

**Билеты к экзамену**

Предмет: Математическая логика

## Содержание

1	Логические операции над высказываниями	4
2	Формулы и истинностные значения формул	6
3	Тавтологии. Методы доказательства тавтологий	8
4	Логическая равносильность формул. Равносильные преобразования формул	9
5	Нормальные формы для формул алгебры высказываний	11
6	Логическое следование формул. Методы доказательства логического следования формул	14
7	Метод резолюций в логике высказываний	21
8	Понятие предиката и его множества истинности. Перенесение на предикаты логических операций	21
9	Кванторы общности и существования, их действие на предикат. Свободные и связанные переменные	21
10	Формулы алгебры предикатов	21
11	Интерпретация формул алгебры предикатов	21
12	Логическое равенство формул алгебры предикатов. Свойства логических операций над предикатами	21
13	Логическое следование формул алгебры предикатов	21
14	Предваренная нормальная форма (ПНФ) формул алгебры предикатов	21
15	Скулемовская стандартная форма (ССФ) формул алгебры предикатов	21
16	Сведение проблемы общезначимости формул к проблеме противоречивости систем дизъюнктов	21
17	Унификация формул	21

18	Метод резолюций в логике предикатов	21
19	Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Доказуемость формул	21
20	Теорема Геделя о полноте исчисления высказываний	21
21	Непротиворечивость и разрешимость исчисления высказываний	21
22	Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Тож- дественная истинность выводимых формул	21
23	Полнота, непротиворечивость и неразрешимость исчисле- ния предикатов	21
24	Понятие алгоритма и основные математические модели алгоритма	21
25	Разрешимые и полурешимые языки. Теорема Поста	21
26	Машины Тьюринга и вычисляемые ими функции	21
27	Распознаваемость языков машинами Тьюринга	21
28	Разрешимые, неразрешимые и распознавательные пробле- мы	21
29	Временная и ленточная сложность машины Тьюринга	21
30	Классы языков P и NP	21
31	Полиномиальные сведения проблем	21
32	NP-трудные и NP-полные языки	21
33	Основные NP-полные проблемы	21

# 1 Логические операции над высказываниями

## Логика высказываний

**Определение 1.** *Высказыванием* называется повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания:  $A, B, C \dots$

**Определение 2.** *Истинностное значение* высказывания  $A$  обозначается символом  $\lambda(A)$  и определяется по формуле:

$\lambda(A) = 1$ , если высказывание  $A$  истинно

$\lambda(A) = 0$ , если высказывание  $A$  ложно

## Алгебра высказываний

Из высказываний путем соединения их с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно» можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется функциональным зависимостям истинностных значений высказываний, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

**Определение 3.** *Отрицанием высказывания  $A$*  называется высказывание  $\neg A$  (читается «не  $A$ »), которое истинно в том и только том случае, если высказывание  $A$  ложно.

Таблица истинностных значений операции отрицания:

$A$	$\neg A$
1	0
0	1

**Определение 4.** *Конъюнкцией высказываний  $A, B$*  называется высказывание  $A \wedge B$  (читается « $A$  и  $B$ »), которое истинно в том и только том случае, если оба высказывания  $A, B$  истинны.

**Определение 5.** *Дизъюнкцией высказываний  $A, B$*  называется высказывание  $A \vee B$  (читается « $A$  или  $B$ »), которое ложно в том и только том случае, если оба высказывания  $A, B$  ложны.

**Определение 6.** Импликацией высказываний  $A, B$  называется высказывание  $A \Rightarrow B$  (читается « $A$  влечет  $B$ »), которое ложно в том и только том случае, если высказывание  $A$  истинно, а высказывание  $B$  ложно.

**Определение 7.** Эквивалентностью высказываний  $A, B$  называется высказывание  $A \Leftrightarrow B$  (читается « $A$  равносильно  $B$ »), которое истинно в том и только том случае, если высказывания  $A$  и  $B$  имеют одинаковое истинностное значение.

Таблица истинностных значений логических операций:

$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

**Определение 8.** Алгеброй высказываний называется множество всех высказываний  $\mathcal{P}$  с логическими операциями  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

## 2 Формулы и истинностные значения формул

### Формулы алгебры высказываний

**Определение 9.** Свойства алгебры высказываний  $\mathcal{P}$  описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами*.

**Определение 10.** Символы логических операций  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , которые называются *пропозициональными связками*.

**Определение 11.** Переменные символы  $X, Y, Z, \dots$ , которые используются для обозначения высказываний, называются *пропозициональными переменными*.

**Определение 12.** Формулы алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1. Каждая пропозициональная переменная является формулой
2. Если  $\Phi, \Psi$  формулы, то формулами являются также выражения  $(\neg\Phi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \Rightarrow \Psi), (\Phi \Leftrightarrow \Psi)$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим  $\mathcal{F}_{AB}$

Для упрощения записи формул скобки в них по возможности опускаются с учетом следующего **приоритета выполнения операций**:  $\neg, \wedge, \vee$  и остальные.

Так, формула  $((((\neg X) \wedge (\neg Y)) \vee (\neg(\neg Z))) \Rightarrow (X \vee (\neg Y)))$  сокращенно записывается в виде  $\neg X \wedge Y \vee \neg \neg Z \Rightarrow X \vee \neg Y$ .

Если в формулу  $\Phi$  входят переменные  $X_1, \dots, X_n$ , то записывают  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ .

Из индуктивного определения формул следует, что если в формулу  $\Phi$  вместо переменных  $X_1, \dots, X_n$  подставить произвольные конкретные высказывания  $A_1, \dots, A_n$ , то получится некоторое сложное высказывание  $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ .

Истинностное значение высказывания  $\lambda(\Phi(A_1, \dots, A_n))$  определяется истинностными значениями исходных высказываний  $\lambda(A_1), \dots, \lambda(A_n)$  согласно таблицам истинностных значений логических операций  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ .

Формула  $\Phi$  определяет функцию  $n$  переменных  $F_\Phi$ , которая каждому упорядоченному набору  $(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_n))$   $n$  элементов множества  $0,1$  ставит в соответствие элемент  $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$  этого же множества.

**Определение 13.** Функция  $F_\Phi$  называется *истинностной функцией формулы  $\Phi$*  и графически представляется *истинностной таблицей*.

Такая таблица содержит  $2^n$  строк и имеет одно из возможных  $2^{2^n}$  возможных распределений 0 и 1 в последнем столбце.

**Пример.** Составим таблицу истинности для формулы

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Таблица показывает, что какого бы истинностного значения высказывания ни подставлялось в данную формулу вместо пропозициональных переменных  $P$  и  $Q$ , формула всегда превращается в истинностное высказывание.

**Определение 14.** Формула  $\Phi$  называется:

- *Тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается  $\models \Phi$ , если ее истинностная функция тождественно равна 1
- *Противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0
- *Выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0
- *Опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1

### 3 Тавтологии. Методы доказательства тавтологий

#### Тавтологии

**Определение 15.** Формула  $\Phi$  называется *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается  $\models \Phi$ , если ее истинностная функция тождественно равна 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы*.

Примерами таких законов являются:

$\models X \vee \neg X$  — закон исключенного третьего

$\models \neg \neg X \Leftrightarrow X$  — закон двойного отрицания

$\models \neg(X \wedge \neg X)$  — закон противоречия

$\models (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$  — закон контрапозиции

#### Методы доказательства тавтологий

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила:

**Теорема 1** (Правило подстановки). Если  $\models \Phi(X_1, \dots, X_n)$ , то для любых формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  тавтологией является формула  $\Phi(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ .

!Дописать алгоритм проверки тождественной истинности формулы  $\Phi$ .



## 4 Логическая равносильность формул. Равносильные преобразования формул

### Логическая равносильность формул

**Определение 16.** Формулы  $\Phi, \Psi$  называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если они принимают одинаковые логические значения при любых истинностных значениях их переменных.

Это равносильно условию  $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$ .

**Определение 17.** Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись  $\Phi = \Psi$ , или  $\Phi \cong \Psi$ .

Такие выражения называют *логическими равенствами* или просто *равенствами* формул.

**Лемма (1).** *Справедливы следующие равенства формул:*

1. *Свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции:*

$$X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$$

$$X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$$

2. *Свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции:*

$$X \vee Y = Y \vee X$$

$$X \wedge Y = Y \wedge X$$

3. *Свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции:*

$$X \vee X = X$$

$$X \wedge X = X$$

4. *Законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции:*

$$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$$

$$X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

5. *Законы де Моргана:*

$$\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$$

$$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$$

6. *Законы поглощения:*

$$(X \wedge Y) \vee X = X$$

$$(X \vee Y) \wedge X = X$$

7. *Закон двойного отрицания:*

$$\neg\neg X = X$$

8. *Взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией:*

$$X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$$

$$X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$$

9. *Взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией:*

$$X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$$

$$X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$$

## Равносильные преобразования формул

**Лемма** (Правило замены). *Если формулы  $\Phi$ ,  $\Phi'$  равносильны, то для любой формулы  $\Psi(X)$ , содержащей переменную  $X$ , выполняется равенство:  $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$ .*

Это правило означает, что при замене в любой формуле  $\Psi = \Psi(\Phi)$  некоторой ее подформулы  $\Phi$  на равносильную ей формулу  $\Phi'$  получается формула  $\Psi = \Psi(\Phi')$ , равносильная исходной формуле  $\Psi$ .

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул*.

**Пример.** Формула  $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$  с помощью равенств 5, 7, 8 из леммы 1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z = \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z.$$

## 5 Нормальные формы для формул алгебры высказываний

По определению формулы  $\Phi, \Psi$  равносильны, значит их истинностные функции  $F_\Phi, F_\Psi$  совпадают.

Следовательно, отношение равносильности формул  $\cong$  является отношением эквивалентности на множестве всех формул  $\mathcal{F}_{AB}$ , которое разбивает это множество на классы эквивалентности  $[\Phi] = \{\Psi \in \mathcal{F}_{AB} : \Phi \cong \Psi\}$ , определяемые формулами  $\Phi \in \mathcal{F}_{AB}$ .

Из основных равенств следует, что для каждой формулы  $\Phi \in \mathcal{F}_{AB}$  можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических операций  $\neg, \wedge, \vee$ .

**Определение 18.** *Литерой* называется пропозициональная переменная  $X$  или ее отрицание  $\neg X$ . Обозначение:  $X^\alpha$ , где  $\alpha \in \{0, 1\}$ .

$$X^\alpha \begin{cases} X^1 = X, & \text{если } \alpha = 1 \\ X^0 = \neg X, & \text{если } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Определение 19.** *Конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер.

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

**Определение 20.** *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов.

*Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно, ДНФ) называется *совершенной*, если все ее дизъюнкты (соответственно, конъюнкты) содержат все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

**Теорема 2.** *Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.*

### Алгоритм приведения формулы $\Phi$ к ДНФ (соответственно, КНФ):

1. Выражаем все входящие в формулу  $\Phi$  импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание

2. Согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания
3. Согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций)

**Теорема 3.** Любая выполнимая формула  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$  равносильна формуле вида

$$\bigvee_{(a_1, \dots, a_n)} (X_1^{a_1} \wedge \dots \wedge X_n^{a_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем упорядоченным наборам

$$(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n, \text{ удовлетворяющим условию } \mathcal{F}_\Phi(a_1, \dots, a_n) = 1.$$

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* формулы  $\Phi$ .

**Теорема 4.** Любая опровержимая формула  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$  равносильна формуле вида

$$\bigwedge_{(a_1, \dots, a_n)} (X_1^{1-a_1} \wedge \dots \wedge X_n^{1-a_n}),$$

где конъюнкция берется по всем упорядоченным наборам

$$(a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n, \text{ удовлетворяющим условию } \mathcal{F}_\Phi(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* формулы  $\Phi$ .

## Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ формулы

$\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ :

1. Составить истинностную таблицу формулы  $\Phi$  и добавить два столбца «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты»
2. Если при значениях  $\lambda(X_1) = k_1, \dots, \lambda(X_n) = k_n$  значение  $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$  формулы  $\Phi$  равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт  $X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}$  и в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом  $X_i^1 = X_i$  и  $X_i^0 = \neg X_i$ .

3. Если при значениях  $\lambda(X_1) = m_1, \dots, \lambda(X_n) = m_n$  истинностное значение  $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$  формулы  $\Phi$  равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт  $X_1^{1-m_1} \vee \dots \vee X_n^{1-m_n}$  и в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк.

$X_1$	...	$X_n$	...	$\Phi(X_1, \dots, X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
...	...	...	...	...	...	...
$k_1$	...	$k_n$	...	1	$X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}$	—
...	...	...	...	...	...	...
$m_1$	...	$m_n$	...	0	—	$X_1^{1-m_1} \vee \dots \vee X_n^{1-m_n}$
...	...	...	...	...	...	...

4. СДНФ формулы  $\Phi$  равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов:  $(X_1^{k_1} \wedge \dots \wedge X_n^{k_n}) \vee \dots$
5. СКНФ формулы  $\Phi$  равна конъюнкции полученных совершенных дизъюнктов:  $(X_1^{1-m_1} \vee \dots \vee X_n^{1-m_n}) \wedge \dots$

**Пример.** Найдем СДНФ и СКНФ для формулы  
 $\Phi(X, Y, Z) = \neg(X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \vee Z)$

$X$	$Y$	$Z$	$\Phi(X, Y, Z)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
0	0	0	1	$X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0$	—
0	0	1	0	—	$X^{1-0} \vee Y^{1-0} \vee Z^{1-1}$
0	1	0	1	$X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	—
0	1	1	0	—	$X^1 \vee Y^0 \vee Z^0$
1	0	0	0	—	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^1$
1	0	1	0	—	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^0$
1	1	0	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	—
1	1	1	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1$	—

СДНФ  $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$   
СКНФ  $\Phi = (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$

## 6 Логическое следование формул. Методы доказательства логического следования формул

### Логическое следование формул

**Определение 21.** Формула  $\Phi$  называется *логическим следованием формул*  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ , если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных  $X_1, \dots, X_n$  конкретных высказываний  $A_1, \dots, A_n$  из истинности высказываний  $\Phi_1(A_1, \dots, A_n), \dots, \Phi_m(A_1, \dots, A_n)$  следует истинность высказывания  $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ .

Символическое обозначение  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$  — называется *логическим следованием*.

Формулы  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  называются *посылками* и формула  $\Phi$  — *следствием* логического следования  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$ .

**Пример.** Докажем логическое следование:

$$F \Rightarrow G, K \Rightarrow \neg H, H \vee \neg G \models F \Rightarrow \neg K.$$

Предположим противное:

1.  $F \Rightarrow G = 1$
2.  $K \Rightarrow \neg H = 1$
3.  $H \vee \neg G = 1$
4.  $F \Rightarrow \neg K = 0$

Из условия 4:  $F = 1, \neg K = 0, K = 1$ .

Из условия 1:  $G = 1$ , из условия 2:  $\neg H = 1, H = 0$ .

Значит,  $H \vee \neg G = 0$ , что противоречит условию 3.

Значит, предположение неверно и логическое следование выполняется.

### Основные правила логического следования

1. *Правило отделения* (или *правило модус поненс* - от лат. modus ponens)  $\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi$
2. *Правило контрапозиции*  $\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg \Psi \Rightarrow \neg \Phi$
3. *Правило цепного заключения*  $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3$
4. *Правило перестановки посылок*  $\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3)$

**Определение 22.** Множество формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула  $\Phi$ .

Символически это записывается  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models$ .

В противном случае множество формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  называется *выполнимым*.

**Лемма** (Критерии логического следования). *Условие  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$  равносильно каждому из следующих условий:*

1.  $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \models \Phi$
2.  $\models \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$
3.  $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi \models$

*В частности,  $\Phi \models \Psi$  равносильно  $\models \Phi \Rightarrow \Psi$ . Отсюда также следует, что  $\Phi = \Psi$  равносильно тому, что  $\Phi \models \Psi$  и  $\Psi \models \Phi$ .*

Вывод: следующие задачи равносильны:

1. Проверка тождественной истинности формул
2. Проверка логического следования формул
3. Проверка тождественной ложности формул
4. Проверка противоречивости множества формул

## Методы проверки тождественной истинности формул

Основные методы проверки тождественной истинности формул:

1. Прямой метод
2. Алгебраический метод
3. Алгоритм Квайна
4. Алгоритм редукции
5. Метод семантических таблиц
6. Метод резолюций

## Алгебраический метод

*Алгебраический метод* преобразования формулы  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$  с помощью равносильных преобразований в тождественно истинную формулу 1.

**Пример.** С помощью равносильных преобразований выяснить, является ли тождественно истинной формула

$$\begin{aligned} \Phi &= ((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V) \\ &= \neg((\neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee V) \wedge (X \vee \neg Z)) \vee (\neg Y \vee V) \\ &= ((Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg V) \vee (\neg X \wedge Z)) \vee \neg Y \vee V \\ &= ((Y \wedge \neg Z) \vee \neg Y) \vee ((X \wedge \neg V) \vee V) \vee (\neg X \wedge Z) \\ &= ((Y \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg Y)) \vee ((X \vee V) \wedge (\neg V \vee V)) \vee (\neg X \wedge Z) \\ &= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee (X \vee (\neg X \wedge Z)) \\ &= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee ((X \vee \neg X) \wedge (X \vee Z)) \\ &= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee X \vee Z \\ &= (Z \vee \neg Z) \vee \neg Y \vee V \vee X = 1. \end{aligned}$$

*Замечание.* Если в процессе упрощения исследуемой формулы не получилась тождественно истинная формула 1, то следует попытаться подобрать значения пропозициональных переменных, при которых истинностное значение формулы равно 0. Это докажет, что исследуемая формула не является тождественно истинной.

## Алгоритм Квайна

*Алгоритм Квайна* позволяет сократить полный перебор значений пропозициональных переменных за счет последовательного фиксирования возможных значений 0 или 1 пропозициональных переменных и последующего анализа истинностных значений полученных формул с меньшим числом переменных.

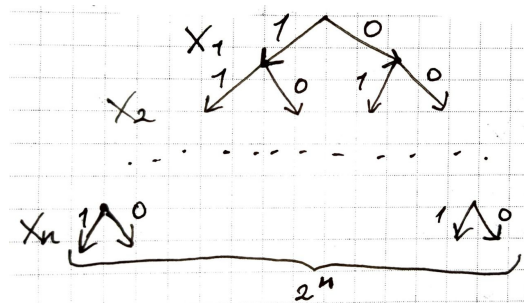


Рис. 1: Дерево перебора значений переменных



При этом используются основные тавтологии и следующие простейшие равенства:

$$\begin{array}{llll} X \wedge 1 = X & X \vee 1 = 1 & 0 \Rightarrow X = 1 & X \Rightarrow X = 1 \\ X \wedge 0 = 0 & X \vee 0 = X & 1 \Rightarrow X = X & X \Leftrightarrow X = 1 \\ X \wedge \neg X = 0 & X \vee \neg X = 1 & X \Rightarrow 1 = 1 & X \Rightarrow 0 = \neg X \end{array}$$

**Пример.** С помощью алгоритма Квайна выясните, является ли тождественно истинной формула  $((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$ .

1. При фиксировании в исходной формуле  $X = 1$  получаем  $((Y \Rightarrow Z) \wedge (1 \Rightarrow V) \wedge (1 \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$ , что равносильно  $((Y \Rightarrow Z) \wedge V) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$ .

Положим здесь  $Y = 1$ :  $((1 \Rightarrow Z) \wedge V) \Rightarrow (\neg 1 \vee V)$ , что равносильно  $(Z \wedge V) \Rightarrow V$ .

Отсюда при  $Z = 1$  получаем  $(1 \wedge V) \Rightarrow V = V \Rightarrow V = 1$

и при  $Z = 0$  получаем  $(0 \wedge V) \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V = 1$ .

Положим теперь  $Y = 0$ :  $((0 \Rightarrow Z) \wedge V) \Rightarrow (\neg 0 \vee V) = V \Rightarrow 1 = 1$ .

2. При фиксированном в исходной формуле  $X = 0$  получаем

$((Y \Rightarrow Z) \wedge (0 \Rightarrow V) \wedge (0 \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$ , что равносильно  $((Y \Rightarrow Z) \wedge \neg Z) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$ .

Положим здесь  $Y = 1$ :  $((1 \Rightarrow Z) \wedge \neg Z) \Rightarrow (\neg 1 \vee V)$ , что равносильно  $(Z \wedge \neg Z) \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V = 1$ .

Положим теперь  $Y = 0$ :  $((0 \Rightarrow Z) \wedge \neg Z) \Rightarrow (\neg 0 \vee V) = \neg Z \Rightarrow 1 = 1$ .

Таким образом, данная формула тождественно истинная.

Т.е. метод решения заключается в том, что для входящих в формулу пропозициональных переменных последовательно фиксируются возможные значения 0 или 1, и получившиеся формулы упрощаются с помощью перечисленных ранее простейших равенств до тех пор, пока не получается тождественно истинная формула 1.

При этом порядок фиксирования значений пропозициональных переменных может быть произвольным.

*Замечание.* Если на каком-то заключительном шаге вычислений получается не тождественно истинная формула 1, а тождественно ложная формула 0, то исследуемая формула не является тождественно истинной — она опровергается соответствующими фиксированными значениями пропозициональных переменных.

## Алгоритм редукции

*Алгоритм редукции* используется при доказательстве тождественной истинности формулы с большим количеством импликаций.

Идея метода основывается на получении противоречия из предположения, что истинное значение рассматриваемой формулы равно 0 при некоторых истинностных значениях ее пропозициональных переменных.

При этом используется тот факт, что импликация ложна в том и только том случае, если ее посылка истинна и заключение ложно.

**Пример.** С помощью алгоритма редукции выяснить, является ли тождественно истинной формула

$$((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V).$$

*Решение.* Запишем по пунктам шаги алгоритма редукции.

1. Предположим, что при некотором наборе значений переменных данная формула ложна, т.е. выполняется  $((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V) = 0$ , т.е. последняя импликация в ней ложна.

2. По определению операции импликации это равносильно тому, что посылка импликации  $(Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z) = 1$  и ее следствие  $\neg Y \vee V = 0$ .

3. По определению операций конъюнкции и дизъюнкции это равносильно тому, что  $Y \Rightarrow Z = 1$ ,  $X \Rightarrow V = 1$ ,  $X \vee \neg Z = 1$  и  $\neg Y = 0$ ,  $V = 0$ .

4. Отсюда по определению операции отрицания получаем, что  $Y = 1$ .

5. Тогда по определению операции импликации из первого равенства пункта 3 следует  $Z = 1$  и из второго равенства этого пункта следует  $X = 0$ .

6. Отсюда по определению операции отрицания получаем, что  $\neg Z = 0$ .

7. Подставляя найденные значения  $X = 0$ ,  $\neg Z = 0$  в формулу  $X \vee \neg Z$ , по определению операции дизъюнкции получаем условие  $X \vee \neg Z = 0$ , которое противоречит третьему равенству пункта 3.

Значит, наше предположение неверно и данная формула является тождественно истинной.

$$((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$$

1									0		
2				1							0
3		1		1			1		0		0
4										1	
5	(1)		1	0	(0)						
6								0	(1)		
7						(0)	0	(0)			

Рис. 2: На каждом шаге алгоритма в скобках указываются значения переменных, которые были получены ранее на предыдущих шагах вычислений

## Метод семантических таблиц в алгебре высказываний

**Определение 23.** *Оценкой переменных* в формуле  $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$  называется отображение  $\alpha$  множества  $\{X_1, \dots, X_n\}$  в множество  $\{0, 1\}$ . Обозначения:  $\models_a \Phi$  и  $\not\models_a \Phi$ .

**Определение 24.** *Семантической таблицей* называется упорядоченная пара множества формул  $\langle \Gamma | \Delta \rangle$ .

Семантическая таблица  $\langle \Gamma | \Delta \rangle$  называется *выполнимой*, если существует такая оценка переменных  $a$ , что

1.  $\Phi \models_a$  для любой формулы  $\Phi \in \Gamma$
2.  $\Psi \not\models_a$  для любой формулы  $\Psi \in \Delta$

**Пример.** Семантическая таблица  $\langle \{X, \neg Y\} | \{X \Rightarrow Y\} \rangle$  выполнима для оценки  $a(X) = 1, a(Y) = 0$ .

**Пример.** Семантическая таблица  $\langle \emptyset | \{X \vee \neg X\} \rangle$  невыполнима.

**Теорема 5** (Основная теорема метода семантических таблиц). *Для любой формулы  $\Phi$  условие  $\models \Phi$  выполняется тогда и только тогда, когда семантическая таблица  $\langle \emptyset | \{\Phi\} \rangle$  невыполнима.*

**Пример.** С помощью семантических таблиц докажем тождественную истинность формулы  $\Phi = ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$ , которая называется *законом Пирса*.

Табличный вывод семантической таблицы  $T_0 = \langle \emptyset | \Phi \rangle$ :

$$\begin{array}{c}
 T_0 = \langle \emptyset | ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X \rangle \\
 \downarrow R_{\Rightarrow} \\
 \langle (X \Rightarrow Y) \Rightarrow X | X \rangle \\
 \swarrow \quad \searrow L_{\Rightarrow} \\
 \langle X | X \rangle, \langle \emptyset | X \Rightarrow Y, X \rangle \\
 \downarrow R_{\Rightarrow} \\
 \langle X | Y, X \rangle
 \end{array}$$

(Про эти штуки есть еще немного в конспектах, но в целом зачем?..)



- 7    Метод резолюций в логике высказываний
- 8    Понятие предиката и его множества истинности. Перенесение на предикаты логических операций
- 9    Кванторы общности и существования, их действие на предикат. Свободные и связанные переменные
- 10   Формулы алгебры предикатов
- 11   Интерпретация формул алгебры предикатов
- 12   Логическое равенство формул алгебры предикатов. Свойства логических операций над предикатами
- 13   Логическое следование формул алгебры предикатов
- 14   Предваренная нормальная форма (ПНФ) формул алгебры предикатов
- 15   Скулемовская стандартная форма (ССФ) формул алгебры предикатов
- 16   Сведение проблемы общезначимости формул к проблеме противоречивости систем дизъюнктов
- 17   Унификация формул
- 18   Метод резолюций в логике предикатов
- 19   Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Доказуемость формул