作用量

维基百科，自由的百科全书

在物理學裏，**作用量**（英语：**action**）是一個很特別、很抽象的物理量。它表示著一個動力物理系統內在的演化趨向。雖然與微分方程式方法大不相同，作用量也可以被用來分析物理系統的運動，所得到的答案是相同的。只需要設定系統在兩個點的狀態，初始狀態與最終狀態，然後，經過求解作用量的平穩值，就可以得到系統在兩個點之間每個點的狀態。

目录

歷史

皮埃爾·德·費馬於1662年發表了費馬原理。這原理闡明：光傳播的正確路徑，所需的時間必定是極值。這原理在物理學界造成了很大的震撼。不同於牛頓運動定律的機械性，現今，一個物理系統的運動擁有了展望與目標。

戈特弗里德·萊布尼茨不同意費馬的理論。他認為光應該選擇最容易傳播的路徑。他於1682年發表了他的理論：光傳播的正確路徑應該是阻礙最小的路徑；更精確地說，阻礙與徑長的乘積是最小值的路徑。這理論有一個難題，如果要符合實驗的結果，玻璃的阻礙必須小於空氣的阻礙；但是，玻璃的密度大於空氣，應該玻璃的阻礙會大於空氣的阻礙。萊布尼茨為此提供了一個令人百思的辯解。較大的阻礙使得光較不容易擴散；因此，光被約束在一個很窄的路徑內。假若，河道變窄，水的流速會增加；同樣地，光的路徑變窄，所以光的速度變快了。

1744年，皮埃爾·莫佩爾蒂在一篇論文《The agreement between the different laws of Nature that had, until now,seemed incompatiable》中，發表了最小作用量原理：光選擇的傳播路徑，作用量最小。他定義作用量為移動速度與移動距離的乘積。用這原理，他證明了費馬原理：光傳播的正確路徑，所

需的時間是極值；他也計算出光在反射與同介質傳播時的正確路徑。1747年，莫佩爾蒂在另一篇論文《On the laws of motion and of rest》中，應用這原理於碰撞，正確地分析了彈性碰撞與非弹性碰撞；這兩種碰撞不再需要用不同的理論來解釋。

萊昂哈德·歐拉在同年發表了一篇論文《Method for finding curves having a minimal or maximal property or solutions to isoperimetric problems in the broadest accepted sense》；其中，他表明物體的運動遵守某種物理量極值定律，而這物理量是$\int_{path} v^2\ dt$。應用這理論，歐拉成功的計算出，當粒子受到連心力作用時，正確的拋射體運動。

在此以後，許多物理學家，包括約瑟夫·拉格朗日、威廉·哈密頓、理查德·費曼等等，對於作用量都有很不同的見解。這些見解對於物理學的發展貢獻甚多。

概念

微分方程式時常被用來表述物理定律。微分方程式指定出，隨著極小的時間、位置、或其他變數的變化，一個物理變數如何改變。總合這些極小的改變，再加上這物理變數在某些點的已知數值或已知導數值，就能求得物理變數在任何點的數值。

作用量方法是一種全然不同的方法，它能夠描述物理系統的運動，而且只需要設定物理變數在兩點的數值，稱為初始值與最終值。經過作用量平穩的演算，可以得到，此變數在這兩點之間任何點的數值。而且，作用量方法與微分方程式方法所得到的答案完全相同。

哈密頓原理闡明了這兩種方法在物理學價位的等價：描述物理系統運動的微分方程式，也可以用一個等價的積分方程式來描述。無論是關於經典力學中的一個單獨粒子、關於經典場像電磁場或重力場，這描述都是正確的。更加地，哈密頓原理已經延伸至量子力學與量子場論了。

用變分法數學語言來描述，求解一個物理系統作用量的平穩值（通常是最小值），可以得到這系統隨時間的演化（就是說，系統怎樣從一個狀態演化到另外一個狀態）。更廣義地，系統的正確演化對於任何微擾必須是平穩的。這要求導致出描述正確演化的微分方程式。

作用量形式

在經典物理裏，作用量這術語至少有七種不同的意義。每一種不同的意義有它不同的表達形式。

作用量（泛函）

最常見的作用量是一個泛函$\mathcal{S}$，輸入是參數為時間與空間的函數，輸出是一個純量。在經典力學裏，輸入函數是物理系統在兩個時間點t_1，t_2之間廣義座標$\mathbf{q}(t)$的演變。

作用量$\mathcal{S}$定義為，在兩個時間點之間，系統的拉格朗日量L對於時間的積分：

$$\mathcal{S}[\mathbf{q}(t)]=\int_{t_1}^{t_2} L[\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}},\ t]\,\mathrm{d}t。$$

根據哈密頓原理，正確的演化$\mathbf{q}_{\text{true}}(t)$要求平穩的作用量$\mathcal{S}$（最小值、最大值、鞍值）。經過運算，結果就是拉格朗日方程式。

簡略作用量（泛函）

簡略作用量也是一個泛函，通常標記為$\mathcal{S}_0$。這裏，輸入函數是物理系統移動的一條路徑，完全不考慮時間參數。舉例而言，一個行星軌道的路徑是個橢圓，一個粒子在均勻重力場的路徑是拋物線；在這兩種狀況，路徑都跟粒子的移動速度無關。簡略作用量$\mathcal{S}_0$定義為廣義動量$\mathbf{p}$延著路徑的積分：

$$\mathcal{S}_0 = \int \mathbf{p}\,\mathrm{d}\mathbf{q}\ ;$$

其中，$\mathbf{q}$是廣義座標．根據莫佩爾蒂原理，正確路徑的簡略作用量$\mathcal{S}_0$是平穩的。

哈密頓主函數

主條目：哈密頓主函數。

哈密頓主函數是由哈密頓-雅可比方程式定義的。哈密頓-雅可比方程式是經典力學的另一種表述。哈密頓主函數S與泛涵$\mathcal{S}$有密切的關係。固定住初始時間t_1和其對應的座標點$\mathbf{q}_1$；而准許時間上限t_2和其對應的座標點$\mathbf{q}_2$的改變。取t_2和$\mathbf{q}_2$為函數S的參數。換句話說，作用量函數S是拉格朗日量對於時間的不定積分：

$$S(\mathbf{q},\ \mathbf{P},\ t) = \int L[\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}},\ t]\,\mathrm{d}t。$$

更加地，可以證明$\mathbf{P}$是某常數向量$\mathbf{a}$。所以，

$$S(\mathbf{q},\ \mathbf{P},\ t) = S(\mathbf{q},\ \mathbf{a},\ t)。$$

哈密頓特徵函數

主條目：哈密頓特徵函數。

假若，哈密頓量H是守恆的；

$$H = \alpha\ ;$$

其中，α是常數。

設定**哈密頓特徵函數**W為

$$W(\mathbf{q},\ \mathbf{a}) = S(\mathbf{q},\ \mathbf{a},\ t) - \alpha t。$$

則哈密頓特徵函數W是一個作用量。

更加地，

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}。$$

對於時間積分：

$$W(\mathbf{q},\ \mathbf{a}) = \int \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}dt = \int \mathbf{p}\,d\mathbf{q}。$$

這正是簡略作用量的方程式。

哈密頓-雅可比方程式解答

主條目：哈密頓-雅可比方程式。

哈密頓-雅可比方程式是經典力學的一種表述。假若，哈密頓-雅可比方程式是完全可分的；則哈密頓主函數$S(\mathbf{q},\ \mathbf{P},\ t)$分出的每一個項目$S_k(q_k,\ \mathbf{P},\ t)$也稱為"作用量"。

作用量-角度座標

主條目：作用量-角度座標。思考一個作用量-角度座標的廣義動量變數J_k，定義為在相空間內，關於轉動運動或振蕩運動，廣義動量的閉路徑積分：

$J_k = \oint p_k \mathrm{d}q_k$。

這變數J_k稱為廣義座標q_k的作用量；相應的正則座標是**角度**w_k。不同於前面簡略作用量泛函地用點積來積分向量；這裏，只有一個純量變數q_k被用來積分。作用量J_k等於，隨著q_k沿著閉路徑，$S_k(q_k)$的改變。應用於幾個有趣的物理系統，J_k或者是常數，或者改變非常地慢。因此，J_k時常應用於微擾理論與緩漸不變量的研究。

哈密頓流作用量

參閱重言1形式。

數學導引

哈密頓原理闡明，如果一個物理系統在兩個時間點t_1、t_2的運動是正確運動，則作用量泛函$\mathcal{S}$的一次變分$\delta\mathcal{S}$為零。用數學方程式表示，定義作用量為

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}},\ t)\, dt。$$

其中，$L(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}},\ t)$是系統的拉格朗日函數，廣義座標$\mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_N)$是時間的函數。

假若，$\mathbf{q}(t)$乃系統的正確運動，則$\delta\mathcal{S} = 0$。

從哈密頓原理可以導引出拉格朗日方程式．假設$\mathbf{q}(t)$是系統的正確運動，讓$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$成為一個微擾$\delta\mathbf{q}$；微擾在軌道兩個端點的值是零：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) \stackrel{\text{def}}{=} 0。$$

取至$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$的一階微擾，作用量泛函的一次變分為

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2}\ [L(\mathbf{q}+\boldsymbol{\varepsilon},\ \dot{\mathbf{q}}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - L(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}})]\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\ \left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)\, dt。$$

這裏，將拉格朗日量L展開至$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$的一階微擾。

應用分部積分法於最右邊項目，

$$\delta\mathcal{S} = \left[\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\ \left(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} - \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)\,dt。$$

邊界條件$\boldsymbol{\varepsilon}(t_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_2) \stackrel{\text{def}}{=} 0$使第一個項目歸零。所以，

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2}\ \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)\,dt。$$

要求作用量泛函$\mathcal{S}$平穩。這意味著，對於正確運動的任意微擾$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$，一次變分$\delta\mathcal{S}$必須等於零：

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2}\ \boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)\,dt = 0。$$

請注意，還沒有對廣義座標$\mathbf{q}(t)$做任何要求。現在，要求所有的廣義座標都互相無關（完整限制）。這樣，根據變分法基本引理，可以得到拉格朗日方程式：

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}。$$

在各個物理學領域，拉格朗日方程式都被認為是非常重要的方程式，能夠用來精確地理論分析許多物理系統。

對應於廣義座標q_k的廣義動量p_k ，又稱為**共軛動量**，定義為

$$p_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}。$$

假設L不顯性地跟廣義座標q_k有關，

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0，$$

則廣義動量$p_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}$是常數。在此種狀況，座標$q_k$稱為**循環座標**。舉例而言，如果用極座標系$(r,\ \theta,\ h)$來描述一個粒子的平面運動，而$L$與$\theta$無關，則廣義動量是守恆的角動量。

參閱

- 拉格朗日力學
- 哈密頓力學
- 諾特定理
- 愛因斯坦-希爾伯特作用量
- 最小作用量原理

外部連結

- [1] (http://www.eftaylor.com/pub/BibliogLeastAction12.pdf)，Edwin F. Taylor加了註釋的參考書目。

- 最小作用量原理 (http://www.eftaylor.com/software/ActionApplets/LeastAction.html)非常好地互動解釋。

參考文獻

- Cornelius Lanczos, "The Variational Principles of Mechanics",（Dover Publications, New York, 1986）, ISBN 0-486-65067-7.這領域最常引用的參考書。
- 列夫·朗道and E. M. Lifshitz, "Mechanics, Course of Theoretical Physics", 3rd ed., Vol. 1,（Butterworth-Heinenann, 1976）, ISBN 0-7506-2896-0.這本書一開始就講解最小作用量原理。
- Herbert Goldstein "Classical Mechanics", 2nd ed.,（Addison Wesley, 1980）, pp. 35-69。
- Thomas A. Moore "Least-Action Principle" in Macmillan Encyclopedia of Physics, Volume 2,（Simon & Schuster Macmillan, 1996）, ISBN 0-02-897359-3, OCLC 35269891 (https://www.worldcat.org/oclc/35269891), pages 840–842。
- Robert Weinstock, "Calculus of Variations, with Applications to Physics and Engineering",（Dover Publications, 1974）, ISBN 0-486-63069-2。非常好的古早書。
- Dugas, René, "A History of Mechanics",（Dover, 1988）, ISBN 0-486-65632-2, pp. 254-275。