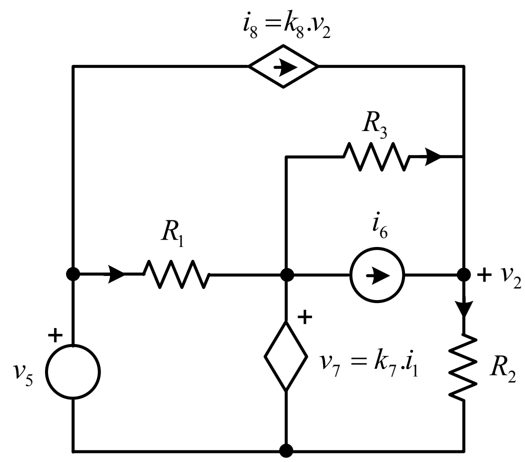
BÖLÜM 6. DEVRE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

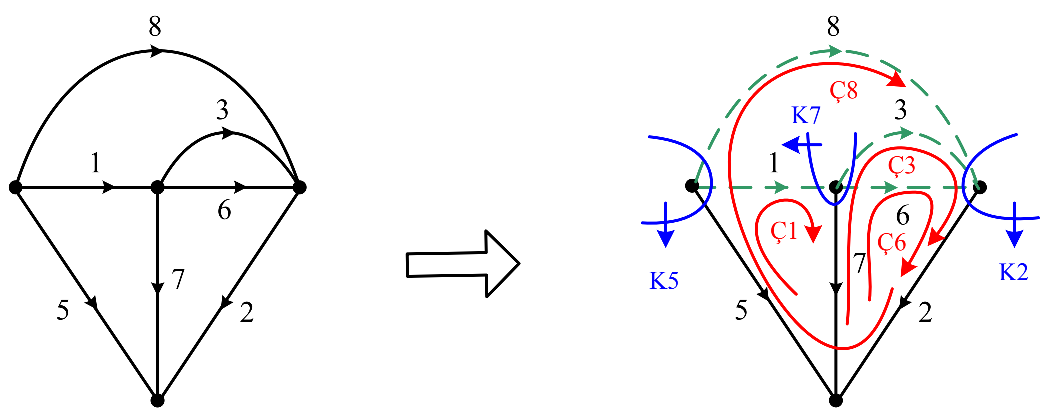
6.1. ÇEVRE DENKLEMLERİ

6.1.1. Temel çevrelere ilişkin çevre denklemleri

Örnek: Aşağıdaki devrenin temel çevreler için çevre denklemlerini adım adım yazınız.



Birinci adım: Devrenin grafı çizilip uygun ağacı çıkarılır.



İkinci adım: Temel çevreler için gerilim(çevre) denklemleri yazılır.

$v_1 + v_7 - v_5 = 0$

$v_3 + v_2 - v_7 = 0$

$v_6 + v_2 - v_7 = 0$

$v_8 + v_2 - v_5 = 0$

Üçüncü adım: Direnç elemanlarının tanım bağıntıları yazılır.

$$
\begin{aligned}
R_1.i_1 + v_7 - v_5 &= 0 && \Rightarrow && R_1.i_1 = v_5 - v_7 \\
R_3.i_3 + R_2.i_2 - v_7 &= 0 && \Rightarrow && R_3.i_3 + R_2.i_2 = v_7 \\
R_2.i_2 + v_6 - v_7 &= 0 && \Rightarrow && R_2.i_2 = -v_6 + v_7 \\
R_2.i_2 - v_5 + v_8 &= 0 && \Rightarrow && R_2.i_2 = v_5 - v_8
\end{aligned}
$$

Dördüncü adım: Temel kesitlemeler için yazılan akım denklemlerinden yararlanılarak dal olan direnç akımları kiriş akımları cinsinden bulunur. Örneğin:

$$i_2 = i_6 + i_3 + i_8$$

Beşinci adım: Kiriş akımları cinsinden bulunan dal akımları üçüncü adımda yerine konur.

$$
\begin{aligned}
R_1.i_1 &= v_5 - v_7 && \Rightarrow && R_1.i_1 = v_5 - v_7 \\
R_3.i_3 + R_2.i_2 &= v_7 && \Rightarrow && (R_3 + R_2).i_3 + R_2.i_6 + R_2.i_8 = v_7 \\
R_2.i_2 &= -v_6 + v_7 && \Rightarrow && R_2.i_3 + R_2.i_6 + R_2.i_8 = -v_6 + v_7 \\
R_2.i_2 &= v_5 - v_8 && \Rightarrow && R_2.i_3 + R_2.i_6 + R_2.i_8 = v_5 - v_8
\end{aligned}
$$

Altıncı adım: Ek denklemler yazılır.

1. v_5 biliniyor. Örneğin bu değer $v_5(t) = u(t)$ birim basamak fonksiyonu olabilir.
2. i_6 biliniyor. Örneğin bu değer $i_6(t) = \sin t$ fonksiyonu olabilir.
3. $v_7 = k_7.i_1$ bilinmiyor. Çünkü i_1 bilinmiyor.
4. $i_8 = k_8.v_2 = k_8.R_2.i_2 = k_8.R_2.(i_6 + i_3 + i_8)$ yazarak onu da buluruz.

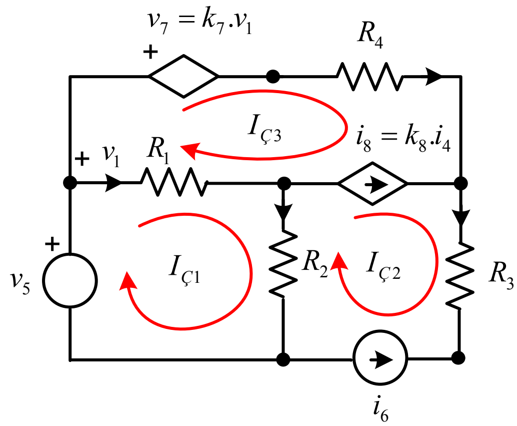
Ayrıca i_2 akımını i_3 ve i_6 cinsinden de aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$i_2 = i_6 + i_3 + i_8 = i_6 + i_3 + k_8.R_2.i_2$$
$$(1 - k_8.R_2).i_2 = i_6 + i_3$$
$$i_2 = \frac{1}{(1 - k_8.R_2)} \cdot (i_6 + i_3) \quad \text{ve} \quad i_8 = \frac{k_8}{(1 - k_8.R_2)} \cdot (R_2.i_6 + R_2.i_3)$$

Burada v_6, v_8, i_1 ve i_3 değerleri bilinmiyor. Bununla beraber dört adet denklemimiz mevcuttur. Bu dört denklemden yukarıdaki dört adet bilinmeyen bulunabilir.

6.1.2. Bağımsız çevrelere ilişkin çevre denklemleri

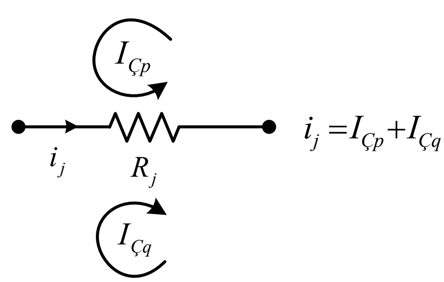
Örnek: Aşağıdaki devrenin çevre denklemlerini bağımsız çevreler için adım adım yazınız.



1. Bağımsız çevrelere ilişkin çevre denklemleri ve ardından direnç elemanlarının gerilimleri yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$
\begin{aligned}
&v_1 + v_2 - v_5 = 0 &&\Rightarrow \quad R_1.i_1 + R_2.i_2 - v_5 = 0 \\
&-v_2 + v_3 - v_6 + v_8 = 0 &&\Rightarrow \quad -R_2.i_2 + R_3.i_3 - v_6 + v_8 = 0 \\
&-v_1 + v_4 - v_8 + v_7 = 0 &&\Rightarrow \quad -R_1.i_1 + R_4.i_4 - v_8 + v_7 = 0
\end{aligned}
$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) akımı, çevre akımları cinsinden, çevre akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



2. Daha sonra, direnç elemanının akımları çevre akımları cinsinden ifade edilir ve hemen ardından çevre akımları parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$R_1.(I_{Ç1} - I_{Ç3}) + R_2.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) = v_5 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2).I_{Ç1} - R_2.I_{Ç2} - R_1.I_{Ç3} = v_5$$
$$-R_2.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + R_3.I_{Ç2} = v_6 - v_8 \quad \Rightarrow \quad -R_2.I_{Ç1} + (R_2 + R_3).I_{Ç2} + 0.I_{Ç3} = v_6 - v_8$$
$$-R_1.(I_{Ç1} - I_{Ç3}) + R_4.I_{Ç3} = v_8 - v_7 \quad \Rightarrow \quad -R_1.I_{Ç1} + 0.I_{Ç2} + (R_1 + R_4).I_{Ç3} = v_8 - v_7$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrissel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_1 + R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 - v_8 \\ v_8 - v_7 \end{bmatrix}$$

Burada üç adet bağımsız denkleme sahibiz. Bununla birlikte $I_{Ç1}$, $I_{Ç2}$, $I_{Ç3}$, v_6, v_7 ve v_8 bilinmiyor. Yani altı (6) adet bilinmeyenimiz var. Bu nedenle üç (3) adet ek denkleme daha ihtiyaç duyarız. Bu ek denklemler aşağıda verilmiştir.

1. v_5 bilinen bir fonksiyondur.
2. $i_6 = i_k(t) = -I_{Ç2}$ olur. Bu nedenle $I_{Ç2}$ artık biliniyor demektir.
3. $v_7 = k_7.v_1 = k_7.R_1.i_1 = k_7.R_1.(I_{Ç1} - I_{Ç3})$
4. $i_8 = k_8.i_4 \quad \Rightarrow \quad I_{Ç2} - I_{Ç3} = k_8.I_{Ç3} \quad \Rightarrow \quad I_{Ç2} = (1 + k_8).I_{Ç3}$

İrdeleme:

1. Denklem sayısı:

$$n_e - n_d + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$$

2. Karşılaştığımız değişkenler:

a.) $(n_e - n_d + 1)$ adet çevre akımı

b.) $(n_v + n_{vb})$ adet bağımlı ve bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimleri

c.) $(n_i + n_{ib})$ adet bağımlı ve bağımsız akım kaynaklarının akımları

3. Bilinmeyenler:

a.) Çevre akımları

b.) Bağımlı gerilim kaynaklarının gerilimleri

c.) Bağımlı ve bağımsız akım kaynaklarının gerilimleri

4. Bilinmeyenlerin toplam sayısı:

$$(n_e - n_d + 1) + (n_{vb}) + (n_{ib})$$

5. Ek denklemlerin toplam sayısı:

$$(n_v + n_{vb}) + (n_i + n_{ib})$$

6.1.3. Genel çevreler için yazılan çevre denklemeleri

Çevre denklemlerinin doğrudan devreye bakarak yazılması;

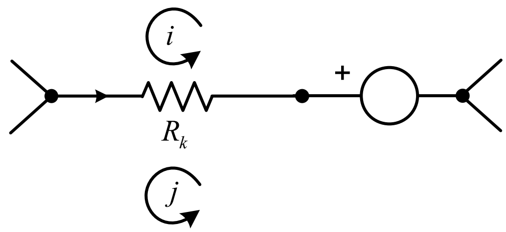
$$\begin{aligned}
R_{11}.I_{Ç1} + R_{12}.I_{Ç2} + \dots\dots\dots + R_{1n}.I_{Çn} &= v_{k1} \\
R_{21}.I_{Ç1} + R_{22}.I_{Ç2} + \dots\dots\dots + R_{2n}.I_{Çn} &= v_{k2} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &\ \ \vdots \\
R_{n1}.I_{Ç1} + R_{n2}.I_{Ç2} + \dots\dots\dots + R_{nn}.I_{Çn} &= v_{kn}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{Çevre direnç matrisi}} . \underbrace{\begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ \vdots \\ I_{Çn} \end{bmatrix}}_{\text{Çevre akimlari}} = \underbrace{\begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{kn} \end{bmatrix}}_{\text{Çevre kaynak gerilimleri}}$$

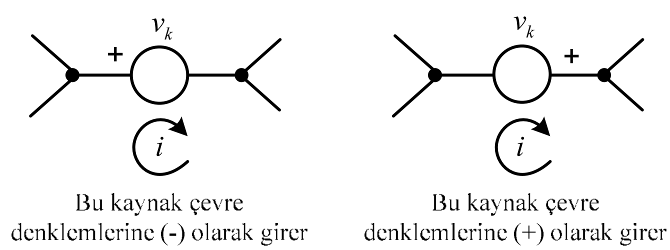
1. R_{ii} : i nci çevreye giren pasif devre elemanlarının (dirençlerin) direnç değerleri

2. $R_{ij}\,(i \neq j)$: i nci çevre ile j nci çevredeki ortak dirençlerin toplamının (+) lısı veya (-) lisi.

Çevre akımlarının yönü aynı ise, işaret (+), ters ise (-) alınır.



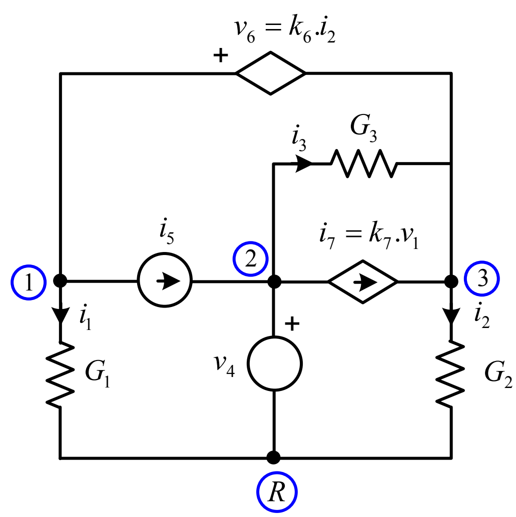
3. v_{ki} : i nci çevreye giren kaynakların gerilimlerinin cebrik toplamıdır. i nci çevreye giren kaynağın gerilim referans yönü çevre yönü ile aynı ise toplamı (-) olarak girecek, tersinde ise (+) olarak girecek.



Şayet çevrede bağımsız akım ve gerilim kaynakları varsa matris diagonal simetrik olur.

6.2. DÜĞÜM DENKLEMLERİ

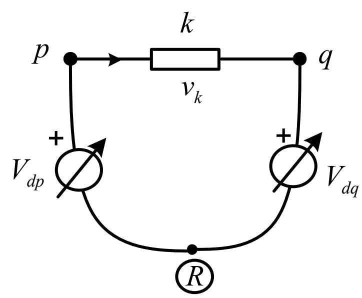
Örnek: Aşağıdaki devrenin düğüm denklemlerini bağımsız düğümler için adım adım yazınız.



1. Bağımsız düğümlere ilişkin düğüm denklemleri ve ardından direnç elemanlarının akımları yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$i_1 + i_5 + i_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_1.v_1 = -i_5 - i_6$$
$$-i_5 + i_4 + i_3 + i_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_3.v_3 = i_5 - i_4 - i_7$$
$$i_2 - i_3 - i_6 - i_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_2.v_2 - \mathrm{G}_3.v_3 = i_6 + i_7$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) gerilimi, düğüm gerilimleri cinsinden, eleman akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



$v_k = V_{dp} - V_{dq}$

q referans düğümü ise $v_k = V_{dp}$

p referans düğümü ise $v_k = -V_{dq}$

2. Daha sonra, direnç elemanının gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden ifade edilir ve hemen ardından düğüm gerilimleri parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$\mathrm{G}_1.V_{d1} = -i_5 - i_6 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{G}_1.V_{d1} + 0.V_{d2} + 0.V_{d3} = -i_5 - i_6$$
$$\mathrm{G}_3.V_{d2} - \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7 \quad \Rightarrow \quad 0.V_{d1} + \mathrm{G}_3.V_{d2} - \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7$$
$$\mathrm{G}_2.V_{d3} - \mathrm{G}_3.V_{d2} + \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_6 + i_7 \quad \Rightarrow \quad 0.V_{d1} - \mathrm{G}_3.V_{d2} + (G_2 + \mathrm{G}_3).V_{d3} = i_6 + i_7$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrissel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \\ V_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_5 - i_6 \\ i_5 - i_4 - i_7 \\ i_6 + i_7 \end{bmatrix}$$

3. Ek denklemler

1. $i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1}$ bilinir hale gelir.
2. $V_{d2} = v_4$ bilinir hale gelir.
3. $v_6 = k_6.i_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3} \Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3}$

4. Bilinmeyenler

1. i_6
2. V_{d3}
3. i_4

5. Bilinenler

$V_{d2} = v_4$

$i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1}$

$v_6 = k_6.i_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3} \Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3}$

Örnek 1. Aşağıdaki devrenin;

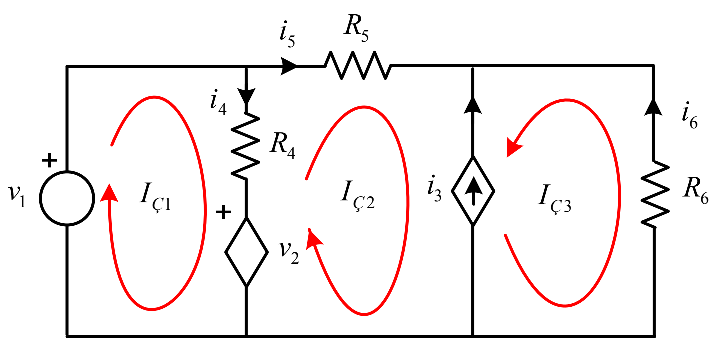
a.) Çevre denklemlerini adım adım çıkarınız.

b.) Çevre denklemlerini devreye bakarak çıkarınız.

c.) Bu denklemleri çözerek çevre akımlarını bulunuz.

d.) Çevre akımlarından yararlanarak eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.

e.) Tellegen teoreminin yani $\sum_{i=1}^{n_e=6} p_i(t) = 0$ ifadesinin sağlandığını gösteriniz.



$v_1 = 2$ Volt
$v_2 = \mu.v_6$
$i_3 = \beta.i_4$
$\mu = 2$
$\beta = 10$

$R_4 = 5\,\Omega$
$R_5 = 4\,\Omega$
$R_6 = 1\,\Omega$

a.) Her üç çevreye ait çevre denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$-v_1 + v_4 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_1 + R_4.i_4 + v_2 = 0$

$-v_2 - v_4 + v_5 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_2 - R_4.i_4 + R_5.i_5 - v_3 = 0$

$v_6 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6.i_6 - v_3 = 0$

Eleman akımları çevre akımları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$i_4 = I_{Ç1} - I_{Ç2}$$
$$i_5 = I_{Ç2}$$
$$i_6 = I_{Ç3}$$

Çevre akımları cinsinden yazılan bu eleman akımları, yukarıdaki çevre denklemlerinde yerine konacak ve matrissel bir biçime sokulacak olursa aşağıdaki sonuca gelinir.

$$\begin{aligned} -v_1 + R_4.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + v_2 &= 0 \\ -v_2 - R_4.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + R_5.I_{Ç2} - v_3 &= 0 \\ R_6.I_{Ç3} - v_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

b.) Çevre denklemlerini devreye bakmak suretiyle doğrudan matrissel bir biçimde aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Açıklama:

R_{11} : Birinci çevreye giren dirençlerin toplamı (işaret daima pozitif)

R_{22} : İkinci çevreye giren dirençlerin toplamı (işaret daima pozitif)

R_{33} : Üçüncü çevreye giren dirençlerin toplamı (işaret daima pozitif)

$R_{12} = R_{21}$: Birinci ile ikinci çevre arasındaki dirençlerin toplamı (işaret akım yönlerine bağlı)

$R_{13} = R_{31}$: Birinci ile üçüncü çevre arasındaki dirençlerin toplamı (işaret akım yönlerine bağlı)

$R_{23} = R_{32}$: İkinci ile üçüncü çevre arasındaki dirençlerin toplamı (işaret akım yönlerine bağlı)

Not: Matris içerisinde yazılan kaynak gerilimlerinin işareti, kaynağın referans yönü, ilgili çevre akımının yönü ile aynı ise negatif (-), bu yöne zıt ise pozitif (+) alınır.

c.) Ek denklemleri yeniden düzenlemek suretiyle aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$i_3 = \beta.i_4 \quad \Rightarrow \quad -(I_{Ç2} + I_{Ç3}) = \beta.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) \quad \Rightarrow \quad I_{Ç3} = -10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2}$$

ve

$$v_2 = \mu.v_6 = \mu.R_6.i_6 = \mu.R_6.I_{Ç3} = 2.I_{Ç3} = -20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2}$$

Bu ifadeleri ve eleman değerlerini çevre denklemlerinde yerine yazmak ve matrissel bir biçime sokmak suretiyle aşağıdaki sonuçlara gelinir.

$$\begin{aligned} &-2 + 5.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) - 20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2} = 0 \\ &20.I_{Ç1} - 18.I_{Ç2} - 5.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + 4.I_{Ç2} - v_3 = 0 \\ &-10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2} - v_3 = 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -15 & 13 & 0 \\ 15 & -9 & -1 \\ -10 & 9 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem takımından görüleceği üzere artık elimizde üç bilinmeyen ve üç denklem vardır. Bu denklem takımı çözülmek suretiyle $I_{Ç1}$ ve $I_{Ç2}$ çevre akımları ile v_3 akıma bağımlı akım kaynağının gerilimi aşağıdaki gibi bulunur.

$I_{Ç1} = 0.655$ Amper

$I_{Ç2} = 0.909$ Amper

$v_3 = 1.636$ Volt

Bu değerlerden faydalanmak suretiyle, $I_{Ç3} = -10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2} = -10 \times 0.655 + 9 \times 0.909$

$I_{Ç3} = 1.636$ Amper olarak bulunur.

d.) Eleman akım ve gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$i_1 = -I_{Ç1} = -0.655$ Amper
$v_1 = 2$ Volt

$i_2 = I_{Ç1} - I_{Ç2} = 0.655 - 0.909 = -0.254$ Amper
$v_2 = -20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2} = -20 \times 0.655 + 18 \times 0.909 = -3.272$ Volt

$i_3 = 10.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) = 10.(0.655 - 0.909) = -2.545$ Amper
$v_3 = 1.636$ Volt

$i_4 = I_{Ç1} - I_{Ç2} = 0.655 - 0.909 = -0.254$ Amper
$v_4 = R_4.i_4 = 5 \times (-0.254) = -1.27$ Volt

$i_5 = I_{Ç2} = 0.909$ Amper
$v_5 = R_5.i_5 = 4 \times (0.909) = 3.636$ Volt

$i_6 = I_{Ç3} = 1.636$ Amper
$v_6 = R_6.i_6 = 1 \times (1.636) = 1.636$ Volt

e.) Aşağıdaki tabloya bakarak Tellegen teoremini sağlandığını gösterebiliriz.

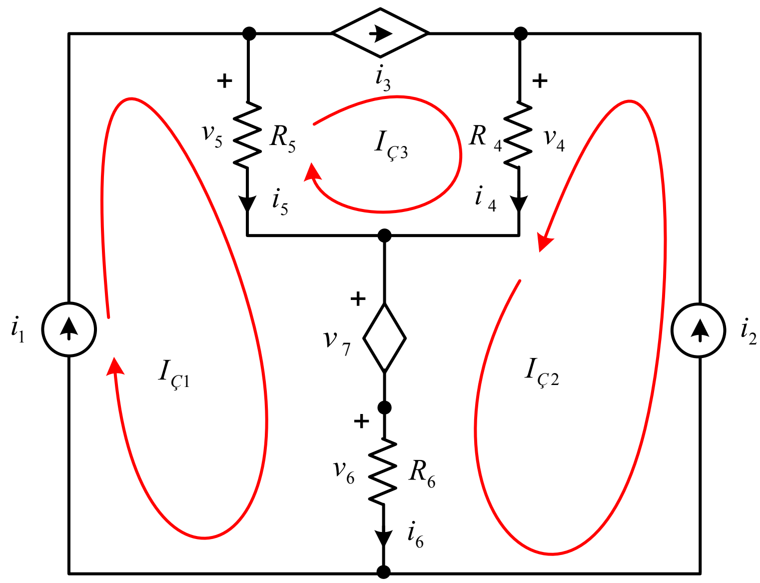
Eleman	i **(Amper)**	v **(Volt)**	p **(Watt)**
1	-0.655	2	-1.31
2	-0.254	3.272	-0.83
3	-2.545	1.636	-4.163
4	-0.254	-1.27	0.323
5	0.909	3.636	3.305
6	1.636	1.636	2.676
Toplam			**0.0014**

Ödev:

Aşağıdaki devrenin;

a.) Çevre ve ek denklemlerini yazınız ve matrissel bir biçime sokunuz.

b.) v_7 bağımlı gerilim kaynağına ilişkin p_7 ani gücünü hesaplayınız.



$v_7 = 3.v_4$
$i_3 = 2.i_6$
$i_1 = 10$ Amper
$i_2 = 20$ Amper
$R_4 = R_5 = 1\,\Omega$
$R_6 = 3\,\Omega$

Örnek 2. Aşağıdaki devrenin;

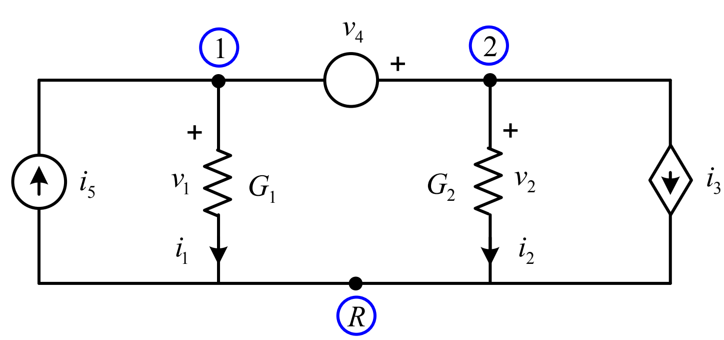
a.) Düğüm denklemlerini adım adım yazınız.

b.) Düğüm denklemlerini devreye bakarak yazınız.

c.) Bu denklemleri çözerek düğüm gerilimlerini bulunuz.

d.) Eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.

e.) Tellegen teoreminin yani $\sum_{i=1}^{n_e=5} p_i(t) = 0$ ifadesinin sağlandığını gösteriniz.



$v_4 = 6$ Volt
$i_5 = 5$ Amper
$i_3 = \frac{1}{2} \cdot v_1$
$R_1 = 2\,\Omega$
$R_2 = 4\,\Omega$

a.) $(n_d - 1)$ adet düğüm denklemi ve ardından devredeki dirençlerin yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$-i_5 + i_1 - i_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -i_5 + G_1.v_1 - i_4 = 0$$
$$i_4 + i_2 + i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 + G_2.v_2 + 0.5 \times v_1 = 0$$

Daha sonra eleman gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$-5+\frac{1}{2}\cdot V_{d1}-i_4=0$$
$$i_4+\frac{1}{4}\cdot V_{d2}+\frac{1}{2}\cdot V_{d1}=0$$

Daha sonra ek denklemler aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_{d2}-V_{d1}=v_4=6 \text{ Volt}$$
$$V_{d2}=V_{d1}+6$$

Bu ek denklemleri yukarıda yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot V_{d1}-i_4=5\\ &i_4+\frac{1}{4}\cdot(V_{d1}+6)+\frac{1}{2}\cdot V_{d1}=0\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{d1}\\ i_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

b.) Düğüm denklemleri devreye bakarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix}G_1 & 0\\ 0 & G_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{d1}\\ V_{d2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_4+i_5\\ -i_4-i_3\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{d1}\\ V_{d1}+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_4+5\\ -i_4-\frac{1}{2}\cdot V_{d1}\end{bmatrix}$$

c.) Yukarıdaki denklemler çözülmek suretiyle düğüm gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_{d1}=\frac{14}{5} \text{ Volt}$$
$$V_{d2}=V_{d1}+6=\frac{14}{5}+6=\frac{44}{5} \text{ Volt}$$

d.) Bu ifadelerden faydalanmak suretiyle eleman akım ve gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$v_1=V_{d1}=\frac{14}{5} \text{ Volt}$$
$$i_1=G_1.V_{d1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}=\frac{14}{10} \text{ Amper}$$

$$v_2 = V_{d2} = \frac{44}{5}\ \text{Volt}$$

$$i_2 = G_2.V_{d2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{44}{5} = \frac{44}{20} = \frac{11}{5}\ \text{Amper}$$

$$v_3 = V_{d2} = \frac{44}{5}\ \text{Volt}$$

$$i_3 = \frac{1}{2}\cdot v_1 = \frac{1}{2}\cdot V_{d1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}\ \text{Amper}$$

$$v_4 = 6\ \text{Volt}$$

$$i_4 = \frac{1}{2}\cdot V_{d1} - 5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5} - 5 = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5}\ \text{Amper}$$

$$v_5 = -V_{d1} = -\frac{14}{5}\ \text{Volt}$$

$$i_5 = 5\ \text{Amper}$$

e.)

Eleman	v **(Volt)**	i **(Amper)**	p **(Watt)**
1	14/5	7/5	98/25
2	44/5	11/5	484/25
3	44/5	7/5	308/25
4	6	-18/5	-108/5
5	-14/5	5	-14
Toplam			**0**

Açıklama:

G_{11}: Birinci düğüme bağlı dirençlerin terslerinin toplamı (işaret daima pozitif)

G_{22}: İkinci düğüme bağlı dirençlerin terslerinin toplamı (işaret daima pozitif)

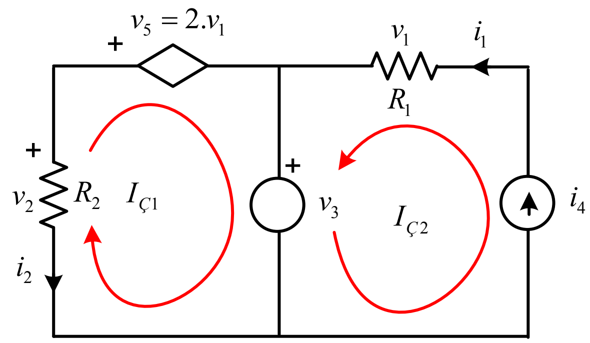
$G_{12} = G_{21}$: Birinci ile ikinci düğüm arasındaki dirençlerin tersleri toplamı (işaret daima negatif)

Not: Matris içerisinde yazılan kaynak akımlarının işareti, kaynağın referans yönü ilgili düğüme doğru ise pozitif (+), düğümden dışarı doğru ise negatif (-) alınır.

Örnek 3. Aşağıdaki devrenin;

a.) Çevre denklemlerini yazınız.

b.) Ek denklemleri yazarak eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.



$v_3 = 5$ Volt
$i_4 = 3$ Amper
$R_1 = 1\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$

a.) Çevre denklemlerini devreye bakarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_3 - v_5 \\ -v_3 - v_4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - v_5 \\ -5 - v_4 \end{bmatrix}$$

Ayrıca ek denklemleri de aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$v_5 = 2.v_1 = 2.R_1.i_1 = 2.R_1.I_{Ç2} = 2 \times 1 \times 3 = 6 \text{ Volt}$$

$$I_{Ç2} = i_4 = 3 \text{ Amper}$$

b.) Daha sonra bu ek denklemleri matrissel formda yerine koyup bilinmeyenleri çözecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 6 \\ -5 - v_4 \end{bmatrix}$$

$$I_{Ç1} = -5.5 \text{ Amper}$$

$$v_4 = -8 \text{ Volt}$$

$i_1 = i_4 = I_{Ç2} = 3$ Amper
$v_1 = R_1.i_1 = R_1.I_{Ç2} = 1 \times 3 = 3$ Volt

$i_2 = -I_{Ç1} = 5.5$ Amper
$v_2 = R_2.i_2 = R_2.(-I_{Ç1}) = 2 \times 5.5 = 11$ Volt

$i_3 = I_{Ç1} + I_{Ç2} = -5.5 + 3 = -2.5$ Amper
$v_3 = 5$ Volt

$i_4 = 3$ Amper
$v_4 = -8$ Volt

$i_5 = I_{Ç1} = -5.5$ Amper
$v_5 = 2.v_1 = 2 \times 3 = 6$ Volt

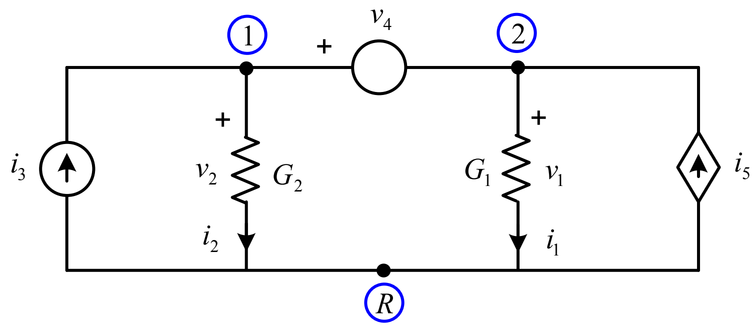
Eleman	i **(Amper)**	v **(Volt)**	p **(Watt)**
1	3	3	9
2	5.5	11	60.5
3	-2.5	5	-12.5
4	3	-8	-24
5	-5.5	6	-33
Toplam			**0**

Örnek 4. Aşağıdaki devrenin;

a.) Düğüm denklemlerini yazınız.

b.) Ek denklemleri de yazarak düğüm gerilimlerini bulunuz.

c.) i_5 bağımlı akım kaynağının p_5 ani gücünü bulunuz.



$v_4 = 2$ Volt
$i_3 = 3$ Amper
$i_5 = 4.i_2$
$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$

a.) Düğüm denklemlerini devreye bakarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_3 - i_4 \\ i_4 + i_5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - i_4 \\ i_4 + i_5 \end{bmatrix}$$

b.) Ayrıca ek denklemleri de yazarak V_{d1} ve V_{d2} düğüm gerilimleri ile i_4 bağımsız gerilim kaynağının akımını aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$v_4 = V_{d1} - V_{d2} = 2 \quad \Rightarrow \quad V_{d1} = 2 + V_{d2}$$
$$i_2 = G_2.v_2 = G_2.V_{d1} = 1 \times V_{d1} = V_{d1}$$
$$i_5 = 4.i_2 = 4.V_{d1} = 4.(2 + V_{d2})$$

$V_{d2} = -4.5$ Volt

$V_{d1} = -2.5$ Volt

$i_4 = 5.5$ Amper

c.) i_5 bağımlı akım kaynağının p_5 ani gücü aşağıdaki gibi bulunur.

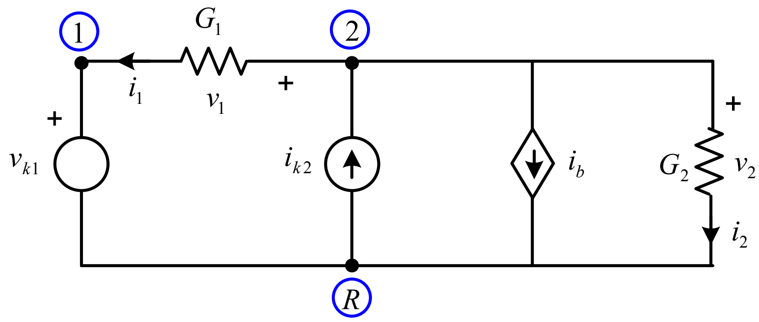
$$p_5 = v_5.i_5 = (-V_{d2}).4.i_2 = (-V_{d2}).4.V_{d1} = (4.5) \times 4 \times (-2.5) = -45 \text{ Watt}$$

Örnek 5. Aşağıdaki devrenin;

a.) Düğüm denklemlerini yazınız.

b.) Ek denklemleri de yazarak düğüm gerilimlerini bulunuz.

c.) i_{k2} bağımsız akım kaynağının p_{k2} ani gücünü bulunuz.



$v_{k1} = 1\,\text{Volt}$
$i_{k2} = 2\,\text{Amper}$
$i_b = 4.i_1$
$R_1 = 5\,\Omega$
$R_2 = 1\,\Omega$

a.) Düğüm denklemlerini devreye bakarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 \\ -G_1 & G_1+G_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_{k1} \\ i_{k2}-i_b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_{k1} \\ 2-4.i_1 \end{bmatrix}$$

b.) Ek denklemler de yazılarak V_{d2} düğüm gerilimi ve i_{k1} bağımsız gerilim kaynağının akımı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$v_1 = V_{d2} - V_{d1}$$
$$V_{d1} = v_{k1} = 1\,\text{Volt}$$
$$i_1 = G_1.v_1 = G_1.(V_{d2}-V_{d1}) = \frac{1}{5}\times(V_{d2}-V_{d1}) = \frac{1}{5}\times(V_{d2}-1)$$
$$i_b = 4.i_1 = \frac{4}{5}\times(V_{d2}-1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ V_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_{k1} \\ 2-\frac{4}{5}\times(V_{d2}-1) \end{bmatrix}$$

$$V_{d2} = 1.5\,\text{Volt}$$

$$i_{k1} = 0.1\,\text{Amper}$$

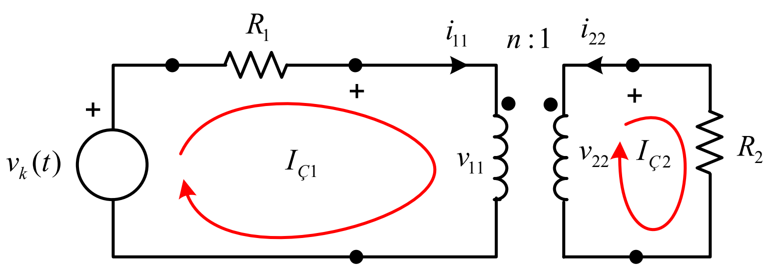
c.) i_{k2} bağımsız akım kaynağının p_{k2} ani gücü aşağıdaki gibi bulunur.

$$p_{k2} = v_{k2}.i_{k2} = (-V_{d2})..i_{k2} = (-1.5)\times 2 = -3\,\text{Watt}$$

6.3. BİR ELEKTRİK DEVRESİNDE ÇOK UÇLU DEVRE ELEMANLARI VARKEN DEVRE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

6.3.1. ÇEVRE DENKLEMLERİ YÖNTEMİ

Bir elektrik devresinde çok uçlu elemanlar varsa, çok uçlu elemanların uçları arasındaki gerilimleri, bağımsız gerilim kaynakları olarak varsaymak suretiyle çevre denklemleri yazılır. Daha sonra çok uçluların tanım bağıntıları çevre denklemleri cinsinden yazılıp, devre denklemlerine ilave edilecektir. Örneğin içerisinde transformatör elemanı barındıran bir elektrik devresinin çevre denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.



$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1}(t) \\ I_{Ç2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k(t) - v_{11}(t) \\ v_{22}(t) \end{bmatrix}$$

Transformatör elemanına ait tanım bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

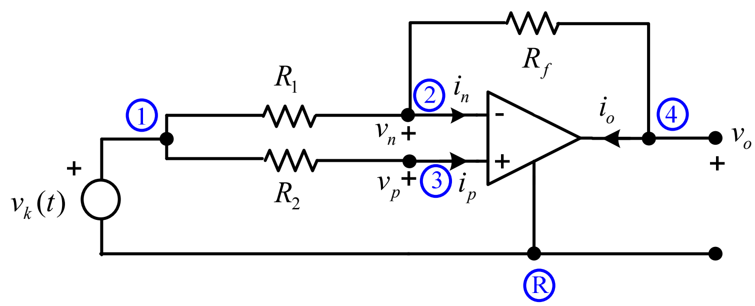
$$v_{11}(t) = n.v_{22}(t)$$
$$i_{11}(t) = -\frac{1}{n}.i_{22}(t)$$

Ek denklemler ise aşağıdaki gibi verilir.

$$v_{11}(t) = n.v_{22}(t)$$
$$I_{Ç1}(t) = -\frac{1}{n}\cdot(-I_{Ç2}(t)) = \frac{1}{n}\cdot I_{Ç2}(t)$$

6.3.2. DÜĞÜM DENKLEMLERİ YÖNTEMİ

Bir elektrik devresinde çok uçlu elemanlar varsa, çok uçlu elemanların düğüm akımlarını, bağımsız akım kaynakları olarak varsaymak suretiyle düğüm denklemleri yazılır. Daha sonra çok uçluların tanım bağıntıları düğüm denklemleri cinsinden yazılıp, devre denklemlerine ilave edilecektir. Örneğin içerisinde işlemsel kuvvetlendirici elemanı barındıran bir elektrik devresinin düğüm denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_f} & 0 & -\frac{1}{R_f} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_f} & 0 & \frac{1}{R_f} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{d1}(t) \\ v_{d2}(t) \\ v_{d3}(t) \\ v_{d4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_{ka}(t) \\ -i_n(t) \\ -i_p(t) \\ -i_0(t) \end{bmatrix}$$

İşlemsel kuvvetlendirici elemanına ait tanım bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$$i_n(t) = 0$$
$$i_p(t) = 0$$
$$v_n(t) - v_p(t) = 0$$

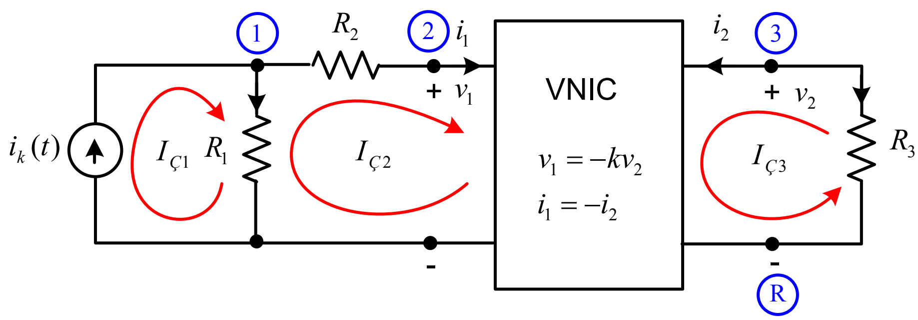
Ek denklemler ise aşağıdaki gibi verilir.

$$i_n(t) = 0$$
$$i_p(t) = 0$$
$$v_{d2}(t) - v_{d3}(t) = 0$$

Uygulama: Aşağıdaki şekildeki devrenin;

a.) Çevre denklemlerini yazınız.

b.) Düğüm denklemlerini yazınız.



a.) Çevre denklemleri

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ -R_1 & R_1+R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1}(t) \\ I_{Ç2}(t) \\ I_{Ç3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{ak}(t) \\ -v_1(t) \\ -v_2(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} I_{Ç1}(t) = i_k(t) \\ v_1(t) = -k.v_2(t) \\ i_1 = -i_2 \Rightarrow I_{Ç2} = -I_{Ç3} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ -R_1 & R_1+R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k(t) \\ -I_{Ç3}(t) \\ I_{Ç3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{ak}(t) \\ -v_1(t) \\ \frac{1}{k} v_1(t) \end{bmatrix}$$

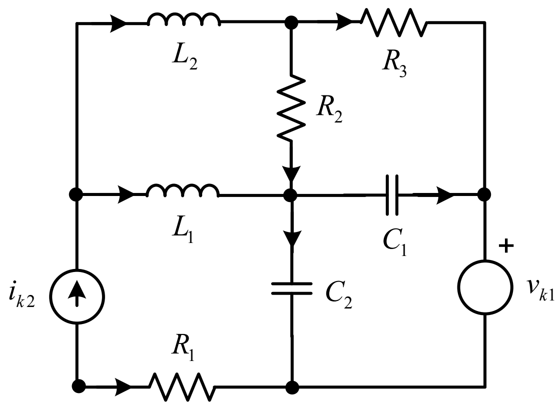
b.) Düğüm denklemleri

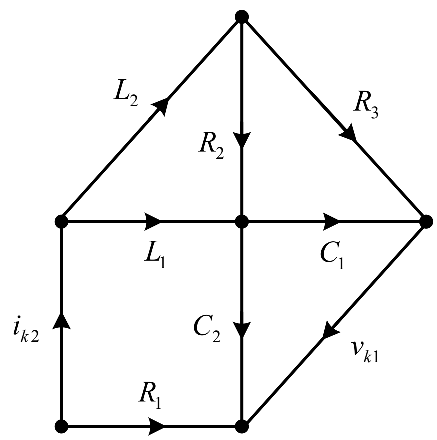
$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{d1}(t) \\ v_{d2}(t) \\ v_{d3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_k(t) \\ -i_1(t) \\ -i_2(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} v_1(t) = -k.v_2(t) \\ v_{d2}(t) = -k.v_{d3}(t) \\ i_1 = -i_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{d1}(t) \\ -k.v_{d3}(t) \\ v_{d3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_k(t) \\ -i_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix}$$

6.4. DURUM DENKLEMLERİ

Öncelikle aşağıdaki devrenin grafını çizmeye çalışalım.

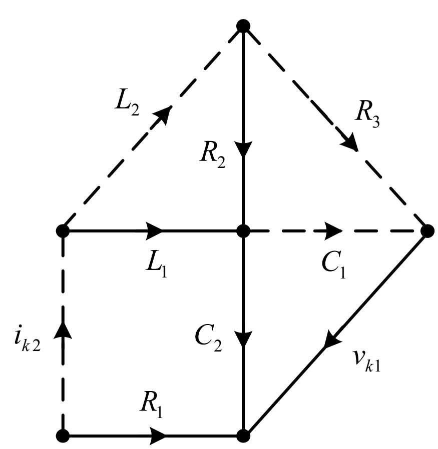




Daha sonra uygun ağacı seçmeye çalışıyoruz. Bunun için uymamız gereken dört (4) adet kural vardır.

1. Devredeki tüm bağımsız gerilim kaynakları dal seçilecek.
2. Devredeki tüm bağımsız akım kaynakları kiriş seçilecek.
3. Maksimum sayıda kapasite elemanı dal seçilecek.
4. çMaksimum sayıda endüktans (self) elemanı kiriş seçilecek.

Yukarıda sıralanan bu kurallara göre uygun ağacı seçecek olursak aşağıdaki şekle geliriz.



Kapasite ve endüktans elemanlarına ait tanım bağıntıları daha önceki bölümlerde verildiği üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot i_{C2}$$

ve

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

O halde yukarıdaki devrenin durum uzayını en genel halde aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\frac{d}{dt} \cdot x(t) = A.x(t) + B.e(t)$$

Bu devrede $x(t)$ durum değişkeni olarak, ağaç içi kapasite gerilimleri (bir adet) ve yine ağaç içindeki endüktans (self) akımları (bir adet) tanımlanır. Yine aynı devrede A ve B matrisleri, sırasıyla (2×2) ve (2×2) boyutlu katsayılar matrisleri olarak tanımlanır.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C2} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} v_{C2} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} v_{k1} \\ i_{k2} \end{bmatrix}$$

Bu durumda durum değişkenleri en genel halde aşağıdaki gibi verilir. Yani;

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ \vdots \\ v_{Cn} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ \vdots \\ i_{Ln} \end{bmatrix}$$

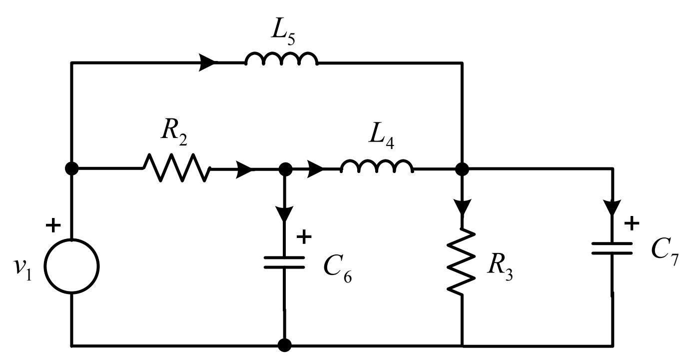
Ve yine kaynak değişkenleri, bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimleri ve bağımsız akım kaynaklarının akımları olarak en genel halde aşağıdaki gibi verilir. Yani;

$$e(t) = \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{kn} \\ i_{k1} \\ i_{k2} \\ \vdots \\ i_{kn} \end{bmatrix}$$

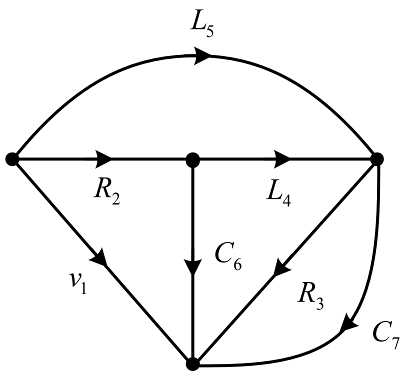
Buna göre en genel halde tüm durum uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır ve buna durum denklemleri adı verilir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A.x(t) + B.e(t) + B_1 \cdot \frac{de(t)}{dt}$$
$$y(t) = C.x(t) + D.e(t) + D_1 \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

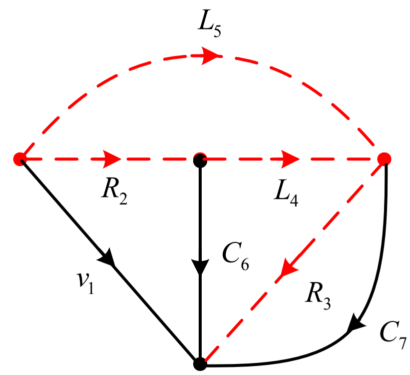
Örnek 1. Aşağıdaki devrenin grafını çizerek uygun ağacını bulmak suretiyle, durum denklemlerini en genel halde yazınız.



Yukarıda verilen örnek devrenin graf ve uygun ağacı, daha önce verilen kurallar göz önüne alınarak aşağıdaki gibi çizilebilir.



Graf



Uygun Ağaç

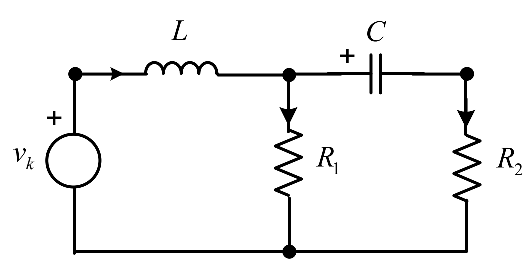
Bu uygun ağaca göre durum ve kaynak değişkenleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$x(t)=\begin{bmatrix} v_{C6}(t) \\ v_{C7}(t) \\ i_{L4}(t) \\ i_{L5}(t) \end{bmatrix}, \qquad e(t)=v_1(t)$$

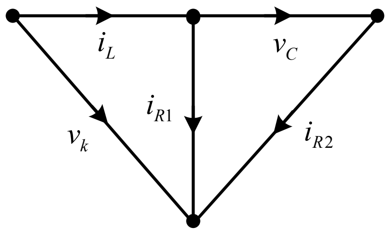
Bu durum ve kaynak değişkenlerine göre durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılır. Bu denklem ise sağ taraflı sabit katsayılı adi diferansiyel denklemdir.

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} v_{C6} \\ v_{C7} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix}}_{x(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} v_{C6} \\ v_{C7} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix}}_{x(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}}_{B}\cdot v_1(t)$$

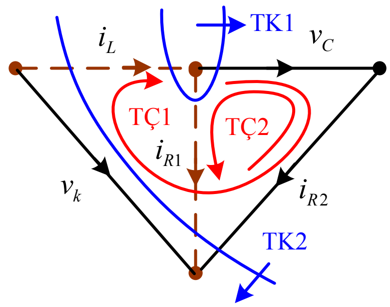
Örnek 2. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Ağaç içindeki kapasite elemanının geriliminin türevi dal gerilimleri, kiriş akımları ve kaynak değişkenleri cinsinden ve yine ağaç içindeki endüktans elemanının akımının türevi dal gerilimleri, kiriş akımları ve kaynak değişkenleri cinsinden yazılabilir. O halde birinci temel kesitleme ve ardından birinci temel çevre denkleminden aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$i_C - i_L + i_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = i_L - i_{R1}$ (Birinci temel kesitleme denklemi)

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot i_{R1}$$

$v_L + v_C + v_{R2} - v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = -v_C - v_{R2} + v_k$ (Birinci temel çevre denklemi)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot v_{R2} + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

Yukarıdaki denklemlerde eşitliklerin sağ tarafındaki i_L akımı ve v_C gerilimi durum değişkenleri ve v_k kaynak değişkeni olup, i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimi ise durum değişkenleri değildir. O halde bu i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimini de durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için öncelikle R_1 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_1 direnç elemanına ait ikinci temel çevre denklemini yazmamız gerekmektedir.

$$i_{R1} = G_1 . v_{R1}$$

$v_{R1} - v_{R2} - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = v_{R2} + v_C$ (İkinci temel çevre denklemi)

$$i_{R1} = G_1.(v_{R2} + v_C)$$
$$i_{R1} - G_1.v_{R2} = G_1.v_C \text{ (Birinci denklem)}$$

İkinci olarak R_2 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_2 direnç elemanına ait ikinci temel kesitleme denklemini yazmamız gerekmektedir.

$$v_{R2} = R_2.i_{R2}$$
$$i_{R2} + i_{R1} - i_L = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R2} = -i_{R1} + i_L \text{ (İkinci temel kesitleme denklemi)}$$
$$v_{R2} = R_2(-i_{R1} + i_L) = -R_2.i_{R1} + R_2.i_L$$
$$R_2.i_{R1} + v_{R2} = R_2.i_L \text{ (İkinci denklem)}$$

Elde edilen bu iki denklemi matrissel bir biçimde yazmak ve bunları çözmek suretiyle i_{R1} ve v_{R2} değerlerini diğer durum ve kaynak değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -G_1 \\ R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ -R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L \end{bmatrix}$$

$$i_{R1} = \frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1.R_2}{\Delta} \cdot i_L$$
$$v_{R2} = -\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{R_2}{\Delta} \cdot i_L$$

Yukarıda elde edilen bu i_{R1} ve v_{R2} değerlerini, daha önce yazmış olduğumuz, durum değişkeni olan kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarında yerine koyacak ve daha sonra tekrardan düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

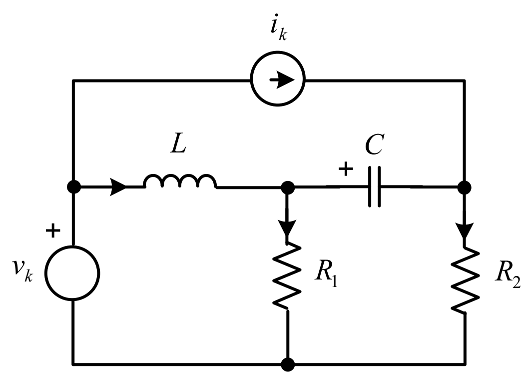
$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1.R_2}{\Delta} \cdot i_L\right)$$
$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{G_1}{C.\Delta} \cdot v_C + \left(\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}\right) \cdot i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot \left[-\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{R_2}{\Delta} \cdot i_L \right] + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

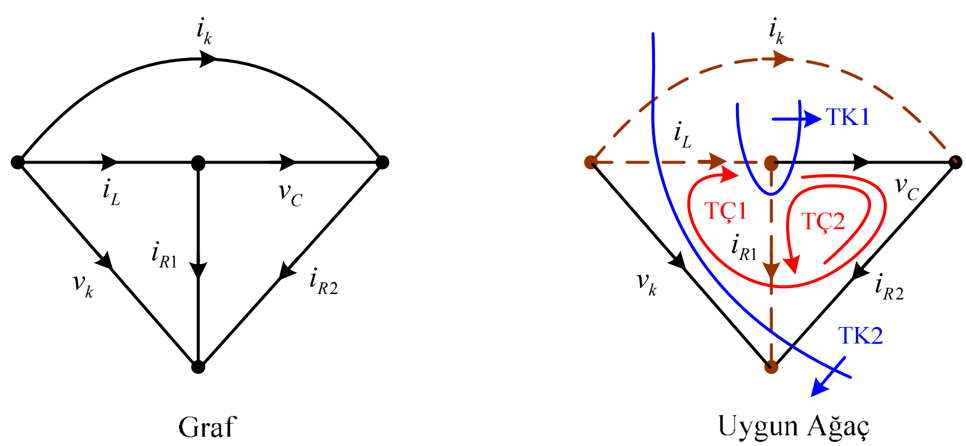
$$\frac{di_L}{dt} = (-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta}) \cdot v_C - \frac{R_2}{L.\Delta} \cdot i_L + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C.\Delta} & (\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}) \\ (-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta}) & -\frac{R_2}{L.\Delta} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} \cdot v_k$$

Örnek 3. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve tek endüktans (self) de kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_C

kapasite gerilimi ile i_L endüktans (self) akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Yukarıda verilen her iki tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_C ve i_L durum değişkenleri ve i_k ve v_k kaynak değişkenleri cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, birinci temel kesitleme, ardından da endüktansın tanım bağıntısı için birinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki denklemlere geliriz.

$i_C - i_L + i_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = i_L - i_{R1}$ (Birinci temel kesitleme denklemi)

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot i_{R1}$$

$v_L + v_C + v_{R2} - v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = -v_C - v_{R2} + v_k$ (Birinci temel çevre denklemi)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot v_{R2} + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

Yukarıdaki denklemlerde eşitliklerin sağ tarafındaki i_L akımı ve v_C gerilimi durum değişkenleri ve v_k kaynak değişkeni olup, i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimi ise durum değişkenleri değildir. O halde bu i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimini de durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için öncelikle R_1 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_1 direnç elemanına ait ikinci temel çevre denklemini yazmamız gerekmektedir.

$$i_{R1} = G_1.v_{R1}$$

$v_{R1} - v_{R2} - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = v_{R2} + v_C$ (İkinci temel çevre denklemi)

$$i_{R1} = G_1.(v_{R2} + v_C)$$

$i_{R1} - G_1.v_{R2} = G_1.v_C$ (Birinci denklem)

İkinci olarak R_2 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_2 direnç elemanına ait ikinci temel kesitleme denklemini yazmamız gerekmektedir.

$v_{R2} = R_2.i_{R2}$

$i_{R2} + i_{R1} - i_L - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R2} = -i_{R1} + i_L + i_k$ (İkinci temel kesitleme denklemi)

$v_{R2} = R_2(-i_{R1} + i_L + i_k) = -R_2.i_{R1} + R_2.i_L + R_2.i_k$

$R_2.i_{R1} + v_{R2} = R_2.i_L + R_2.i_k$ (İkinci denklem)

Elde edilen bu iki denklemi matrissel bir formda yazmak ve bunları çözmek suretiyle i_{R1} ve v_{R2} değerlerini diğer durum ve kaynak değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -G_1 \\ R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L + R_2.i_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ -R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L + R_2.i_k \end{bmatrix}$$

$$i_{R1} = \frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k)$$

$$v_{R2} = -\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k)$$

Yukarıda elde edilen bu i_{R1} ve v_{R2} değerlerini, daha önce yazmış olduğumuz, durum değişkeni olan kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarında yerine koyacak ve daha sonra tekrardan düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k) \right]$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{G_1}{C.\Delta} \cdot v_C + \left(\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}\right) \cdot i_L - \frac{R_2.G_1}{C.\Delta} \cdot i_k$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\cdot(-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L}\cdot v_C - \frac{1}{L}\cdot\left[-\frac{R_2.G_1}{\Delta}\cdot v_C + \frac{1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k)\right] + \frac{1}{L}\cdot v_k$$

$$\frac{di_L}{dt} = (-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta})\cdot v_C - \frac{R_2}{L.\Delta}\cdot i_L + \frac{1}{L}\cdot v_k - \frac{R_2}{L.\Delta}\cdot i_k$$

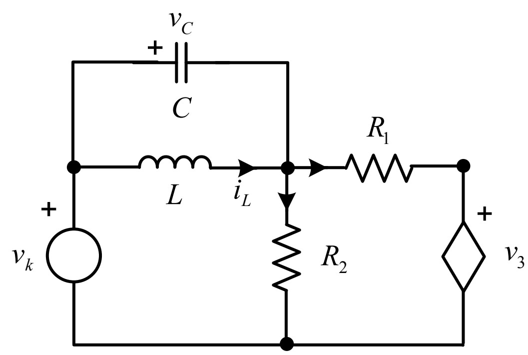
$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C.\Delta} & (\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}) \\ (-\frac{1}{L} + -\frac{R_2.G_1}{L.\Delta}) & -\frac{R_2}{L.\Delta} \end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{R_2.G_1}{C.\Delta} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L.\Delta} \end{bmatrix}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ i_k \end{bmatrix}}_{e(t)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \\ i_C \\ v_L \\ v_{R1} \\ i_{R1} \\ v_{R2} \\ i_{R2} \\ v_k \\ i_{gk} \\ v_{ak} \\ i_k \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{G_1}{\Delta} & (1 - \frac{G_1.R_2}{\Delta}) \\ (-1 + \frac{G_1.R_2}{\Delta}) & -\frac{R_2}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{R_2}{\Delta} \\ \frac{G_1}{\Delta} & \frac{G_1.R_2}{\Delta} \\ -\frac{R_2.G_1}{\Delta} & \frac{R_2}{\Delta} \\ -\frac{G_1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ (2 - \frac{R_2.G_1}{\Delta}) & \frac{R_2}{\Delta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2.G_1}{\Delta} \\ 1 & -\frac{R_2}{\Delta} \\ 0 & \frac{R_2}{\Delta} \\ 0 & \frac{G_1.R_2}{\Delta} \\ 0 & \frac{R_2}{\Delta} \\ 0 & \frac{1}{\Delta} \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & \frac{R_2}{\Delta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ i_k \end{bmatrix}}_{e(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\cdot x(t) = A.x(t) + B.e(t) + B_1.\frac{d}{dt}\cdot e(t)$$

$$y(t) = C.x(t) + D.e(t) + D_1.\frac{d}{dt}\cdot e(t)$$

Uygulama 1. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



$v_k = \cos 2t$

$v_3 = \mu . v_C$

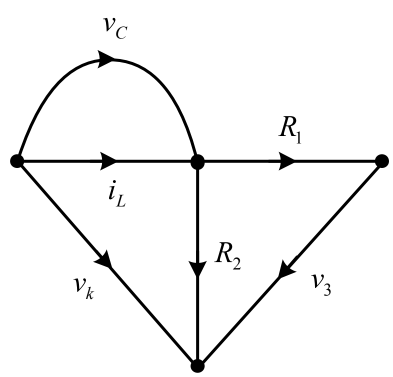
$\mu = 1$

$C = 1\,\mathrm{F}$

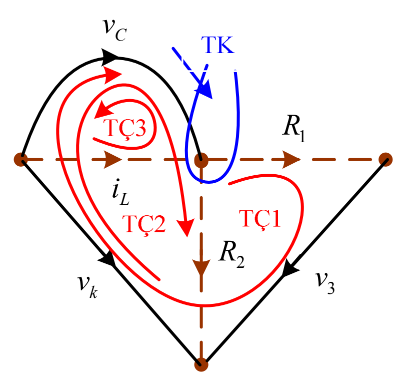
$L = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{H}$

$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve tek endüktans (self) de kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_C kapasite gerilimi ile i_L endüktans (self) akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Yukarıda verilen her iki tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_C ve i_L durum değişkenleri ve v_k kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_C + i_L - i_{R1} - i_{R2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = -i_L + i_{R1} + i_{R2}$$

Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki i_L akımı durum değişkeni olup, i_{R1} ve i_{R2} akımları durum değişkeni değildir. O halde bu akımları da durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için temel çevre denklemlerini yazmamız gerekmektedir. O halde birinci temel çevre için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$v_{R1} + v_3 - v_k + v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = -v_3 + v_k - v_C$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafında, bize soruda verilen bilgilere uygun olarak $v_3 = v_C$ yazacak ve denklemi düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_{R1} = -2v_C + v_k$$

$$i_{R1} = \frac{v_{R1}}{R_1} = \frac{-2v_C + v_k}{R_1}$$

İkinci temel çevre için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$v_{R2} - v_k + v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R2} = v_k - v_C$$

$$i_{R2} = \frac{v_{R2}}{R_2} = \frac{v_k - v_C}{R_2}$$

Yukarıda durum ve kaynak değişkenleri cinsinden bulmuş olduğumuz i_{R1} ve i_{R2} akımlarını, temel kesitleme denkleminde yerine yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$i_C = -i_L + (\frac{-2v_C + v_k}{R_1}) + (\frac{v_k - v_C}{R_2}) = -i_L - (\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_C + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_k$$

Bu ifadeyi de kapasite elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C}\left[-i_L - (\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_C + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_k \right] \\ &= -\frac{1}{C} \cdot i_L - (\frac{2}{C.R_1} + \frac{1}{C.R_2}) \cdot v_C + (\frac{1}{C.R_1} + \frac{1}{C.R_2}) \cdot v_k \end{aligned}$$

İkinci olarak endüktansın (selfin) tanım bağıntısı için üçüncü temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$v_L - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = v_C$$

Bu ifadeyi de endüktans (self) elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L = \frac{1}{L} \cdot v_C$$

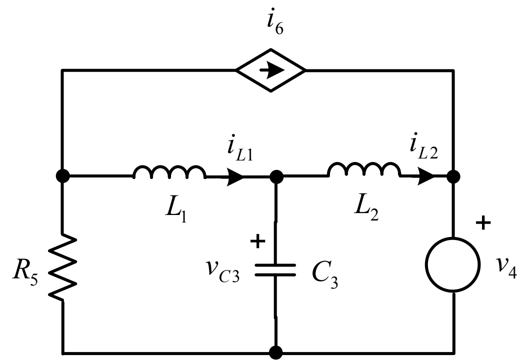
Şimdi her iki eleman tanım bağıntısını matrissel bir biçimde düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{2}{C.R_1} + \frac{1}{C.R_2}) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{1}{C.R_1} + \frac{1}{C.R_2}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_k$$

Soruda verilen sayısal değerleri yukarıdaki sonuç ifadesinde yerine koyacak olursak, bu devreye ait durum denklemlerini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

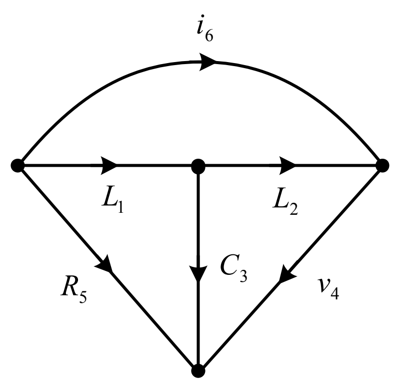
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_k$$

Uygulama 2. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.

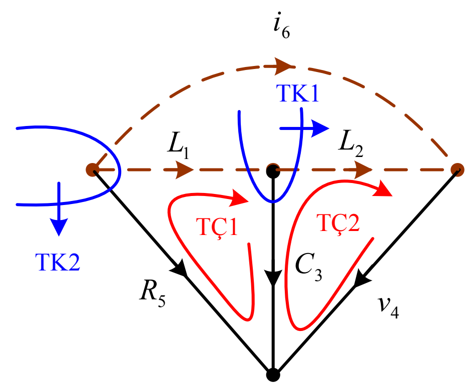


$L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{H}$
$C_3 = 1\,\mathrm{F}$
$R_5 = 1\,\Omega$
$i_6 = \beta . v_{C3}$
$\beta = 1$
$v_4 = u(t)$

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve iki endüktans (self) da kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_{C3} kapasite gerilimi ile i_{L1} ve i_{L2} endüktans (self) akımları olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot i_{C3}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} \cdot v_{L1}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

Yukarıda verilen her üç tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_{C3}, i_{L1} ve i_{L2} durum değişkenleri ve v_4 kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, birinci temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_{C3} + i_{L2} - i_{L1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{C3} = i_{L1} - i_{L2}$$

Bunu da kapasite elemanının tanım bağıntısında yerine koyarsak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot i_{C3} = \frac{1}{C_3} \cdot (i_{L1} - i_{L2}) = \frac{1}{C_3} \cdot i_{L1} - \frac{1}{C_3} \cdot i_{L2}$$

L_1 endüktansına ait tanım bağıntısı için birinci temel çevre denklemini,

$$v_{L1} + v_{C3} - v_{R5} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L1} = -v_{C3} + v_{R5}$$

gibi yazabiliriz. Yukarıdaki denklemde v_{R5} yerine bu dirence ait tanım bağıntısını ve ardından da i_{R5} için ikinci temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_{L1} = -v_{C3} + R_5.i_{R5}$$
$$i_{R5} + i_{L1} + i_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R5} = -i_{L1} - i_6$$

Yukarıdaki denklemde i_6 bağımlı akım kaynağının yerine soruda verilen $i_6 = \beta.v_{C3} = v_{C3}$ eşitliği yazıldığında aşağıdaki sonuca gelinir.

$$i_{R5} = -i_{L1} - v_{C3}$$

Bu ifadeyi yukarıdaki birinci temel çevre denkleminde yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$v_{L1} = -v_{C3} + R_5.(-i_{L1} - v_{C3}) = -R_5.i_{L1} - (1 + R_5).v_{C3}$$

Bu ifadeyi de L_1 endüktans elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} \cdot v_{L1} = \frac{1}{L_1} \cdot [-R_5.i_{L1} - (1+R_5).v_{C3}] = -\frac{R_5}{L_1} \cdot i_{L1} - \frac{(1+R_5)}{L_1} \cdot v_{C3}$$

L_2 ye ait tanım bağıntısı için ikinci temel çevre denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$v_{L2} + v_4 - v_{C3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L2} = v_{C3} - v_4$$

Bu ifadeyi L_2 elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2} = \frac{1}{L_2} \cdot (v_{C3} - v_4) = \frac{1}{L_2} \cdot v_{C3} - \frac{1}{L_2} \cdot v_4$$

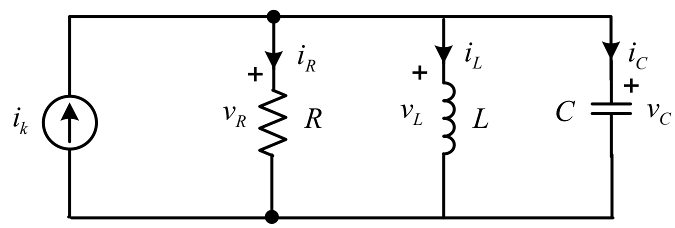
Şimdi bu üç tanım bağıntısını matrissel bir biçimde düzenleyecek olursak;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ -(\frac{1+R_5}{L_1}) & -\frac{R_5}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot v_4$$

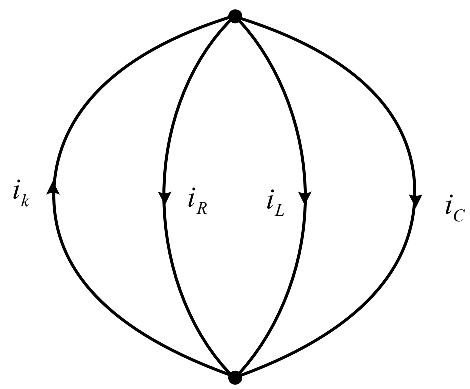
sonucuna ulaşırız. Soruda verilen sayısal değerleri yukarıdaki sonuç ifadesinde yerine koyacak olursak, bu devreye ait durum denklemlerini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

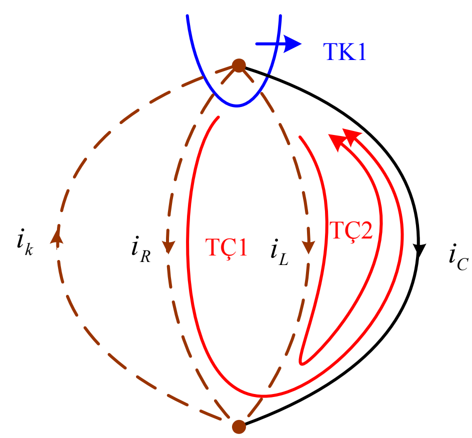
Uygulama 3. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve tek endüktans (self) de kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_C kapasite gerilimi ile i_L endüktans (self) akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Yukarıda verilen her iki tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_C ve i_L durum değişkenleri ve i_k kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_C + i_L - i_k + i_R = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = -i_L - i_R + i_k$$

Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki i_L akımı durum ve i_k akımı kaynak değişkeni olup, i_R akımı ise durum değişkeni değildir. O halde bu i_R akımını da kaynak veya durum değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için temel çevre denklemlerini yazmamız gerekmektedir. O halde birinci temel çevre için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$v_R - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_R = v_C$$

Aynı denklemi akıma göre düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_C}{R}$$

Bu ifadeyi yukarıdaki temel kesitleme denkleminde yerine koyacak olursak;

$$i_C = -i_L - \frac{v_C}{R} + i_k$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi de kapasite tanım bağıntısında yerine koyarak olursak;

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (-i_L - \frac{v_C}{R} + i_k) = -\frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{R.C} \cdot v_c + \frac{1}{C} \cdot i_k$$

sonucunu elde ederiz. İkinci olarak endüktansın (selfin) tanım bağıntısı için ikinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$v_L - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = v_C$$

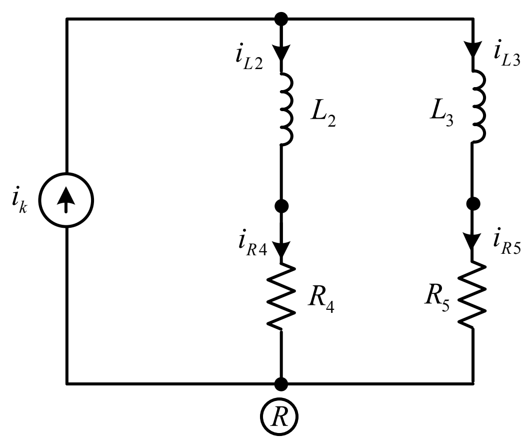
Bu ifadeyi de endüktans (self) elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak;

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L = \frac{1}{L} \cdot v_C$$

sonucuna geliriz. Şimdi her iki eleman tanım bağıntısını matrissel bir biçimde düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

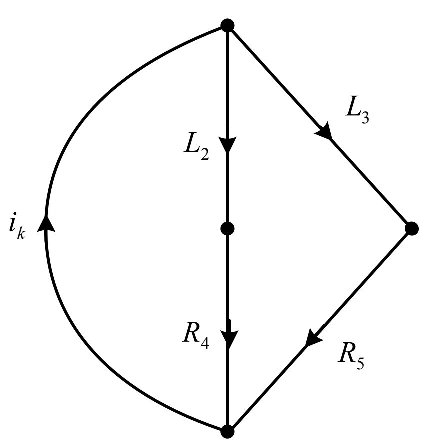
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R.C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_k$$

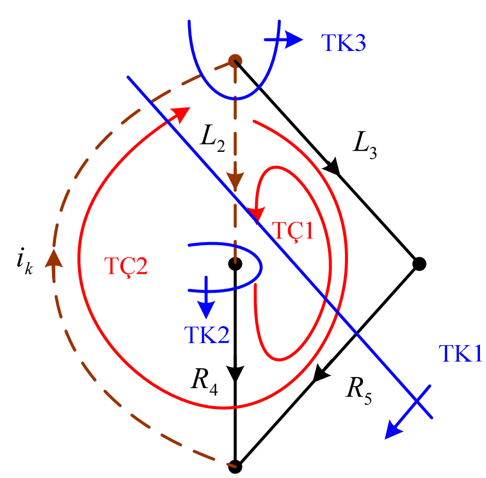
Uygulama 4. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



$L_2 = L_3 = 2\,\mathrm{H}$
$R_4 = 2\,\Omega$
$R_5 = 4\,\Omega$
$i_k(t) = \cos t$ Amper

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.





Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç düşüncesine paralel olarak, devredeki endüktanslardan biri (L_2) kiriş ve diğeri (L_3) mecburen dal seçilmiştir. Buna göre i_{L3} endüktans akımı durum değişkeni olmayıp, sadece i_{L2} endüktans akımı durum değişkeni olacaktır. Bu durumda, (L_2) endüktans elemanının tanım bağıntısı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

Yukarıda verilen tanım bağıntısında, eşitliğin sağ tarafındaki değişkenleri i_{L2} durum değişkeni ve i_k kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. i_{L2} endüktans elemanının tanım bağıntısı için, birinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$v_{L2} + v_{R4} - v_{R5} - v_{L3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L2} = -v_{R4} + v_{R5} + v_{L3}$$

R_4 ve R_5 direnç elemanlarına ait tanım bağıntılarını yukarıdaki denklemde kullanacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_{L2} = -R_4.i_{R4} + R_5.i_{R5} + v_{L3}$$

Bu ifadedeki i_{R4} ve i_{R5} akımlarını, durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bu nedenle birinci ve ikinci temel kesitleme denklemlerine gereksinim duyarız. Bu denklemleri ise aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$i_{R5} + i_{L2} - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R5} = -i_{L2} + i_k$$
$$i_{R4} - i_{L2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R4} = i_{L2}$$

Bu akım ifadelerini yukarıdaki birinci temel çevre denkleminde yerine koymak ve yeniden düzenlemek suretiyle aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_{L2} = -R_4.i_{R4} + R_5.i_{R5} + v_{L3} = -R_4.i_{L2} + R_5.(-i_{L2} + i_k) + v_{L3} = -(R_4 + R_5).i_{L2} + R_5.i_k + v_{L3}$$

Aynı zamanda uygun ağaç kavramından dolayı mecburen dal olarak seçilmek zorunda kalan ve durum değişkeni olmayan L_3 endüktansına ait tanım bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$v_{L3} = L_3 \cdot \frac{di_{L3}}{dt}$$

Bu denklemdeki i_{L3} akımını, diğer durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade edebilmek için üçüncü temel kesitleme denklemini yazmamız gerekir. Bu denklem aşağıdaki gibi verilir.

$$i_{L3} + i_{L2} - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{L3} = -i_{L2} + i_k$$

Bu denklemi yukarıdaki tanım bağıntısında yerine koyacak ve yeniden düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_{L3} = L_3 \cdot \frac{di_{L3}}{dt} = L_3 \cdot \frac{d(-i_{L2} + i_k)}{dt} = -L_3 \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_k}{dt}$$

Bu ifadeyi öncelikle birinci temel çevre denkleminde ve buradan elde edilecek ifadeyi de hemen ardından L_2 endüktans elemanına ait tanım bağıntısında yerine koyacak ve bu denklemleri yeniden düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$v_{L2} = -(R_4 + R_5).i_{L2} + R_5.i_k - L_3 \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_k}{dt}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot [-(R_4 + R_5).i_{L2} + R_5.i_k - L_3 \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_k}{dt}]$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{-(R_4 + R_5)}{L_2} \cdot i_{L2} + \frac{R_5}{L_2} \cdot i_k - \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{di_k}{dt}$$

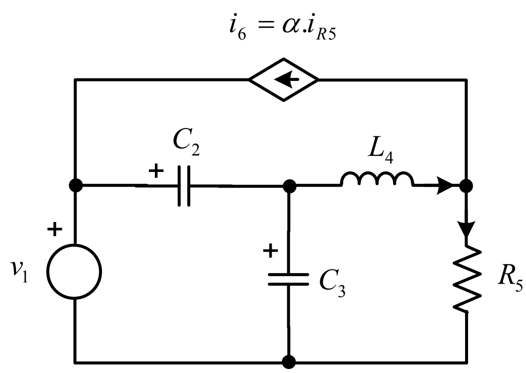
$$(1 + \frac{L_3}{L_2}) \cdot \frac{di_{L2}}{dt} = \frac{-(R_4 + R_5)}{L_2} \cdot i_{L2} + \frac{R_5}{L_2} \cdot i_k + \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{di_k}{dt}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{(R_4 + R_5)}{L_2 + L_3} \cdot i_{L2} + \frac{R_5}{L_2 + L_3} \cdot i_k + \frac{L_3}{L_2 + L_3} \cdot \frac{di_k}{dt}$$

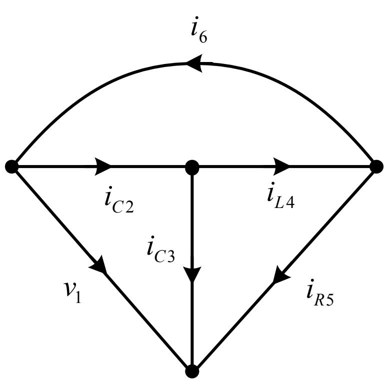
$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot i_{L2} + i_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{di_k}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot i_{L2} + \cos t - \frac{1}{2} \cdot \sin t$$

Açıklama: Devrede iki endüktans elemanı varsa ve biz uygun ağaç şartını sağlamak için ancak birini kiriş ve diğerini mecburen dal seçebiliyor isek, bu durumda ortaya çıkacak olan durum denklemlerinde mutlaka kaynağın türevi yer alacaktır. Benzer şekilde, devrede iki kapasite elemanı varsa ve biz uygun ağaç şartını sağlamak için ancak birini dal ve diğerini mecburen kiriş seçebiliyor isek, bu durumda ortaya çıkacak olan durum denklemlerinde de yine mutlaka kaynağın türevi yer alacaktır.

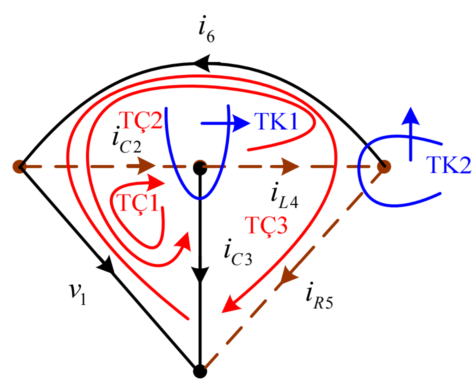
Uygulama 5. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç kavramına paralel olarak, devredeki iki kapasite elemanından sadece biri (C_3) dal ve diğeri (C_2) mecburen kiriş ve ayrıca tek endüktans elemanı (L_4) da kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_{C3} kapasite gerilimi ile i_{L4} endüktans akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle (C_3) kapasite ve (L_4) endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot i_{C3}$$

$$\frac{di_{L4}}{dt} = \frac{1}{L_4} \cdot v_{L4}$$

(C_3) kapasite elemanının tanım bağıntısı için, birinci temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_{C3} + i_{L4} - i_{C2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{C3} = -i_{L4} + i_{C2}$$

Kiriş seçilen (C_2) kapasite elemanının tanım bağıntısı da aşağıda verilir.

$$i_{C2} = C_2 \cdot \frac{dv_{C2}}{dt}$$

Bu ifadeyi yukarıda yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$i_{C3} = -i_{L4} + C_2 \cdot \frac{dv_{C2}}{dt}$$

(C_2) kapasite elemanının gerilimini diğer i_{L4} durum ve v_1 kaynak değişkenleri cinsinden ifade edebilmek için birinci temel çevre denklemini yazmamız gerekecektir. O halde;

$$v_{C2} + v_{C3} - v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{C2} = -v_{C3} + v_1$$

sonucunu buluruz. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine koyacak olursak;

$$i_{C3} = -i_{L4} + C_2 \cdot \frac{d(-v_{C3} + v_1)}{dt} = -i_{L4} - C_2 \cdot \frac{dv_{C3}}{dt} + C_2 \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

Bu sonuç ifadeyi de (C_3) kapasite elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak;

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot (-i_{L4} - C_2 \cdot \frac{dv_{C3}}{dt} - i_{L4} + C_2 \cdot \frac{dv_1}{dt}) = -\frac{1}{C_3} \cdot i_{L4} - \frac{C_2}{C_3} \cdot \frac{dv_{C3}}{dt} + \frac{C_2}{C_3} \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

$$(1 + \frac{C_2}{C_3}) \frac{dv_{C3}}{dt} = -\frac{1}{C_3} \cdot i_{L4} + \frac{C_2}{C_3} \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = -\frac{1}{C_2 + C_3} \cdot i_{L4} + \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

sonucu bulunur. (L_4) endüktans elemanına ait v_{L4} ifadesini bulabilmek için ikinci temel çevre denklemini yazmamız gerekecektir. O halde;

$$v_{L4} + v_6 + v_1 - v_{C3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L4} = -v_6 - v_1 + v_{C3}$$

elde edilir. Bu denklemde bağımlı akım kaynağının gerilimi olan v_6 terimi ne durum değişkeni ve ne de kaynak değişkenidir. Bu terimi durum ve kaynak değişkenleri cinsinden elde edebilmek için üçüncü temel çevre denklemini ve hemen ardından da ikinci temel kesitleme denklemini yazmamız ve bunları düzenlememiz gerekecektir. O halde;

$$v_{R5} - v_1 - v_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_6 = v_{R5} - v_1$$

ve

$$i_6 - i_{L4} + i_{R5} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R5} = i_{L4} + i_6$$

yazılır. Aynı zamanda bize verilen devrede $i_6 = \alpha.i_{R5}$ olarak verilmişti. Bu ifadeyi yukarıda yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\alpha.i_{R5} - i_{L4} + i_{R5} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\alpha).i_{R5} = i_{L4} \quad \Rightarrow \quad i_{R5} = \frac{1}{(1+\alpha)} \cdot i_{L4}$$

Üçüncü temel çevre için yazdığımız denklemdeki direnç elemanına ilişkin v_{R5} ifadesini, direncin tanım bağıntısı şeklinde ifade edecek ve bunun neticesinde ortaya çıkacak olan i_{R5} terimi yerine yukarıda bulmuş olduğumuz değeri yazacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_6 = R_5 . i_{R5} - v_1 \quad \Rightarrow \quad v_6 = \frac{R_5}{(1+\alpha)} \cdot i_{L4} - v_1$$

Bu ifadeyi de ikinci temel çevre denkleminde yerine yazacak olursak;

$$v_{L4} = -[\frac{R_5}{(1+\alpha)} \cdot i_{L4} - v_1] - v_1 + v_{C3} = -\frac{R_5}{(1+\alpha)} \cdot i_{L4} + v_{C3}$$

sonucunu elde ederiz. Bu ifadeyi de (L_4) endüktans elemanına ait tanım bağıntısında yerine koyacak olursak;

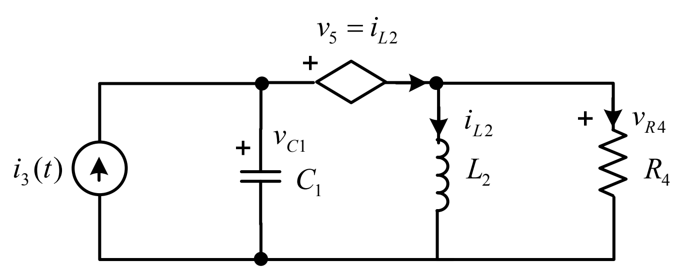
$$\frac{di_{L4}}{dt} = \frac{1}{L_4} \cdot [-\frac{R_5}{(1+\alpha)} \cdot i_{L4} + v_{C3}] = -\frac{R_5}{L_{4.}(1+\alpha)} \cdot i_{L4} + \frac{1}{L_4} v_{C3}$$

sonucunu elde ederiz. Bu iki denklemi matrissel bir biçimde yazacak olursak;

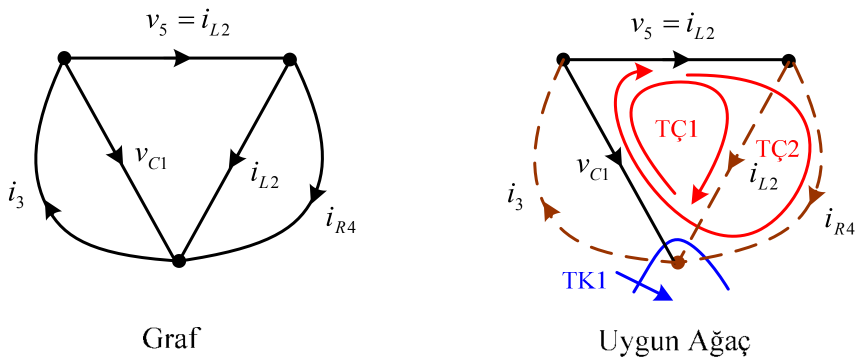
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C_2 + C_3} \\ \dfrac{1}{L_4} & -\dfrac{R_5}{L_{4.}(1+\alpha)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{C_2}{C_2 + C_3} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{dv_1}{dt}$$

sonucunu elde ederiz.

Uygulama 6. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç kavramına paralel olarak, devredeki kapasite elemanı (C_1) dal ve endüktans elemanı (L_2)da kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_{C1} kapasite gerilimi ile i_{L2} endüktans akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle (C_1) kapasite ve (L_2) endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \cdot i_{C1}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

(C_1) kapasite elemanının tanım bağıntısı için, birinci temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_{C1} + i_{L2} - i_3 + i_{R4} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{C1} = -i_{L2} + i_3 - i_{R4}$$

(R_4) direnç elemanının tanım bağıntısını yukarıdaki denklemde yerine yazacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$i_{C1} + i_{L2} - i_3 + i_{R4} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{C1} = -i_{L2} + i_3 - \frac{1}{R_4} \cdot v_{R4}$$

(R_4) direnç elemanına ilişkin birinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_{R4} - v_{C1} + v_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R4} = v_{C1} - v_5 \quad \Rightarrow \quad v_{R4} = v_{C1} - i_{L2}$$

$$i_{C1} = -i_{L2} + i_3 - \frac{1}{R_4} \cdot (v_{C1} - i_{L2}) = -i_{L2} + i_3 - \frac{1}{R_4} \cdot v_{C1} + \frac{1}{R_4} \cdot i_{L2} = (\frac{1}{R_4} - 1) \cdot i_{L2} + i_3 - \frac{1}{R_4} \cdot v_{C1}$$

(L_2) endüktans elemanına ilişkin ikinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_{L2} - v_{C1} + v_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L2} = v_{C1} - v_5 \quad \Rightarrow \quad v_{L2} = v_{C1} - i_{L2}$$

Son iki ifadeyi kapasite ve endüktans tanım bağıntısı ifadelerinde yerine koyacak olursak, durum denklemlerini aşağıdaki biçimde elde ederiz.

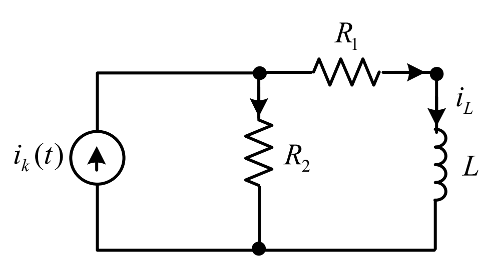
$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} \cdot \left[(\frac{1}{R_4} - 1) + i_3 - \frac{1}{R_4} \cdot v_{C1} \right] = -\frac{1}{C_1.R_4} \cdot v_{C1} + (\frac{1}{C_1.R_4} - \frac{1}{C_1}) \cdot i_{L2} + \frac{1}{C_1} \cdot i_3$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot (v_{C1} - i_{L2}) = \frac{1}{L_2} \cdot v_{C1} - \frac{1}{L_2} \cdot i_{L2}$$

Bu ifadeleri matrissel bir biçimde düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

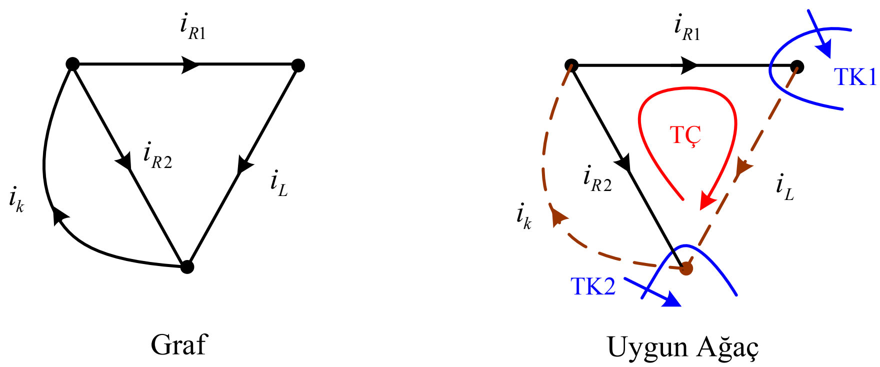
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1.R_4} & (\dfrac{1}{C_1.R_4} - \dfrac{1}{C_1}) \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_3$$

Uygulama 7. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



$$R_1 = R_2 = 1\Omega$$
$$L = \frac{1}{5} H$$
$$i_k(t) = 2u(t)$$

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç kavramına paralel olarak, devredeki tek endüktans elemanı (L) da kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkeni i_L endüktans akımı olacaktır. Bu durumda, (L) endüktans eleman tanım bağıntısı aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

(L) endüktans elemanına ilişkin temel çevre denklemini yazarsak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_L - v_{R2} + v_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = v_{R2} - v_{R1} \quad \text{(Temel çevre denklemi)}$$

Direnç elemanlarına ilişkin tanım bağıntılarını yukarıdaki denklemde yerine yazıp, ardından bu akımlara ait temel kesitleme-1 ve temel kesitleme-2 denklemlerini yazıp burada yerine koyup denklemi düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuç ifadesine geliriz.

$$v_L = R_2.i_{R2} - R_1.i_{R1}$$

$$i_{R1} - i_L = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R1} = i_L \quad \text{(Birinci temel kesitleme denklemi)}$$

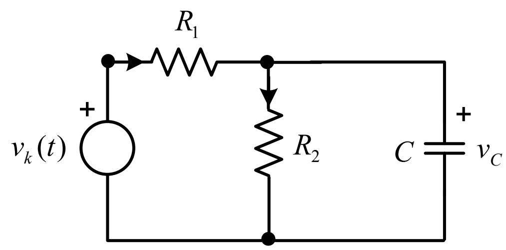
$$i_{R2} + i_L - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R2} = -i_L + i_k \quad \text{(İkinci temel kesitleme denklemi)}$$

$$v_L = R_2.(-i_L + i_k) - R_1.i_L = -(R_1 + R_2).i_L + R_2.i_k$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot \left[-(R_1 + R_2).i_L + R_2.i_k \right] = -\frac{(R_1 + R_2)}{L} \cdot i_L + \frac{R_2}{L} \cdot i_k$$

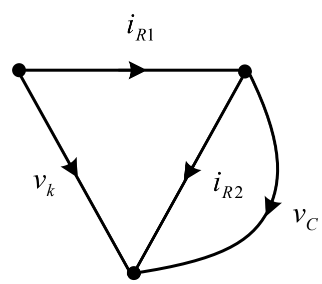
$$\frac{di_L}{dt} = -10.i_L + 5.i_k \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L(t)}{dt} = -10.i_L(t) + 10.u(t)$$

Uygulama 8. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.

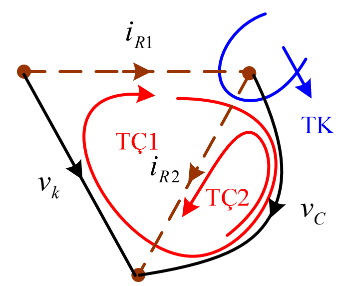


$$R_1 = R_2 = 1\Omega$$
$$C = \frac{1}{5} F$$
$$v_k(t) = 2u(t)$$

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç kavramına paralel olarak, devredeki tek kapasite elemanı (C)da dal seçilmiştir. Buna göre durum değişkeni v_C kapasite gerilimi olacaktır. Bu durumda, (C) kapasite eleman tanım bağıntısı aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

(C) kapasite elemanına ilişkin temel kesitleme denklemini yazarsak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$i_C + i_{R2} - i_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = i_{R1} - i_{R2} \quad \text{(Temel kesitleme denklemi)}$$

Direnç elemanlarına ilişkin tanım bağıntılarını yukarıdaki denklemde yerine yazıp, ardından bu akımlara ait temel çevre-1 ve temel çevre-2 denklemlerini yazıp burada yerine koyup denklemi düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuç ifadesine geliriz.

$$i_C = i_{R1} - i_{R2} = \frac{v_{R1}}{R_1} - \frac{v_{R2}}{R_2}$$

$$v_C - v_k + v_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = -v_C + v_k \quad \text{(Birinci temel çevre denklemi)}$$

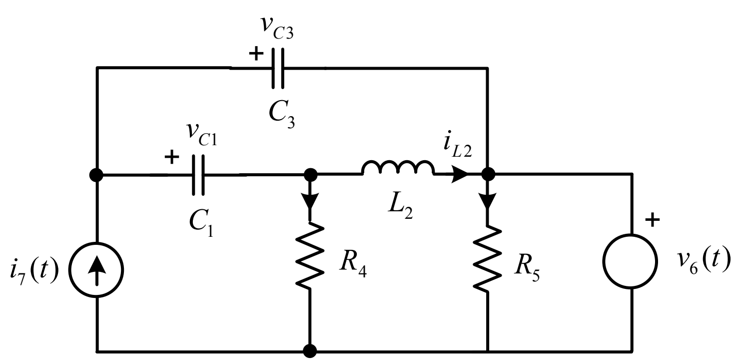
$$v_C - v_{R2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R2} = v_C \quad \text{(İkinci temel çevre denklemi)}$$

$$i_C = i_{R1} - i_{R2} = \frac{(-v_C + v_k)}{R_1} - \frac{v_C}{R_2}$$

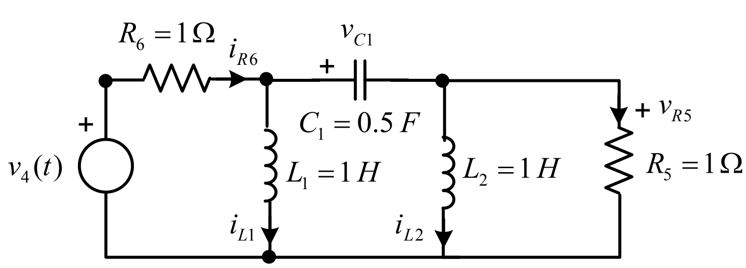
$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{(-v_C + v_k)}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} \right] = -(\frac{1}{R_1.C} + \frac{1}{R_2.C}) \cdot v_C + \frac{1}{R_1.C} \cdot v_k$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -10.v_C + 5.v_k \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C(t)}{dt} = -10.v_C(t) + 10.u(t)$$

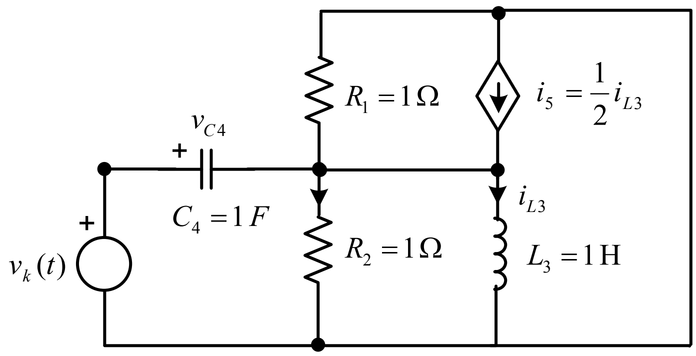
Ödev 1. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.



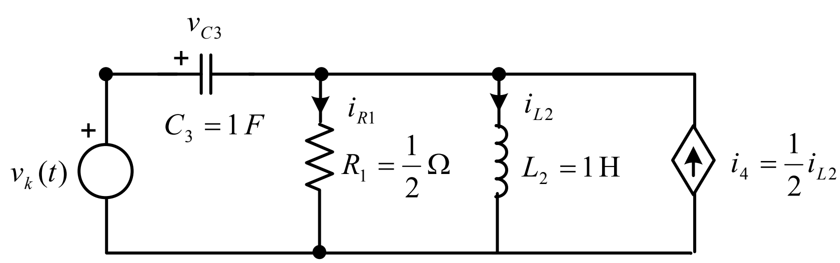
Ödev 2. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.



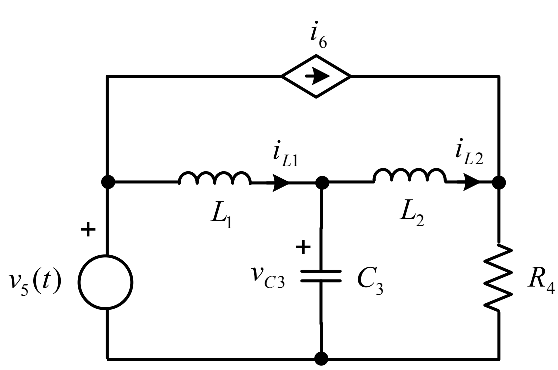
Ödev 3. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.



Ödev 4. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.



Ödev 5. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.



$L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{H}$

$C_3 = 1\,\mathrm{F}$

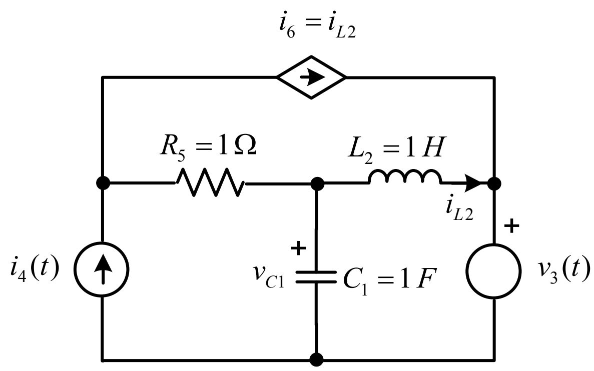
$R_4 = 1\,\Omega$

$i_6 = \beta . v_{C3}$

$\beta = 1$

$v_5(t) = u(t)$

Ödev 6. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.



Ödev 7. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrissel bir biçime sokunuz.