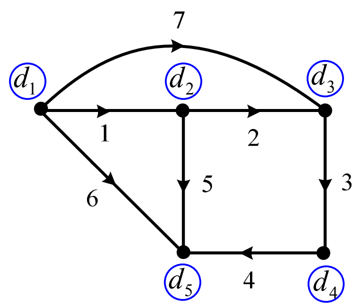
BÖLÜM 5. BAĞIMSIZ AKIM VE GERİLİM DENKLEMLERİ

5.1. Bağımsız akım denklemleri

Teorem 1: Herhangi $n_d - 1$ düğüm için yazılan akım denklemleri bağımsız bir takım oluşturur.

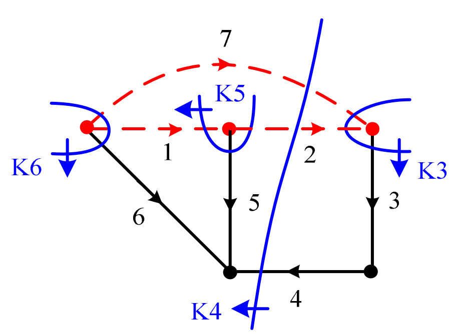
Teorem 2: Temel kesitlemeler için yazılan akım denklemleri bağımsız bir takım oluşturur.



$$\begin{array}{c} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{(5\times7)} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix}_{(7\times1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(5\times1)}$$

$$A_b . I_e(t) = \Theta$$

Yukarıdaki matrisel formun açılması ile ortaya çıkacak olan denklemlerin tüm satırlar toplamı sıfırdır. O halde bağımsız akım denklemleri sayısı $n_d - 1$ den daha büyük yani n_d olamaz.



$$
\begin{array}{c} \\ K3 \\ K4 \\ K5 \\ K6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & & 1 & 2 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ \cdots \\ i_1 \\ i_2 \\ i_7 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Yukarıdaki matris gösteriminde, temel kesitlemeye giren elemanlar (1) veya (-1), girmeyenler (0) ile gösterilir. Aynı matrisi kapalı formda $C_b.I_e(t) = \Theta$ şeklinde de yazabiliriz.

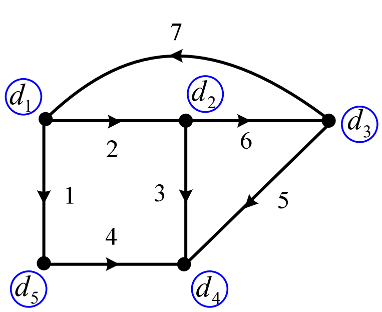
Yukarıdaki matrisi $I_t = \begin{bmatrix} i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$, $I_l = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_7 \end{bmatrix}$, $C_t = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $C_l = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

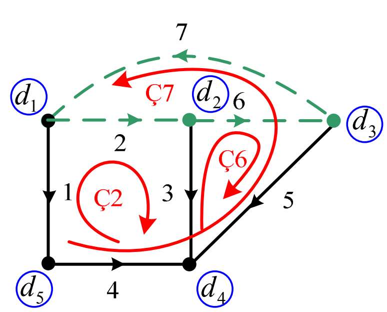
olarak parçalamak suretiyle $\begin{bmatrix} C_t & C_l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_t \\ I_l \end{bmatrix} = [\Theta]$ veya $C_t.I_t + C_l.I_l = \Theta$ veya $U.I_t + C_l.I_l = \Theta$ ifadesini yazabiliriz. Buradan ise $I_t = -C_l.I_l$ yazılabilir. Burada I_l bağımsız kiriş akımları matrisi, I_t bağımlı dal akımları matrisi, C_l kiriş akımlarına ait katsayılar matrisi ve $C_t = U$ ise de dal akımlarına ait katsayılar (birim) matrisidir.

5.2. Bağımsız gerilim denklemleri

Teorem 1: Temel çevreler için yazılan gerilim denklemleri bağımsız bir takım oluşturur.

Teorem 2: Gözler için yazılan gerilim denklemleri bağımsız bir takım oluşturur. En basit çevreye göz denir.





$$\begin{array}{c} \\ Ç2 \\ Ç6 \\ Ç7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \cdots \\ v_2 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris gösteriminde, çevreye giren elemanlar (1) veya (-1), girmeyenler (0) ile gösterilir. Aynı matrisi kapalı formda $B_b.V_e(t) = \Theta$ şeklinde de yazabiliriz.

Yukarıdaki matrisi $V_t = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$, $V_l = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}$, $B_l = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B_t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

olarak parçalamak suretiyle $\begin{bmatrix} B_t & B_l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_t \\ V_l \end{bmatrix} = [\Theta]$ veya $B_t.V_t + B_l.V_l = \Theta$ veya $B_t.V_t + U.V_l = \Theta$ ifadesini yazabiliriz. Buradan ise $V_l = -B_t.V_t$ yazılabilir. Burada V_t bağımsız dal gerilimleri matrisi, V_l bağımlı kiriş gerilimleri matrisi, B_t dal gerilimlerine ait katsayılar matrisi ve $B_l = U$ ise kiriş gerilimlerine ait katsayılar (birim) matrisidir.

$(B_t)_{(n_e - n_d + 1)\times(n_d - 1)}$: Dikdörtgen matris

$(B_l)_{(n_e - n_d + 1)\times(n_e - n_d + 1)}$: Kare matris

$(V_t)_{(n_d - 1)\times 1}$: Sütun matris

$(V_l)_{(n_e - n_d + 1)\times 1}$: Sütun matris

Bağımsız gerilim denklemlerinin sayısı kiriş elemanlarının sayısından az olamaz.

$I_t = -C_l.I_l$

$$I_e = \begin{bmatrix} I_t \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_l.I_l \\ U.I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_l \\ U \end{bmatrix} \cdot I_l$$

$$V_l = -B_t.V_t$$

$$V_e = \begin{bmatrix} V_t \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U.V_t \\ -B_t.V_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ -B_t \end{bmatrix} \cdot V_t$$

Eğer bağımsız kesitlemeler için $C_b = C$ ve yine bağımsız çevreler için $B_b = B$ diyecek olursak, yukarıdaki ifadeler aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$C = \begin{bmatrix} C_t & C_l \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C = \begin{bmatrix} U & C_l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_t & B_l \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} B_t & U \end{bmatrix}$$

Bu durumda diklik(ortogonallik) koşulu aşağıdaki gibi tarif edilebilir.

$$C.B^T = \Theta$$

$$\begin{bmatrix} U & C_l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_t^T \\ U \end{bmatrix} = \Theta$$

$$U.B_t^T + C_l.U = \Theta$$

Yukarıda verilen eşitliklerde $C_l = -B_t^T$ veya $B_t = -C_l^T$ yazılabilir.

$$I_e = \begin{bmatrix} B_t^T \\ U \end{bmatrix} \cdot I_l = \begin{bmatrix} B_t & U \end{bmatrix}^T .I_l = B^T.I_l$$

$$V_e = \begin{bmatrix} U \\ C_l^T \end{bmatrix} \cdot V_t = \begin{bmatrix} U & C_l \end{bmatrix}^T .V_t = C^T.V_t$$

5.3. Devreler teorisinin aksiyomları

5.3.1. Akım denklemleri

$A.I_e = \Theta$, A matrisi herhangi $n_d - 1$ düğüm için yazılan düğüm matrisidir

$C.I_e = \Theta$, C matrisi herhangi bağımsız kesitleme için yazılan kesitleme matrisidir

5.3.2. Gerilim denklemleri

a.) $B.V_e = \Theta$, B matrisi bağımsız çevreler için yazılan çevre matrisidir.

5.3.3. Tellegen teorisi

$$\sum_{k=1}^{n_e} p_k(t) = \sum_{k=1}^{n_e} v_k(t).i_k(t) = V_e^T.I_e = (C^T.V_t)^T.B^T.I_l = \underbrace{V_t^T}_{\text{Dal gerilimleri}} .\overbrace{C.B^T}^{\Theta}. \underbrace{I_l}_{\text{Kiris akimlari}} = 0$$

Yani devredeki elemanlarda harcanan gücün toplamının $\sum_{k=1}^{n_e} p_k(t) = 0$ olduğu görülür. Bunun yanı sıra $P_k(t) = \dfrac{dW_k(t)}{dt}$ tanım bağıntısından dolayı, bu devredeki elemanlara ilişkin enerjilerin toplamı da aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sum_{k=1}^{n_e} \frac{d}{dt} W_k(t) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n_e} W_k(t)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n_e} W_k(t) = K \ \text{(sabit)}$$

5.3.4. Devre denklemleri

1. Tanım eşitlikleri: n_e
2. Bağımsız akım denklemleri: $n_d - 1$
3. Bağımsız gerilim denklemleri: $n_e - n_d + 1$

Toplam denklem sayısı: $2.n_e$

5.3.5. Devre denklemlerine giren elektriksel işaretler

1. Tüm eleman gerilimleri: n_e
2. Tüm eleman akımları: n_e

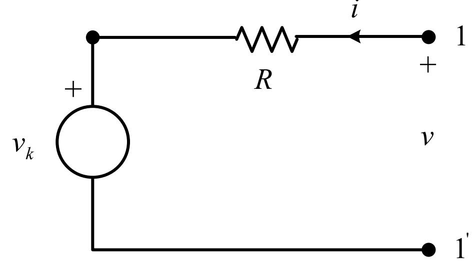
Toplam bilinmeyen sayısı: $2.n_e$

5.4. Devre Çözüm Yöntemleri

5.4.1. Dolaysız yöntemler

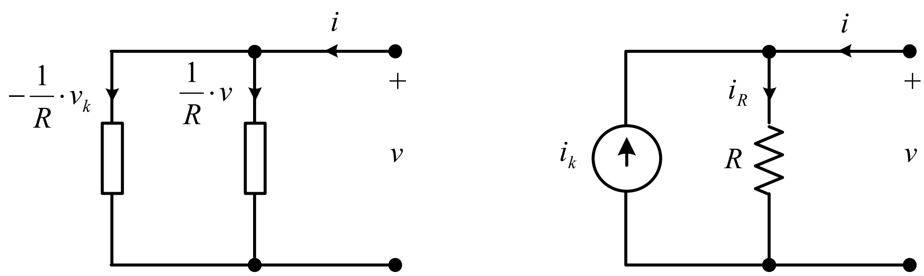
Eşdeğer n kapılı devreler: Aşağıdaki birinci N_1 n kapılısına ilişkin akım ve gerilim bağıntıları, ikinci N_2 n kapılısına ilişkin akım ve gerilim denklemlerini sağlıyorlarsa N_1 ve N_2 devreleri eşdeğerdirler.

Birinci N_1 n kapılı devresi:



$$v = v_R + v_k$$
$$v = R.i + v_k$$
$$i = \frac{v - v_k}{R} = \frac{1}{R} \cdot v - \frac{1}{R} \cdot v_k$$

İkinci N_2 n kapılı devresi:



Yukarıdaki N_1 ve N_2 n kapılı devreleri eşdeğerdirler. Eşdeğerlilik yalnız ve yalnız kapılara ilişkin gerilim ve akımlar için tanımlanır.

5.4.2. Dolaylı yöntemler

a.) Çevre denklemleri: $n_e - n_d + 1$

b.) Düğüm denklemleri: $n_d - 1$

c.) Durum denklemleri: $n_C + n_L$