BÖLÜM 7. DURUM DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

$$\frac{d}{dt}\cdot x(t) = A.x(t) + B.e(t) + B_1.\frac{d}{dt}\cdot e(t)$$

a.) Genel çözüm

b.) Özel çözüm

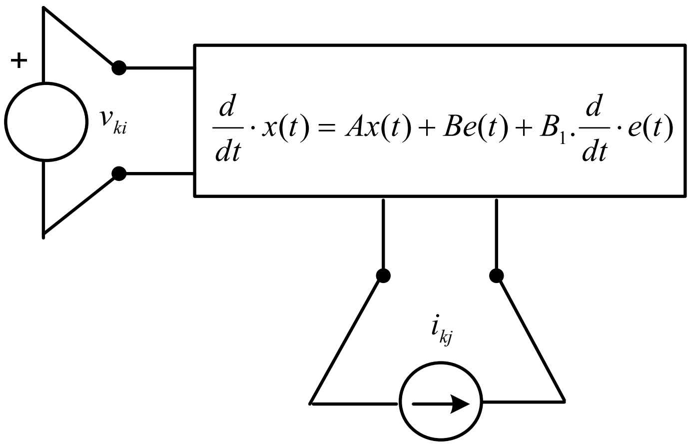
c.) Öz çözüm

d.) Zorlanmış çözüm

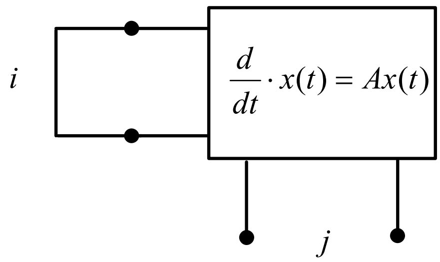
Genel ve özel çözümün toplamı ve yine öz ve zorlanmış çözümün toplamı tam çözümü verir.

a.) Genel çözüm:

Devrede bağımsız kaynaklar var iken sistem şeması aşağıdaki gibidir.



Devrede bağımsız kaynaklar yok iken sistem şeması aşağıdaki gibidir.



Kaynak değişkenlerine ilişkin vektör sıfır yani $e(t)=0$ ise $x_g(t)$ genel çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{d}{dt}\cdot x_g(t)=A.x_g(t)$$

$x_g(t)=C.e^{\lambda t}$ şeklinde genel çözüm tahmini yapılır. Bu durumda;

$$\frac{d}{dt}\cdot x_g(t)=C.\lambda.e^{\lambda.t}=\lambda.x_g(t)$$

sonucu çıkar. Aynı zamanda;

$$\frac{d}{dt}\cdot x_g(t)=A.x_g(t)$$

idi. Yukarıdaki iki ifadenin sol tarafları birbirine eşit olduğundan sağ tarafları da eşit olmak zorundadır. Bu durumda aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\lambda.x_g(t)=A.x_g(t)$$
$$\lambda.x_g(t)-A.x_g(t)=0$$
$$(\lambda.U-A).x_g(t)=0$$

Yukarıdaki ifadeden de görüldüğü üzere $x_g(t)\neq 0$ olması için $\det(\lambda.U-A)=0$ olmalıdır.

$$(\lambda.U-A)=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda.U-A)=\lambda^n+A_{n-1}.\lambda^{n-1}+A_{n-2}.\lambda^{n-2}+\dots\dots\dots+A_1.\lambda+A_0$$

Bu ifade karakteristik polinom olarak adlandırılır. Karakteristik denklem ise aşağıdaki gibidir.

$$\lambda^n + A_{n-1}.\lambda^{n-1} + A_{n-2}.\lambda^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + A_1.\lambda + A_0 = 0$$

Yukarıdaki denklemde λ_i karakteristik denklemin kökleri yani özdeğerleridir.

$$(\lambda_i.U - A).x_{gi}(t) = (\lambda_i - A).x_{gi}(t) = 0$$

Bunun için genel çözüm tahmini $x_{gi}(t) = C_i.e^{\lambda_i t}$ şeklinde olacaktır. Bunun genel çözüm olabilmesi için λ_i nin özdeğer olması lazımdır. Başka bir deyişle karakteristik polinomun çözümü olmalıdır. Bu durumda $(\lambda_i U - A).C_i.e^{\lambda_i.t} = 0$ yazılabilir. Bu ifadeden de $(\lambda_i U - A).C_i = 0$ yazılabilir. O halde genel çözümün i nci bileşeni $x_{gi}(t) = C_i.e^{\lambda_i.t}$ ile gösteriliyorsa, bu durumda $\det(\lambda_i.U - A) = 0$ ve $(\lambda_i.U - A).C_i = 0$ olmalıdır.

$\frac{d}{dt} \cdot x_{gi}(t) = A.x_{gi}(t) \quad i = 1,2,\ldots n$ olmak üzere genel çözüm ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$x_g(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{gi} = \sum_{i=1}^{n} C_i.e^{\lambda_i.t}$$

a.) Özdeğerler k katlı ise, örneğin $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots\ldots = \lambda_k$ ise, bu durumda genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olur.

$$x_g(t) = (C_{11} + C_{12}.t + C_{13}.t^2 + \ldots\ldots + C_{1k}.t^{k-1}).e^{\lambda_1.t} + \sum_{i=k+1}^{n} C_i.e^{\lambda_i.t}$$

b.) Özdeğerler komplex (karmaşık) eşlenik ise, örneğin $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ komplex eşlenik bir çift ise, bu durumda $\lambda_1 = \sigma_1 + j.\omega_1$ ve $\lambda_2 = \sigma_1 - j.\omega_1$ olur. Bu durumda genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olur.

$$x_g(t) = C_1.e^{\lambda_1.t} + C_2.e^{\lambda_2.t} + \sum_{i=3}^{n} C_i.e^{\lambda_i.t}$$

Bu durumda $C_2 = \overline{C_1}$ olur. Bunun neticesinde $(\lambda_1.U - A).C_1 = 0$ ve $(\underbrace{\overline{\lambda_1}}_{\lambda_2}.U - A).\underbrace{\overline{C_1}}_{C_2} = 0$ olur.

$$C_1.e^{\lambda_1.t} + C_2.e^{\lambda_2.t} = 2\,\mathrm{Re}\left\{C_1.e^{\lambda_1.t}\right\}$$

Yukarıdaki ifadede $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ olmalıdır. Ayrıca $C_1 = C_{1r} + jC_{1i}$ olarak yazılabilir. Bu durumda;

$$C_1.e^{\lambda_1.t} = (C_{1r} + jC_{1i}).e^{\sigma_1.t}.(\cos\omega_1.t + j\sin\omega_1.t)$$
$$\mathrm{Re}\left\{C_1.e^{\lambda_1.t}\right\} = e^{\sigma_1.t}.(C_{1r}\cos\omega_1.t - C_{1i}\sin\omega_1.t)$$
$$C_1.e^{\lambda_1.t} + C_2.e^{\lambda_2.t} = 2e^{\sigma_1.t}.(C_{1r}\cos\omega_1.t - C_{1i}\sin\omega_1.t)$$

b.) Özel çözüm:

Durum uzayı en genel halde aşağıdaki biçimde daha önceden verilmiş idi.

$$\frac{d}{dt}\cdot x(t) = A.x(t) + B.e(t) + B_1.\frac{d}{dt}\cdot e(t)$$

Bu durumda devrenin özel çözümünü bulmak için devredeki kaynakların cinsine göre özel çözüm tahmini yapılır. Bu çerçevede üç değişik kaynak biçimi için özel çözüm tahminleri aşağıda verilmiştir.

1.) $e(t) = E_0.u(t) \quad \Rightarrow \quad x_{ö}(t) = K.u(t)$

2.) $e(t) = E_0.e^{\alpha.t} \quad \Rightarrow \quad x_{ö}(t) = K.e^{\alpha.t}$

3.) $e(t) = E_1.\sin\omega t + E_2.\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad x_{ö}(t) = A.\sin\omega t + B.\cos\omega t$

Daha sonra genel çözüm ile özel çözüm toplanmak suretiyle tam çözüme ulaşılır. Yani;

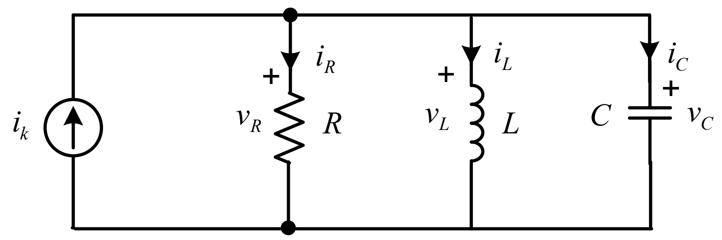
$$x_T(t) = x_g(t) + x_{ö}(t)$$

Örnek 1. Bölüm 6 daki üçüncü uygulamada verilen devre ile bu devreye ait durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir. Bu devrede $i_k(t) = u(t)\,A$, $R = 3\,\Omega$, $L = 4\,H$, $C = \frac{1}{12}\,F$, $v_C(0) = 2\,V$ ve $i_L(0) = 1\,A$ olduğuna göre bu devrenin;

a.) Genel çözümünü

b.) Özel çözümünü

c.) Tam çözümünü bulunuz.



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R.C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_k \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_k$$

a.) Genel çözüm

Öncelikle karakteristik polinomun belirlenmesi için aşağıdaki eşitlik kurulur.

$$(\lambda.U - A) = \begin{bmatrix} \lambda + 4 & 12 \\ -\frac{1}{4} & \lambda \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadeden karakteristik polinom ve karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\det(\lambda.U - A) = \lambda^2 + 4.\lambda + 3$$

$$\det(\lambda.U - A) = 0 \text{ yani } \lambda^2 + 4.\lambda + 3 = 0$$

Özdeğerler ise, karakteristik denklemden $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -3$ bulunur. Görüldüğü gibi özdeğerler reeldir. O halde genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x_g(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g = C_1.e^{-t} + C_2.e^{-3t}$$

Yukarıdaki genel çözüm ifadesindeki C_1 ve C_2 katsayıları $(\lambda_1.U - A).C_1 = 0$ ve $(\lambda_2.U - A).C_2 = 0$ özvektörleri yardımı ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3C_{11} + 12C_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{11} = -4C_{21}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -\frac{1}{4} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_{12} + 12C_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{12} = -12C_{22}$$

Elde edilen bu C_{11} ve C_{12} değerlerinin yerine konması sonucunda genel çözüm ifadesi aşağıdaki şekilde bulunmuş olur.

$$x_g(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21}.e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22}.e^{-3t}$$

b.) Özel çözüm

Devredeki bağımsız akım kaynağı birim basamak fonksiyonu biçiminde olduğundan, özel çözüm tahmini de ona göre aşağıdaki gibi yapılır.

$$x_ö(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_ö = K.u(t) = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} .u(t)$$

$$\frac{d}{dt} \cdot x_ö(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} .u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t > 0 \text{ olması halinde}$$

Bu sonucu durum denkleminin en genel ifadesinde yerine koymak suretiyle aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0 \text{ ve } K_2 = 1$$ bulunur. Bu değerleri özel çözüm tahmininde yerine koymak suretiyle aşağıdaki sonuca geliriz.

$$x_ö(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_ö = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

Tam çözüm ailesi ise genel çözüm ile özel çözümün toplamından meydana geliyordu. Bu durumda bulmuş olduğumuz genel ve özel çözüm ifadelerini toplarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g + \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_ö = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21}.e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22}.e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

Soruda bize verilen kapasite gerilimine ve endüktans akımına ait başlangıç koşullarını kullanmak suretiyle, yukarıdaki denklemde bilinmeyen C_{21} ve C_{22} katsayılarını da bulmuş ve böylece tam çözüme ulaşmış oluruz. O halde $t = 0$ anında;

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan C_{21} ve C_{22} katsayıları da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-4+12} \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{8} \\ -\frac{2}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t) \qquad t > 0 \text{ için.}$$

veya

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}_g}_{x_g(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4.e^{-t} & -12.e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{bmatrix}}_{F(t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix}}_{S}$$

Yani kısaca $x_g(t) = F(t).S$ yazılabilir. Tam çözüm ise aşağıdaki gibi idi.

$$x_T(t) = x(t) = x_g(t) + x_ö(t)$$

$$x(t) = F(t).S + x_ö(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,V \\ 1\,\mathrm{A} \end{bmatrix}$$

$$x(0) = F(0).S + x_ö(0)$$

$$F(0).S = x(0) - x_ö(0)$$

$$S = F^{-1}(0).[x(0) - x_ö(0)]$$

Bulunan bu S terimini, $x(t)$ ifadesinde yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$x(t) = F(t).F^{-1}(0).[x(0) - x_ö(0)] + x_ö(t)$$

c.) Öz çözüm

Devrede kaynaklar yok (kaynak değişkeni vektörü sıfır iken, yani bağımsız gerilim kaynakları kısa devre, bağımsız akım kaynakları açık devre) iken ki tam çözümdür.

$$x(t) = F(t).S + x_ö(t)$$

$e(t) = 0$ olduğunda $x_ö(t) = 0$ olur. Bu durumda $x(t) = F(t).S$ olacaktır. O halde;

$$x(0) = F(0).S \quad \Rightarrow \quad S = F^{-1}(0).x(0)$$

Bulunan bu S terimini, $x(t)$ ifadesinde yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$x_{öz}(t) = F(t).F^{-1}(0).x(0)$$

$t \rightarrow \infty$ iken yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki ifadenin sıfıra gitmesi gerekir.

$$x_{öz}(t) = \phi(t).x(0)$$

$$\phi(t) = F(t).F^{-1}(0)$$

Bu ifadeye durum geçiş matrisi adı verilir.

Örnek 2. Örnek 1 de verilen devrenin öz çözümünü bulunuz.

$$x_g(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21}.e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22}.e^{-3t}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-4+12} \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{8} \\ -\frac{6}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$x_{öz}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{7}{4} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot e^{-3t}$$

$$x_{öz}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} -7 \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 9 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot e^{-3t}$$

$$x_{öz}(0) = \begin{bmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t \to \infty} x_{öz}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=\begin{bmatrix}-4.e^{-t} & -12.e^{-3t}\\ e^{-t} & e^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4 & -12\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-4.e^{-t} & -12.e^{-3t}\\ e^{-t} & e^{-3t}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}1 & 12\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\begin{bmatrix}-4.e^{-t}+12.e^{-3t} & -48.e^{-t}+48.e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & 12.e^{-t}-4.e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\phi(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\phi(t)=F(t).F^{-1}(0)$$

Tam çözüm aşağıdaki gibi verilmiş idi.

$$x(t)=\phi(t).\left[x(0)-x_{ö}(0)\right]+x_{ö}(t)$$

Öz çözüm ise yine aşağıdaki gibi verilmiş idi.

$$x_{öz}(t)=\phi(t).x(0)$$

Bu durumda öz çözümün, $x(0)$ başlangıç koşullarının var ve $e(t)=0$ (kaynakların yok) olduğu durumdaki tam çözüm olduğunu söyleyebiliriz.

d.) Zorlanmış çözüm

$x(0)=0$ (başlangıç koşullarının yok) ve $e(t)\neq 0$ (kaynakların var) olduğu durumdaki tam çözüm olduğunu söyleyebiliriz. Bir başka ifade ile başlangıç koşulları sıfır alınarak bulunan tam çözümdür. Yani devrede sıfır anındaki değerler(başlangıç koşulları) sıfır olmayabilir. Bu değerleri sıfır almak suretiyle işlem yapılarak zorlanmış çözüm bulunur.

$$x(t)=F(t).S+x_{ö}(t)$$

$$0=x(0)=F(0).S+x_{ö}(0)\quad\Rightarrow\quad S=-F^{-1}(0).x_{ö}(0)$$

$$x_{zor}(t)=-F(t).F^{-1}(0).x_{ö}(0)+x_{ö}(t)\quad\Rightarrow\quad x_{zor}(t)=-\phi(t).x_{ö}(0)+x_{ö}(t)$$

Örnek 3. Örnek 1 de verilen devrenin zorlanmış çözümünü bulunuz.

Tam çözüm ailesi aşağıdaki gibi bulunmuş ve başlangıç koşulları da yine aşağıdaki gibi verilmiş idi.

$$\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21}.e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22}.e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t) \qquad x(0) = \begin{bmatrix} v_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,V \\ 1\,V \end{bmatrix}$$

Burada verilen başlangıç koşullarını kullanmayıp, başlangıç koşulları yerine sıfır alacağız. Bu durumda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} C_{21} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} C_{22} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{-4+12} \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12}{8} \\ \frac{4}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{zor} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-3t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

Açıklama:

Tam çözüm daha önceden $x_T(t) = x_g(t) + x_ö(t)$ şeklinde bulunmuş idi. Tam çözüm bundan başka $x_T(t) = x_{öz}(t) + x_{zor}(t)$ şeklinde de ifade edilir. $x_{öz}(t)$ ve $x_{zor}(t)$ ifadelerini durum geçiş matrisi cinsinden yazıp, elde edilen ifadeyi tekrardan düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$x_T(t) = \phi(t).x(0) - \phi(t).x_ö(0) + x_ö(t)$$
$$x_T(t) = \phi(t).[x(0) - x_ö(0)] + x_ö(t)$$

Bu son ifadede $t \to \infty$ iken $x_{öz}(t) \to 0$ olur. Bu durumda $t \to \infty$ iken $x_T(t) \to x_{zor}(t)$ olur.

Özdeğerlerin katlı olması halinde genel çözümün bulunması:

Genel çözüm tahmini daha önceden aşağıdaki gibi yapılmıştı.

$$x_g(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i.e^{\lambda_i.t}$$

Burada özdeğerler katsız ise $\det(\lambda_i.U - A) = 0$ ve $(\lambda_i.U - A).C_i = 0$ olması gerektiği belirtilmiş idi. Özdeğerlerin katlı olması durumunda ise, yani $\lambda_1 = \lambda_2$ ise, genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi yapılacaktır.

$$x_g(t) = (C_1 + C_2.t).e^{\lambda_1.t} + \sum_{i=3}^{n} C_i.e^{\lambda_i.t}$$

Genel çözümü bulurken kaynaklar devre harici olduğundan aşağıdaki ifade geçerli idi.

$$\frac{d}{dt} \cdot x(t) = A.x(t)$$

Genel çözümün tahminini ve türevini yukarıdaki genel çözüm ifadesinde yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$\lambda_1.e^{\lambda_1.t}.(C_1 + C_2.t) + C_2.e^{\lambda_1.t} = A.(C_1 + C_2.t).e^{\lambda_1.t}$$

$$\lambda_1.(C_1 + C_2.t) + C_2 = A.(C_1 + C_2.t)$$

$$\lambda_1.C_2 = AC_2 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1.U - A).C_2 = \Theta$$

$$\lambda_1.C_1 + C_2 = A.C_1 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1.U - A).C_1 + C_2 = \Theta$$

Uygulama 1. Durum denklemleri aşağıdaki gibi verilmiş olan devrenin;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot i_k(t) \qquad i_k(t) = \cos t \qquad \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,A \\ 1\,V \end{bmatrix}$$

a.) Genel çözümünü

b.) Özel çözümünü

c.) Öz çözümünü

d.) Zorlanmış çözümünü

e.) Tam çözümünü bulunuz.

a.) Genel çözüm

Öncelikle karakteristik polinomun belirlenmesi için aşağıdaki eşitlik kurulur.

$$(A-\lambda.U)=\begin{bmatrix}-2-\lambda & -1\\ 2 & -\lambda\end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadeden karakteristik polinom ve karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\det(A-\lambda.U)=\lambda^2+2\lambda+2=0$$

Özdeğerler, karakteristik denklemden $\lambda_1=-1+j$ ve $\lambda_2=-1-j$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi özdeğerler komplex eşleniktir. O halde genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix}_g=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}\cdot e^{\lambda_1.t}+\begin{bmatrix}C_3\\ C_4\end{bmatrix}\cdot e^{\lambda_2.t}$$

$$\lambda_1\cdot\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}\cdot e^{\lambda_1.t}+\lambda_2\cdot\begin{bmatrix}C_3\\ C_4\end{bmatrix}\cdot e^{\lambda_2.t}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\left\{\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}\cdot e^{\lambda_1.t}+\begin{bmatrix}C_3\\ C_4\end{bmatrix}\cdot e^{\lambda_2.t}\right\}$$

$$\lambda_1\cdot\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2\cdot\begin{bmatrix}C_3\\ C_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}C_3\\ C_4\end{bmatrix}$$

Bu iki denklem takımının çözümünden C_1 ve C_3 katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$C_1 = \frac{\lambda_1 . C_2}{2} \text{ ve } C_3 = \frac{\lambda_2 . C_4}{2}$$

Elde edilen bu değerlerin yerine konması sonucunda genel çözüm ifadesi aşağıdaki şekilde bulunmuş olur.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1 . C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1 . t} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2 . C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2 . t}$$

b.) Özel çözüm

Devredeki bağımsız akım kaynağı sinüzoidal biçimli olduğundan, özel çözüm tahmini de ona göre aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_ö = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

$$-\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cdot \sin t + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \cdot \cos t = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \cdot \sin t \right\} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \cos t$$

$$-\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} -A &= -2C - D \\ -B &= 2C \\ C &= -2A - B + 2 \\ D &= 2A + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 3/5 \\ B &= 8/5 \\ C &= -4/5 \\ D &= 11/5 \end{aligned}$$

Bu değerler yerlerine yerleştirildiğinde özel çözüm için aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_ö = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

e.) Tam çözüm

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1.C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1.t} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2.C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2.t} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1.C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2.C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemlerden $C_2 = \dfrac{(-3 - j11)}{10}$ ve $C_4 = \dfrac{(-3 + j11)}{10}$ olarak bulunur. Bu değerlerin tam çözüm ailesi ifadesinde yerine konması neticesinde bu devrenin tam çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1+j)}{2} \cdot \dfrac{(-3-j11)}{10} \\ \dfrac{(-3-j11)}{10} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1+j).t} + \begin{bmatrix} \cdot \dfrac{(-1-j)}{2} \cdot \dfrac{(-3+j11)}{10} \\ \dfrac{(-3+j11)}{10} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1-j).t} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

Bu ifadeyi düzenleyecek olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \dfrac{(14+j8)}{20} \\ \dfrac{(-3-j11)}{10} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot (\cos t + j \sin t) + \begin{bmatrix} \dfrac{(14-j8)}{20} \\ \dfrac{(-3+j11)}{10} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot (\cos t - j \sin t) + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \dfrac{28}{20} \\ -\dfrac{12}{20} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{16}{20} \\ \dfrac{22}{20} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \sin t + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

c.) Öz çözüm

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1.t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2.t} \qquad \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1.C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1.t} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2.C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2.t}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1.C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2.C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemlerden $C_2 = \dfrac{(1+j5)}{2}$ ve $C_4 = \dfrac{(1-j5)}{2}$ olarak bulunur. Bu değerlerin genel çözüm ailesi ifadesinde yerine konması neticesinde bu devrenin öz çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1+j)}{2} \cdot \dfrac{(1-j5)}{2} \\ \dfrac{(1-j5)}{2} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1+j).t} + \begin{bmatrix} \dfrac{(-1-j)}{2} \cdot \dfrac{(1+j5)}{2} \\ \dfrac{(1+j5)}{2} \end{bmatrix} \cdot e^{(-1-j).t}$$

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \sin t$$

d.) Zorlanmış çözüm

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1.C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_1.t} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2.C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda_2.t} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1.C_2}{2} \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_2.C_4}{2} \\ C_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemlerden $C_2 = \dfrac{(-4+j7)}{5}$ ve $C_4 = \dfrac{(-4-j7)}{5}$ olarak bulunur. Bu değerlerin tam çözüm ailesi ifadesinde yerine konması neticesinde bu devrenin zorlanmış çözümü aşağıdaki gibi elde edili9r.

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{zor} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-3-j11)}{10} \\ \dfrac{(-4+j7)}{5} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot (\cos t + j\sin t) + \begin{bmatrix} \dfrac{(-3+j11)}{10} \\ \dfrac{(-4+j7)}{5} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot (\cos t - j\sin t) + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{zor} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} \frac{22}{10} \\ -\frac{14}{5} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \sin t + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

Tam çözüm aynı zamanda öz ve zorlanmış çözümlerin toplamı olacağından, yukarıda elde edilen öz ve zorlanmış çözümleri toplamak suretiyle aşağıdaki sonuca gelinir.

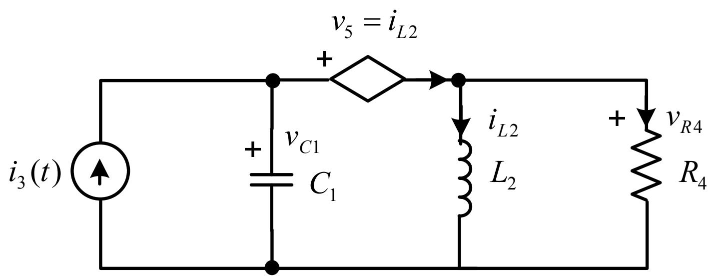
$$x_T(t) = x_{öz}(t) + x_{zor}(t)$$

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{T} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \sin t + \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} \frac{22}{10} \\ -\frac{14}{5} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \sin t + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}_{T} = \begin{bmatrix} \frac{28}{20} \\ -\frac{12}{20} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\frac{16}{20} \\ \frac{22}{20} \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \cdot \sin t + \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \cos t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix} \cdot \sin t$$

Uygulama 2. Aşağıda verilen devrenin eleman değerleri $i_k(t) = u(t)\,A$, $R_4 = 1\,\Omega$, $L_2 = 1\,H$, $C_1 = 1\,F$, $v_C(0) = 2\,V$ ve $i_L(0) = 1\,A$ olmak üzere durum denklemleri yine aşağıda verilmiştir Bu devrenin;

a.) Genel çözümünü
b.) Özel çözümünü
c.) Öz çözümünü
d.) Zorlanmış çözümünü
e.) Tam çözümünü
f.) $i_3(t) = 0$ iken $v_{R4}(t)$ yi bulunuz



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_3(t)$$

a.) Genel çözüm

Öncelikle karakteristik polinomun belirlenmesi için aşağıdaki eşitlik kurulur.

$$(A - \lambda.U) = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadeden karakteristik polinom ve karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\det(A - \lambda.U) = (1+\lambda)^2 = 0$$

Özdeğerler, karakteristik denklemden $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi özdeğerler katlıdır. O halde genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t}$$

$$-\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} - t \cdot \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

Bu iki denklem takımının çözümünden $C_4 = C_1$ ve $C_3 = 0$ olarak gibi elde edilir. Elde edilen bu değerlerin yerine konması sonucunda genel çözüm ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t}$$

b.) Özel çözüm

Devredeki $i_3(t)$ bağımsız akım kaynağı birim basamak fonksiyonu biçiminde olduğundan, özel çözüm tahmini de ona göre aşağıdaki gibi yapılır.

$$x_{\ddot{o}}(t)=\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_{\ddot{o}} = K.u(t)=\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\cdot x_{\ddot{o}}(t)=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}.u(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t>0 \text{ olması halinde}$$

Bu sonucu durum denkleminin en genel ifadesinde yerine koymak suretiyle aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}\cdot u(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad K_1=1$ ve $K_2=1$ bulunur. Bu değerleri özel çözüm tahmininde yerine koymak suretiyle aşağıdaki sonuca geliriz.

$$x_{\ddot{o}}(t)=\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_{\ddot{o}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.u(t)$$

c.) Öz çözüm

$t=0$ anındaki başlangıç koşullarını genel çözüm ailesinde yerine koymak suretiyle;

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bunları genel çözüm ailesinde yerine koyarak öz çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_{\ddot{o}z}(t)=\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_{\ddot{o}z}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot e^{-t}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot t\cdot e^{-t}$$

d.) Zorlanmış çözüm

Tam çözüm ailesinde $t = 0$ anında başlangıç koşullarını yerine sıfır koymak suretiyle C_1 ve C_2 katsayıları belirlenir. O halde;

$$\begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Buradan $C_1 = -1$ ve $C_2 = -1$ olduğu görülür. Bu değerler tam çözüm ailesinde yerine konmak suretiyle zorlanmış çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_{zor}(t) = \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_{zor} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

e.) Tam çözüm

Tam çözüm= Genel Çözüm+Özel Çözüm=Öz çözüm+Zorlanmış çözüm olduğundan bunları toplamak suretiyle tam çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

f.) Devreye bakarak $v_{R4}(t) = v_{L2}(t)$ olduğunu görürüz. O halde;

$$v_{R4}(t) = v_{L2}(t) = L_2 \frac{d}{dt} \cdot i_{L2}(t) = L_2 \frac{d}{dt} \cdot [t.e^{-t} + u(t)] = L_2 (e^{-t} - t.e^{-t}) = L_2.e^{-t} - L_2.t.e^{-t}$$

olarak bulunur.

Uygulama 3. Durum denklemleri ve başlangıç koşulları aşağıda gibi verilmiş olan devrenin;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \cos 2t \qquad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = -1 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a.) Genel çözümünü

b.) Özel çözümünü

c.) Öz çözümünü

d.) Zorlanmış çözümünü

e.) Tam çözümünü bulunuz.

a.) Genel çözüm

Öncelikle karakteristik polinomun belirlenmesi için aşağıdaki eşitlik kurulur.

$$(A - \lambda.U) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadeden karakteristik polinom ve karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\det(A - \lambda.U) = \lambda^2(-1-\lambda) = 0$$

Özdeğerler, karakteristik denklemden $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = -1$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi özdeğerlerin iki tanesi katlıdır. O halde genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$

$$\begin{bmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} \right\}$$

Buradaki dokuz sabit değeri üç sabite indirmek zorundayız. O halde;

$$\begin{bmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \qquad C_4 = 0\,, \quad C_5 = C_1$$

$$\begin{bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \end{bmatrix} \qquad C_7 = 0\,, \quad C_8 = 0\,, \quad C_9 = -C_9 \text{ olduğundan } C_9 = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \qquad C_4 = 0\,, \quad 2C_4 + 3C_5 - C_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_6 = 3C_1$$

Bu değerleri genel çözüm tahmininde yerine koymak suretiyle genel çözüm ailesini buluruz.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_g = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$

b.) Özel çözüm

Devredeki kaynak sinüzoidal olduğundan özel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_ö = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \cos 2t + \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} \cdot \sin 2t$$

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \sin 2t + 2 \cdot \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} \cdot \cos 2t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cdot \cos 2t + \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} \cdot \sin 2t \right\} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \cos 2t$$

$$-2 \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix}$$

$$2\cdot\begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu altı denklem çözülmek suretiyle altı bilinmeyen aşağıdaki gibi bulunur.

$A = 0$, $B = -\dfrac{3}{4}$, $C = -4$, $D = \dfrac{3}{2}$, $E = 1$ ve $F = -2$

Bu değerler öz çözüm ailesinde yerine konmak suretiyle öz çözüm elde edilir.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_{ö} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix}\cdot\cos 2t + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\sin 2t$$

b.) Öz çözüm

Genel çözüm ailesinde $t = 0$ anındaki başlangıç koşulları yerine konmak suretiyle geri kalan diğer üç sabit bulunur ve yerine konarak öz çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_{g} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot e^{-t}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_{öz} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d.) Zorlanmış çözüm

$x_T(t) = x_g(t) + x_ö(t)$ olduğundan burada $t = 0$ anındaki başlangıç koşulları değil de, başlangıç koşulları yerine sıfır konmak suretiyle geri kalan diğer üç sabit bulunur ve tam çözüm ailesinde yerine konarak zorlanmış çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \sin 2t$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{3}{4} \\ C_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_{zor} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \sin 2t$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_{zor} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \sin 2t$$

e.) Tam çözüm

$x_T(t) = x_{öz}(t) + x_{zor}(t)$ olduğundan tam çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \sin 2t$$

Aynı zamanda $x_T(t) = x_g(t) + x_ö(t)$ olduğundan, burada $t = 0$ anındaki gerçek başlangıç koşulları yerine konmak suretiyle geri kalan diğer üç sabit bulunur ve yerine konarak tam çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \\ 3C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix}\cdot\cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\sin 2t$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} C_1 &= 1 \\ C_2 &= \frac{3}{4} \\ C_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 3 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -4 \end{bmatrix}\cdot\cos 2t + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\sin 2t$$

Uygulama 4. Örnek 1 deki devrenin eleman değerleri $i_k(t) = u(t)\,A$, $R = 1\,\Omega$, $L = 2\,H$, $C = \frac{1}{2}F$, $v_C(0) = -4\,V$ ve $i_L(0) = 2\,A$ olmak üzere, devrenin durum denklemleri aşağıdaki gibi verildiğine göre devrenin;

a.) Genel çözümünü

b.) Özel çözümünü

c.) Tam çözümünü bulunuz.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot i_k$$

a.) Genel çözüm

Öncelikle karakteristik polinomun belirlenmesi için aşağıdaki eşitlik kurulur.

$$(\lambda.U - A) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki ifadeden karakteristik polinom ve karakteristik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$\det(\lambda.U - A) = \lambda^2 + 2.\lambda + 1$

$\det(\lambda.U - A) = 0$ olmalıdır, yani $\lambda^2 + 2.\lambda + 1 = 0$

Özdeğerler ise, karakteristik denklemden $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ bulunur. Görüldüğü gibi özdeğerler katlıdır. O halde genel çözüm tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x_g(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g = C_1.e^{-t} + C_2.t.e^{-t}$$

Yukarıdaki genel çözüm ifadesindeki C_1 ve C_2 katsayıları $(\lambda_2.U - A).C_2 = 0$ ve $(\lambda_1.U - A).C_1 + C_2 = 0$ özvektörleri yardımı ile aşağıdaki gibi bulunur.

$C_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ve $C_2 = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ olmak üzere özvektörler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad C + 2D = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -2D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + 2B + C = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -2B - C \quad \Rightarrow \quad A = -2B + 2D$$

Elde edilen bu A ve C değerlerinin yerine konması sonucunda genel çözüm ailesi aşağıdaki şekilde bulunmuş olur.

$$x_g(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g = C_1.e^{-t} + C_2.t.e^{-t} = \begin{bmatrix} -2B + 2D \\ B \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} -2D \\ D \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t}$$

b.) Özel çözüm

Devredeki bağımsız akım kaynağı birim basamak fonksiyonu biçiminde olduğundan, özel çözüm tahmini de ona göre aşağıdaki gibi yapılır.

$$x_{ö}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{ö} = K.u(t) = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} .u(t)$$

$$\frac{d}{dt} \cdot x_{ö}(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} .u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad t > 0 \text{ olması halinde}$$

Bu sonucu durum denkleminin en genel ifadesinde yerine koymak suretiyle aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \cdot u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0$ ve $K_2 = 1$ bulunur. Bu değerleri özel çözüm tahmininde yerine koymak suretiyle özel çözümü aşağıdaki gibi buluruz.

$$x_{ö}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{ö} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

Tam çözüm ailesi ise genel çözüm ile özel çözümün toplamından meydana geliyordu. Bu durumda bulmuş olduğumuz genel ve özel çözüm ifadelerini toplarsak tam çözüm ailesi için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$x_T(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_g + \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_{ö} = \begin{bmatrix} -2B + 2D \\ B \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} -2D \\ D \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$$

b.) Tam çözüm

Başlangıç koşullarını tam çözüm ailesinde yerine koyarak tam çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2B + 2D \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Buradan $B = 1$ ve $D = -1$ bulunur. Bunları yukarıda yerine koyarsak $t > 0$ için $x_T(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .u(t)$ olarak bulunur.

Ödev 1: Bölüm 6 daki uygulama 8 e ait devrede;

a.) $v_C(t)$ ye ilişkin tam çözüm özel çözüme eşit olması için $v_C(0)$ başlangıç değeri ne olmalıdır?

b.) $v_C(0) = 1\,V$ olduğuna göre $v_C(t)$ ye ilişkin öz ve zorlanmış çözümleri bulunuz.

Ödev 2: Bölüm 6 daki uygulama 7 ye ait devrede $i_L(0) = 2\,A$ olduğuna göre $i_L(t)$ ye ilişkin öz ve zorlanmış çözümleri bulunuz.