Билеты к экзамену

Предмет: Математическая логика

Содержание

1 Логические операции над высказываниями

Логика высказываний

Определение 1. *Высказыванием* называется повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Обозначаются высказывания: A, B, C...

Определение 2. *Истинностное значение* высказывания A обозначается символом $\lambda(A)$ и определяется по формуле:
$\lambda(A) = 1$, если высказывание A истинно
$\lambda(A) = 0$, если высказывание A ложно

Алгебра высказываний

Из высказываний путем соединения их с помощью связок «не», «и», «или», «следует», «равносильно» можно составлять новые, более сложные высказывания.

При этом главное внимание уделяется функциональным зависимостям истинностных значений высказываний, в которых истинность или ложность новых высказываний определяется истинностью или ложностью составляющих их высказываний.

Определение 3. *Отрицанием высказывания A* называется высказывание $\neg A$ (читается «не »), которое истинно в том и только том случае, если высказывание A ложно.

Таблица истинностных значений операции отрицания:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Определение 4. *Конъюнкцией высказываний A, B* называется высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно в том и только том случае, если оба высказывания A, B истинны.

Определение 5. *Дизъюнкцией высказываний A, B* называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое ложно в том и только том случае, если оба высказывания A, B ложны.

Определение 6. *Импликацией высказываний A, B* называется высказывание $A \Rightarrow B$ (читается «A влечет B»), которое ложно в том и только том случае, если высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

Определение 7. *Эквивалентностью высказываний A, B* называется высказывание $A \Leftrightarrow B$ (читается «A равносильно B»), которое истинно в том и только том случае, если высказывания A и B имеют одинаковое истинностное значение.

Таблица истинностных значений логических операций:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Определение 8. *Алгеброй высказываний* называется множество всех высказываний $\mathscr{P}$ с логическими операциями $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

2 Формулы и истинностные значения формул

Формулы алгебры высказываний

Определение 9. Свойства алгебры вказываний $\mathscr{P}$ описываются с помощью формул, которые строятся из переменных символов с помощью знаков логических операций. Такие формулы принято называть также *пропозициональными формулами.*

Определение 10. Символы логических операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, которые называются *пропозициональными связками.*

Определение 11. Переменные символы $X, Y, Z, \ldots$, которые используются для обозначения высказываний, называются *пропозициональными переменными.*

Определение 12. *Формулы* алгебры высказываний индуктивно определяются по правилам:

1. Каждая пропозициональная переменная является формулой
2. Если Φ, Ψ формулы, то формулами являются также выражения $(\neg\Phi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \Rightarrow \Psi)$, $(\Phi \Leftrightarrow \Psi)$

Множество всех формул алгебры высказываний обозначим $\mathcal{F}_{AB}$

Для упрощения записи формул скобки в них по возможности опускаются с учетом следующего **приоритета выполнения операций:** $\neg, \wedge, \vee$ и остальные.

Так, формула $((((\neg X) \wedge (\neg Y)) \vee (\neg(\neg Z))) \Rightarrow (X \vee (\neg Y)))$ сокращенно записывается в виде $\neg X \wedge Y \vee \neg\neg Z \Rightarrow X \vee \neg Y$.

Если в формулу Φ входят переменные $X_1, \ldots, X_n$, то записывают $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$.

Из индуктивного опеределения формул следует, что если в формулу Φ вместо переменных $X_1, \ldots, X_n$ подставить произвольные конкретные высказывания $A_1, \ldots, A_n$, то получится некоторое сложное высказывание $\Phi(A_1, \ldots, A_n)$.

Истинностное значение высказывания $\lambda(\Phi(A_1, \ldots, A_n))$ определяется истинностными значениями исходных высказываний $\lambda(A_1), \ldots, \lambda(A_n)$ согласно таблицам истинностных значений логических операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Формула Φ определяет функцию n переменных F_Φ, которая каждому упорядоченному набору $(\lambda(X_1), \dots, \lambda(X_n))$ n элементов множества 0,1 ставит в соответствие элемент $\lambda(\Phi(X_1, \dots, X_n))$ этого же множества.

Определение 13. Функция F_Φ называется *истинностной функцией формулы* Φ и графически представляется *истинностной таблицей.*

Такая таблица содержит 2^n строк и имеет ожно из возможных 2^{2^n} возможных распределений 0 и 1 в последнем столбце.

Пример. Составим таблицу истинности для формулы
$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

Таблица показывает, что какого бы истинностного значения высказывания ни подставлялось в данную формулу вместо пропозициональных переменных P и Q, формула всегда превращается в истинностное высказывание.

Определение 14. Формула Φ называется:

- *Тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается $\models \Phi$, если ее истинностная функция тождественно равна 1
- *Противоречием* (или *тождественно ложной формулой*), если ее истинностная функция тождественно равна 0
- *Выполнимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 0
- *Опровержимой*, если ее истинностная функция не равна тождественно 1

3 Тавтологии. Методы доказательства тавтологий

Тавтологии

Определение 15. Формула Φ называется *тавтологией* (или *тождественно истинной формулой*) и обозначается $\vDash \Phi$, если ее истинностная функция тождественно равна 1.

Тавтологии являются общими схемами построения истинных высказываний и в этом смысле выражают некоторые *логические законы.*

Примерами таких законов являются:
$\vDash X \vee \neg X$ — закон исключенного третьего
$\vDash \neg\neg X \Leftrightarrow X$ — закон двойного отрицания
$\vDash \neg(X \wedge \neg X)$ — закон противоречия
$\vDash (X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$ — закон контрапозиции

Методы доказательства тавтологий

Новые тавтологии можно получить с помощью следующего правила:

Теорема 1 (Правило подстановки)**.** *Если* $\vDash \Phi(X_1, \dots, X_n)$*, то для любых формул* $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ *тавтологией является формула* $\Phi(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$*.*

!Дописать методы проверки тавтологии

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Ф:

1.Рассмотреть формулу $\Psi = \neg\Phi$ и найти ее КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$.
2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.
3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.

4 Логическая равносильность формул. Равносильные преобразования формул

Логическая равносильность формул

Определение 16. Формулы Φ, Ψ называются *логически равносильными* (или просто *равносильными*), если они принимают одинаковые логические значения при любых истинностных значениях их переменных.

Это равносильно условию $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Определение 17. Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi = \Psi$, или $\Phi \cong \Psi$.

Такие выражения называют *логическими равенствами* или просто *равенствами* формул.

Лемма (1). *Справедливы следующие равенства формул:*

1. *Свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции:*

   $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$

   $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$

2. *Свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции:*

   $X \vee Y = Y \vee X$

   $X \wedge Y = Y \wedge X$

3. *Свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции:*

   $X \vee X = X$

   $X \wedge X = X$

4. *Законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции:*

   $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

   $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

5. *Законы де Моргана:*

   $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$

   $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$

6. *Законы поглощения:*

   $(X \wedge Y) \vee X = X$

   $(X \vee Y) \wedge X = X$

7. *Закон двойного отрицания:*

   $\neg\neg X = X$

8. *Взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией:*

   $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$

   $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$

9. *Взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией:*

   $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$

   $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$

Равносильные преобразования формул

Лемма (Правило замены)**.** *Если формулы Φ, Φ' равносильны, то для любой формулы $\Psi(X)$, содержащей переменную X, выполняется равенство:* $\Psi(\Phi) = \Psi(\Phi')$.

Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ' получается формула $\Psi = \Psi(\Phi')$, равносильная исходной формуле Ψ.

Такие переходы называются *равносильными преобразованиями формул.*

Пример. Формула $\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ с помощью равенств 5, 7, 8 из леммы 1 равносильно преобразовывается следующим образом:

$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z = \neg(X \Rightarrow Y) \vee Z = \neg(\neg(X \wedge \neg Y)) \vee Z = (X \wedge \neg Y) \vee Z$.

5 Нормальные формы для формул алгебры высказываний

По определению формулы Φ, Ψ равносильны, значит их истинностные функции F_Φ, F_Ψ совпадают.

Следовательно, отношение равносильности формул $\cong$ является отношением эквивалентности на множестве всех формул $\mathcal{F}_{AB}$, которое разбивает это множество на классы эквивалентности $[\Phi] = \{\Psi \in \mathcal{F}_{AB} : \Phi \cong \Psi\}$, определяемые формулами $\Phi \in \mathcal{F}_{AB}$.

Из основных равенств следует, что для каждой формулы $\Phi \in \mathcal{F}_{AB}$ можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических оераций $\neg, \wedge, \vee$.

Определение 18. *Литерой* называется пропозициональная переменная X или ее отрицание $\neg X$. Обозначение: X^α, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

$$X^\alpha \begin{cases} X^1 = X, & \text{если } \alpha = 1 \\ X^0 = \neg X, & \text{если } \alpha = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Определение 19. *Конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер.

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Определение 20. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно, ДНФ) называется *совершенной*, если все ее дизъюнкты (соответственно, конъюнкты) содержат все пропозициональные переменные расматриваемой формулы.

Теорема 2. *Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.*

Алгоритм приведения формулы Φ к ДНФ (соответсвенно, КНФ):

1. Выражаем все входящие в формулу Φ импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание

2. Согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания

3. Согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций)

Теорема 3. *Любая выполнимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$ равносильна формуле вида*

$$\bigvee_{(a_1,\ldots,a_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем упорядоченным наборам
$(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$*, удовлетворяющим условию* $\mathcal{F}_\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* формулы Φ.

Теорема 4. *Любая опровержимая формула $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$ равносильна формуле вида*

$$\bigwedge_{(a_1,\ldots,a_n)} (X_1^{1-\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{1-\alpha_n}),$$

где конъюнкция берется по всем упорядоченным наборам
$(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$*, удовлетворяющим условию* $\mathcal{F}_\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)* формулы Φ.

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ формулы $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$:

1. Составить истинностную таблицу формулы Φ и добавить два столбца «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты»

2. Если при значениях $\lambda(X_1) = k_1, \ldots, \lambda(X_n) = k_n$ значение $\lambda(\Phi(X_1, \ldots, X_n))$ формулы Φ равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт $X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом $X_i^1 = X_i$ и $X_i^0 = \neg X_i$.

3. Если при значениях $\lambda(X_1) = m_1, \ldots, \lambda(X_n) = m_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1, \ldots, X_n))$ формулы Φ равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт $X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}$ и в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк.

X_1	$\ldots$	X_n	$\ldots$	$\Phi(X_1, \ldots, X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
k_1	$\ldots$	k_n	$\ldots$	1	$X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}$	—
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m_1	$\ldots$	m_n	$\ldots$	0	—	$X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

4. СДНФ формулы Φ равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов: $(X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}) \vee \ldots$

5. СКНФ формулы Φ равна конъюнкции полученных совершенных дизъюнктов: $(X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}) \wedge \ldots$

Пример. Найдем СДНФ и СКНФ для формулы
$\Phi(X, Y, Z) = \neg(X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \vee Z)$

X	Y	Z	$\Phi(X, Y, Z)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
0	0	0	1	$X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0$	—
0	0	1	0	—	$X^{1-0} \vee Y^{1-0} \vee Z^{1-1}$
0	1	0	1	$X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	—
0	1	1	0	—	$X^1 \vee Y^0 \vee Z^0$
1	0	0	0	—	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^1$
1	0	1	0	—	$X^0 \vee Y^1 \vee Z^0$
1	1	0	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^0$	—
1	1	1	1	$X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1$	—

СДНФ $\Phi = (\neg X \wedge \neg Y \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$
СКНФ $\Phi = (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg Z)$

6 Логическое следование формул. Методы доказательства логического следования формул

Логическое следование формул

Определение 21. Формула Φ называется *логическим следованием формул* $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1, \ldots, X_n$ конкретных высказываний $A_1, \ldots, A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1, \ldots, A_n), \ldots, \Phi_m(A_1, \ldots, A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1, \ldots, A_n)$.

Символическое обозначение $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$ — называется *логическим следованием.*

Формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называются *посылками* и формула Φ — *следствием* логического следования $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$.

Пример. Докажем логическое следование:

$F \Rightarrow G$, $K \Rightarrow \neg H$, $H \vee \neg G \models F \Rightarrow \neg K$.

Предположим противное:

1. $F \Rightarrow G = 1$
2. $K \Rightarrow \neg H = 1$
3. $H \vee \neg G = 1$
4. $F \Rightarrow \neg K = 0$

Из условия 4: $F = 1, \neg K = 0, K = 1$.

Из условия 1: $G = 1$, из условия 2: $\neg H = 1, H = 0$.

Значит, $H \vee \neg G = 0$, что противоречит условию 3.

Значит, предположение неверно и логическое следование выполняется.

Основные правила логического следования

1. *Правило отделения* (или правило *модус поненс* - от лат. modus ponens) $\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi$

2. *Правило контрапозиции* $\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi$

3. *Правило цепного заключения* $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3$

4. *Правило перестановки посылок* $\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3)$

Определение 22. Множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ.

Символически это записывается $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models$.

В противном случае множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *выполнимым*.

Лемма (Критерии логического следования)**.** *Условие* $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$ *равносильно каждому из следующих условий:*

1. $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$
2. $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$
3. $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$

В частности, $\Phi \models \Psi$ *равносильно* $\models \Phi \Rightarrow \Psi$*. Отсюда также следует, что* $\Phi = \Psi$ *равносильно тому, что* $\Phi \models \Psi$ *и* $\Psi \models \Phi$*.*

Вывод: следующие задачи равносильны:

1. Проверка тождественной истинности формул
2. Проверка логического следования формул
3. Проверка тождественной ложности формул
4. Проверка противоречивости множества формул

Методы проверки тождественной истинности формул

Основные методы проверки тождественной истинности формул:

1. Прямой метод
2. Алгебраический метод
3. Алгоритм Квайна
4. Алгоритм редукции
5. Метод семантических таблиц
6. Метод резолюций

Алгебраический метод

Алгебраический метод преобразования формулы $\Phi = \Phi(X_1, \ldots, X_n)$ с помощью равносильных преобразований в тождественно истинную формулу 1.

Пример. С помощью равносильных преобразований выяснить, является ли тождественно истинной формула

$\Phi = ((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$
$= \neg((\neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee V) \wedge (X \vee \neg Z)) \vee (\neg Y \vee V)$
$= ((Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg V) \vee (\neg X \wedge Z)) \vee \neg Y \vee V$
$= ((Y \wedge \neg Z) \vee \neg Y) \vee ((X \wedge \neg V) \vee V) \vee (\neg X \wedge Z)$
$= ((Y \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee \neg Y)) \vee ((X \vee V) \wedge (\neg V \vee V)) \vee (\neg X \wedge Z)$
$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee (X \vee (\neg X \wedge Z))$
$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee ((X \vee \neg X) \wedge (X \vee Z))$
$= \neg Z \vee \neg Y \vee V \vee X \vee Z$
$= (Z \vee \neg Z) \vee \neg Y \neg V \neg X = 1.$

Замечание. Если в процессе упрощения исследуемой формулы не получилась тождественно истинная формула 1, то следует попытаться подобрать значения пропощициональных переменных, при которых истинностное значение формулы равно 0. Это докажет, что исследуемая формула не является тождественно истинной.

Алгоритм Квайна

Алгоритм Квайна позволяет сократить полный перебор значений пропозициональных переменных за счет последовательного фиксирования возможных значений 0 или 1 пропозициональных переменных и последующего анализа истинностных значений полученных формул с меньшим числом переменных.

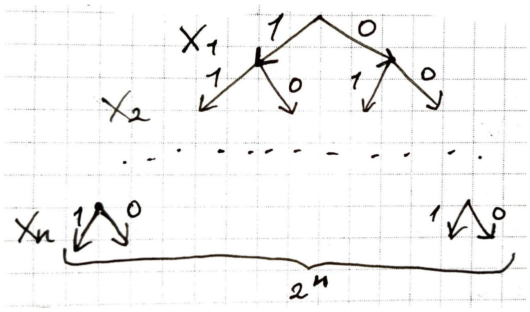


Рис. 1: Дерево перебора значений переменных

При этом используются основные тавтологии и следующие простейшие равенства:

$X \wedge 1 = X \qquad X \vee 1 = 1 \qquad 0 \Rightarrow X = 1 \qquad X \Rightarrow X = 1$
$X \wedge 0 = 0 \qquad X \vee 0 = X \qquad 1 \Rightarrow X = X \qquad X \Leftrightarrow X = 1$
$X \wedge \neg X = 0 \quad X \vee \neg X = 1 \qquad X \Rightarrow 1 = 1 \qquad X \Rightarrow 0 = \neg X$

Пример. С помощью алгоритма Квайна выясните, является ли тождественно истинной формула $((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$.

1. При фиксировании в исходной формуле $X = 1$ получаем
$((Y \Rightarrow Z) \wedge (1 \Rightarrow V) \wedge (1 \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$, что равносильно
$((Y \Rightarrow Z) \wedge V) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$.
Положим здесь $Y = 1$: $((1 \Rightarrow Z) \wedge V) \Rightarrow (\neg 1 \vee V)$,
что равносильно $(Z \wedge V) \Rightarrow V$.
Отсюда при $Z = 1$ получаем $(1 \wedge V) \Rightarrow V = V \Rightarrow V = 1$
и при $Z = 0$ получаем $(0 \wedge V) \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V = 1$.
Положим теперь $Y = 0$: $((0 \Rightarrow Z) \wedge V) \Rightarrow (\neg 0 \vee V) = V \Rightarrow 1 = 1$.

2. При фиксированном в исходной формуле $X = 0$ получаем
$((Y \Rightarrow Z) \wedge (0 \Rightarrow V) \wedge (0 \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$, что равносильно
$((Y \Rightarrow Z) \wedge \neg Z) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$.
Положим здесь $Y = 1$: $((1 \Rightarrow Z) \wedge \neg Z) \Rightarrow (\neg 1 \vee V)$, что равносильно
$(Z \wedge \neg Z) \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V = 1$.
Положим теперь $Y = 0$: $((0 \Rightarrow Z) \wedge \neg Z) \Rightarrow (\neg 0 \vee V) = \neg Z \Rightarrow 1 = 1$.
Таким образом, данная формула тождественно истинная.

Т.е. метод решения заключается в том, что для входящих в формулу пропозициональных переменных последовательно фиксируются возможные значения 0 или 1, и получившиеся формулы упрощаются с помощью перечисленных ранее простейших равенств до тех пор, пока не получается тождественно истинная формула 1.

При этом порядок фиксирования значений пропозициональных переменных может быть произвольным.

Замечание. Если на каком-то заключительном шаге вычислений получается не тождественно истинная формула 1, а тождественно ложная формула 0, то исследуемая формула не является тождественной истинной — она опровергается соответствующими фиксированными значениями пропозициональных переменных.

Алгоритм редукции

Алгоритм редукции используется при доказательстве тождественной истинности формулы с большим количеством импликаций.

Идея метода основывается на получении противоречия из предположения, что истинное значение рассматриваемой формулы равно 0 при некоторых истинностных значениях ее пропозициональных переменных.

При этом используется тот факт, что импликация ложна в том и только том случае, если ее посылка истинна и заключение ложно.

Пример. С помощью алгоритма редукции выяснить, является ли тождественно истинной формула

$((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V)$.

Решение. Запишем по пунктам шаги алгоритма редукции.

1. Предположим, что при некотором наборе значений переменных данная формула ложна, т.е. выполняется $((Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z)) \Rightarrow (\neg Y \vee V) = 0$, т.е. последняя импликация в ней ложна.

2. По определению операции импликации это равносильно тому, что посылка импликации $(Y \Rightarrow Z) \wedge (X \Rightarrow V) \wedge (X \vee \neg Z) = 1$ и ее следствие $\neg Y \vee V = 0$.

3. По определению операций конъюнкции и дизъюнкции это равносильно тому, что $Y \Rightarrow Z = 1$, $X \Rightarrow V = 1$, $X \vee \neg Z = 1$ и $\neg Y = 0$, $V = 0$.

4. Отсюда по определению операции отрицания получаем, что $Y = 1$.

5. Тогда по определению операции импликации из первого равенства пункта 3 следует $Z = 1$ и из второго равенства этого пункта следует $X = 0$.

6. Отсюда по определению операции отрицания получаем, что $\neg Z = 0$.

7. Подставляя найденные значения $X = 0, \neg Z = 0$ в формулу $X \vee \neg Z$, по определению операции дизъюнкции получаем условие $X \vee \neg Z = 0$, которое противоречит третьему равенству пункта 3.

Значит, наше предположение неверно и данная формула является тождественно истинной.

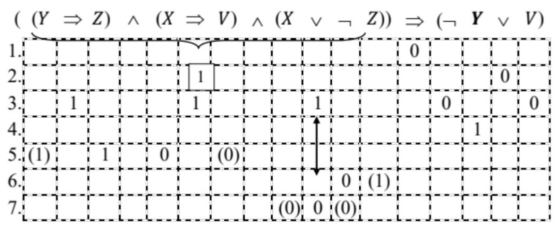


Рис. 2: На каждом шаге алгоритма в скобках указываются значения переменных, которые были получены ранее на предыдущих шагах вычислений

Метод семантических таблиц в алгебре высказываний

Определение 23. *Оценкой переменных* в формуле $\Phi = \Phi(X_1, \dots, X_n)$ называется отображение α множества $\{X_1, \dots, X_n\}$ в множестве $\{0, 1\}$. Обозначения: $\models_a \Phi$ и $\not\models_a \Phi$.

Определение 24. *Семантической таблицей* называется упорядоченная пара множества формул $\langle \Gamma | \Delta \rangle$.

Семантическая таблица $\langle \Gamma | \Delta \rangle$ называется *выполнимой*, если существует такая оценка переменных a, что

1. $\Phi \models_a$ для любой формулы $\Phi \in \Gamma$
2. $\Psi \not\models_a$ для любой формулы $\Psi \in \Delta$

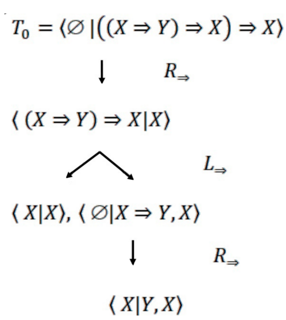
Пример. Семантическая таблица $\langle \{X, \neg Y\} | \{X \Rightarrow Y\} \rangle$ выполнима для оценки $a(X) = 1, a(Y) = 0$.

Пример. Семантическая таблица $\langle \varnothing | \{X \vee \neg X\} \rangle$ невыполнима.

Теорема 5 (Основная теорема метода семантических таблиц)**.** *Для любой формулы Φ условие $\models \Phi$ выполняется тогда и только тогда, когда семантическая таблица $\langle \varnothing | \{\Phi\} \rangle$ невыполнима.*

Пример. С помощью семантических таблиц докажем тождественную истинность формулы $\Phi = ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$, которая называется *законом Пирса.*

Табличный вывод семантической таблицы $T_0 = \langle \varnothing | \Phi \rangle$:



(Про эти штуки есть еще немного в конспектах, но в целом зачем?..)

7 Метод резолюций в логике высказываний

Метод резолюций в алгебре высказываний

Следующие задачи равносильны:

1. Проверка тождественной истинности формул
2. Проверка логического следования формул
3. Проверка тождественной ложности формул
4. Проверка противоречивости множества формул
5. Проверка противоречивости множества дизъюнктов

Определение 25. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резовльвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$.

По определению $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

Свойство. Если $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$ выполнимы, то выполнима $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Определение 26. *Резолютивным выводом формулы* Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, что:

1. $\Phi_n = \Phi$
2. Каждая из формул Φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резолвьентой $\Phi_i = \mathrm{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \leq j,\ k \leq i$.

Теорема 6 (Основная теорема метода резолюций)**.** *Множество дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.*

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models,$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул). *Пусть для формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ*
$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$.

Тогда логическое следование $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Phi$ равносильно существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \ldots \Phi_n \models \Phi$:

1. Составить формулу $\Psi = \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ и найти ее КНФ
   $\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$.

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:
$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), (\neg V) \models X \vee \neg Y$

Данное соотношение равносильно условию
$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), (\neg V), \neg(X \vee \neg Y) \models$,
т.е. условию противоречивости формулы
$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge (\neg V) \wedge \neg(X \vee \neg Y)$.

Найдем КНФ этой формулы: $\Psi = (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) = (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y$.

Рассмотрим множество дизъюнктов
$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\}$. Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z$

$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W$

$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V$

$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V$

$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4 \neg V) = 0$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы Ψ противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Ф:

1.Рассмотреть формулу $\Psi = \neg\Phi$ и найти ее КНФ $\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$.
2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.
3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверить тождественную истинность формулы

$$\Phi = (X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)$$

Решение. По критерию логического следования тавтологии $\models \Phi$ равносильности противоречивости формулы:

$$\Psi = \neg\Phi = \neg((X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow \neg X)).$$

Найдем КНФ этой формулы

$$\Psi = \neg(\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg(\neg X \vee \neg Y) \vee \neg X)) = (\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge X.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ:

$$S = \{\neg X \vee Y, \neg X \vee \neg Y, X\}$$

.

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:
$\Phi_1 = \neg X \vee Y$
$\Phi_2 = \neg X \vee \neg Y$
$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Y(\Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{Res}_Y(\neg \vee Y, \neg X \vee \neg Y) = \neg X \vee \neg X = \neg X$
$\Phi_4 = X$
$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_3, \Phi_4) = \mathrm{Res}(\neg X, X) = 0$

Таким образом, из множества дизъюнктов S резолютивно выводится значение 0 и по основной теореме множество S противоречиво.

Следовательно, формула Ψ противоречива и выполняется $\models \Phi$.

8 Понятие предиката и его множества истинности. Перенесение на предикаты логических операций

Логика предикатов. Понятие предиката.

Выразительные средства алгебры высказываний недостаточны для описания утверждений со сложной логической структурой субъектно-предикатных рассуждений, в которых используются не только понятие *субъекта* (как объекта, о котором говорится в рассуждении), но и понятие *предиката* (как выраженного сказуемыми свойства объектов рассуждения).

Определение 27. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные $x_1, \ldots, x_n$, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Обозначаются предикаты $P, Q, \ldots$

Определение 28. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ называются *предметными* или *индивидуальными переменными.* Число предметных переменных в предикате называется его *арностью* или *местностью.*

Более точно, предикат P с n предметными переменными называется *n-арным* или *n-местным предикатом* и обозначается $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ его n предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1, \ldots, a_n))$.

Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как функцию со значениями в множестве $\{0, 1\}$.

Рассматривая такую функцию на некотором фиксированном множестве M допустимых значений предметных переменных предиката, получим $n-$арное отношение на множестве M, состоящее из всех таких упорядоченных наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ n элементов $a_1, \ldots, a_n \in M$, для которых $P(a_1, \ldots, a_n)$ является истинным высказыванием.

Такое $n-$арное отношение обозначается символом P^+ и называется *множеством истинности* предиката P на множестве M.

Функция $P : M^n \to \{0, 1\}$ определяется двумя множествами:

1. *Множество истинности:*
$$P^+ = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 1\}$$

2. *Множество ложности:*
$$P^- = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n : \lambda(P(a_1, \dots, a_n)) = 0\}$$

Пример. Пусть $M-$ множество студентов вуза.

Предикаты:

$P(x)-$ «x есть студент 1-ой группы»,

$Q(x)-$ «студент x есть отличник».

Множеством истинности P^+ на множестве M является множество студентов 1-ой группы вуза и множеством истинности Q^+ на множестве M является множество всех отличников вуза.

Пример. Пусть $M-$ множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Предикаты:

$P(x)-$ утверждение «x>0»,

$Q(x)-$ утверждение «$(x-1)(x^2-2)=0$».

Множеством истинности предиката P на множестве $M = \mathbb{R}$ является множество всех положительных вещественных чисел и множеством истинности предиката Q на множестве $M = \mathbb{R}$ является множество $Q^+ = \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Определение 29. Предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ на множестве M называется:

- *Тождественно истинным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно, т.е. $P^+ = M^n$.
- *Тождественно ложным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ ложно, т.е. $P^+ = \varnothing$.
- *Выполнимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно, т.е. $P^+ \neq \varnothing$.
- *Опровержимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ ложно, т.е. $P^+ \neq M^n$.

Алгебра предикатов

Определение 30. *Отрицание $n-$местного предиката* $P(x_1, \dots, x_n)$ определяется как $n-$местный предикат $\neg P$, который при подстановке значений $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ превращается в высказывание $\neg P(a_1, \dots, a_n)$, являющееся отрицанием высказывания $P(a_1, \dots, a_n)$.

Определение 31. *Конъюнкция $n-$местных предикатов* $P(x_1, \dots, x_n)$ *и* $Q(x_1, \dots, x_n)$ определяется как $n-$местный предикат $P \wedge Q$, который при подстановке значений $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ превращается в высказывание $P \wedge Q(a_1, \dots, a_n)$, являющееся конъюнкцией высказываний $P(a_1, \dots, a_n)$ и $Q(a_1, \dots, a_n)$.

Для любого множества M допустимых значений предметных переменных предикатов множества истинности предикатов взаимосвязаны с логическими операциями по следующим формулам:
$(\neg P)^+ = M^n \backslash P+$
$(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+$
$(P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+$
$(P \Rightarrow Q)^+ = (\neg P)^+ \cup Q^+$
$(P \Leftrightarrow Q)^+ = (P \Rightarrow Q)^+ \cap (Q \Rightarrow P)^+$

Пример. Пусть на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ предикат $P(x)$ выражается неравенством $f(x) \leq 0$, и предикат $Q(x)$ выражается неравенством $g(x) \leq 0$.

Тогда система неравенств $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$ определяется как конъюнкция предикатов $P \wedge Q$ и, значит, имеет множество решений $(P \cap Q)^+ = P^+ \cap Q^+$, равное пересечению множеств решений неравенств системы.

Совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0 \end{array}\right.$ определяется как дизъюнкция предикатов $P \vee Q$ и, значит, имеет множество решений $(P \cup Q)^+ = P^+ \cup Q^+$, равное объединению множеств решений неравенств системы.

9 Кванторы общности и существования, их действие на предикат. Свободные и связанные переменные

Определение 32. Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной x_1 на $n-$местный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется $(n-1)-$местный предикат $(\forall x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который зависит от переменных $x_2, \ldots, x_n$ и который при значениях $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при любых значениях $x_1 = a_1 \in M$ высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истинно.

Определение 33. Результатом действия квантора существования $(\exists x_1)$ по переменной x_1 на $n-$местный предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется $(n-1)-$местный предикат $(\exists x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который зависит от переменных $x_2, \ldots, x_n$ и который при значениях $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при некотором значении $x_1 = a_1 \in M$ высказывание $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истинно.

Определение 34. *Квантор существования и единственности* $(\exists! x)$ определяется для сокращения записи следующей формулы $(\exists! x)P(x) = (\exists x)(P(x) \wedge ((\forall y)(P(y) \Rightarrow x = y)))$.

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists! x)P(x)$ и читается «существует и единственен x, для которого выполняется $P(x)$».

Определение 35. *Ограниченный квантор существования* $\exists Q(x)$ определяется как сокращение записи следующей формулы $(\exists x)(Q(x) \wedge \ldots)$.

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists Q(x))P(x) = (\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$ и читается «существует x, удовлетворяющий $Q(x)$, для которого выполняется $P(x)$».

Определение 36. *Ограниченный квантор общности* $\forall Q(x)$ определяется как сокращение записи следующей формулы $(\forall x)(Q(x) \Rightarrow \ldots)$.

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\forall Q(x))P(x) = (\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x))$ и читается «для всех x, удовлетворяющих $Q(x)$, выполняется $P(x)$».

Определение 37. Если в формулу Φ входят переменные $x_1, \ldots, x_n$, то записывают $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$. Вхождение предметной переменной x в формулу Φ называется *связным*, если она находится в области действия одного из кванторов по этой переменной; в противном случае — *свободным*.

10 Формулы алгебры предикатов

Определение 38. *Алгеброй предикатов* называется множество всех предикатов $\mathscr{P}$ с логическими операциями $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и операциями квантификации $(\forall x), (\exists x)$ для всех предметныъ переменных x.

Свойства алгебры предикатов $\mathscr{P}$ описываются с помощью специальных формул, которые строятся из символов предикатов и предметных переменных с помощью специальных вспомогательных символов — скобок и знаков логических операций над предикатами.

Алфавит алгебры предикатов состоит из следующих символов:

1. *Предметные переменные* $x_1, x_2, \ldots$, которые используются для обозначения элементов множества допустимых значений

2. $n-$местные *предикатные символы* $P, Q, \ldots$, которые используются для обозначения $n-$местных предикатов на множестве допустимых значений

3. Символы логических операций $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$

4. Вспомогательные символы $(,)$ и другие

Определение 39. *Формулы* алгебры предикатов определяются по индукции следующим образом:

1. Для любого $n-$местного предикатного символа P и любых n предметных переменных $x_1, \ldots, x_n$ выражение $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть формула, которая называется *элементарной* (или *атомарной*) *формулой.*

2. Если $\Phi, \Psi-$ формулы, то формулами являются также выражения $(\neg\Phi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \Rightarrow \Psi)$, $(\Phi \Leftrightarrow \Psi)$.

3. Если $\Phi-$ формула и $x-$ предметная переменная, то формулами являются такжее выражения $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$; при этом переменная x и формула Φ называются *областью действия* соответствующего *квантора.*

Определение 40. Если в формулу Φ входят переменные $x_1, \ldots, x_n$, то записывают $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Вхождение предметной переменной x в формулу Φ называется *связным*, если она находится в области действия одного из кванторов по этой переменной; в противном случае вхождение предметной переменной x в формулу Φ называется *свободным.*

Формула без свободных вхождений переменных называется *замкнутой формулой* или *предложением.*

Фактически формуле определяет предикат с переменными, которые входят в формулу свободно.

11 Интерпретация формул алгебры предикатов

Интерпретации формул алгебры предикатов

Определение 41. *Область интерпретации* — непустое множество M, которое является областью возможных значений всех предметных переменных.

$n-$местным предикатным символам P присваиваются конкретные значения P_M $n-$местных предикатов на множестве M.

Соответствие $\beta : P \mapsto P_M$ называется *интерпретацией предикатных символов.*

Область интерпретации M вместе с интерпретацией предикатных символов β называется *интерпретацией формул алгебры предикатов* и обозначается (M, β) или просто M.

Определение 42. При наличии интепретации M конкретные значения предметным переменным формул алгебры предикатов присваиваются с помощью отображения a множества всех предметных переменных X в область интерпретации M.

Такие отображения называются *оценками* предметных переменных.

Определение 43. *Выполнимость формулы* Φ в интерпретации M при оценке a обозначается $M \models_a \Phi$ — читается «формула Φ истинна в интерпретации M при оценке a» и определяется следующим образом:

1. Если $\Phi = P(x_1, \dots, x_n)$ для $n-$местного предикатного символа P и предметных переменных $x_1, \dots, x_n$, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда высказывание $P_M(a(x_1), \dots, a(x_n))$ истинно.

2. Если $\Phi = \neg\Psi$ для формулы Ψ, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models_a \Psi$.

3. Если $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_a \Phi_1$ и $M \models_a \Phi_2$.

4. Если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ для формул Phi_1, Phi_2, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_a \Phi_1$ или $M \models_a \Phi_2$.

5. Если $\Phi = \Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда неверно, что $M \models_a \Phi_1$ и $M \models_a \neg\Phi_2$.

6. Если $\Phi = \Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ для формул Φ_1, Φ_2, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_a \Phi_1$, $M \models_a \Phi_2$ одновременно верны или нет.

7. Если $\Phi = (\forall x)\Psi$ для некоторой формулы Ψ, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_{a'} \Psi$ для всех оценок a', отличающихся от оценки a возможно только на элементе x.

8. Если $\Phi = (\exists x)\Psi$ для некоторой формулы Ψ, то $M \models_a \Phi$ тогда и только тогда, когда $M \models_{a'} \Psi$ для некоторой оценки a', отличающейся от оценки a возможно только на элементе x.

Пример. $M \models_a P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ равносильно истинности высказывания

$$P_M(a(x)) \Leftrightarrow Q_M(a(x))$$

Пример. $M \models_a P(x) \Rightarrow Q(x)$ равносильно истинности высказывания

$$P_M(a(x)) \Rightarrow Q_M(a(x))$$

Классификация формул алгебры предикатов

Определение 44. В интепретации M формула Φ называется:

- *Общезначимой* или (*тождественно истинной*), если $M \models_a \Phi$ при любых оценках a
- *Выполнимой*, если $M \models_a \Phi$ для некоторой оценки a
- *Опровержимой*, если для некоторой оценки a неверно, что $M \models_a \Phi$
- *Тождественно ложной*, если для любой оценки a неверно, что $M \models_a \Phi$

Формула Φ *общезначима* в интепретации M (с интерпретаций P_M $n-$арных предикатных символов P), если она превращается в тождественно истинный на множестве M предикат.

Символическая запись $M \models \Phi$.

Формула Φ в интерпретации M *выполнима, опровержима* или *тождественно ложна*, если она превращается соответственно в выполнимый, опровержимый или тождественно ложный на множестве M предикат P_M.

Пример. $M \models_a P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ равносильно $P_M(a(x)) \Leftrightarrow Q_M(a(x))$
$M \models_a P(x) \Rightarrow Q(x)$ равносильно $P_M(a(x)) \Rightarrow Q_M(a(x))$
$M \models P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ равносильно $P_M^+ = Q_M^+$
$M \models P(x) \Rightarrow Q(x)$ равносильно $P_M^+ \subset Q_M^+$
$M \models (\forall x)P(x)$ равносильно $P_M^+ = M$
$M \models (\exists x)P(x)$ равносильно $P_M^+ \neq \varnothing$

Определение 45. Формула Φ называется *тождественно истинной*, если она тождественно истинна в любой интепретации M. Такая формула называется также *общезначимой формулой*, или *тавтологией алгебры предикатов* и обозначается $\models \Phi$.

Множество всех тавтологий алгебры предикатов обозначим $\mathscr{T}_{\text{АП}}$.

Определение 46. Формула Φ называется *тождественно ложной* или *противоречием*, если она тождественно ложна в любой интерпретации M.

По определению противоречивость формулы Φ равносильна условию $\models \neg\Phi$.

Определение 47. Формула Φ называется *выполнимой*, если она выполнима хотя в одной интепретации M, которая называется *моделью* этой формулы.

Таким образом, получаем определение 44.

Замечание. Если формула Φ является предложением, то она не содержит свободныъ вхождений переменных и, следовательно, не зависит от оценок a предметных переменных в области интерпретации M.

Значит, предложение Φ в интепретации M общезначимо в том и только том случае, если оно выполнимо (т.е. выполняется хотя бы при одной оценке a предметных переменных в области интепретации M).

12 Логическое равенство формул алгебры предикатов. Свойства логических операций над предикатами

Тавтологии алгебры предикатов

Любая тавтология алгебры высказываний является тавтологией алгебры предикатов. Более того, тавтологии алгебры высказываний дают возможность легко получать тавтологии алгебры предикатов с помощью следующего очевидного результата.

Лемма (1). *Если $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ — тавтология алгебры высказываний, то для любых формул алгебры предикатов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ формула $\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является тавтологией алгебры предикатов.*

С другой стороны, в алгебре предикатов можно получить много принципиально новых тавтологий с помощью следующих свойств кванторов.

Лемма (2). *Для любых формул Φ, Ψ следующие формулы являются тавтологиями:*

1. $\neg(\forall x)\Phi \Leftrightarrow (\exists x)\neg\Phi \qquad \neg(\exists x)\Phi \Leftrightarrow (\forall x)\neg\Phi$
   $(\forall x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\exists x)\neg\Phi \qquad (\exists x)\Phi \Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg\Phi$
2. $(\forall x)(\forall y)\Phi \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\Phi$
   $(\exists x)(\forall y)\Phi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\Phi$
3. $(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi$
   $(\exists x)(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi$
4. $(\forall x)(\Phi\pi\Psi) \Leftrightarrow (\forall x)\Phi\pi\Psi$, *где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$*
5. $(\exists x)(\Phi\pi\Psi) \Leftrightarrow (\exists x)\Phi\pi\Psi$, *где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$*
   если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно, а также
6. $(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ((\exists x)\Phi \Rightarrow \Psi)$
   $(\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow ((\forall x)\Phi \Rightarrow \Psi)$
7. $(\forall x)(\Psi \Rightarrow \Phi) \Leftrightarrow (\Psi \Rightarrow (\forall x)\Phi)$
   $(\exists x)(\Psi \Rightarrow \Phi) \Leftrightarrow (\Psi \Rightarrow (\exists x)\Phi)$

Логическая равносильность формул алгебры предикатов

Определение 48. Формулы алгебры предикатов Φ, Ψ называются *логически равносильными*, если результат применения к ним логической операции эквивалентность $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ является тавтологией. В этом случае записывают $\Phi \equiv \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$. Таким образом, $\Phi = \Psi$ означает, что $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Теорема 7 (Теорема 1. Взаимосвязь между кванторами)**.** *Для любой формулы Φ справедливы равенства:*

$$(\forall x)(\forall y)\Phi = (\forall y)(\forall x)\Phi, \quad (\exists x)(\exists y)\Phi = (\exists y)(\exists x)\Phi.$$

С другой стороны, если в формулу Φ предметные переменные x, y входят свободно, то равенство $(\forall y)(\exists x)\Phi = (\exists x)(\forall y)\Phi$ не выполняется, так как в этом случае формула $(\forall y)(\exists x)\Phi \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\Phi$ не является тавтолгией

Теорема 8 (Теорема 2)**.** *Пусть формула $\Phi(x)$ не содержит предметную переменную y и формула $\Phi(y)$ получается из $\Phi(x)$ заменой всех свободных вхождений переменной x на предметную переменную y.*

Тогда формулы $(\forall x)\Phi(x)$ и $(\exists x)\Phi(x)$ будут логически равносильны соответственно формулам $(\forall y)\Phi(y)$ и $(\exists y)\Phi(y)$, т.е. выполняются равенства:

$(\forall x)\Phi(x) = (\forall y)\Phi(y)$ *и* $(\exists x)\Phi(x) = (\exists y)\Phi(y)$.

Теорема 9 (Теорема 3. Законы де Моргана для кванторов)**.** *Для любой формулы Φ справедливы следующие утверждения:*

$$\neg(\forall x)\Phi = (\exists x)\neg\Phi \qquad \neg(\exists x)\Phi = (\forall x)\neg\Phi$$
$$(\forall x)\Phi = \neg(\exists x)\neg\Phi \qquad (\exists x)\Phi = \neg(\forall x)\neg\Phi$$

Теорема 10 (Теорема 4. Взаимосвязь кванторов с конъюнкцией и дизъюнкцией)**.** *Для любых формул Φ, Ψ справедливы следующие утверждения:*

$$(\forall x)(\Phi \wedge \Psi) = (\forall x)\Phi \wedge (\forall x)\Psi$$
$$(\exists x)(\Phi \vee \Psi) = (\exists x)\Phi \vee (\exists x)\Psi$$

Если в формулу Ψ предметная переменная x не входит свободно, то справедливы такзе утверждения:

$$(\forall x)\Phi\pi\Psi = (\forall x)(\Phi\pi\Psi),$$
$$(\exists x)\Phi\pi\Psi = (\exists x)(\Phi\pi\Psi),$$

где π – символ одной из операций $\wedge, \vee$.

Теорема 11 (Теорема 6. Взаимосвязь кванторов с импликацией)**.** *Если в формулу* Φ *предметная переменная* x *не входит свободно, то для любой формулы* Ψ *справедливы следующие утверждения:*

$(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Phi \Rightarrow (\forall x)\Psi$

$(\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = \Phi \Rightarrow (\exists x)\Psi$

Если же предметная переменная x *не входит свободно в формулу* Ψ*, то для любой формулы* Φ *справедливы утверждения:*

$(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\exists x)\Phi \Rightarrow \Psi$

$(\exists x)(\Phi \Rightarrow \Psi) = (\forall x)\Phi \Rightarrow \Psi$

Следствие (Следствие 7)**.** *Любая формула* Φ *представляется в следующем виде:*

$$\Phi = (K_1 x_1) \dots (K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1, \dots, K_n$ *– некоторые кванторы и* Ψ *– формула без кванторов.*

Таким образом, каждая формула Φ *логически равносильна формуле* $(K_1 x_1) \dots (K_n x_n)\Psi$*, в которой все кванторы стоят в самом начале формулы и которая называется предваренной нормальной формой (сокращенно ПНФ) формулы* Φ*.*

13 Логическое следование формул алгебры предикатов

Логическое следование формул алгебры предикатов

С помощью логического следования формул определяются общие способы доказательства взаимосвязи между истинностными значениями утверждений посредством исследования формальной структуры этих утверждений.

Определение 49. Формула Φ алгебры предикатов называется *логическим следствием* формулы Ψ, если $\models \Psi \Rightarrow \Phi$, т.е. в любой интерпретации M формула Φ выполняется при любой оценке предметных переменных a, при которой выполняется формула Ψ.

Определение 50. Формула Φ называется *логическим следствие множества формул* Γ, если в любой интерпретации M формула Φ выполняется при любой оценке предметных переменных a, при которой выполняются все формулы из $Gamma$.

Такое логическое следствие обозначается $\Gamma \models \Phi$ и называется *логическим следованием*. При этом формулы из Γ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Gamma \models \Phi$.

В случае, когда $\Gamma = \Phi_1, \ldots, \Phi_m$ записывают $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$.

Определение 51. Множество формул $Gamma$ называется *противоречивым*, если из него логическим следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ.

Символически это записывается $\Gamma \models$.

Лемма (Лемма 1. Критерии логического следования)**.** *Условие* $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$ *равносильно каждому из следующих условий:*

- $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$
- $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$
- $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$

В частности, $\Phi \models \Psi$ *равносильно* $\models \Phi \Rightarrow \Psi$.

Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ *равносильно тому, что* $\Phi \models \Psi$ *и* $\Psi \models \Phi$.

Основные правила логического следования

1. *Правило отделения* (или правило *модус поненс* – от лат. modus ponens)
$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi$$

2. *Правило модус толенс* (от лат. modus tollens)
$$\Phi \Rightarrow \Psi, \neg\Psi \models \neg\Phi$$

3. *Правило контрапозиции*
$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi$$

4. *Правило цепного заключения*
$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3$$

14 Предваренная нормальная форма (ПНФ) формул алгебры предикатов

Определение 52. Любая формула Φ представляется в следующем виде:

$$\Phi = (K_1 x_1) \dots (K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1, \dots, K_n$ – некоторые кванторы и Ψ – формула без кванторов.

Таким образом, каждая формула Φ логически равносильна формуле $(K_1 x_1) \dots (K_n x_n)\Psi$, в которой все кванторы стоят в самом начале формулы и которая называется *предваренной* или *пренексной нормальной формой* (сокращенно ПНФ) формулы Φ.

При этом последовательность кванторов $(K_1 x_1) \dots (K_n x_n)$ называется *кванторной приставкой* и формула Ψ называется *конъюнктивным ядром* формулы Φ.

Алгоритм приведения формулы Ф к ПНФ:

1. Преобразуем формулу Φ в эквивалентную ей формулу Φ', которая не содержит импликации и эквивалентности и в которой отрицание действует только на элементарные формулы;

2. В Φ' все кванторы последовательно выносим вперед по теореме 5, при этом кванторы общности $(\forall x)$ выносятся из конъюнкции и кванторы существования $(\exists x)$ выносятся из дизъюнкции, а для выноса кванторов общности $(\forall x)$ из дизъюнкции и кванторов существования $(\exists x)$ из конъюнкции переименовываем связанные переменные x в новые переменные y, которые не входят в рассматриваемую формулу.

15 Скулемовская стандартная форма (ССФ) формул алгебры предикатов

Элиминация кванторов существования

Пусть замкнутая формула исчисления предикатов Φ находится в ПНФ:

$$\Phi = (K_1 x_1) \dots (K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1, \dots, K_n$ – некоторые кванторы и $\Psi = \Psi(x_1, \dots, x_n)$ – конъюнктивное ядро формулы Φ, т.е. бескванторная формула со свободными переменными $x_1, \dots, x_n$, находящаяся в ПНФ.

В кванторной приставку формулы Φ можно удалить любой квантор существования $(\exists x_s)$ для $1 \leq s \leq n$ по следующему правилу:

1. Если левее квантора существования $\exists x_s$ в формуле Φ не стоит никакой квантор общности, то выбираем новый предметный символ c, заменяем этим символов c все вхождения переменной x_s в конъюнктивное ядро формулы Φ и вычеркиваем $(\exists x_s)$ из кванторной приставки формулы Φ.

2. Если же левее квантора существования $\exists x_s$ стоят кванторы общности
$$(\forall x_{s_1}), \dots, (\forall x_{s_m})$$
для значений $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_m \leq s$, то выбираем новый $m-$арный функциональный символ f, заменяем все вхождения переменной x_s в конъюнктивное ядро формулы Φ выражением $f(x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$ и вычеркиваем $(\exists x_s)$ из кванторной приставки формулы Φ.

В результате такой замены всех кванторов существования в формуле Φ получим замкнутую ПНФ Φ', кванторная приставка которой получается из кванторной приставки формулы Φ удалением всех кванторов существования и которая содержит новые символы – функциональные или предметные.

При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с формулой Φ'.

Рассмотренный прием удаления квантора существования был введен Скулемом и называется *скулемизацией формул*. Вводимые в процессе скулемизации новые функциональные и предметные символы называются *функторами Скулема* или *скулемовскими функциями*.

Полученную в результате скулемизации замкнутую ПНФ Φ' называют *скулемовской стандартной формой* (сокращенно ССФ).

Теорема 12. *Любая замкнутая формула исчисления предикатов Φ эффективно преобразуется (с помощью определенного алгоритма) в логически эквавивалентную ей скулемовскую стандартную форму Φ', которая называется скулемовской стандартной формой (сокращенно ССФ) формулы Φ.*

При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с ее ССФ.

Пример. Результатом скулемизации формулы

$$(\forall x)(\exists z)(\forall y)(\exists w)((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(z) \wedge \neg R(w))$$

является следующая ССФ

$$(\forall x)(\forall y)((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(f(x)) \wedge \neg R(g(x, y))).$$

16 Сведение проблемы общезначимости формул к проблеме противоречивости систем дизъюнктов

Проблема общезначимости формул алгебры предикатов

Определение истинности формул вводится с помощью их интерпретаций в конкретных допустимых множествах M с первоначально фиксированными предикатными символами этих формул.

Так как множество таких интерпретаций бесконечно (они могут иметь как конечные, так и бесконечные области интерпретации), то в этом случае проверить тождественную истинность рассматриваемой формулы на всех таких интерпретациях практически невозможно.

Пример. Формула

$$\Phi = (\forall x)\neg P(x,x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y)$$

общезначима в любой конечной интерпретации, но не выполнима и интерпретации $M = N$ с отношением $P_M(x,y) = (x < y)$.

Альтернативный подход к проверке общезначимости формулы Φ основывается на попытке построения интерпретации, опровергающей данную формулу.

Если из предположения существования такой интерпретации получается противоречие, то формула Φ общезначима.

В противном случае на основе полученных условий для входящих в формулу Φ предикатов, алгебраических операций и констант строится интерпретация, опровергающая эту формулу Φ, и в этом случае формула Φ не является общезначимой.

Метод Эрбрана

Таким образом, доказательство тождественной истинности замкнутой формулы Φ равносильно доказательству противоречивости ее отрицания $\neg\Phi$.

Далее рассматривается задача доказательства противоречисовти замкнутой формулы Φ.

Правило 1. Противоречивость замкнутой формулы алгебры предикатов Φ равносильна противоречивости ее скулемовской стандартной формы Φ', которая является универсально замкнутой формулой

$$\Phi' = (\forall_{i_1} x_{i_1}) \ldots (\forall_{i_k} x_{i_k})\Psi$$

с конъюнктивным ядром $\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m$, где $D_1, \ldots, D_m$ – некоторые дизъюнкты литер алгебры предикатов.

С другой стороны, универсально замкнутая формула Φ' противоречива в том и только том случае, если она невыполнима.

Доказательство противоречивости (т.е. невыполнимости) замкнутой формулы Φ' сводится к доказательству невыполнимости множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

Эрбран показал, что при доказательстве невыполнимости такого множества формул S можно ограничиться рассмотрением интерпретаций в одной специальной области интерпретации, которая называется *эрбрановским универсумом* и состоит из функциональных выражений от констант из S.

Правило 2. Доказательство противоречивости формул алгебры предикатов сводится к доказательству противоречивости конечных множеств дизъюнктов S.

Для этого строится резолютивный вывод 0 из множества дизъюнктов S.

17 Унификация формул

Унификаторы формул

Пример. В алгебре высказываний контрарные литеры $X, \neg X$.

В алгебре предикатов литеры $P(a, y), \neg P(x, f(b))$ не являются контрарными, но при замене переменных $\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ a & f(b) \end{pmatrix}$ получаем контрарные литеры $P(a, f(b)), \neg P(a, f(b))$.

Определение 53. Элементы области интерпретации могут описываться не только с помощью предметных переменных, но и с помощью так называемых *термов* – специальных выражений языка, которые индуктивно определяются следующим образом:

1. Все предметные переменные и предметные символы формулы являются термами

2. Если f – $n-$арный функциональный символ формулы и $t_1, \dots, t_n$ – термы, то выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ является термом

Пусть S – множество формул алгебры предикатов.

Обозначим X_S, C_S, и F_S соответственно множества всех предметных переменных, предметныъ символов и функциональных символов, встречающихся в формулах множества S. Пусть A_S – обхединение множеств X_S и C_S с добавленным новым постоянным символом a, если $C_S = \varnothing$.

На множестве A_S определяется множество всех термов T_S множества S с функциональными символами из множества F_S. В частности, каждая переменная $x \in X_S$ является термом из множества T_S и, значит, $X_S \subset T_S$.

Определение 54. Отображения θ множества переменных X_S в множество термов T_S называются *подстановками* и обозначаются

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $t_i = \theta(x_i)$ для всех $x_i \in sup\theta$, удовлетворяющих $\theta(x_i) \neq x_i (i = \overline{1, n})$.

Композиция подстановок

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ s_1 & \dots & s_m \end{pmatrix}$$

является подстановкой

$$\theta\lambda = \begin{pmatrix} x_{i_1} & \dots & x_{i_k} \\ \lambda(t_{i_1}) & \dots & \lambda(t_{i_k}) \end{pmatrix},$$

где $x_{i_j} \in dom\theta\lambda = \theta^{-1}(dom\lambda)$ и $\lambda(t_{i_j}) \neq x_{i_j}$ для всех $j = \overline{1,k}$.

Хорошо известно, что $(\theta\lambda)\gamma = \theta(\lambda\gamma)$.

dom(от англ. domain) – область определения

Пример. Композицией подстановок

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & z \\ c & x & f(y) \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} x & y \\ f(c) & c \end{pmatrix}$$

является подстановка

$$\theta\lambda = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda(c) & \lambda(x) & \lambda(f(y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ c & f(c) & f(c) \end{pmatrix}$$

С другой стороны, композицией подстановок

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ f(y) & z \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} x & y & z \\ c & f(c) & y \end{pmatrix}$$

является подстановка

$$\theta\lambda = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda(f(y)) & \lambda(z) & \lambda(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ f(f(c)) & y \end{pmatrix}$$

Действие подстановки θ естественно продолжается на термы из T_S, атомарные формулы, встрачающиеся в формула множества S, и дизъюнкты из S.

Например, для терма $t = t(x_1, \dots, x_n)$ значение $\theta(t) = t(\theta(x_1), \dots, \theta(x_n))$.

Аналогично, для формулы D значение $\theta(D)$ – есть формула, полученная заменой всех вхождений в D термов t на термы $\theta(t)$.

Пусть $W = \{\Phi_1, \dots, \Phi_k\}$ – множество атомарнх формул, встречающихся в формулах из множества S. Подстановка θ называется *унификатором множества формул* W, если

$$\theta(\Phi_1) = \dots = \theta(\Phi_k).$$

Говорят, что множество атомарных формул W *унифицируемо*, если для него существует унификатор.

Пример. Множество формул

$$\{P(b,y), P(x,f(c))\}$$

с бинарным предикатным символом P, унарным функциональным символом f и предметными символами b, c унифицируемо, так как подстановка $\theta = \begin{pmatrix} x & y \\ b & f(c) \end{pmatrix}$ является его унификатором.

18 Метод резолюций в логике предикатов

Автоматическое доказательство теорем

Существуют алгоритмы поиска доказательства, которые для общезначимых формул подтверждают, что эти формулы общезначимы, и для необщезначимых формул в общем случае не заканчивают свою работу.

Автоматические системы построения доказательств называют *пруверами* и предъявляют им следующие требования:

1. Корректность
2. Полнота
3. Эффективность

Примером такого алгоритма является метод резолюций.

Метод резолюций в исчислении предикатов

Пусть S – множество дизъюнктов, D_1, D_2 – дизъюнкты из S, которые не имеют общих переменных, и L_1, L_2 – литеры в D_1 и D_2 соответственно.

Определение 55. Если множество формул $W = \{L_1, \neg L_2\}$ имеет унификатор θ, то дизъюнкт, получаемый из дизъюнкта $\theta(D_1) \vee \theta(D_2)$ вычеркиванием литер $\theta(L_1)$ и $\theta(L_2)$, называется *бинарной резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 и обозначается символом $\mathrm{res}(D_1, D_2)$. При этом литеры L_1 и L_2 называются *отрезаемыми литерами.*

Если $\theta(D_1) = \theta(L_1)$ и $\theta(D_2) = \theta(L_2)$, то бинарную резольвенту дизъюнктов D_1 и D_2 полагаем равной 0.

Если дизъюнкты D_1, D_2 имеют общие переменные, то, заменив в формуле D_2 эти общие переменные на переменные, не встречающиеся в D_1 и D_2, получим дизъюнкт D_2', который не имеет общих переменных с дизъюнктом D_1.

Определение 56. *Бинарной резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 называется бинарная резольвента дизъюнктов D_1 и D_2'.

Пример. Найдем бинарную резольвенту дизъюнктов $D_1 = P_1(x) \vee P_2(x)$ и $D_2 = \vee P_1(c) \vee P_3(x)$.

Так как D_1, D_2 имеют общую переменную x, то заменим в формуле D_2 переменную x на новую переменную y: $D_2' = \neg P_1(c) \vee P_3(y)$.

Выбираем в D_1 и D_2' литеры $L_1 = P_1(x)$ и $L_2 = \neg P_1(c)$ соответственно. Так как $\neg L_2 = L_2' = P_1(c)$ и формулы L_1, L_2' имеют унификатор $\sigma = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}$, то бинарная резольвента формул D_1 и D_2' получатеся из $\sigma(D_1) \vee \sigma(D_2') = P_1(c) \vee P_2(c) \vee \neg P_1(c) \vee P_3(y)$ вычеркиванием литер $P_1(c)$ и $\neg P_1(c)$.

Определение 57. *Резолютивный вывод* формулы Φ из множества дизъюнктов S есть такая конечная последовательность дизъюнктов $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$, что:

1. $\Phi_k = \Phi$
2. Каждый дизъюнкт Φ_i или принадлежит множеству S, или является резольвентой некоторых дизъюнктов, предшествующих Φ_i

Лемма. *Резолютивный вывод из множества дизъюнктов S сохраняет выполнимость формул.*

Правило 3. (Основная теорема метода рехолюций)

Множество дизъюнктов S противоречиво тогда и только тогда, когда существует резолютивный вывод нуля 0 из S.

Пример. Докажем противоречивость множества дизъюнктов $W = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_6\}$, где

$\Phi_1 = P_1(a, f(b), f(c))$
$\Phi_2 = P_2(a)$
$\Phi_3 = P_1(x, x, f(x))$
$\Phi_4 = \neg P_1(x, y, z) \vee P_3(x, z)$
$\Phi_5 = \neg P_2(x) \vee \neg P_1(y, z, u) \vee \neg P_3(x, u) \vee P_3(x, y) \vee P_3(x, z)$
$\Phi_6 = \neg P_3(a, c)$

$\Phi_7 = \mathrm{res}(\Phi_2, \Phi_5) = \mathrm{res}\ (\Phi_2, \begin{pmatrix} x & y \\ a & z \end{pmatrix}(\Phi_5)) = \neg P_1(z, z, u) \vee \neg P_3(a, u) \vee P_3(a, z)$

$\Phi_8 = \mathrm{res}(\Phi_3, \Phi_7) = \mathrm{res}(\Phi_3, \begin{pmatrix} z & u \\ x & f(x) \end{pmatrix}(\Phi_7)) = \neg P_3(a, f(x)) \vee P_3(a, x)$

$\Phi_9 = \mathrm{res}\Phi_6, \Phi_8 = \mathrm{res}(\Phi_6, \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}(\Phi_8)) = \neg P_3(a, f(c))$

$\Phi_{10} = \mathrm{res}(\Phi_4, \Phi_9) = \mathrm{res}(\begin{pmatrix} x & z \\ a & f(c) \end{pmatrix}(\Phi_4), \Phi_9) = \neg P_1(a, y, f(c))$

$\Phi_{11} = \mathrm{res}(\Phi_1, \Phi_{10}) = \mathrm{res}(\Phi_1, \begin{pmatrix} y \\ f(b) \end{pmatrix}(\Phi_{10})) = 0$

Применения метода резолюций исчисления предикатов

Следующие задачи равносильны:

1. Проверка тождественной истинности формул
2. Проверка логического следования формул
3. Проверка тождественной ложности формул
4. Проверка противоречивости множества формул
5. Проверка противоречивости множества дизъюнктов

Пример. Методом резолюций доказать общезначимость формулы

$$\Phi = ((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x)).$$

Условие $\models \Phi$ равносильно $\neg\Phi \models$.
Для формулы $\Psi = \neg\Phi$ найдем ПНФ и ССФ.
ПНФ формулы Ψ: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(z)\neg R(z))$
ССФ формулы Ψ: $(\forall x)(\forall y)((\neg P(x) \vee R(y)) \wedge P(f(x,y)) \wedge \neg R(f(x,y)))$
Для доказательства невыполнимости этой формулы достаточно доказать противоречивость множества дизъюнктов ее конъюнктивного ядра

$$S = \{\neg P(x) \vee R(y), P(f(x,y)), \neg R(f(x,y))\}$$

Резолютивный вывод формулы 0 из множества дизъюнктов S:
$\Phi_1 = \neg P(x) \vee R(y)$
$\Phi_2 = P(f(x,y))$
$\Phi_3 = \mathrm{res}(\Phi_1.\Phi_2) = \mathrm{res}(\neg P(x) \vee R(y), P(f(x,y))) = \mathrm{res}(\neg P(x) \vee R(y), P(f(x_1,y_1))) = \mathrm{res}(\theta(\neg P(x) \vee R(y)), P(f(x_1,y_1))) = \mathrm{res}(\neg P(f(x_1,y_1)) \vee R(y), P(f(x_1,y_1))) = R(y)$, где $\theta = \begin{pmatrix} x \\ f(x_1,y_1) \end{pmatrix}$
$\Phi_4 = \neg R(f(x,y))$
$\Phi_5 = \mathrm{res}(\Phi_3, \Phi_4) = \mathrm{res}(R(y), \neg R(f(x,y))) = \mathrm{res}(R(y), \neg R(f(x_1,y_1))) = \mathrm{res}(\theta(R(y)), \neg R(f(x_1,y_1))) = 0$, где $\theta = \begin{pmatrix} y \\ f(x_1,y_1) \end{pmatrix}$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Метод резолюций используется для решения следующей задачи:

Будет ли верно утверждение ψ, если известно, что верны утверждения $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$?

Здесь база знаний $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

Предложение ψ – запрос к базе знаний.

Задача (неформальная): выяснить, является ли предложение ψ следствием утверждений базы знаний Γ.

Задача (неформальная): проверить, что ψ выводится из Γ по законам формальной логики.

19 Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Доказуемость формул

Аксиоматический подход

Было определено множество формул алгебры высказываний $\mathscr{F}_{AB}$.

Затем было выделено подмножество этого множества $\mathscr{T}_{AB} \subset \mathscr{F}_{AB}$, состоящее из специальных формул – тавтологий.

1. *Семантический подход*

   При этом в основе определения тавтологии лежит понятие интерпретации формул, т.е. придание некоторого конкретного содержательного смысла входящих в них переменных. Такой подход к логическим формулам носит теоретико-множественный характер и называется *семантическим.*

2. *Синтаксический подход*

   Альтернативой семантического подхода является *синтаксический* подход, при котором логические формулы выводятся из первоначально выделенного множества формул – аксиом по определенным правилам преобразования формул логического языка без привлечения вспомогательных теоретико-множественных понятий.

3. *Аксиоматический подход*

   Построение математических теорий в виде аксиоматических теорий соответствующих формальных исчислений составляет суть *аксиоматического метода* в математике.

Простейшей аксиоматической теорией является *аксиоматическая логика высказываний*, которая строится на основе соответствующего формального исчисления, называемого *исчислением высказыываний (ИВ).*

Исчисление высказываний

Множество аксиом $Ax(\text{ИВ})$ исчисления выказываний описывается следующими тремя *схемами аксиом*:

$(A_1)(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi))$

$(A_2)((\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3)) \Rightarrow ((\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2) \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3)))$

$(A_3)((\neg\Phi \Rightarrow \neg\Psi) \Rightarrow ((\neg\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi))$

где $\Phi, \Psi, \Phi_i (i = 1, 2, 3)$ – произвольные формулы исчисления высказываний.

Исчисление высказываний имеет единственное *правило вывода*, которое называется *правилом заключения* или *правилом modus ponens (MP)* и которое для произвольных формул исчисления высказываний Φ, Ψ определяется по формуле $MP(\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi) = \Psi$.

Символически это правило вывода записывается следующей схемой:

$$MP : \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi}.$$

В основе алгоритма вывода *теорем* исчисления высказываний лежит следующее понятие.

Определение 58. Формула Φ называется *теоремой исчисления высказываний*, если найдется такая конечная последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, в которой:

1. $\Phi_n = \Phi$
2. Каждая формула $\Phi_i (1 \leq i \leq n)$ либо является аксиомой, либо получается из некоторых двух предыдущих формул $\Phi_j, \Phi_k (1 \leq j, k \leq i)$ по правилу вывода MP

Последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называется *выводом* или *доказательством* формулы Φ.

Определение 59. Вывод формулы Φ сокращенно обозначают символом $\vdash \Phi$ и говорят, что «Φ есть теорема».

Множество всех таких теорем обозначается символом Th(ИВ) и называется *теорией исчисления высказываний.*

Главной целью построения исчисления высказываний является определение такой теории Th(ИВ), которая совпадает с множеством тавтологий $\mathscr{T}_{AB}$.

20 Теорема Геделя о полноте исчисления высказываний

Лемма. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Всякая аксиома ИВ является тавтологией*
2. *Результат применения правила вывода MP к любым тавтологиям $\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi$ дает тавтологию Ψ*
3. *Всякая теорема ИВ является тавтологией, т.е. выполняется Th(ИВ)$\subset \mathscr{T}_{AB}$*

Теорма полноты ИВ

Всякая тавтология является теоремой ИВ, т.е. выполняется $\mathscr{T}_{AB} \subset Th$(ИВ) и, следовательно, $\mathscr{T}_{AB} = Th$(ИВ).

21 Непротиворечивость и разрешимость исчисления высказываний

Следствия теоремы полноты ИВ:

Теорема о непротиворечивости ИВ

В исчислении высказываний невозможно доказать никакую формулу Φ вместе с ее отрицанием $\neg\Phi$.

Теорема о разрешимости ИВ

Существует универсальная эффективная процедура (алгоритм), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИВ.

22 Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Тождественная истинность выводимых формул

Исчисление предикатов

Множество аксиом Ax(ИП) исчисления предикатов описывается пятью *схемами аксиом* – тремя определенными в предыдущем разделе, и двумя новыми схемами:

1. $(A_1)(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi))$,
2. $(A_2)((\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3)) \Rightarrow ((\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2) \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3)))$,
3. $(A_3)((\neg\Phi \Rightarrow \neg\Psi) \Rightarrow ((\neg\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi))$

   (где $\Phi, \Psi, \Phi_i (i = 1, 2, 3)$ – произвольные формулы исчисления высказываний).
4. $(A_4)(\forall x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$,
   для произвольной формулы $\Phi(x)$, в которую y не выходит связно
5. $(A_5)(\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow (\forall x)\Psi(x))$,
   для таких формул Φ, Ψ, что x в формулу Φ не выходит свободно

Исчисление предикатов имеет два *правила вывода*, которые для произвольных формул исчисления предикатов Φ, Ψ символически записываются следующими схемами:

1. Правило modus ponens (обозн. MP)
$$MP : \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi}$$
2. Правило обобщения (обозн. Gen)
$$Gen : \frac{\Phi}{(\forall x)\Phi}$$

Определение 60. Формула Φ называется *теоремой исчисления предикатов*, если найдется такая последовательность $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, в которой $\Phi_n = \Phi$ и каждая формула $\Phi_i (1 \leq i \leq n)$ либо является аксиомой, либо получается из некоторых предыдущих формул этой последовательности $\Phi_j (1 \leq j < i)$ по одному из правил вывода MP или Gen.

При этом $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называется *выводом* или *доказательством* формулы Φ.

Определение 61. Вывод формулы Ф обозначают $\vdash \Phi$ и говорят, что «Ф есть теорема». Множество всех таких теорем обозначается символом Th(ИП) и называется *теорией исчисления предикатов*.

Цель построения исчисления предикатов – определение такой теории Th(ИП), которая совпадает с множеством тавтологий $\mathscr{T}_{\text{АП}}$.

Лемма. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Всякая аксиома ИП является тавтологией*
2. *Результат применения правила вывода MP и Gen к тавтологиям является тавтологией*
3. *Любая теорема ИП является тавтологией ИП, т.е. имеет место включение Th(ИП)$\subset \mathscr{T}_{АП}$*

23 Полнота, непротиворечивость и неразрешимость исчисления предикатов

Доказательство $\mathscr{T}_{\text{АП}} \subset Th(\text{ИП})$ было получено австрийским математиком Куртом Гёделем в 1930 году.

Теорема полноты ИП

Формула исчисления предикатов в тои и только том случае является тавтологией, если она есть теорема ИП, т.е. выполняется равенство $\mathscr{T}_{\text{АП}} = Th(\text{ИП})$.

Таким образом, ИП является адекватным инструментом получения логических законов.

Теорема о непротиворечивости ИП

В исчислении предикатов невозможно доказать никакую формулу Φ вместе с ее отрицанием $\neg\Phi$.

Теорема о неразрешимости ИП

С другой стороны, английский математик Алонзо Чёрч в 1936 году доказал следующий принципиально важный результат.

Не существует универсальной эффективной процедуры (алгоритма), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИП.

24 Понятие алгоритма и основные математические модели алгоритма

Под *алгоритмом* интуитивно понимается совокупность инструкций, которые дают решение некоторой массовой задачи.

Общие свойства алгоритма:

1. Дискретность алгоритма

   Расчлененность определяемого алгоритмом вычислительного процесса на отдельные этапы. При этом каждое из действий и весь алгоритм в целом обязательно завершаются.

2. Детерминированность алгоритма

   Способ решения задачи определён однозначно в виде последовательности шагов.

3. Элементарность шагов алгоритма

4. Массовость алгоритма

   Однажды составленный алгоритм должен подходить для решения подобных задач с разными исходными данными.

Так как конструктивные объекты можно кодировать словами конечного алфавита Σ (например, состоящего из двоичных символов 0 и 1), то алгоритм моделируется устройством, перерабатывающим слова алфавита Σ.

Тезис Черча: Класс задач, решаемых в любой формальной модели алгоритма, совпадает с классом задач, которые могут быть решены интуитивно эффективными вычислениями, т.е. алгоритмическими методами.

Модели алгоритма

Алгоритмически неразрешимые задачи привели к необходимости строго математического определения алгоритма.

Основные варианты математического определения алгоритма – *модели алгоритма*:

1. *Рекурсивная функция* (Клини, 1936 г.)
2. *Машина Тьюринга* (Пост и Тьюринг, 1936 г.)
3. *Нормальный алгорифм* (Марков, 1954 г.)
4. *Формальная грамматика* (Хомский, 1957 г.)

25 Разрешимые и полуразрешимые языки. Теорема Поста

Определение 62. Определение распознавательной задачи:

Имеется множество объектов X и определенное подмножество $P \subset X$, требуется найти эффективную процедуру (т.е. алгоритм), с помощью которой для любого $x \in X$ можно определить $x \in P$ или $x \notin P$.

При этом распознавательная задача называется *алгоритмически разрешимой* или *алгоритмически неразрешимой* в зависимости от того, имеется или нет алгоритм решения этой задачи.

Конструктивные объекты любого множества X можно *кодировать* словами конечного множества Σ (например, состоящего из двоичных символов 0 и 1) с помощью взаимно-однозначного отображения $f : X \to \Sigma^*$, где Σ^* – множество всех слов над алфавитом Σ.

В результате распознавательная задача формулируется следующим универсальным образом:

Имеется множество слов $W \subset \Sigma^*$ над некоторым алфавитом Σ и определенный язык $L \subset W$, требуется найти эффективную процедуру (т.е. алгоритм), с помощью которой для любого слова $w \in W$ можно определить $w \in L$ или $w \notin L$.

Определение 63. Язык L называется *разрешимым* (или *рекурсивным*), если существует такая машина Тьюринга T, что для любого слова $w \in W$ выполняются условия:

1. Если $w \in L$, то при входе w машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $T(w) = 1$

2. Если $w \notin L$, то при входе w машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $T(w) = 0$

Такие машины соответствуют понятию «алгоритма» и применяются при решении *распознавательных задач* типа «да/нет».

Множество всех разрешимых языков будет обозначать $\mathbf{R}$ (от Recursive).

Свойства: дополнения, конечные пересечения и конечные объединения разрешимых языков являются разрешимыми языками.

Примеры разрешимых языков

- Пустой язык

- Множество всех строк

- Конечные множества
- Множество четных чисел
- Множество простых чисел
- Множество рациональных чисел, меньших числа e
- Множество n, при которых в числе π есть n девяток подряд

Определение 64. Язык L называется *полуразрешимым* или *перечислимым*, если существует такая машина Тьюринга T, что

$$L = L(T) = \{w \in \Sigma^* : T(w) = 1\},$$

т.е. при входе $w \in L$ машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $T(w) = 1$, а при входе $w \notin L$ машина Тьюринга T не дает никакого результата.

Множество всех полуразрешимых языков будем обозначать **RE** (от Recursive Enumerable).

Лемма. *Существуют неразрешимые языки, поскольку алгоритмов счетное число, а языков несчетное.*

Аналогично можно доказать, что существуют языки, не являющиеся полуразрешимыми.

Теорема 13. *Существуют полуразрешимые неразрешимые языки, т.е. полуразрешимые языки, которые не могут быть разрешимым никаким алгоритмом, т.е. выполняется свойство* $\boldsymbol{R} \not\subset \boldsymbol{RE}$.

Теорема Поста?????

(из википедии)

Теорема Поста — теорема теории вычислимости о рекурсивно перечислимых множествах.

Если множество M и его дополнение $\overline{M}$ в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ рекурсивно перечислимы, то множества M и $\overline{M}$ разрешимы.

(*Дополнением множества M до универсального множества U*, или просто *дополнением*, называется множество всех элементов множества U, не принадлежащих M. Обозн. $\overline{M}$.)

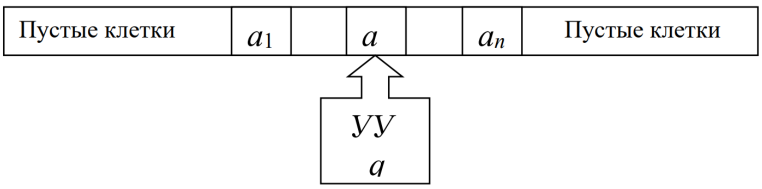
26 Машины Тьюринга и вычисляемые ими функции

Реализация модели вычислений с помощью понятия машины Тьюринга.

При построении математической модели алгоритма Пост и Тьюринг исходили из того, что все действия, которые может производить любой алгоритм, можно разложить на некоторые канонические элементарные шаги, выполняемые подходяще устроенными вычислительными машинами.

Такие машины схематически определяются следующим образом.

Схематическое описание работы машины Тьюринга



1. Символы внешнего алфавита $\Sigma = \{0, 1, \ldots\}$ записываются в ячейки конечной ленты, которая называется *внешней памятью машины*, при необходимости в ячейки записывается символ *, который называется *пустым*

2. Символы внутреннего алфавита $Q = \{q_S, q_F, \ldots\}$ обозначают состояния *управляющего устройства машины (УУ)* с *просматривающей головкой*, которая может перемещаться вдоль ленты и в каждый момент времени t просматривать одну ячейку

3. *Программа машины*

$$\Pi = \{T()\}$$

27 Распознаваемость языков машинами Тьюринга

28 Разрешимые, неразрешимые и распознавательные проблемы

Определение распознавательной задачи:

Определение 65. Важные математические проблемы имеют следующий вид.

Имеется множество объектов X и определенное подмножество $P \subset X$, требуется найти эффективную процедуру (т.е. алгоритм), с помощью которой для любого $x \in X$ можно определить за конечное число шагов, будет этот элемент обладать некоторым данным свойством P или нет (т.е. $x \in P^+$ или $x \notin P^+$).

Решением такой проблемы является построение и обоснование искомого алгоритма.

Массовые задачи – задачи распознавания и оптимизации.
Пример массовых задач:

- СУМ – задача сложения целых чисел
- ДЕЛ – задача делимости целых чисел
- НОД – задача нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел
- ВЫП (SAT) – задача выполнимости формулы алгебры высказываний
- ТЕОРЕМА (THM) – задача доказуемости формулы алгебры предикатов

Классификация распознавательных задач определяется классификацией кодирующих эти задачи языков.

Определение 66. Распознавательная задача называется *разрешимой* (соответственно, *полуразрешимой*), если разрешим (соответственно, полуразрешим) кодирующий эту задачу язык.

Пример. Распознавательная задача ВЫП (SAT) выполнимости формулы алгебры высказываний разрешима (с помощью алгоритма составления истинностных таблиц).

Пример. Распознавательная задача ТЕОРЕМА (THM) доказуемости формулы алгебры предикатов полуразрешима (с помощью понятия вывода формул), но не разрешима.

29 Временная и ленточная сложность машины Тьюринга

Сложность вычислений

В качестве модели алгоритма рассматривается машина Тьюринга T, вычисляющая числовую функцию $f(x)$.

Определение 67. *Временной сложностью* машины T называется функция $t_T(x)$, значение которой равно числу шагов работы машины T, сделанных при вычислении значения $f(x)$, если $f(x)$ определено, и $t_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Определение 68. *Ленточной сложностью* машины T называется функция $s_T(x)$, значение которой равно числу ячеек машины T, используемых при вычислении значения $f(x)$, и $s_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Определение 69. Говорят, что машина Тьюринга T имеет *полиномиальную временную сложность* $P(n) = n^k$ (или «время работы ограничено полиномом $P(n)$»), если, обрабатывая вход w длины n, T делает не более $P(n)$ переходов и останавливается независимо от того, допущен вход или нет.

30 Классы языков P и NP

Определение 70. Говорят, что язык L принадлежит *классу* $\mathscr{P}$, если он разрешим некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Определение 71. Распознавательная задача принадлежит классу $\mathscr{P}$, если ее язык принадлежит классу $\mathscr{P}$, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального алгоритма – некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Пример. Задача вычисления НОД целых чисел принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Помимо детерминированной машины Тьюринга $T = (\Sigma, Q, \delta, q_S, q_F)$ с одной программой δ в теории алгоритмов рассматриваются *недетерминированные машины Тьюринга* $T = (\Sigma, Q, \delta_1, \delta_2, q_S, q_F)$ с двумя программами δ_1, δ_2, которая на каждом шаге вычислений случайным образом выбирает одну из этих двух программ и по ней выполняет изменение своей конфигурации.

Определение 72. Язык L принадлежит классу $\mathscr{N}\mathscr{P}$, если он разрешим некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Определение 73. Распознавательная задача принадлежит классу $\mathscr{N}\mathscr{P}$, если ее язык принадлежит классу $\mathscr{N}\mathscr{P}$, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального недетерминированного алгоритма – некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Это равносильно тому, что для объектов задачи x имеется полиномиальный ограниченный эталон y, с помощью которого за полиномиальное время проверяется, что x является или нет решением данной задачи.

Пример. Распознавательная задача ВЫП (SAT) выполнимаости формулы алгебры высказываний принадлежит классу $\mathscr{N}\mathscr{P}$.

Очевидно, что $\mathscr{P} \subset \mathscr{N}\mathscr{P}$, но вопрос о равенстве этих классов является важной <u>открытой проблемой</u>.

31 Полиномиальные сведения проблем

Основной метод доказательства того, что проблему P_2 нельзя решить за полиномиальное время (т.е. $P_2 \notin \mathscr{P}$) состоит в сведении к ней за полиномиальное время такой проблемы P_1, что $P_1 \notin \mathscr{P}$.

Такое преобразования языков называется *полиномиальным сведением*.

32 NP-трудные и NP-полные языки

Определение 74. Говорят, что язык L является *$\mathscr{NP}$-трудным*, если для любого языка L' из класса $\mathscr{NP}$ существует полиномиальное сведение языка L' к языку L.

Определение 75. Говорят, что язык L является *$\mathscr{NP}$-полным*, если он принадлежит классу $\mathscr{NP}$ и является $\mathscr{NP}-$трудным.

Теорема 14. *Если проблема P_1 является $\mathscr{NP}-$трудной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме P_2, то проблема P_2 также $\mathscr{NP}-$трудна.*

Следствие. *Если проблема P_1 является $\mathscr{NP}-$полной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме $P_2 \in \mathscr{NP}$, то проблема P_2 также $\mathscr{NP}-$полна.*

33 Основные NP-полные проблемы