

# Matematická analýza II

Stručné výpisky

Viktor Soukup, Lukáš Salak

# Obsah

<b>1</b>	<b>Metrické prostory</b>	<b>3</b>
1.1	Definice metrického prostoru	3
1.2	Euklidovský prostor $\mathbb{E}_n$	3
1.3	Diskrétní prostor	3
1.4	Podprostor	3
1.5	Spojité zobrazení	3
1.6	Triviality	3
1.6.1	Identické zobrazení	3
1.6.2	Vložení podprostoru	3
1.6.3	Složení spojitých zobrazení je spojitě	3
1.7	Věta o konvergenci	4
1.8	Okolí	4
1.9	Otevřená a uzavřená množina	4
1.10	Uzávěr	4
1.11	Vlastnosti zobrazení mezi metrickými prostory	4
1.12	Silně ekvivalentní metriky	4
1.13	Vzory a obrazy	4
1.13.1	Obraz	4
1.13.2	Vzor	5
1.14	Reálná funkce o $n$ proměnných	5
1.15	Součiny	5
1.16	Věta o spojitých zobrazeních	5
<b>2</b>	<b>Parciální derivace</b>	<b>6</b>
2.1	Definice a značení	6
2.2	Totální diferenciál	6
2.2.1	Definice	7
2.2.2	Tvrzení o spojitosti funkce a totálním diferenciálu	7
2.2.3	Věta o totálním diferenciálu	7
2.3	Pravidla pro počítání parciálních derivací	8
2.3.1	Věta pro derivaci složených funkcí o více proměnných	8
2.3.2	Důsledek (Řetězové Pravidlo)	8
2.4	Aritmetická pravidla z řetězového násobení	9
2.4.1	Násobení	9
2.4.2	Dělení	9
2.5	Lagrangeova věta ve více proměnných	9
2.6	Tvrzení o záměnnosti pořadí při parciálních derivacích	10
2.6.1	Důsledek tvrzení o záměnnosti	10
2.7	Věta o konvergentní podposloupnosti	11
<b>3</b>	<b>Kompaktní prostory</b>	<b>11</b>
3.1	Definice kompaktního prostoru	11
3.2	Tvrzení o podprostoru kompaktního prostoru	11
3.3	Tvrzení o uzavřenosti podprostoru	11
3.4	Tvrzení o omezenosti kompaktního prostoru	12
3.5	Věta o součinu kompaktních prostorů	12
3.6	Věta : podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je omezený a uzavřený	13
3.7	Tvrzení: obraz spojitěho zobrazení je kompaktní	13
3.8	Tvrzení: každá spojitá funkce na kompaktním prostoru nabývá maxima i minima	13
3.9	Věta o vzájemně jednoznačném spojitěm zobrazení	13
3.10	Definice cauchyovské posloupnosti $(x_n)_n$	13
3.11	Tvrzení o konvergenci cauchyovské posloupnosti	13
3.12	Definice úplného metrického prostoru	14
3.13	Tvrzení: Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený	14
3.14	Tvrzení: Každý kompaktní prostor je úplný	14
3.15	Lemma o cauchyovské posloupnosti	14

3.16	Věta: Součin úplných prostorů je úplný	14
3.16.1	Důsledek	14
<b>4</b>	<b>Implicitní funkce</b>	<b>14</b>
4.1	Ilustrační příklady	14
4.1.1	Obecný příklad	14
4.1.2	Příklad pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$	15
4.2	Věta o implicitní funkci	15
4.3	Věta o implicitních funkcích	15
4.4	Definice Jacobiho determinantu	15
<b>5</b>	<b>Extrémy</b>	<b>16</b>
5.1	Věta o hledání extrémů funkcí	16
5.2	Definice Regulárního zobrazení	17
5.3	Tvrzení o obrazu regulární funkce	17
5.4	Tvrzení o inverzi regulárního zobrazení	17
5.4.1	Důsledek tvrzení o inverzi regulárního zobrazení	17
<b>6</b>	<b>Objemy a obsahy</b>	<b>18</b>
6.1	Vlastnosti	18
<b>7</b>	<b>Stejněměrná spojitost</b>	<b>18</b>
7.1	Definice stejnoměrné spojitosti	18
7.2	Věta o stejnoměrné spojitosti	18
<b>8</b>	<b>Opakování</b>	<b>18</b>
8.1	Riemannův integrál v jedné proměnné	18
8.1.1	Riemannův integrál	19
8.1.2	Tvrzení o existenci Riemannova integrálu	19
8.1.3	Věta: Existence Riemannova integrálu pro spojitě funkce v $\mathbb{R}$	20
8.1.4	Integrační věta o střední hodnotě	20
8.1.5	Základní věta analýzy	20
8.1.6	Důsledky základní věty analýzy	20
<b>9</b>	<b>Riemannův integrál ve více proměnných</b>	<b>21</b>
9.1	Pomocné definice	21
9.2	Tvrzení o existenci Riemannova integrálu	23
9.3	Věta: Každá spojitá funkce na $n$ -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál	23
9.4	Fubiniova věta	23
9.5	Lebesgueův integrál	24
9.6	Tietzeova věta	25

# 1 Metrické prostory

## 1.1 Definice metrického prostoru

Metrický prostor :  $(X, d), d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , kde platí:

- $d(x, y) \geq 0, d(x, y) \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (trojúhelníková nerovnost)

Příklady:

$$(\mathbb{R}, |x - y|),$$

$$(\mathbb{C}, |x - y|)$$

Pozor: trojúhelníková nerovnost v  $(\mathbb{C}, |x - y|)$  není tak triviální jako v  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Euklidovský prostor $\mathbb{E}_n$

Definujeme jako  $(\mathbb{R}^n, d)$ , kde  $d$ :

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Pro nás zvláště důležitý, známy v podobě vektorového prostoru  $\mathbf{V}_n$  se skalárním součinem  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  a normou  $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$  a vzdáleností  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

## 1.3 Diskrétní prostor

Definujeme jako  $(X, d)$ , kde  $d(x, y) = 1$  pro  $x \neq y$

## 1.4 Podprostor

Buď  $(X, d)$  metrický prostor. Pak  $(Y, d')$  je podprostor, kde  $Y \subseteq X$  a  $d'(x, y) = d(x, y)$ .

## 1.5 Spojité zobrazení

$f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  je spojitě zobrazení, pokud

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

## 1.6 Triviality

### 1.6.1 Identické zobrazení

$$(X, d) \rightarrow (X, d)$$

### 1.6.2 Vložení podprostoru

$$j = (x \mapsto x) : (Y, d') \rightarrow (X, d)$$

### 1.6.3 Složení spojitých zobrazení je spojitě

Pokud jsou  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  a  $g : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$  spojitě, pak i

$$g \circ f : (X, d) \rightarrow (Z, d'')$$

je spojitě.

## 1.7 Věta o konvergenci

Zobrazení  $f : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$  je spojitě právě když pro každou konvergentní  $(x_n)_n$  v  $(X_1, d_1)$  posloupnost  $(f(x_n))_n$  konverguje v  $(X_2, d_2)$  a platí  $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$ .

**Důkaz:** Buď  $f$  spojitá a nechť  $\lim_n x_n = x$ . Pro  $\epsilon > 0$  zvolme ze spojitosti  $\delta > 0$  tak aby  $d_2(f(y), f(x)) < \epsilon$  pro  $d_1(x, y) < \delta$ . Podle definice konvergence posloupnosti existuje  $n_0$  takové, že pro  $n \geq n_0$  je  $d_1(x_n, x) < \delta$ . Tedy je-li  $n \leq n_0$  máme  $d_2(f(x_n), f(x)) < \epsilon$  a potom  $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$ .

## 1.8 Okolí

$$\Omega(x, \epsilon) = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$$

**Užití:** "U je okolí  $x$ "  $\equiv \exists \epsilon > 0, \Omega(x, \epsilon) \subseteq U$

## 1.9 Otevřená a uzavřená množina

$U \subseteq (X, d)$  je **otevřená**, pokud je okolím *každého* svého bodu.

$V \subseteq (X, d)$  je **uzavřená**, pokud  $\forall (x_n)_n \subseteq A$  je konvergentní v  $X$  je  $\lim_n x_n$  v  $A$ .

## 1.10 Uzávěr

**Uzávěr**  $A$  je  $\bar{A} = \{x | d(x, A) = 0\}$

## 1.11 Vlastnosti zobrazení mezi metrickými prostory

Buďte  $(X_1, d_1)$  a  $(X_2, d_2)$  metrické prostory a buď zobrazení  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Následující jsou potom ekvivalentní:

1.  $f$  je spojitě.
2.  $\forall x \in X_1$  a  $\forall$  okolí  $V$  bodu  $f(x)$  existuje okolí  $U$  bodu  $x$  takové, že  $f[U] \subseteq V$ .
3.  $\forall$  otevřenou  $U$  v  $X_2$  je vzor  $f^{-1}[U]$  otevřený v  $X_1$ .
4.  $\forall$  uzavřenou  $A$  v  $X_2$  je vzor  $f^{-1}[A]$  uzavřený v  $X_1$ .
5.  $\forall A \subseteq X_1$  je  $f[\bar{A}] \subseteq \bar{f[A]}$

## 1.12 Silně ekvivalentní metriky

Buďte  $d_1, d_2$  metriky.  $d_1$  a  $d_2$  na téže jsou silně ekvivalentní, pokud

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

## 1.13 Vzory a obrazy

$$f : X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$$

### 1.13.1 Obraz

Obraz podmnožiny  $A \subseteq X$  v  $Y$ :

$$f[A] = \{f(x) | x \in A\}$$

### 1.13.2 Vzor

Vzor podmnožiny  $B \subseteq Y$  v  $X$ :

$$f^{-1}[B] = \{x | f(x) \in B\}$$

$$X \begin{matrix} \xrightarrow{f[-]} \\ \xleftarrow{f^{-1}[-]} \end{matrix} Y$$

Platí:

$$f[A] \subseteq B \equiv A \subseteq f^{-1}[B],$$

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B \dots f^{-1}[f[A]] \supseteq A$$

**Pozor:**  $f^{-1}$  má dvě významy:

- inverze  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , nemusí existovat
- část v symbolu  $f^{-1}[-]$ , má smysl vždy

## 1.14 Reálná funkce o $n$ proměnných

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{E}_n$$

Podobně jako ve funkcích jedné proměnné se nemůžeme omezit na případy, kdy definiční obor je celý prostor  $\mathbb{E}_n$ . V Případě funkcí jedné proměnné byly definiční obory obvykle intervaly nebo jednoduchá sjednocení intervalů. Tady budou definiční obory  $D$  složitější, často (ale ne vždy) otevřené množiny v  $\mathbb{E}_n$ .

O  $D$  se často mluví jako o oblasti na níž je funkce definovaná. To není termín (ve specifických kontextech slovo "oblast" termín je, tady ne).

## 1.15 Součiny

Pro  $(X_i, d_i), i = 1, \dots, n$  definujeme na kartézském součinu  $\prod_{i=1}^n X_i$  metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i)$$

Získaný

$$\left( \prod_{i=1}^n X_i, d_i \right) = \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

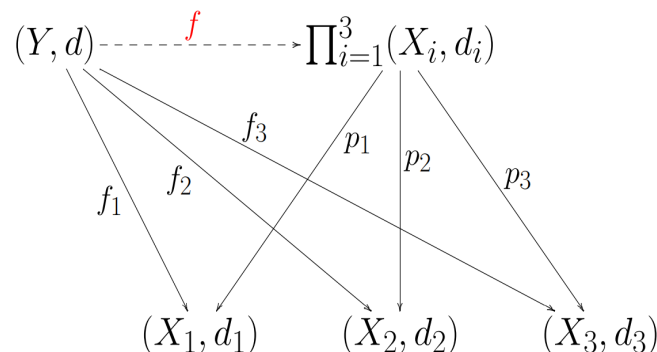
se nazývá součin prostorů  $(X_i, d_i)$ . Píše se též

$$(X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n).$$

## 1.16 Věta o spojitých zobrazeních

1. Projekce  $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$  jsou spojitá zobrazení.
2. Buďte  $f_j : (Y, d') \rightarrow (X_j, d_j)$  libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení  $f : (Y, d') \rightarrow \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$  splňující  $p_j \circ f = f_j$ , totiž zobrazení definované předpisem  $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ , je spojitě.

Jak to vypadá:



Existuje přesně jedno  $f$  takové, že

$$p_i \circ f = f_i$$

a je spojitě.

## 2 Parciální derivace

### 2.1 Definice a značení

Pro  $f(x_1, \dots, x_n)$  vezmeme

$$\begin{aligned}\phi_k(t) &= f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\dots t = x_k \dots\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce  $f$  podle  $x_k$  (v bodě  $(x_1, \dots, x_n)$ ) je (obvyklá) derivace funkce  $\phi_k$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}.$$

Označení

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \text{ nebo } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n),$$

Pro  $f(x, y)$  píšeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ a } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \text{ atd.}$$

Když  $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$  existuje pro všechna  $(x_1, \dots, x_n)$  v nějaké oblasti  $D$  máme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Když budeme mluvit o parciální derivaci bude vždy zřejmé máme-li na mysli funkci, nebo jen číslo (hodnotu té limity nahoře).

### 2.2 Totální diferenciál

Nespojitá funkce  $f$  může mít po souřadnicích má obě parciální derivace v každém bodě, to však ale neimplikuje spojitost.

existence parciálních derivací neimplikuje spojitost!

Budeme potřebovat něco silnějšího. Připomeňte si tvrzení ekvivalentní se standardní derivací: Existuje  $\mu$  konvergující k 0 při  $h \rightarrow 0$  a  $A$  takové, že

$$f(x+h) - f(x) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

*Geometrický pohled:*  $f(x+h) - f(x) = Ah$  vyjadřuje tečnu ke grafu funkce v bodě  $(x, f(x))$ .  $|h| \cdot \mu(h)$  je jakási malá chyba.

Mysleme podobně o funkci  $f(x, y)$  a uvažujme plochu

$$S = \{(t, u, f(t, u)) : (t, u) \in D\}.$$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímk k  $S$  v bodě  $(x, y, f(x, y))$ , ale ne tečnou rovinu, která teprve bude uspokojivé rozšíření faktu nahoře.

Pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n$  definujeme

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$$

To bude místo absolutní hodnoty, místo  $h$  bude  $n$ -tice blízka nule.

### 2.2.1 Definice

Funkce  $f$  má *totální diferenciál* v bodě  $\mathbf{x}$  existuje-li funkce  $\mu$  spojitá v okolí  $U$  bodu  $\mathbf{o}$  taková, že  $\mu(\mathbf{o}) = 0$  a čísla  $A_1, \dots, A_n$  pro která

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h}).$$

### 2.2.2 Tvrzení o spojitosti funkce a totálním diferenciálu

Nechť má funkce  $f$  totální diferenciál v bodě  $\mathbf{a}$ . Potom platí, že

1.  $f$  je spojitá v  $\mathbf{a}$ ,
2.  $f$  má všechny parciální derivace v  $\mathbf{a}$ , a to s hodnotami

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = A_k.$$

Důkaz:

1. Máme

$$|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| + |\mu(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

a limita na pravé straně pro  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$  je 0.

2. Máme

$$\frac{1}{h}(f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(x_1, \dots)) = A_k + \mu(\dots, 0, h, 0, \dots) \frac{\|(0, \dots, h, \dots, 0)\|}{h},$$

a limita na pravé straně je zřejmě  $A_k$ .

Ted' již spojitost dostaneme. Vidíme, že v případě funkcí jedné proměnné není rozdíl mezi existencí derivace v bodě  $\mathbf{a}$  a vlastností mít totální diferenciál v tomto bodě. V případě více proměnných je však tento rozdíl zcela zásadní. Může být trochu překvapující, že zatímco existence parciálních derivací mnoho neznamena, existence spojitých parciálních derivací je něco úplně jiného.

### 2.2.3 Věta o totálním diferenciálu

Buď

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}, \mathbf{h}^{(1)} = (0, h_2, \dots, h_n), \mathbf{h}^{(2)} = (0, 0, h_3, \dots, h_n) \text{ atp.}$$

(takže  $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{0}$ ). Potom máme

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)})) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty existují  $0 \leq \Theta_k \leq 1$  takové, že

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)}) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k$$

a můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} M &= \sum \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} + \sum \left( \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \|\mathbf{h}\| \sum \left( \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned}$$



Položíme

$$\mu(\mathbf{h}) = \sum \left( \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Jelikož  $\left| \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \right| \leq 1$  a jelikož jsou funkce  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  spojité,  $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \mu(\mathbf{h}) = 0$ .

Můžeme tedy schematicky psát  
spojité PD  $\implies$  TD  $\implies$  PD

## 2.3 Pravidla pro počítání parciálních derivací

Aritmetická pravidla jsou stejná jako pro obyčejné derivace (tady totiž obyčejnými derivacemi jsou). Trochu jinak tomu je u pravidla pro skládání. Pro derivace jedné proměnné se dokazuje z formule

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h|\mu(h)$$

tedy z diferenciálu (který je pro ně totéž jako existence derivace). Pravidlo pro skládání v Pravidlo pro skládání v nejjednodušší podobě následuje.

### 2.3.1 Věta pro derivaci složených funkcí o více proměnných

Nechť má  $f(\mathbf{x})$  totální diferenciál v bodu  $\mathbf{a}$ . Nechť mají  $g_k(t)$  derivace v bodě  $b$  a nechť je  $g_k(b) = a_k$  pro  $k = 1, \dots, n$ . Položme

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t)).$$

Potom má  $F$  derivaci v  $b$ , totiž

$$F'(b) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g'_k(b).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b+h)) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b) + (\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b))) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} + \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) \max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}. \end{aligned}$$

Máme-li  $\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) = 0$  jelikož jsou funkce  $g_k$  spojité v  $b$ . Jelikož funkce  $g_k$  mají derivace, jsou  $\max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}$  omezené v dostatečně malém okolí nuly. Limita poslední sčítance je tedy nula a máme

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} g'_k(b) \end{aligned}$$

Co se děje geometricky: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem vnější funkce  $f$  nemá žádný důvod preferovat hlavní osy v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

### 2.3.2 Důsledek (Řetízkové Pravidlo)

Nechť má  $f(\mathbf{x})$  totální diferenciál v bodě  $\mathbf{a}$ . Nechť mají funkce  $g_k(t_1, \dots, t_r)$  parciální derivace v  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$  a nechť je  $g_k(\mathbf{b}) = a_k$  pro  $k = 1, \dots, n$ . Potom má funkce

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1, \dots, t_r) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

všechny parciální derivace v  $\mathbf{b}$ , a platí

$$\frac{\partial(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Skládali jsme

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Skládejme místo  $f$   $m$ -tici funkcí  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ , tedy  $\mathbf{f} : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_M$

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{E}_m$$

Pravidlo z předchozí věty dá tedy

$$\frac{\partial(f_i \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Zavedeme-li matice  $D\mathbf{f} = \left( \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right)_{ik}$  je  $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$  (napravo násobení matic), a tak to má být.  $D\mathbf{h}$  je matice lineární aproximace funkce  $\mathbf{h}$ : *lineární aproximace se skládají spolu s aproximovanými funkcemi.*

## 2.4 Aritmetická pravidla z řetězového násobení

### 2.4.1 Násobení

$$f(u, v) = u \cdot v$$

Potom  $\frac{\partial f}{\partial u} = v$  a  $\frac{\partial f}{\partial v} = u$  a pro  $u = \psi(x)$  a  $v = \phi(x)$  platí:

$$(\phi(x), \psi(y))' = \frac{\partial f}{\partial u} \phi'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \psi'(x) = \phi(x)\psi'(x) + \phi'(x)\psi(x)$$

### 2.4.2 Dělení

$$f(u, v) = \frac{u}{v}$$

Potom  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$  a  $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$  a pro  $u = \psi(x)$  a  $v = \phi(x)$  platí:

$$\left( \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \right)' = \frac{\partial f}{\partial u} \phi'(x) - \frac{\partial f}{\partial v} \psi'(x) = \psi'(x) = \frac{1}{\psi(x)} \phi'(x) + \frac{1}{\psi(x)^2} \psi'(x) = \frac{\psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2}$$

## 2.5 Lagrangeova věta ve více proměnných

Nechť má  $f$  spojitě parciální derivace v konvexní otevřené množině  $U \subseteq \mathbb{E}_n$ . Potom pro libovolné dva body  $x, y \in U$   $\exists 0 \leq \theta \leq 1$  takové, že:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j} (y_j - x_j)$$

**Důkaz:** Mějme  $\mathbf{g}$ , pro které platí  $g_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$ . Potom máme  $F(t) = f \circ \mathbf{g} = (x + t(y - x))$  a

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} g'_j(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} (y_j - x_j)$$

Podle Lagrangeovy věty:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = F'(\theta)$$

**Poznámka:** Často se užívá v tomto tvaru:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\partial x_j} h_j$$

(Porovnej s formulí pro totální diferenciál)

## 2.6 Tvrzení o záměnnosti pořadí při parciálních derivacích

Mějme funkci  $f(x, y)$  takovou, že existují parciální derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  a  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , které jsou spojité v nějakém okolí bodu  $(x, y)$ . Potom:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

**Důkaz:** Pokusíme se spočítat obě derivace v jednom kroku, tedy počítáme limitu  $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$  funkce

$$F(h) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h^2}$$

Položíme li

$$\begin{aligned}\varphi_h(y) &= f(x+h, y) - f(x, y) \text{ a} \\ \psi_h(x) &= f(x, y+h) - f(x, y),\end{aligned}$$

dostaneme pro  $F(h)$  dva výrazy:

$$\begin{aligned}F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) \\ F(h) &= \frac{1}{h^2}(\psi_h(x+h) - \psi_h(x)).\end{aligned}$$

První: Funkce  $\varphi_h$  má derivaci (podle  $y$ , jinou proměnnou nemá)

$$\varphi'_h(y) = \frac{\partial f(x+h, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

a tedy podle Lagrangeovy formule

$$\begin{aligned}F(h) &= \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) = \frac{1}{h} \varphi'_h(y + \theta_1 h) \\ &= \frac{\partial f(x+h, y + \theta_1 h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y + \theta_1 h)}{\partial y}.\end{aligned}$$

Potom znovu, podle L. formule,

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f(x + \theta_2 h, y + \theta_1 h)}{\partial y} \right)$$

pro nějaká  $\theta_1, \theta_2$  mezi 0 a 1.

Druhá,  $\frac{1}{h^2}(\varphi_h(x+h) - \varphi_h(x))$  dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f(x + \theta_4 h, y + \theta_2 h)}{\partial x} \right)$$

Obě  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$  a  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$  jsou spojité  $(x, y)$ , a  $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$  můžeme počítat z kteréhokoli výrazu (první nebo druhá):

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

### 2.6.1 Důsledek tvrzení o záměnnosti

Nechť má funkce  $f$  v proměnných spojité parciální derivace do řádu  $k$ . Potom hodnoty těchto derivací záleží pouze na tom, kolikrát bylo derivováno v každé z proměnných  $x_1, \dots, x_n$ .

Tedy za daných předpokladů můžeme obecné parciální derivace řádu  $r \leq k$  psát

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} \text{ kde } r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$$

( $r_j = 0$  indukuje absenci symbolu  $\partial x_j$ )

## 2.7 Věta o konvergentní podposloupnosti

Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Explicitně: Mějme  $a, b \in \mathbb{R}$  taková, že  $\forall n : a \leq x_n \leq b$ . Potom existuje podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  posloupnosti  $(x_n)_n$  která konverguje v  $\mathbb{R}$  a platí  $a \leq \lim_n x_{k_n} \leq b$

**Důkaz:** Vezměme

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$$

$M$  je neprázdná a omezená protože  $a \in M$  a  $b$  je horní mez  $M$ . Musí tedy existovat  $s = \sup(M)$  a platí  $a \leq s \leq b$ . Dále, pro každé  $n$  je množina

$$K(n) = \{k : s - \frac{1}{n} < x_k < s + \frac{1}{n}\}$$

nekonečná: skutečně, máme  $x > s - \varepsilon$  takové, že  $x_n > x$  pro nekonečně mnoho  $n$ , zatím co podle definice množiny  $M$  je jen konečně mnoho  $n$  takových, že  $x_n \geq s + \varepsilon$ .

Zvolme  $k_1$  tak, aby

$$s - 1 < x_{k_1} < s + 1.$$

Mějme zvolena  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$  taková, že  $j = 1, \dots, n$

$$s - \frac{1}{j} < x_{k_j} < s + \frac{1}{j}.$$

Jelikož  $K(n+1)$  je nekonečná, můžeme zvolit  $k_{n+1} > k_n$  tak, aby

$$s - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} < s + \frac{1}{n+1}.$$

Takto zvolená podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  naší  $(x_n)_n$  zřejmě konverguje k  $s$ .

## 3 Kompaktní prostory

### 3.1 Definice kompaktního prostoru

Metrický prostor  $(X, d)$  je kompaktní, pokud každá posloupnost v něm obsahuje konvergentní podposloupnost.

### 3.2 Tvrzení o podprostoru kompaktního prostoru

Podprostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený.

**Důkaz:**

1. Buď  $Y$  uzavřený podprostor kompaktního  $X$  a buď  $(y_n)_n$  podposloupnost v  $Y$ . Jako posloupnost v  $X$  má podposloupnost s limitou a z uzavřenosti je tato limita v  $Y$ .
2. Nechť  $Y$  není uzavřená. Potom existuje posloupnost  $(y_n)_n$  v  $Y$  konvergentní v  $X$  taková, že  $y = \lim_n y_n \notin Y$ . Potom  $(y_n)_n$  nemůže mít podposloupnost konvergentní v  $Y$  protože každá její podposloupnost konverguje k  $y$ .

### 3.3 Tvrzení o uzavřenosti podprostoru

Buď  $(X, d)$  libovolný metrický prostor a buď podprostor  $Y \subseteq X$  kompaktní. Potom  $Y$  je uzavřený v  $(X, d)$ .

**Důkaz:** Nechť  $(y_n)_n$  posloupnost v  $Y$  konverguje v  $X$  k limitě  $y$ . Potom každá podposloupnost  $(y_n)_n$  konverguje k  $y$  a tedy je  $y \in Y$ .

Metrický prostor  $(X, d)$  je omezený, jestliže pro nějaké  $K$  platí, že

$$\forall x, y \in X : d(x, y) < K.$$

### 3.4 Tvrzení o omezenosti kompaktního prostoru

Každý kompaktní prostor je omezený.

**Důkaz:** Zvolme  $x_1$  libovolně a  $x_n$  tak, aby  $d(x_1, x_n) > n$ . Posloupnost  $(x_n)_n$  nemá konvergentní podposloupnost; kdyby  $x$  byla limita takové podposloupnosti, bylo by pro dost velké  $n$  nekonečně mnoho členů této podposloupnosti blíže k  $x_1$  než  $d(x_1, x_n) + 1$ , což je spor.

### 3.5 Věta o součinu kompaktních prostorů

Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

**Důkaz:** Stačí dokázat pro součin dvou prostorů.

Buďte  $(X, d_1), (Y, d_2)$  kompaktní a buď  $((x_n, y_n))_n$  posloupnost v  $X \times Y$ . Zvolme konvergentní podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  posloupnosti  $(x_n)_n$  a konvergentní podposloupnost  $(y_{k_{l_n}})_n$  posloupnosti  $(y_{k_n})_n$ .

Potom je

$$((x_{k_{l_n}}, y_{k_{l_n}}))_n$$

konvergentní podposloupnost posloupnosti  $((x_n, y_n))_n$ .

Kompaktní interval v  $\mathbb{E}_n$ : součin intervalů  $\langle a_i, b_i \rangle$

### 3.6 Věta : podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je omezený a uzavřený

Podprostor euklidovského prostoru  $\mathbb{E}_n$  je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.

**Důkaz:**

1. Že je uzavřený a omezený už víme.
2. Buď nyní  $Y \subseteq \mathbb{E}_n$  omezený a uzavřený. Jelikož je omezený, je pro dostatečně velký kompaktní interval

$$Y \subseteq J^n \subseteq \mathbb{E}_n.$$

$J^n$  je kompaktní jako součin intervalů  $\langle a_i, b_i \rangle$ , a jelikož je  $Y$  uzavřený v  $\mathbb{E}_n$  je též uzavřený v  $J^n$  a tedy kompaktní.

### 3.7 Tvrzení: obraz spojitého zobrazení je kompaktní

Buď  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  spojitě zobrazení a buď  $A \subseteq X$  kompaktní. Potom je  $f[A]$  kompaktní.

**Důkaz:** Buď  $(y_n)_n$  posloupnost v  $f[A]$ . Zvolme  $x_n \in A$  tak, aby  $y_n = f(x_n)$ . Buď  $(x_{k_n})_n$  konvergentní podposloupnost. Potom je  $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$  konvergentní podposloupnost  $(x_n)_n$ .

### 3.8 Tvrzení: každá spojitá funkce na kompaktním prostoru nabývá maxima i minima

Buď  $(X, d)$  kompaktní. Potom každá spojitá funkce  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá maxima i minima.

**Důkaz:** Buď  $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$  kompaktní. Je to tedy omezená množina a musí mít supremum  $M$  a infimum  $m$ . Zřejmě máme  $d(m, Y) = d(M, Y) = 0$  a jelikož  $Y$  je uzavřená,  $m, M \in Y$ . Víme, že spojitá  $f$  je charakterizována tím, že všechny vzory uzavřených množin jsou uzavřené. Nyní vidíme, že je-li definiční obor kompaktní, platí též, že obrazy uzavřených podmnožin jsou uzavřené. Z toho plyne následující:

### 3.9 Věta o vzájemně jednoznačném spojitém zobrazení

Je-li  $(X, d)$  kompaktní a je-li  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  vzájemně jednoznačné spojitě zobrazení, pak je  $f$  homeomorfismus.

Obecněji: Necht'  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  je spojitě zobrazení. Mějme potom  $g : (X, d) \rightarrow (Z, d'')$  a  $h : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$  takové, že  $h \circ f = g$ . Potom je  $h$  spojitě.

**Důkaz:** Buď  $B$  uzavřená v  $Z$ . Potom je  $A = g^{-1}[B]$  uzavřená  $\implies$  kompaktnost v  $X \implies f[A]$  je kompaktní  $\implies$  uzavřená v  $Y$ . Jelikož je  $f$  zobrazení na, máme  $f[f^{-1}[C]] = C \forall C$ . Proto je

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A]$$

uzavřená.

### 3.10 Definice cauchyovské posloupnosti $(x_n)_n$

Posloupnost  $(x_n)_n$  v  $(X, d)$  je **Cauchyovská**, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$$

### 3.11 Tvrzení o konvergenci cauchyovské posloupnosti

Necht' má Cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost. Potom posloupnost konverguje k limitě podposloupnosti.

**Důkaz:** Necht' je  $(x_n)_n$  Cauchyovská a necht'  $\lim_n x_{k_n} = x$ . Buď  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  pro  $m, n \geq n_1$  a  $d(x_{k_n}, x) \leq \epsilon$  pro  $n \geq n_2$ . Položíme-li  $n_0 = \max(n_1, n_2)$ , máme pro  $n \geq n_0$  (protože  $k_n \geq n$ )

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < 2\epsilon.$$

### 3.12 Definice úplného metrického prostoru

Metrický prostor  $(X, d)$  je **úplný**, pokud v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje.

### 3.13 Tvrzení: Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený

Podprostor úplného je úplný, právě když je uzavřený.

**Důkaz:**

1. Buď  $Y \subseteq (X, d)$  uzavřený. Buď  $(y_n)_n$  Cauchyovská v  $Y$ . Potom je Cauchyovská a tedy konvergentní v  $X$  a kvůli uzavřenosti je limita v  $Y$ .
2. Nechť  $Y$  není uzavřený. Potom existuje posloupnost  $(y_n)_n$  v  $Y$  konvergentní v  $X$  taková, že  $\lim_n y_n \notin Y$ . Potom je  $(y_n)_n$  Cauchyovská v  $X$  a jelikož je vzálenost stejná, též v  $Y$ . Ale v  $Y$  nekonverguje.

### 3.14 Tvrzení: Každý kompaktní prostor je úplný

Každý kompaktní prostor je úplný.

**Důkaz:** Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost a tedy konverguje.

### 3.15 Lemma o cauchyovské posloupnosti

Posloupnost  $(x_1^1, \dots, x_1^n), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots, (x_1^k, \dots, x_n^k), \dots$  je Cauchyovská v  $\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$  právě když každá z posloupností  $(x_i^k)_k$  je Cauchyovská v  $(X_i, d_i)$ .

**Důkaz:**  $\implies$  plyne bezprostředně z toho, že  $d_i(u_i, v_i) \leq d((u_j)_j, (v_j)_j)$ .

$\Leftarrow$ : Nechť je každá  $(x_i^k)_k$  Cauchyovská. Pro  $\varepsilon > 0$  a  $i$  zvolme  $k_i$  tak, aby pro  $k, l \geq k_i$  bylo  $d_i(x_i^k, x_i^l) < \varepsilon$ . Potom pro  $k, l \geq \max_i k_i$  máme

$$d((x_1^k, \dots, x_n^k), (x_1^l, \dots, x_n^l)) < \varepsilon.$$

### 3.16 Věta: Součin úplných prostorů je úplný

Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně,  $\mathbb{E}_n$  je úplný.

#### 3.16.1 Důsledek

Podprostor  $Y$  euklidovského prostoru  $\mathbb{E}_n$  je úplný, právě když je uzavřený.

## 4 Implicitní funkce

### 4.1 Ilustrační příklady

#### 4.1.1 Obecný příklad

Mějme spojitě reálné funkce  $F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  v  $n + m$  proměnných. Určuje systém rovnic

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

v nějakém smyslu funkce

$$f_i \equiv y_i(x_1, \dots, x_m)$$

pro  $i \in \{1, \dots, n\}$ ? Pokud ano, jak a kde je určuje a jaké mají funkce vlastnosti?

Konkrétněji viz následující příklad.

#### 4.1.2 Příklad pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Mějme  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , neboli rovnici

$$x^2 + y^2 = 1$$

Několik pozorování:

- Pro některá  $x_0$  jako například  $x_0 < -1$  řešení neexistuje, o funkci  $y(x)$  nemluvě.
- Přestože řešení v nějakém okolí  $x_0$  existuje, nemůžeme v nějakých situacích hovořit o funkci. Potřebujeme kolem řešení  $(x_0, y_0)$  vymezit okolí jak  $x_0$ , tak  $y_0$ .
- Máme také případy, jako ten, kdy  $x_0 = 1$ , kde je v okolí mnoho řešení, ale žádný (ani jednostranný) interval, kde by  $y$  bylo jednoznačné.

V případě  $F(x, y)$  už žádná další situace nenastane.

### 4.2 Věta o implicitní funkci

Buď  $F(x, y)$  reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu  $(x_0, y_0)$ . Nechť má  $F$  spojité parciální derivace do řádu  $k \geq 1$  a nechť platí:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0 \\ \left| \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \right| &\neq 0 \end{aligned}$$

Potom  $\exists \delta > 0$  a  $\Delta > 0$  takové, že  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists! y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) : F(x, y) = 0$ .

Dále, označíme-li toto jediné  $y$  jako  $y = f(x)$ , potom získaná  $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  má spojité derivace do řádu  $k$ .

### 4.3 Věta o implicitních funkcích

Buďte  $F_i(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m)$  pro  $i \in 1, \dots, m$  funkce  $n + m$  proměnných se spojitými parciálními derivacemi do řádu  $k \geq 1$ . Buď

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$$

a

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0$$

Potom existují  $\delta > 0$  a  $\Delta > 0$  takové, že pro každé

$$\mathbf{x} \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \dots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$\mathbf{y} \in (y_1^0 - \Delta, y_1^0 + \Delta) \times \dots \times (y_m^0 - \Delta, y_m^0 + \Delta)$$

takové, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

### 4.4 Definice Jacobiho determinantu

Pro konečnou posloupnost funkcí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m))$$

a pro  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  se definuje **Jacobiho determinant** (Jacobián) jako

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})} = \det \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$$



## 5 Extrémy

### 5.1 Věta o hledání extrémů funkcí

Buďte  $f, g_1, \dots, g_k$  reálné funkce definované na otevřené množině  $D \subseteq \mathbb{E}_n$ . Necht' mají spojité parciální derivace. Necht' je hodnota matice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy  $k$ , v každém bodě oboru  $D$ .

Jestliže funkce  $f$  nabývá v bodě  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  lokálního extrému podmíněného vazbami

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

pak existují čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  taková, že  $\forall i \in 1, \dots, n$  platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$$

**Důkaz:** Matice  $M$  má hodnotu  $k$  právě když aspoň jedna její  $k \times k$  podmatice  $M$  je regulární (a tedy má nenulový determinant). Dejme tomu,

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Potom podle věty o implicitních funkcích máme okolí bodu  $\mathbf{a}$  funkce  $\phi_i(x_{k+1}, \dots, x_n)$  se spojitými parciálními derivacemi takové, že (píšme  $\tilde{\mathbf{x}}$  pro  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ )

$$g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, k.$$

tedy lokální maximum nebo minimum funkce  $f(\mathbf{x})$  v  $\mathbf{a}$  podmíněné danými vazbami dává lokální maximum či minimum (nepodmíněné) funkce

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})),$$

v  $\tilde{\mathbf{a}}$ , a tedy je

$$\frac{\partial F(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0 \quad \text{pro } i = k+1, \dots, n,$$

to jest, podle řetízkového pravidla

$$\sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad \text{pro } i = k+1, \dots, n.$$

Derivováním konstantní  $g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}})) = 0$  dostaneme pro  $j = 1, \dots, k$

$$\sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \quad \text{pro } i = k+1, \dots, n.$$

Dále použijeme znovu vlastnost toho, že determinant je nenulový. Vzhledem k hodnotě matice má systém lineárních rovnic

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

jediné řešení  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . To jsou rovnosti z tvrzení, ale jen pro  $i \leq k$ . Musíme ještě dokázat, že to platí i pro  $i > k$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= \\
&= - \sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\
&= - \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\
&= - \sum_{r=1}^n 0 \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0.
\end{aligned}$$

## 5.2 Definice Regulárního zobrazení

Buď  $U \subseteq \mathbb{E}_n$  otevřená a necht' mají  $f_i$  pro  $i \in 1, \dots, n$  spojitě parciální derivace. Výsledné zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{E}_n$$

je **regulární**, jestliže

$$\forall \mathbf{x} \in U : \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \neq 0$$

## 5.3 Tvzení o obrazu regulární funkce

Je-li  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$  regulární, je obraz  $\mathbf{f}[V]$  každé otevřené podmnožiny  $V \subseteq U$  otevřený.

**Důkaz:** Vezměme  $f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$ . Definujeme  $\mathbf{F} : V \times \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$  předpisem

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i.$$

Potom je  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$  a  $\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{x})} \neq 0$ , a tedy můžeme použít větu o IF a dostaneme  $\delta > 0$  a  $\Delta > 0 : \forall \mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta \exists \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$  a  $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i = 0$ . To znamená, že máme  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  (pozor,  $y_i$  jsou zde proměnné,  $x_j$  hledané funkce a

$$\Omega(\mathbf{y}^0, \delta) = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta \subseteq \mathbf{f}[V]\}.$$

## 5.4 Tvzení o inverzi regulárního zobrazení

Buď  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$  regulární zobrazení. Potom  $\forall \mathbf{x}^0 \in U$  otevřené okolí  $V$  takové, že restrikce  $\mathbf{f}|_V$  je prosté zobrazení. Navíc, zobrazení  $\mathbf{g} : \mathbf{f}[V] \rightarrow \mathbb{E}_n$  inverzní k  $\mathbf{f}|_V$  je regulární.

**Důkaz:** Znovu použijeme zobrazení  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ , kde  $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i$ . Pro dost malé  $\Delta > 0$  máme právě jedno  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$  takové, že  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$ . Toto  $\mathbf{g}$  má navíc spojitě parciální derivace. Máme

$$D(id) = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) \cdot D(\mathbf{g}).$$

Podle řetízkového pravidla (a věty o násobení determinantů) je

$$\frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} \cdot \frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})} = \det D(\mathbf{f}) \cdot \det D(\mathbf{g}) = 1$$

a tedy je pro každé  $\mathbf{y} \in \mathbf{f}[V]$ ,  $\partial D(\mathbf{g})D(\mathbf{y})(\mathbf{y}) \neq 0$ .

### 5.4.1 Důsledek tvzení o inverzi regulárního zobrazení

Prosté regulární zobrazení  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$  má regulární inverzi  $\mathbf{g} : \mathbf{f}[U] \rightarrow \mathbb{E}_n$

## 6 Objemy a obsahy

$A \subseteq \mathbb{E}_m$  (speciálně  $\mathbb{E}_2$ )

### 6.1 Vlastnosti

- $A \subseteq B \implies \text{vol}(A) \leq \text{vol}(B)$
- $A, B$  disjunktní  $\implies \text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B)$
- $\text{vol}$  je zachován isometrii
- V  $\mathbb{E}_2$ :  $\text{vol}(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
- V  $\mathbb{E}_n$ :  $\text{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$

Obecně platí:

$$\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) - \text{vol}(A \cap B).$$

## 7 Stejnoměrná spojitost

### 7.1 Definice stejnoměrné spojitosti

Řekneme, že  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  je stejnoměrně spojitá, je-li

$$\forall \varepsilon \exists \delta : d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

. **Příklad:**

$f = (x \mapsto x^2) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  je spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá. Máme  $|f(x) - f(y)| = |x + y| \cdot |x - y|$ ; tedy abychom dostali  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  v blízkosti  $x = 100$  potřebujeme  $\delta$  stokrát menší než v blízkosti  $x = 1$ .

### 7.2 Věta o stejnoměrné spojitosti

Je-li  $(X, d)$  kompaktní, je každé spojitě  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  stejnoměrně spojitá. Zejména to platí pro spojitě reálné funkce na kompaktních intervalech.

**Důkaz:** Necht'  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  není stejnoměrně spojitá. Potom  $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \exists x_n, y_n :$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$$

ale

$$d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Zvolme konvergentní podposloupnost  $(x_{k_n})_n$  posloupnosti  $(x_n)_n$ . Označme  $a = \lim_n x_{k_n}$ . Potom podle  $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$  je též  $a = \lim_n y_{k_n}$ . Podle  $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$  nemůže být  $f(a) = \lim_n f(x_{k_n})$  a zároveň  $f(a) = \lim_n f(y_{k_n})$ , a tedy  $f$  není ani spojitá.

## 8 Opakování

### 8.1 Riemannův integrál v jedné proměnné

Rozdělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  : posloupnost

$$P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Zjemnění:

$$P' : a = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_{m-1} < t'_m = b$$

$$\text{kde } \{t_j : j = 1, \dots, n-1\} \subseteq \{t'_j : j = 1, \dots, m-1\}.$$

*Jemnost rozdělení*  $P : \mu(P) = \max_j(t_j - t_{j-1})$ . Pro omezenou  $f : J = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$  a  $P$  definujeme dolní a horní součty

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}) \text{ resp.}$$

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1})$$

kde

$$m_j = \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}, M_j = \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}.$$

- Pokud  $P'$  zjemňuje  $P$  dostáváme

$$s(f, P) \leq s(f, P') \text{ a } S(f, P) \geq S(f, P')$$

- Pro každá dvě  $P_1, P_2$  je

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

### 8.1.1 Riemannův integrál

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\{s(f, P) : P \text{ rozdělení}\} \text{ a } \overline{\int}_a^b f(x)dx = \inf\{S(f, P) : P \text{ rozdělení}\}$$

Prvnímu se říká dolní Riemannův integrál  $f$  přes  $\langle a, b \rangle$ , druhé je horní Riemannův integrál.

Je-li  $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx$  označujeme společnou hodnotu

$$\int_a^b f(x)dx$$

a nazýváme ji Riemannův integrál funkce  $f$  přes  $\langle a, b \rangle$ .

### 8.1.2 Tvrzení o existenci Riemannova integrálu

Riemannův integrál  $\int_a^b f(x)dx$  existuje právě když  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  rozdělení  $P$  takové, že

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

**Důkaz:**

1. Nechť  $\int_a^b f(x)dx$  existuje a nechť  $\varepsilon > 0$ . Potom existují rozdělení  $P_1$  a  $P_2$  takové, že

$$S(f, P_1) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(f, P_2) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Potom je pro společné zjemnění  $P$  těchto dvou  $P_1, P_2$

$$S(f, P) - s(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Nechť druhé tvrzení platí. Zvolme  $\varepsilon > 0 : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$ . Potom je

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq S(f, P) < s(f, P) + \varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx + \varepsilon,$$

a jelikož  $\varepsilon$  bylo libovolně malé, vidíme, že  $\overline{\int}_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ .

### 8.1.3 Věta: Existence Riemannova integrálu pro spojitě funkce v $\mathbb{R}$

Pro každou spojitou  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  Riemannův integrál  $\int_a^b f$  existuje. **Důkaz:** Pro  $\varepsilon > 0$  zvolme  $\delta > 0$  tak, aby

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Je-li  $\mu(P) < \delta$  máme  $t_j - t_{j-1} < \delta$  pro všechna  $j$ , a tedy

$$\begin{aligned} M_j - m_j &= \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} - \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(x) - f(y)| : t_{j-1} \leq x, y \leq t_j\} \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

### 8.1.4 Integrální věta o střední hodnotě

Buď  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá. Potom existuje  $c \in \langle a, b \rangle$  takové, že

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

**Důkaz:** Položme  $m = \min\{f(x) | a \leq x \leq b\}$  a  $M = \max\{f(x) | a \leq x \leq b\}$ . Zřejmě

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Existuje tedy  $K$  takové, že  $m \leq K \leq M$  a  $\int_a^b f(x) dx = K(b - a)$ . Jelikož  $f$  je spojitá, existuje  $c \in \langle a, b \rangle$  takové, že  $K = f(c)$ .

### 8.1.5 Základní věta analýzy

Buď  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá. Pro  $x \in \langle a, b \rangle$  definujeme

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Potom je  $F'(x) = f(x)$

**Důkaz:** Pro  $h \neq 0$  máme

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = \frac{1}{h} f(x + \theta h) h = f(x + \theta h)$$

### 8.1.6 Důsledky základní věty analýzy

1. Spojitá funkce  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  má na intervalu  $(a, b)$  primitivní funkci spojitou na  $\langle a, b \rangle$ . Pro kteroukoli primitivní funkci  $G$  funkce  $f$  na  $(a, b)$  spojitou na  $\langle a, b \rangle$  platí

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

2. Integrální věta o střední hodnotě:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f = f(c)(b - a) = F'(c)(b - a)$$

## 9 Riemannův integrál ve více proměnných

### 9.1 Pomocné definice

V  $\mathbb{E}_n$  : **Kompaktní interval** ( $n$ -rozměrný) je

$$J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

(interval nebo cihla)

**Rozdělení intervalu**  $J$  je posloupnost  $P = (P^1, \dots, P^n)$  rozdělení:

$$P^j : a_j = t_{j0} < t_{j1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j$$

**Intervalům**

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1} \rangle$$

říkáme cihly rozdělení  $P$  a  $\mathcal{B}(P)$  je množina všech cihel rozdělení  $P$ . Je to skoro disjunktní rozklad intervalu  $J$ . Různé cihly z  $\mathcal{B}(P)$  se totiž setkávají jen v podmnožinách okrajů, tedy v množinách objemu 0. Máme tedy:

$$\text{vol}(J) = \sum \{\text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(J)\}.$$

**Jemnost rozdělení** *Diametr* intervalu  $J = \langle r_1, s_1 \rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n \rangle$  je

$$\text{diam}(J) = \max_i (s_i - r_i)$$

*Jemnost rozdělení*  $P$  je

$$\mu(P) = \max\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

**Zjemnění**

Rozdělení  $Q = (Q^1, \dots, Q^n)$  zjemňuje rozdělení  $P = (P^1, \dots, P^n)$  jestliže každé  $Q^j$  zjemňuje  $P^j$ .

Zjemnění  $Q$  rozdělení  $P$  vytváří rozdělení  $Q_B$  cihel  $B \in \mathcal{B}(P)$  a máme skoro disjunktní sjednocení

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup \{\mathcal{B}(Q_B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Každá dvě rozdělení  $P, Q$   $n$ -rozměrného kompaktního intervalu  $J$  mají společné zjemnění:  $\implies$  Je dána

omezená  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  na  $n$ -rozměrném kompaktním intervalu  $J$  a  $B \subseteq J$  je  $n$ -rozměrný kompaktní podinterval intervalu  $J$ . Položme

$$m(f, B) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \text{ a}$$

$$M(f, B) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}.$$

**Fakt:**  $m(f, B) \leq M(f, B)$  a je-li  $C \subseteq B$ , pak

$$m(f, C) \geq m(f, B) \text{ a } M(f, C) \leq M(f, B).$$

Pro rozdělení  $P$  intervalu  $J$  a omezenou funkci  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  definujeme

$$s_J(f, P) = \sum \{m(f, B) \cdot \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\},$$

$$S_J(f, P) = \sum \{M(f, B) \cdot \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

**Obecné pozorování:**

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  je omezená,  $X = \bigcup X_i$ ,  $X_i = \bigcup X_{ij}$  jsou konečná skoro disjunktní sjednocení.

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in X_i\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x) : x \in X_{ij}\}$$

Triviálně  $M_{ij} \leq M_i$  ( $M_i$  je horní mez množiny  $\{f(x) : x \in X_{ij}\}$ ).

Tedy:

$$\begin{aligned} \sum M_i \text{vol}(X_i) &= \sum_i M_i \sum_j \text{vol}(X_{ij}) = \\ &= \sum_{ij} M_i \text{vol}(X_{ij}) \geq \sum_{ij} M_{ij} \text{vol}(X_{ij}) \end{aligned}$$

a podobně pro infima.

**Tvrzení:** Necht'  $Q$  zjemňuje  $P$ . Potom

$$s(f, Q) \geq s(f, P) \quad \text{a} \quad S(f, Q) \leq S(f, P)$$

**Důkaz:** Použijeme předchozí pozorování pro  $\{X_i|i\} = \mathcal{B}(P)$ ,  $\{X_{ij}|j\} = \mathcal{B}(Q_B)$  a samozřejmě i pro  $\{X_{ij}|ij\} = \mathcal{B}(Q)$ .

**Tvrzení:** Pro libovolná dvě rozdělení  $P, Q$  intervalu  $J$  máme  $s(f, P) \leq S(f, Q)$ .

**Důkaz:** Jelikož je triviálně  $s(f, P) \leq S(f, P)$ , použitím společného zjemnění  $R$  rozdělení  $P, Q$  dostaneme

$$s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q).$$

Množina  $\{s(f, P)|P \text{ rozdělení}\}$  je tedy shora omezená a můžeme definovat dolní Riemannův integrál funkce  $f$  přes  $J$  jako

$$\underline{\int}_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup\{s(f, P)|P \text{ rozdělení}\};$$

podobně definujeme horní Riemannův integrál

$$\overline{\int}_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf\{S(f, P)|P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, máme Riemannův integrál funkce  $f$  přes  $J$ ; značení:

$$\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ nebo prostě } \int_J f$$

**Jiné značení:**

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, x_n$$

nebo

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

**Tvrzení:** Riemannův integrál  $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  existuje právě když  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  rozdělení  $P$  :

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \varepsilon.$$

**Důkaz:** nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P)$$

a z toho máme

$$\underline{\int} \leq S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int};$$

kde  $\varepsilon$  může být libovolně malé.

## 9.2 Tvrzení o existenci Riemannova integrálu

Riemannův integrál  $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  existuje právě když  $\forall \epsilon > 0$  existuje rozdělení  $P$  takové, že

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \epsilon$$

**Důkaz:** Nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \epsilon + s_J(f, P)$$

z toho dostaneme

$$\overline{\int} \leq S_J(f, P) \leq \epsilon + s_J(f, P) \leq \epsilon + \underline{\int} \leq \epsilon + \overline{\int}$$

pro libovolně malé  $\epsilon$

## 9.3 Věta: Každá spojitá funkce na $n$ -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál

Každá spojitá funkce  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  na  $n$ -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál  $\int_J f$ .

**Důkaz:** V  $\mathbb{E}_n$  budeme používat vzdálenost  $\sigma$  definovanou předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$$

Jelikož je  $f$  stejnoměrně spojitá, můžeme pro  $\epsilon > 0$  zvolit  $\delta > 0$  takové, že

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)}$$

Připomeňme si jemnost  $\mu(P)$ . Je-li  $\mu(P) < \delta$  je  $\text{diam}(B) < \delta$  pro všechny  $B \in \mathcal{B}(P)$  a tedy

$$\begin{aligned} M(f, B) - m(f, B) &= \sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in B\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\} = \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum \{(M(f, B) - m(f, B)) \cdot \text{vol}(B) | B \in \mathcal{B}(P)\} \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)} \sum \{\text{vol}(B) | B \in \mathcal{B}(P)\} = \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)} \text{vol}(J) = \epsilon \end{aligned}$$

## 9.4 Fubiniova věta

Vezměme součin  $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$  intervalů  $J' \subseteq \mathbb{E}_m$ ,  $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$ . Nechť existuje

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}\mathbf{y}$$

a nechť pro každé  $\mathbf{x} \in J'$ , resp.  $\mathbf{y} \in J''$ , existuje

$$\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad \text{resp.} \quad \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Potom je

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}\mathbf{y} = \int_{J'} \left( \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{J''} \left( \int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}$$

Tedy ve dvou proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$



ve třech proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

a obecně

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

**Důkaz:** Položme

$$F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Dokážeme, že  $\int_{J'} F$  existuje a že

$$\int_J f = \int_{J'} F$$

Zvolme rozdělení  $P$  intervalu  $J$  tak, aby

$$\int f - \epsilon \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \int f + \epsilon$$

Toto rozdělení je tvořeno rozděleními  $P'$  intervalu  $J'$  a  $P''$  intervalu  $J''$ . Máme

$$\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' \mid B' \in \mathcal{B}(P'), B'' \in \mathcal{B}(P'')\}$$

a každá cihla  $P$  se objeví jako právě jedno  $B' \times B''$ . Potom je

$$F(\mathbf{x}) \leq \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol} B''$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(F, P') &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \max_{\mathbf{x} \in B'} \left( \sum_{B'' \in \mathcal{B}} (P'') \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'') \right) \cdot \text{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B' \times B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'') \cdot \text{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B' \times B'' \in \mathcal{B}(P)} \max_{\mathbf{z} \in B' \times B''} f(\mathbf{z}) \cdot \text{vol}(B' \times B'') = \\ &= S(f, P) \end{aligned}$$

a podobně

$$s(f, P) \leq s(F, P')$$

Máme tedy

$$\int_J f - \epsilon \leq s(F, P') \leq \int_{J'} F \leq S(F, P) \leq \int_J f + \epsilon$$

a  $\int_{J'} F$  je roven  $\int_J f$ .

## 9.5 Lebesgueův integrál

Riemannův integrál je intuitivně velmi uspokojivý a počítá to, co chceme, pokud tedy funguje. Jeho užití má ale několik problémů:

- Nemusí existovat i pro některé přirozeně definované funkce, nebo přinejmenším není snadno vidět, zda existuje.
- Nemůžeme provádět užitečné operace (limity, derivování) dost univerzálně.

**Lebesgueův integrál** je rozšíření Riemannova integrálu, kde můžeme dělat prakticky cokoli, za snadno zapamatelných podmínek. Několik Lebesgueovských pravidel:

1. Je-li interval a Riemannův integrál  $\int_J f$  existuje, shoduje se s Lebesgueovým.
2. Pokud  $\int_{D_n} f$  existuje pro  $n = 1, 2, \dots$ , existuje i

$$\int_{\bigcup D_n} f$$

3. Pokud  $\int_D f_n$  existuje a posloupnost  $(f_n)_n$  je monotónní, platí

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$$

4. Pokud  $\int_D f_n$  existuje a  $|f_n| \leq g$  pro nějaké  $g$  pro které existuje  $\int_D g$ , platí

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$$

5. Je-li  $D$  omezená,  $|f_n(x)| \leq C$  a  $\int_D f_n$  existují, platí

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$$

6. Buď  $U$  okolí bodu  $t_0$  a  $g$  takové, že existují  $\int_D g$  a  $\int_D f(t, x) dx$  a  $\forall t \in U \setminus \{t_0\} : |f(t, x)| \leq g(x)$  (potom

$$\int_D f(t_0, x) dx = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_D f(t, x) dx$$

7. Jestliže pro integrovatelnou  $g$  platí

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq g(x)$$

a v nějakém okolí  $U$  bodu  $t_0$  všechno dává smysl(?), potom platí

$$\int_D \frac{\partial f(t_0, -)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_D f(t_0, -)$$

## 9.6 Tietzeova věta

Buď  $Y$  uzavřený podprostor metrického prostoru  $X$ . Potom můžeme každou spojitou reálnou funkci  $f$  na  $Y$  takovou, že  $\forall x \in Y : a \leq f(x) \leq b$  rozšířit na stejně omezenou spojitou funkci  $g$  na  $X$ .

The End