит от выбора матрицы линейного оператора, то есть $det\,(A_1-tE)=\det(A_2-tE)$, где A_1, A_2 — матрицы линейного оператора A в базисе $(\bar{e}_i)$ и $(\bar{e}_j)$.*

□ Пусть C — матрица перехода из $\bar{e}_i$ в $\bar{e}'_i$, то есть $\bar{e}'_i=\sum\limits_{j=1}^{n} C_i^j\,\bar{e}_j$

$A_2=C^{-1}\cdot A_1\cdot C$

$\det(A_2-tE)=\det(C^{-1}\,A_1\,C-tE)=\det(C^{-1}\,A_1\,C-t\,C^{-1}\,C)=$

$=\det C^{-1}(A_1-tE)C=\det C^{-1}\cdot\det(A_1-tE)\cdot\det C=$

$=det(\underbrace{C^{-1}\cdot C}_{E})\cdot\det(A_1-tE)=\det(A_1-tE)$. ■

Теорема 23. *Собственное значение оператора A — это корень его характеристического многочлена.*

Теорема 24. *Любой линейный оператор в комплексном линейном пространстве имеет собственный вектор*

Теорема 25. *Пусть $A:L\to L,\ L\in\mathbb{R}$, тогда существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

При заданном значении λ собственные векторы находятся из системы однородных линейных уравнений

$$(A-\lambda E)X=0,$$

где X обозначает столбец координат неизвестного вектора. Вместе с нулевым вектором они составляют подпространство

$$V_\lambda(A)=\ker(A-\lambda E),$$

называемое *собственным подпространством* оператора A, отвечающим собственному значению λ. Его размерность ранва $n-\mathrm{rk}(A-\lambda E)$.

Теорема 26 (о собственных подпространствах, отвечающих различным собственным значениям оператора)**.** *Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ оператора A, линейно независимы.*

Теорема 27 (Необходимое и достаточное условие существования базиса из собственных векторов линейного оператора)**.** *Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора A необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *характеристический многочлен $f_A(t)$ разлагается на линейные множители*

2. *Размерность каждого собственного подпространства равна кратности соответствующего корня многочлена $f_A(t)$.*

Линейные операторы и билинейные функции в евклидовом пространстве

Определение 59. Пусть A — линейный оператор. Тогда билинейная функция оператора A опеределяется как

$$\varphi_A(\bar{x},\, \bar{y}) = (\bar{x} A\, \bar{y})$$

Если $\varphi_A(\bar{x},\, \bar{y}) = \varphi_A(\bar{y},\, \bar{x})$, то A называют *симметрическим* или *самосопряженным* оператором.

Теорема 28. *В ортонормированном базисе матрицы φ_A и A совпадают.*

□ Пусть $(\bar{e}_i)$ — ортонормированный базис.

$varphi_A(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = \bar{e}_i A\, \bar{e}_k = \bar{e}_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j\, \bar{e}_j = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j\, \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j\, \delta_j^i = a_k^i$, так как $\delta_j^i = 1 \Leftrightarrow i = j$. ■

Теорема 29. *Пусть $V \subset E,\ AV \subset V$. Тогда $AV^\perp \subset V^\perp$. То есть, если подпространство V инвариантно, то и его ортогональное дополнение $V^\perp$ инвариантно.*

□ $(\bar{x},\, \bar{y}) = \bar{0},\ \bar{x} \in V,\ \bar{y} \in V^\perp$

$\bar{x} A\, \bar{y} = \varphi_A(\bar{x},\, \bar{y}) = \varphi_A(\bar{y},\, \bar{x}) = \bar{y} A\, \bar{x} = \bar{0}$

$\underbrace{\bar{x}}_{\in V} A\, \bar{y} = \bar{0} \implies A\, \bar{y} \in V^\perp \implies AV^\perp \subset V^\perp \implies$

$V^\perp$ — инвариантное подпространство. ■

Теорема 30. *Для самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собсвтенных векторов.*

Теорема 31. *Пусть* φ *— симметрическая билинейная форма. Тогда существует такой ортонормированный базис, в котором форма имеет канонический вид:*

$$\varphi(\bar{x},\, \bar{y}) = \lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_2 x_2 y_2 + \ldots + \lambda_n x_n y_n$$

Фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве

404