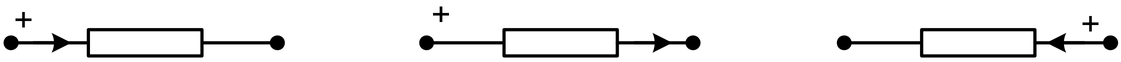
BÖLÜM 3. TANIMLANMIŞ BÜYÜKLÜKLER

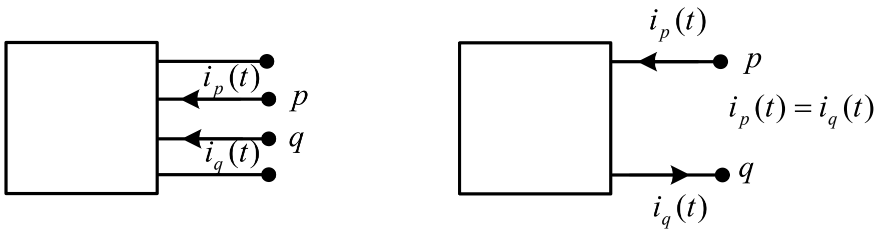
Uyumlu referans yönleri

Gerilim kutbu ile akım oku aynı yönde (kuyruğunda) ise bunlar uyumlu referans yönleridir.



Kapı

$i_p(t) = -i_q(t)$ ise (p, q) uç çifti bir kapıdır. Yani iki uç yalnız bir kapı oluşturur.

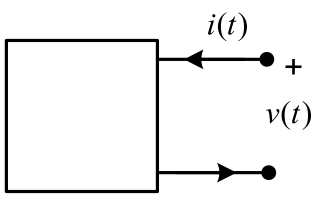


Güç

Güç uyumlu referans yönleri için ve aynı zamanda herhangi bir kapı için tanımlanmıştır. Birimi ise Watt dır.

1-kapılının ani gücü: 1-kapılı elemanın ani gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$P(t) = v(t).i(t)$ (Bu güç reel bir sayıdır.)



$P(t) > 0$ ise tanım uyarınca bu 1-kapılı güç alıyor demektir.

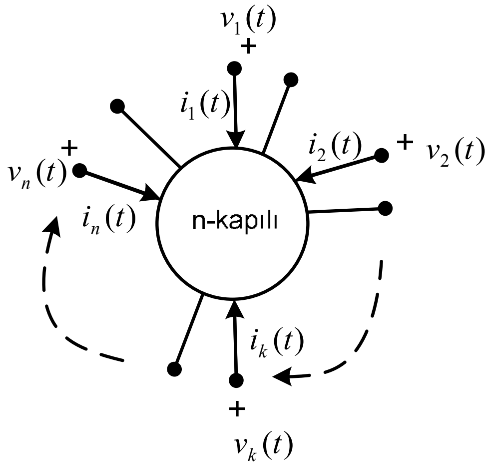
$P(t) < 0$ ise tanım uyarınca bu 1-kapılı güç veriyor demektir.

n-kapılının ani gücü: n-kapılı elemanın ani gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_k(t) = v_k(t).i_k(t)$$

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)$$

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t).i_k(t)$$



Kapılara ilişkin gerilim vektörü ile akım vektörü aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}, \quad i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix}$$

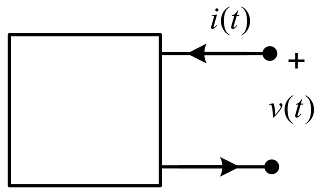
Bu durumda n-kapılının ani gücü vektörel biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P(t) = v^T(t).i(t) = i^T(t).v(t)$$

Enerji

1-kapılıya ilişkin enerji: 1-kapılı elemanın enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} v(t).\,i(t).\,dt + W(t_0)$$



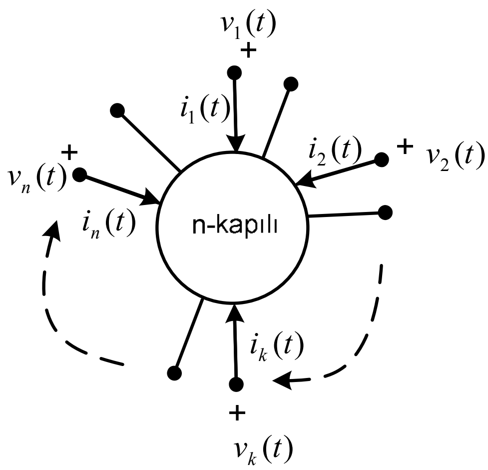
Bu durumda $(t-t_0)$ zaman aralığındaki bir kapılıya ilişkin enerji aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W(t,t_0)=W(t)-W(t_0)=\int_{t_0}^{t} v(t).i(t).dt$$

$W(t,t_0)$ terimi (-) ise, bu **1-kapılı eleman**, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreye enerji veriyor denir. Aksi takdirde, yani $W(t,t_0)$ terimi (+) ise, bu eleman, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreden enerji alıyor denir. Enerji birimi 1 Joule(1J) dur.

$$W(t)=\int_{t_0}^{t} p(t).dt+W(t_0) \qquad \Rightarrow \qquad p(t)=\frac{dW(t)}{dt}$$

n-kapılıya ilişkin enerji: n-kapılı elemanın enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.



$$W(t)=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n} v_k(t).i_k(t).dt+W(t_0)$$

$$W(t,t_0)=W(t)-W(t_0)=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n} v_k(t).i_k(t).dt$$

$W(t,t_0)$ terimi (-) ise, bu **n-kapılı eleman**, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreye enerji veriyor denir. Aksi takdirde, yani $W(t,t_0)$ terimi (+) ise, bu eleman, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreden enerji alıyor denir.

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(t)}_{P_n(t)} .\, dt + W(t_0) = \int_{t_0}^{t} P_n(t).\, d(t) + W(t_0)$$

Yük

1-kapılı elemanın yükü aşağıdaki gibi tanımlanır ve birimi 1 Coulomb(1C) dur.

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} i(t).\, dt + q(t_0)$$

$$q(t,t_0) = q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^{t} i(t).\, dt$$

$q(t,t_0)$ terimi (-) ise, bu **1-kapılı eleman**, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreye yük veriyor denir. Aksi taktirde, yani $q(t,t_0)$ terimi (+) ise, bu eleman, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreden yük alıyor denir.

Akı

1-kapılı elemanın akısı aşağıdaki gibi tanımlanır ve birimi 1 Weber(1W) dir.

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} v(t).\, dt + \phi(t_0)$$

$$\phi(t,t_0) = \phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t).\, dt$$

Devre elemanları

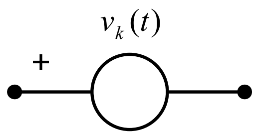
a) **1-kapılı devre elemanı**

b) **2-kapılı devre elemanı**

c) **n-kapılı devre elemanı**

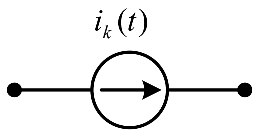
1-kapılı devre elemanları

1. Bağımsız gerilim kaynağı: Birimi volt(1V) dur.



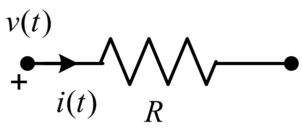
$$v(t) = v_k(t)$$

2. Bağımsız akım kaynağı: Birimi amper(1A) dir.



$$i(t) = i_k(t)$$

3. Direnç elemanı: R harfi ile gösterilir ve birimi 1ohm(1Ω) dur



Direncin tanım bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

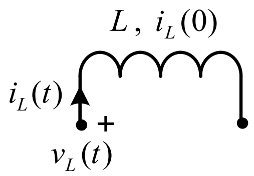
$$v(t) = R.\,i(t)$$
$$i(t) = G.\,v(t)$$

Yukarıdaki ifadelerde R direnç ve G iletkenlik olarak adlandırılır ve iletkenliğin birimi1 mho veya 1 siemens dir. Direncin ani gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p(t) = R.\,i^2(t)$$
$$p(t) = G.\,v^2(t)$$

Direnç elemanı pasif bir eleman olup, üzerinde güç harcar. Yani $p(t)$ değeri daima pozitiftir.

4. Endüktans elemanı: L harfi ile gösterilir ve birimi1Henry(1H) dir.



Endüktansın tanım bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau).d\tau + i_L(0) = \Gamma\int_0^t v_L(\tau).d\tau + i_L(0)$$

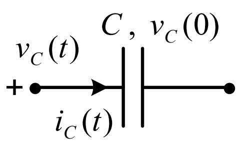
Yukarıdaki ifadelerde L endüktans ve $\Gamma = \frac{1}{L}$ **manyetik iletkenlik** olarak adlandırılır.

Endüktansın ani gücü ve enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_L(t) = v_L(t).i_L(t) = L.i_L(t) \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

5. Kapasite elemanı: C harfi ile gösterilir ve birimi1Farad(1F) dir.



Kapasitenin tanım bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

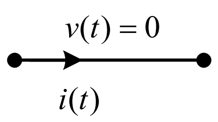
$$v_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau).\,d\tau + v_C(0) = \Theta \cdot \int_0^t i_C(\tau).\,d\tau + v_C(0)$$

Yukarıdaki ifadelerde C kapasitans ve $\Theta = \frac{1}{C}$ **dielektrik iletkenlik** olarak adlandırılır. Kapasitansın ani gücü ve enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_C(t) = v_C(t).\,i_C(t) = C.\,v_C(t) \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot v_C^2(t)$$

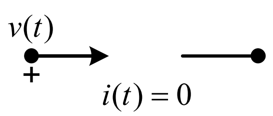
6. Kısa-devre elemanı:



$$p(t) = v(t).\,i(t) = 0$$

Bu kısa devre elemanının gücü sıfırdır. Bu yüzden bağlı olduğu devreye ne enerji verir ve ne de bağlı olduğu devreden enerji alırlar.

7. Açık-devre elemanı:

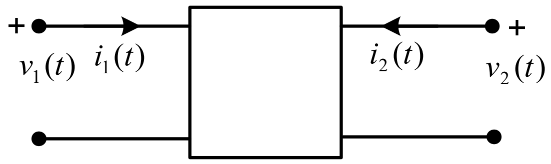


$$p(t) = v(t).\,i(t) = 0$$

Aynı şekilde bu açık devre elemanının gücü de sıfırdır. Bu yüzden bağlı olduğu devreye ne enerji verir ve ne de bağlı olduğu devreden enerji alırlar.

2-kapılı devre elemanı

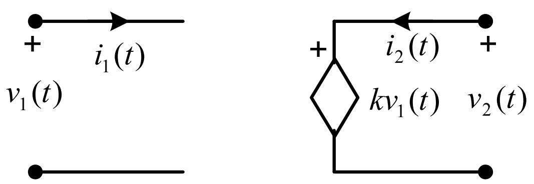
1. Bağımlı kaynak



(a) GKGK(Gerilimle kontrol edilebilen gerilim kaynağı)

$$i_1(t) = 0$$
$$v_2(t) = kv_1(t)$$

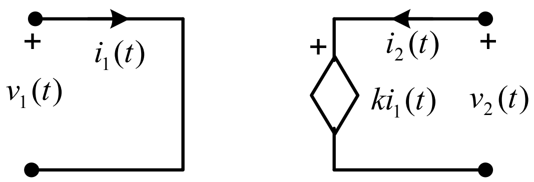
Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir GKGK dır.



(b) AKGK(Akımla kontrol edilebilen gerilim kaynağı)

$$v_1(t) = 0$$
$$v_2(t) = ki_1(t)$$

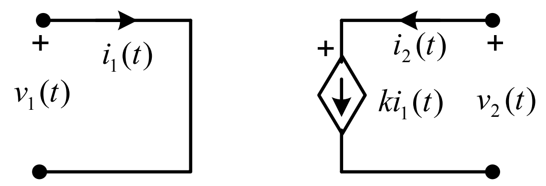
Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir AKGK dır.



(c) AKAK(Akımla kontrol edilebilen akım kaynağı)

$v_1(t) = 0$
$i_2(t) = ki_1(t)$

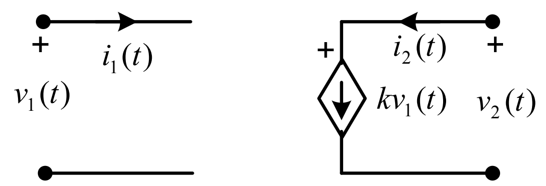
Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir AKAK dır.



(d) GKAK(Gerilimle kontrol edilebilen akım kaynağı)

$i_1(t) = 0$
$i_2(t) = kv_1(t)$

Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir GKAK dır.

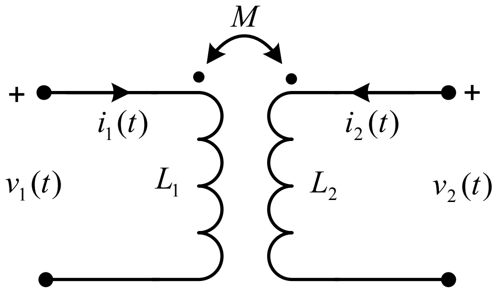


$$p(t) = \underbrace{p_1(t)}_{0} + p_2(t)$$

$p_2(t) = v_2(t).i_2(t) = kv_2(t).i_1(t)$ (AKAK için)

Önemli not: Bu güç değeri pozitif de olabilir, negatif de olabilir.

2. Transformatör



$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

Burada L_1 ve L_2 öz endüktanslar olup, M ise ortak endüktansdır. Tanım uyarınca $L_1, L_2 > 0$ dır. Bu iki kapılının transformatör olabilmesi için $L_1.L_2 - M^2 = \Delta > 0$ şartı gerçeklenmelidir. Yukarıdaki şekilde gösterilen düğümlerin anlamı: Her iki akım bu düğümlerden girecek ya da çıkacak şekilde yönlendirilmiş iseler, ortak endüktans (M) pozitifdir. Akımın biri düğümden girecek, diğeri çıkacak şekilde referans gösterilmişse, ortak endüktans (M) negatifdir.

Akımların ikisi de sabit tutuluyorsa gerilimler $(v_1 = v_2 = 0)$ sıfır olacaklardır. Her iki akımın türevlerini bulmak istersek, $\Delta = L_1.L_2 - M^2$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{di_1(t)}{dt} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_1(t)}{dt} \\ \dfrac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{L_2}{\Delta} \cdot v_1 - \frac{M}{\Delta} \cdot v_2$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{M}{\Delta} \cdot v_1 + \frac{L_1}{\Delta} \cdot v_2$$

$$i_1(t) = \frac{L_2}{\Delta}\int_0^t v_1(\tau).d\tau - \frac{M}{\Delta}\int_0^t v_2(\tau).d\tau + i_1(0)$$

$$i_2(t) = -\frac{M}{\Delta}\int_0^t v_1(\tau).d\tau + \frac{L_1}{\Delta}\int_0^t v_2(\tau).d\tau + i_2(0)$$

Yukarıda ifade edilen integralleri hesaplayabilmemiz için $i_1(0)$ ve $i_2(0)$ başlangıç değerlerini bilmemiz gerekir.

Transformatör tanım bağıntısı aşağıdaki gibi verilmiş idi.

$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

Yukarıdaki tanım bağıntısında $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ ve $L_1.L_2 - M^2 > 0$ şartları sağlanıyor ise, bu iki kapılı bir transformatördür ve bu transformatöre ait güç ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p(t) = v_1(t).i_1(t) + v_2(t).i_2(t) =$$
$$= i_1(t).L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t).M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t).M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + i_2(t).L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

Yukarıdaki ifadeyi kısaltmak suretiyle aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$p(t) = L_1.i_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{d}{dt}(i_1.i_2) + L_2.i_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Yine aynı koşullar altında bu transformatöre ait enerji ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$W(t) = \int_0^t p(\tau).d\tau + W(0)$$

Yukarıdaki güç ifadesini enerji formuna sokmak için aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$p(t).dt = L_1.i_1.di_1 + M.d(i_1.i_2) + L_2.i_2.di_2$$

Bu durumda enerji ifadesi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$W_L(t) = \frac{1}{2}L.i_L^2(t)$ ve $W_L(0) = \frac{1}{2}L.i_L^2(0)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$W(-\infty,t) = \frac{1}{2}L_1.i_1^2(t) + \frac{1}{2}L_1.i_1^2(0) + M.i_1(t).i_2(t) + M.i_1(0).i_2(0) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(t) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(0)$$

Yukarıdaki ifadeyi ayırmak suretiyle aşağıdaki sonuca gelinir.

$$W(-\infty,t_0) = \frac{1}{2}L_1.i_1^2(0) + M.i_1(0).i_2(0) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(0)$$
$$W(t_0,t) = \frac{1}{2}L_1.i_1^2(t) + M.i_1(t).i_2(t) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(t)$$
$$W(-\infty,t) = W(-\infty,t_0) + W(t_0,t)$$

Sonuç: Transformatörün enerjisini kapı akımları cinsinden yazabiliriz.

3. Mükemmel transformatör

$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

Yukarıdaki tanım bağıntısında $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ ve $L_1.L_2 - M^2 = 0$ şartları sağlanıyor ise, bu iki kapılı mükemmel bir transformatördür ve bu transformatöre ait akımlar gerilim cinsinden ifade edilemez. Yukarıdaki tanım bağıntılarından birincisinin her iki tarafını L_2 ile çarpıp M ile bölersek aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\underbrace{L_1 . L_2}_{M^2} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 . M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = L_2 . v_1 \quad \Rightarrow \quad M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{L_2}{M} \cdot v_1$$

Bu son ifadeyi tanım bağıntısının ikinci denklemi olan

$$M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = v_2(t)$$

ile benzeştirirsek aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_2(t) = \frac{L_2}{M} \cdot v_1(t)$$

Yani iki nolu kapıya ilişkin gerilim bir nolu kapıya ilişkin gerilime lineer bağımlıdır. Oysa mükemmel olmayan(normal) transformatörde böyle bir bağıntı yazılamaz.

4. İdeal transformatör

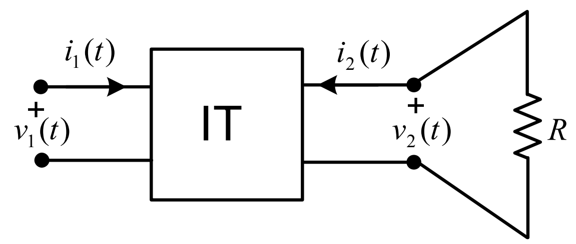
Aşağıdaki şartların her ikisi aynı anda sağlanıyorsa, bu iki kapılı ideal transformatördür.

$$v_1(t) = n . v_2(t)$$
$$i_1(t) = -\frac{1}{n} \cdot i_2(t)$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t) . i_1(t) + v_2(t) . i_2(t) = 0$$
$$p_1(t) = -p_2(t)$$

Yukarıdaki bu ifade, iki kapılının aldığı enerjiyi aynen verdiğini gösterir.

Örneğin aşağıdaki IT(İdeal Transformatör) için;

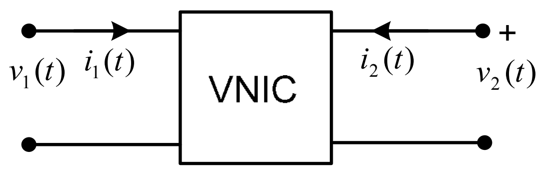


$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = -n^2 \cdot \frac{i_1(t)}{i_2(t)}$$ (Yukarıda verilen tanım bağıntıları taraf tarafa oranlanırsa;)

$$v_2(t) = -R.\,i_2(t)$$
$$v_1(t) = nv_2(t) = -nRi_2(t) = -nR(-n)i_1(t) = \underbrace{n^2R}_{R_1}.\,i_1(t)$$

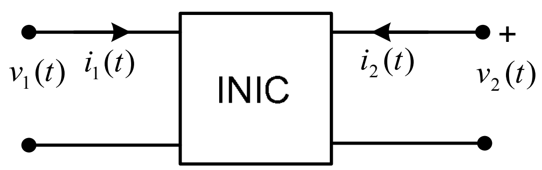
5(a). İdeal negatif gerilim çevirici

$$v_1(t) = -kv_2(t)$$
$$i_1(t) = -i_2(t)$$

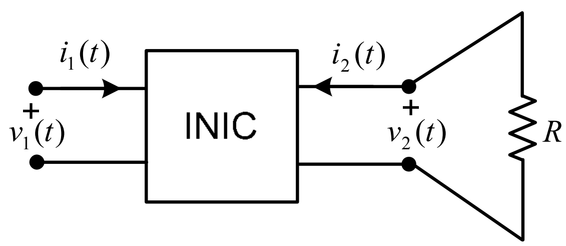


5(b). İdeal negatif akım çevirici

$$v_2(t) = v_1(t)$$
$$i_2(t) = k.\,i_1(t)$$



Örneğin aşağıdaki INIC(ideal negatif akım çevirici) için;



$v_2(t) = -R\,.\,i_2(t)$

Yukarıda verilen $v_2(t) = v_1(t)$ tanım bağıntısını kullanmak suretiyle aşağıdaki ifadeye gelinir.

$v_1(t) = -R\,.\,i_2(t)$

Yine yukarıda verilen $i_2(t) = k\,.\,i_1(t)$ tanım bağıntısını kullanarak aşağıdaki ifadeye gelinir.

$v_1(t) = \underbrace{(-kR)}_{R_1}.\,i_1(t)$

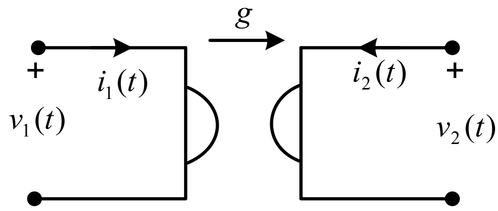
$R_1 = -kR$

Yani $k = 1$ için $R_1 = -R$ olur.

6(a). Pasif jiratör

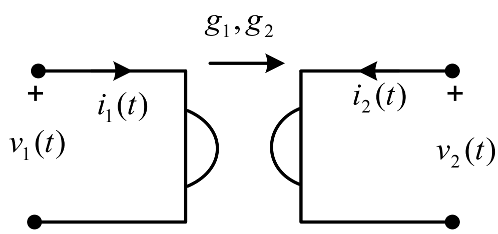
Tanım bağıntısı ve gösterimi aşağıdaki gibi verilir.

$i_1(t) = -g\,.\,v_2(t)$
$i_2(t) = g \cdot v_1(t)$



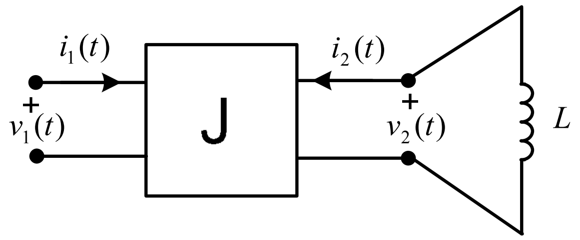
6(b). Aktif jiratör

Tanım bağıntısı ve gösterimi aşağıdaki gibi verilir.



$$\left.\begin{aligned} i_1(t) &= -g_1 \,.\, v_2(t) \\ i_2(t) &= g_2 \cdot v_1(t) \end{aligned}\right\} \quad g_1 \neq g_2$$

Örneğin aşağıdaki jiratör için;



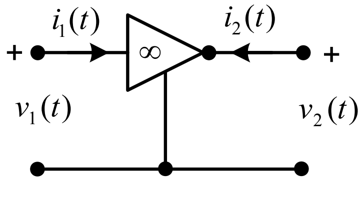
$$i_1(t) = -g \,.\, v_2(t)$$
$$i_2(t) = g \cdot v_1(t)$$
$$v_2(t) = -L \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = -g \,.\, L \cdot \frac{dv_1(t)}{dt}$$
$$-\frac{1}{g} \cdot i_1(t) = -g \,.\, L \cdot \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Son olarak yukarıda verilen iki ifadeden aşağıdaki ifadeye gelinir. Bu sonuç ifadeye bakarak, bu jiratörün bir kapasite elemanı gibi davrandığını söyleyebiliriz.

$$i_1(t) = \underbrace{(g^2 \,.\, L)}_{C} \cdot \frac{dv_1(t)}{dt}$$

7. İşlemsel kuvvetlendirici

Tanım bağıntısı ve gösterimi aşağıdaki gibi verilir.

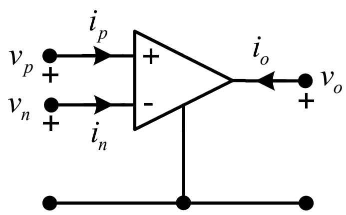


$v_1(t) = 0$

$i_1(t) = 0$

8. Diferansiyel girişli işlemsel kuvvetlendirici

Tanım bağıntısı ve gösterimi aşağıdaki gibi verilir.



$i_p(t) = 0$, $\quad i_n(t) = 0$

$v_p(t) - v_n(t) = 0$

(a) Pasif eleman tanımı:

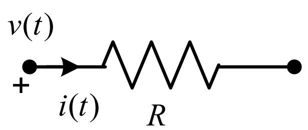
Herhangi bir devre elemanın enerjisi, her $W(t_0)$, $v(t)$, $i(t)$ ve t değeri için,

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau).\, i(\tau).\, d\tau + W(t_0) \geq 0$$

ise, tanım uyarınca o devre elemanına pasif eleman denir. Ayrıca $W(t) = 0$ ise bu elemana kayıpsız eleman adı verilir.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau).\, i(\tau).\, d\tau \,, \quad W(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau).\, i(\tau).\, d\tau$$

1. Direnç elemanının enerjisi:



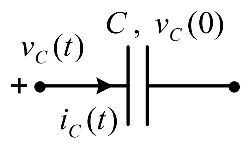
$$p(t) = v(t)\,.\,i(t) = R\,.\,i^2(t) = G\,.\,v^2(t)$$

$$W_R(t)=\int_{t_0}^{t} R\,.\,i^2(\tau).\,d\tau + W_R(t_0) \geq 0$$

$$W_R(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0} R\,.\,i^2(\tau).\,d\tau \geq 0$$

olduğundan direnç elemanı pasif bir elemandır.

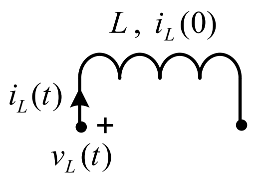
2. Kapasite elemanının enerjisi:



$$W_C(t)=\frac{1}{2}\cdot C\cdot v_C^2(t)\geq 0$$

olduğundan kapasite elemanı pasif bir elemandır.

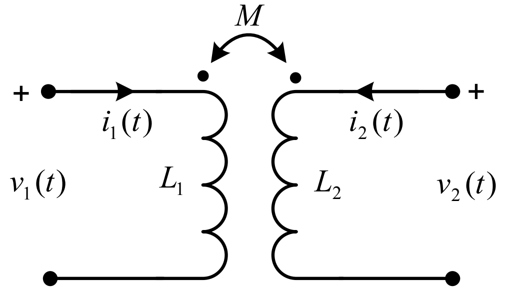
3. İndüktans elemanının enerjisi:



$$W_L(t)=\frac{1}{2}\cdot L\cdot i_L^2(t)\geq 0$$

olduğundan indüktans elemanı pasif bir elemandır.

4. Transformatör elemanının enerjisi:



t nin her değeri için $W_T(t)$ sıfıra eşit veya büyük olmak zorundadır. Yani;

$$W_T(t) = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot i_1^2(t) + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot i_2^2(t) + M . i_1(t) . i_2(t) \geq 0$$

$$W_T(t) = i_2^2(t) . \left[\frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \left(\frac{i_1(t)}{i_2(t)} \right)^2 + M \cdot \left(\frac{i_1(t)}{i_2(t)} \right) + \frac{1}{2} \cdot L_2 \right] \geq 0$$

$$W_T(t) = i_2^2(t) . \left[\frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot x^2 + M \cdot x + \frac{1}{2} \cdot L_2 \right] \geq 0$$

Yukarıdaki ifadede $\left[\frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot x^2 + M \cdot x + \frac{1}{2} \cdot L_2 \right]$ nin işaretine bakıyoruz.

$$\Delta = M^2 - L_1 . L_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 . L_2 - M^2 \geq 0$$

$$M^2 - L_1 . L_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 . L_2 - M^2 > 0$$

Bu durumda mükemmel transformatör pasif bir iki kapılıdır.

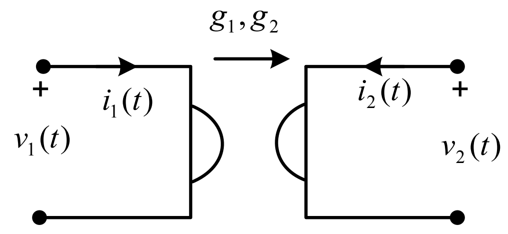
(b) Aktif eleman tanımı:

Herhangi bir devre elemanın enerjisi en az bir $W(t_0)$, $v(t)$, $i(t)$ ve t değeri için

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) . i(\tau) . d\tau + W(t_0) < 0$$

ise, tanım uyarınca o devre elemanına aktif eleman denir.

Jiratör elemanının enerjisi:



$$i_1(t) = -g_1 . v_2(t)$$
$$i_2(t) = g_2 \cdot v_1(t)$$

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t) . i_1(t) + v_2(t) . i_2(t) = -g_1 . v_1(t) . v_2(t) + g_2 . v_1(t) . v_2(t)$$
$$p(t) = (g_2 - g_1) . v_1(t) . v_2(t)$$

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} (g_2 - g_1).v_1(\tau).\,v_2(\tau).\,d\tau < 0$$

Yukarıdaki sonuç ifadede $g_2 \neq g_1$ ise jiratör aktif olur. Şayet $g_2 = g_1$ ise jiratör pasif olur.

Devre Elemanları

PASİF

Direnç
Kapasite
Endüktans
Transformatör,
Mükemmel Transformatör
İdeal Transformatör
Pasif Jiratör
(Bağlı olduğu devreden enerji alır)

AKTİF

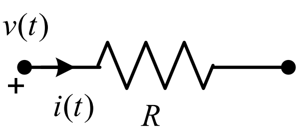
Bağımsız Kaynaklar
Bağımlı Kaynaklar
Aktif Jiratör
Negatif Çeviriciler
İşlemsel Kuvvetlendiriciler
(Bağlı olduğu devreye enerji verir)

Doğrusal ve doğrusal olmayan devre elemanları:

$(v_a, i_a) \in N$
$(v_b, i_b) \in N$

ve α, β sonlu reel sayılar olduğunda $(\alpha.v_a + \beta.v_b, \alpha.i_a + \beta.i_b) \in N$ şartı sağlanıyor ise bu eleman doğrusal elemandır. Aksi takdirde yani $(\alpha.v_a + \beta.v_b, \alpha.i_a + \beta.i_b) \notin N$ olduğunda bu eleman doğrusal olmayan elemandır.

Örnek 1:



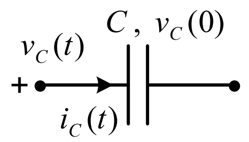
$v_a(t) = R.i_a(t)$
$v_b(t) = R.i_b(t)$

$v(t) = R.i(t)$ ve $i(t) = \alpha.i_a(t) + \beta.i_b(t)$ olmak üzere;

$$v(t) = R.(\alpha.i_a(t) + \beta.i_b(t)) = \alpha.\underbrace{R.i_a(t)}_{v_a} + \beta.\underbrace{R.i_b(t)}_{v_b} = \alpha.v_a(t) + \beta.v_b(t)$$

Dolayısı ile direnç elemanı doğrusal bir elemandır.

Örnek 2:



$$v_a(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_a(\tau).d\tau + v(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_a(\tau).d\tau = v_a(t) - v(0)$$

$$v_b(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_b(\tau).d\tau + v(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_b(\tau).d\tau = v_b(t) - v(0)$$

$v(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(\tau).d\tau + v(0)$ ve $i(t) = \alpha.i_a(t) + \beta.i_b(t)$ olmak üzere;

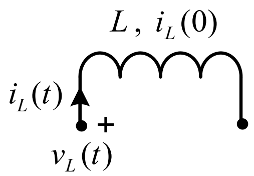
$$v(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t (\alpha.i_a(\tau) + \beta.i_b(\tau)).d\tau + v(0)$$

$$v(t) = \alpha\cdot\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_a(\tau).d\tau + \beta\cdot\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_b(\tau).d\tau + v(0) = \alpha.[v_a(t) - v(0)] + \beta.[v_b(t) - v(0)] + v(0)$$

$$v(t) = \alpha.v_a(t) + \beta.v_b(t) + v(0) - \alpha.v(0) - \beta.v(0)$$

Şayet $v(0)$ başlangıç gerilimi sıfır ise kapasite elemanı doğrusal, sıfırdan farklı ise doğrusal değildir.

Ödev:



Kapasite elemanının incelenmesindeki yol esas alınmak suretiyle, indüktans elemanının başlangıç akım değeri sıfır alındığında, bu elemanının doğrusal eleman olduğunu gösteriniz.

Çarpımsallık ve toplamsallık(süperpozisyon) teoremi(özelliği):

$(v_a, i_a) \in N$
$(v_b, i_b) \in N$

ve α, β sonlu reel sayılar olmak üzere, $(\alpha.v_a, \alpha.i_a) \in N$ ise çarpımsallık özelliği, $(v_a + v_b, i_a + i_b) \in N$ ise toplamsallık özelliği sağlanıyor demektir. Bütün doğrusal elemanlar çarpımsallık ve toplamsallık özelliğini sağlarlar.

İspat:

$(\alpha.v_a + \beta.v_b, \alpha.i_a + \beta.i_b) \in N$

$\beta = 0$ ise $(\alpha.v_a, \alpha.i_a) \in N$ olur. Eleman doğrusal ise bu çarpımsallık özelliğini gösterir.

$\alpha = \beta = 1$ ise $(v_a + v_b, i_a + i_b) \in N$ olur. Eleman doğrusal ise toplamsallık özelliğini gösterir.

Uygulama 1. Gerilim ile yük arasındaki bağıntısı $v(t) = q(t) - q^3(t)$ şeklinde verilen kapasite elemanının aktif mi yoksa pasif mi olduğunu belirleyiniz.

Bir devre elemanının aktif olması için aşağıdaki bağıntıyı sağlaması gerekir.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t).dt < 0$$

Ayrıca kapasite elemanının akımı ile üzerindeki yük arasında aşağıdaki bağıntı geçerli idi.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$v(t) = q(t) - q^3(t)$ ile $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ bağıntısını yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t}[q(t)-q^3(t)].\frac{dq(t)}{dt}.dt=\int_{0}^{q(t)}[q(t)-q^3(t)].dq(t)=\left.\frac{q^2(t)}{2}-\frac{q^4(t)}{4}\right|_0^{q(t)}$$

sonucu elde edilir. Bu ifade $q(t)>\sqrt{2}$ değerleri için negatif olacağından bu eleman aktif eleman olacaktır.

Uygulama 2. Gerilim ile yük arasındaki bağıntısı $v(t)=1+q(t)+q^2(t)$ şeklinde verilen kapasite elemanının yükünü $q(t_0)=0$ Coulomb dan $q(t)=1$ Coulomb a çıkarmak için gereken enerjiyi bulunuz.

Bir devre elemanının enerji bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t}v(t).i(t).dt$$

Ayrıca kapasite elemanının akımı ile üzerindeki yük arasında aşağıdaki bağıntı geçerli idi.

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

$v(t)=1+q(t)+q^2(t)$ ile $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$ bağıntısını yukarıdaki denklemde yerine koyarak entegrasyonu tamamlarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t}[1+q(t)+q^2(t)].\frac{dq(t)}{dt}.dt=\int_{0}^{1}[1+q(t)+q^2(t)].dq(t)$$

$$=\left.q(t)+\frac{q^2(t)}{2}+\frac{q^3(t)}{3}\right|_0^1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\text{ Joule}$$

Uygulama 3. Akım ile akı arasındaki bağıntısı $i(t)=\frac{1}{t}\cdot\tanh\phi(t)$ ve akım ifadesi $i(t)=\sin t$ şeklinde verilen elemanının gerilim ifadesini bulunuz.

İlk bakışta bu elemanın bir indüktans (self) elemanı olduğunu, doğrusal olmadığını ve zamanla değişen bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. İndüktans elemanının sargılarında indüklediği elektromotor kuvvet(gerilim) ile akı arasındaki bağıntı ise aşağıdaki gibi idi.

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Bu elemana ait akım ile akı arasındaki ifadeyi açacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$i(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot (e^{\phi(t)} - e^{-\phi(t)})}{\frac{1}{2} \cdot (e^{\phi(t)} + e^{-\phi(t)})}$$

$$i(t).t.(e^{\phi(t)} + e^{-\phi(t)}) - (e^{\phi(t)} - e^{-\phi(t)}) = 0$$

$$i(t).t.(e^{\phi(t)} + \frac{1}{e^{\phi(t)}}) - (e^{\phi(t)} - \frac{1}{e^{\phi(t)}}) = 0$$

$$i(t).t.(e^{2\phi(t)} + 1) - (e^{2\phi(t)} - 1) = 0$$

$$e^{2\phi(t)}[i(t).t - 1] = -[i(t).t + 1]$$

$$e^{2\phi(t)} = -\frac{i(t).t + 1}{i(t).t - 1} \quad \Rightarrow \quad 2\phi(t) = -\ln\frac{i(t).t + 1}{i(t).t - 1}$$

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} \cdot \ln\frac{i(t).t + 1}{i(t).t - 1} \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = -\frac{1}{2} \cdot \ln\frac{t.\sin t + 1}{t.\sin t - 1}$$

Son tahlilde elde edilmiş olan $\phi(t)$ ifadesi aşağıdaki gibi zamana göre türetilmek suretiyle gerilim ifadesi bulunur.

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Uygulama 4. Akım ile akı arasındaki bağıntısı $\phi(t) = -i(t) + i^3(t)$ ifadesi ile verilen bir devre elemanının, aktif bir eleman mı yoksa pasif bir eleman mı olduğunu belirleyiniz.

İlk bakışta bu elemanın bir indüktans (self) elemanı olduğunu, doğrusal olmadığını ve zamanla değişmeyen bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bir devre elemanının aktif olması için aşağıdaki bağıntıyı sağlaması gerekir.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t).dt < 0$$

Aynı zamanda bir indüktans elemanının sargılarında indüklediği elektromotor kuvvet (gerilim) ile akı arasındaki bağıntı ise aşağıdaki gibi idi.

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Verilen akı ifadesini zamana göre türetmek ve enerji ifadesinde yerine koymak suretiyle aşağıdaki denkleme geliriz.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t).[-\frac{di(t)}{dt} + 3i^2(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}].dt$$

$$W(t) = \int_{0}^{i(t)} [-i(t) + 3i^3(t)].di(t) = -\frac{i^2(t)}{2} + \frac{3i^4(t)}{4}\Bigg|_{0}^{i(t)}$$

Bu ifade $i(t) < \sqrt{2/3}$ değerleri için negatif olacağından bu eleman aktif eleman olacaktır.

Uygulama 5. Yük ile gerilim arasındaki bağıntısı $q(t) = v^3(t)$ şeklinde verilen devre elemanının aktif mi yoksa pasif mi olduğunu belirleyiniz.

İlk bakışta bu elemanın bir kapasite elemanı olduğunu, doğrusal olmadığını ve zamanla değişmeyen bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca kapasite elemanının akımı ile üzerindeki yük arasında aşağıdaki bağıntı geçerli idi.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Verilen yük ifadesini zamana göre türetip enerji bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t).dt = v(t).3v^2(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \cdot dt = \int_{0}^{v(t)} 3v^3(t).dv(t) = \left.\frac{3v^4(t)}{4}\right|_{0}^{v(t)} \geq 0$$

Her $v(t)$ değeri için yukarıdaki ifade pozitif olduğundan bu devre elemanı pasif bir elemandır.

Uygulama 6. Tanım bağıntısı $v(t) = i(t) + 1$ ile verilen elemanın toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerini sağlayıp sağlamadıklarını belirleyiniz.

$v(t) = i(t) + 1$ ifadesinde, önce $v(t)$ yerine $v(t) = \alpha v_a(t) + \beta v_b(\mathrm{t})$ ve ardından da $i(t)$ yerine de $i(t) = \alpha i_a(t) + \beta i_b(t)$ koymak suretiyle aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz.

$$\alpha v_a(t) + \beta v_b(\mathrm{t}) = (\alpha i_a(t) + \beta i_b(t)) + 1$$
$$\alpha v_a(t) + \beta v_b(\mathrm{t}) = \alpha i_a(t) + 1 + \beta i_b(t)$$

Diğer taraftan $v_a(t) = i_a(t) + 1$ ve $v_b(t) = i_b(t) + 1$ olduğundan, $\alpha v_a(t)$ ve $\beta v_b(t)$ ifadelerini elde etmek için aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\alpha v_a(t) = \alpha(i_a(t) + 1) = \alpha i_a(t) + \alpha$$
$$\beta v_b(t) = \beta(i_b(t) + 1) = \beta i_b(t) + \beta$$

Yukarıdaki iki ifadeyi topladığımızda aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

$$\alpha v_a(t) + \beta v_b(t) = \alpha i_a(t) + \alpha + \beta i_b(t) + \beta$$

Toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerinin sağlanması için yukarıda elde ettiğimiz iki eşitliğin sağlanması gerekmektedir. Bu şekilde elde ettiğimiz $\alpha v_a(t) + \beta v_b(t)$ ifadesi ile yukarıda elde ettiğimiz $\alpha v_a(t) + \beta v_b(t)$ ifadesi birbirine eşit olmadığından, bu elemanın toplamsallık ve çarpımsallık özelliğini sağlanmadığını söyleyebiliriz.