

Matematická analýza II

Stručné výpisky
z materiálů prof. Pultra

Zimní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Revize : Mgr. Karel Král,
druhá verze
1. února 2021

Obsah

1	Metrické prostory	3
1.1	Definice metrického prostoru	3
1.2	Euklidovský prostor \mathbb{E}_n	3
1.3	Diskrétní prostor	3
1.4	Podprostor	3
1.5	Spojité zobrazení	3
1.6	Triviality	3
1.6.1	Identické zobrazení	3
1.6.2	Vložení podprostoru	4
1.6.3	Složení spojitých zobrazení je spojité	4
1.7	Věta o konvergenci	4
1.8	Okolí	4
1.9	Otevřená a uzavřená množina	4
1.10	Uzávěr	4
1.11	Vlastnosti zobrazení mezi metrickými prostory	5
1.12	Silně ekvivalentní metriky	5
1.13	Vzory a obrazy	5
1.13.1	Obraz	5
1.13.2	Vzor	5
1.14	Reálná funkce o n proměnných	5
1.15	Součiny	6
1.16	Věta o spojitých zobrazeních	6
2	Parciální derivace	7
2.1	Definice a značení	7
2.2	Totální diferenciál	7
2.2.1	Definice	8
2.2.2	Tvrzení o spojitosti funkce a totálním diferenciálu	8
2.2.3	Věta o totálním diferenciálu	8
2.3	Pravidla pro počítání parciálních derivací	9
2.3.1	Věta pro derivaci složených funkcí o více proměnných	9
2.3.2	Důsledek (Řetízkové Pravidlo)	10
2.4	Aritmetická pravidla z řetězového násobení	10
2.4.1	Násobení	10
2.4.2	Dělení	10
2.5	Lagrangeova věta ve více proměnných	11
2.6	Tvrzení o záměnnosti pořadí při parciálních derivacích	11
2.6.1	Důsledek tvrzení o záměnnosti	12
2.7	Věta o konvergentní podposloupnosti	12
3	Kompaktní prostory	13
3.1	Definice kompaktního prostoru	13
3.2	Tvrzení o podprostoru kompaktního prostoru	13
3.3	Tvrzení o uzavřenosti podprostoru	13
3.4	Tvrzení o omezenosti kompaktního prostoru	13
3.5	Věta o součinu kompaktních prostorů	13
3.6	Věta : podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je omezený a uzavřený	14
3.7	Tvrzení: obraz spojitého zobrazení je kompaktní	14
3.8	Tvrzení: každá spojitá funkce na kompaktním prostoru nabývá maxima i minima	14

3.9	Věta o vzájemně jednoznačném spojitém zobrazení	14
3.10	Definice cauchyovské posloupnosti $(x_n)_n$	14
3.11	Tvrzení o konvergenci cauchyovské posloupnosti	15
3.12	Definice úplného metrického prostoru	15
3.13	Tvrzení: Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený	15
3.14	Tvrzení: Každý kompaktní prostor je úplný	15
3.15	Lemma o cauchyovské posloupnosti	15
3.16	Věta: Součin úplných prostorů je úplný	15
3.16.1	Důsledek	15
4	Implicitní funkce	16
4.1	Ilustrační příklady	16
4.1.1	Obecný příklad	16
4.1.2	Příklad pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$	16
4.2	Věta o implicitní funkci	16
4.3	Věta o implicitních funkcích	17
4.4	Definice Jacobiho determinantu	17
5	Extrémy	17
5.1	Věta o hledání extrémů funkcí	17
5.2	Definice Regulárního zobrazení	19
5.3	Tvrzení o obrazu regulární funkce	19
5.4	Tvrzení o inverzi regulárního zobrazení	19
5.4.1	Důsledek tvrzení o inverzi regulárního zobrazení	19
6	Objemy a obsahy	19
6.1	Vlastnosti	20
7	Stejnoměrná spojitost	20
7.1	Definice stejnoměrné spojitosti	20
7.2	Věta o stejnoměrné spojitosti	20
8	Opakování	21
8.1	Riemannův integrál v jedné proměnné	21
8.1.1	Riemannův integrál	21
8.1.2	Tvrzení o existenci Riemannova integrálu	21
8.1.3	Věta: Existence Riemannova integrálu pro spojitě funkce v \mathbb{R}	22
8.1.4	Integrální věta o střední hodnotě	22
8.1.5	Základní věta analýzy	23
8.1.6	Důsledky základní věty analýzy	23
9	Riemannův integrál ve více proměnných	23
9.1	Pomocné definice	23
9.2	Tvrzení o existenci Riemannova integrálu	26
9.3	Věta: Každá spojitá funkce na n -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál	26
9.4	Fubiniova věta	26
9.5	Lebesgueův integrál	28
9.6	Tietzeova věta	28

1 Metrické prostory

1.1 Definice metrického prostoru

Metrický prostor : Nechť X je množina, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ funkce t. ž. platí:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0, d(x, y) \iff x = y$
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

pak (X, d) je metrický prostor.

Příklady:

$$(\mathbb{R}, |x - y|),$$

$$(\mathbb{C}, |x - y|),$$

(G, d) , G je orientovaný souvislý graf, d je délka nejdelší cesty

Pozor: trojúhelníková nerovnost v $(\mathbb{C}, |x - y|)$ není tak triviální jako v \mathbb{R} .

1.2 Euklidovský prostor \mathbb{E}_n

Definujeme jako metrický prostor (\mathbb{R}^n, d) , kde d :

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Pro nás zvlášť důležitý, známy v podobě vektorového prostoru \mathbb{R}^n se skalárním součinem $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$ a normou $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ a vzdáleností $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

1.3 Diskrétní prostor

Definujeme jako (X, d) , kde $d(x, y) = 1$ pro $x \neq y$

1.4 Podprostor

Buď (X, d) metrický prostor. Pak (Y, d') je podprostor, kde $Y \subseteq X$ a $\forall x, y \in Y : d'(x, y) = d(x, y)$.

1.5 Spojité zobrazení

$f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je spojitě zobrazení, pokud

$$\forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

1.6 Triviality

1.6.1 Identické zobrazení

$f(x) = x$ je spojitě zobrazení

$$(X, d) \rightarrow (X, d)$$

1.6.2 Vložení podprostoru

je spojitě zobrazení

$$f_1: (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \rightarrow (X_1, d_1)$$

$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 : f_1(x, y) = x$$

$$f_2: (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \rightarrow (X_2, d_2)$$

$$\forall x \in X_1 \forall y \in X_2 : f_2(x, y) = y$$

obecně pro $j = 1, \dots, n$ máme

$$f_j: \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$$

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$$

1.6.3 Složení spojitých zobrazení je spojitě

Pokud jsou $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ a $g: (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$ spojitě, pak i

$$g \circ f: (X, d) \rightarrow (Z, d'')$$

je spojitě.

1.7 Věta o konvergenci

Zobrazení $f: (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$ je spojitě právě když pro každou konvergentní $(x_n)_n$ v (X_1, d_1) posloupnost $(f(x_n))_n$ konverguje v (X_2, d_2) a platí $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

Důkaz: Buď f spojitá a necht' $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ volme ze spojitosti $\delta > 0$ tak aby $\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$ pro $d_1(x, y) < \delta$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje n_0 takové, že pro $n \leq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \delta$. Tedy je-li $n \leq n_0$ máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

1.8 Okolí

Necht' (X, d) je metrický prostor, $x \in X$, pak $\Omega(x, \varepsilon) = \{y | d(x, y) < \varepsilon\}$

formulací $\Omega(x, \varepsilon)$ se říká otevřená koule s poloměrem ε okolo x .

Užití: "U je okolí x " $\equiv \exists \varepsilon > 0, \Omega(x, \varepsilon) \subseteq U$

1.9 Otevřená a uzavřená množina

$U \subseteq (X, d)$ je **otevřená**, pokud je okolím *každého* svého bodu.

$V \subseteq (X, d)$ je **uzavřená**, pokud $\forall (x_n)_n \subseteq V$ je konvergentní v X je $\lim_n x_n \in V$.

1.10 Uzávěr

Uzávěr: Necht' (X, d) je metrický prostor, $A \subseteq X, x \in X$, pak

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

a uzávěrem rozumíme $\overline{A} : \{x \mid d(x, A) = 0\}$

1.11 Vlastnosti zobrazení mezi metrickými prostory

Buďte (X_1, d_1) a (X_2, d_2) metrické prostory a buď zobrazení $f : X_1 \rightarrow X_2$. Následující jsou potom ekvivalentní:

1. f je spojitě.
2. $\forall x \in X_1$ a \forall okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x takové, že $f[U] \subseteq V$.
3. \forall otevřenou U v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1 .
4. \forall uzavřenou A v X_2 je vzor $f^{-1}[U]$ uzavřený v X_1 .
5. $\forall A \subseteq X_1$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

1.12 Silně ekvivalentní metriky

Buďte d_1, d_2 metriky. d_1 a d_2 na téže množině jsou silně ekvivalentní, pokud

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

1.13 Vzory a obrazy

$$f : X \rightarrow Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$$

1.13.1 Obraz

Obraz podmnožiny $A \subseteq X$ v Y :

$$f[A] = \{f(x) | x \in A\}$$

1.13.2 Vzor

Vzor podmnožiny $B \subseteq Y$ v X :

$$f^{-1}[B] = \{x | f(x) \in B\}$$

$$X \begin{matrix} f[-] \\ \xleftrightarrow{\quad} \\ f^{-1}[-] \end{matrix} Y$$

Platí:

$$f[A] \subseteq B \equiv A \subseteq f^{-1}[B],$$

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B \dots f^{-1}[f[A]] \supseteq A$$

Pozor: f^{-1} má dvě významy:

- inverze $f^{-1} : Y \rightarrow X$, nemusí existovat
- část v symbolu $f^{-1}[-]$, má smysl vždy

1.14 Reálná funkce o n proměnných

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{E}_n$$

Podobně jako ve funkcích jedné proměnné se nemůžeme omezit na případy, kdy definiční obor je celý prostor \mathbb{E}_n . V Případě funkcí jedné proměnné byly definiční obory obvykle intervaly nebo jednoduchá sjednocení intervalů. Tady budou definiční obory D složitější, často (ale ne vždy) otevřené množiny v \mathbb{E}_n .

O D se často mluví jako o oblasti na níž je funkce definovaná. To není termín (ve specifických kontextech slovo „oblast“ termín je, tady ne).

1.15 Součiny

Pro $(X_i, d_i), i = 1, \dots, n$ definujeme na kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i)$$

Získaný

$$\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

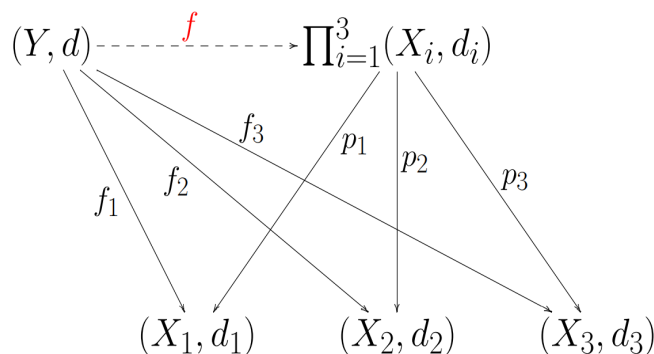
se nazývá součin prostorů (X_i, d_i) . Píše se též

$$(X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n).$$

1.16 Věta o spojitých zobrazeních

1. Projekce $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$ jsou spojitá zobrazení.
2. Buďte $f_j : (Y, d') \rightarrow (X_j, d_j)$ libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení $f : (Y, d') \rightarrow \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ splňující $p_j \circ f = f_j$, totiž zobrazení definované předpisem $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, je spojitě.

Jak to vypadá:



Tedy pokud vím, že $(x_1, x_2, x_3) \in \prod (x_i, d_i)$, Pak

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), f_3(y))$$

$$(p_1 \circ f)(y) = p_1(f(y)) = p_1(f_1(y), f_2(y), f_3(y)) = f_1(y)$$

$$(p_2 \circ f)(y) = \dots = f_2(y)$$

$$(p_3 \circ f)(y) = \dots = f_3(y)$$

Existuje přesně jedno f takové, že

$$p_i \circ f = f_i$$

a je spojitě.

2 Parciální derivace

2.1 Definice a značení

Pro $f(x_1, \dots, x_n)$ vezmeme

$$\begin{aligned}\phi_k(t) &= f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \dots t &= x_k \dots\end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f podle x_k (v bodě (x_1, \dots, x_n)) je (obvyklá) derivace funkce ϕ_k ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}.$$

Označení

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \text{ nebo } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n),$$

Pro $f(x, y)$ píšeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ a } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \text{ atd.}$$

Když $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$ existuje pro všechna (x_1, \dots, x_n) v nějaké oblasti D máme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Když budeme mluvit o parciální derivaci bude vždy zřejmé máme-li na mysli funkci, nebo jen číslo (hodnotu té limity nahoře).

2.2 Totální diferenciál

Nespojitá funkce f může mít po souřadnicích obě parciální derivace v každém bodě, to však ale neimplikuje spojitost.

Existence parciálních derivací neimplikuje spojitost!

Budeme potřebovat něco silnějšího. Připomeňte si tvrzení ekvivalentní se standardní derivací: Existuje μ konvergující k 0 při $h \rightarrow 0$ a A takové, že

$$f(x+h) - f(x) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

Geometrický pohled: $f(x+h) - f(x) = Ah$ vyjadřuje tečnu ke grafu funkce v bodě $(x, f(x))$. $|h| \cdot \mu(h)$ je jakási malá chyba.

Mysleme podobně o funkci $f(x, y)$ a uvažujme plochu

$$S = \{(t, u, f(t, u)) : (t, u) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímk k S v bodě $(x, y, f(x, y))$, ale ne tečnou rovinu, která teprve bude uspokojivé rozšíření faktu nahoře.

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n$ definujeme

$$||\mathbf{x}|| = \max_i |x_i|$$

To bude místo absolutní hodnoty, místo h bude n -tice blízká nule.

2.2.1 Definice

Funkce f má *totální diferenciál* v bodě \mathbf{x} existuje-li funkce μ spojitá v okolí U bodu $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ taková, že $\mu(\mathbf{o}) = 0$ a čísla A_1, \dots, A_n pro která

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h}).$$

2.2.2 Tvrzení o spojitosti funkce a totálním diferenciálu

Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě \mathbf{a} . Potom platí, že

1. f je spojitá v \mathbf{a} ,
2. f má všechny parciální derivace v \mathbf{a} , a to s hodnotami

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = A_k.$$

Důkaz:

1. Máme

$$|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq |\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| + |\mu(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

a limita na pravé straně pro $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ je 0.

2. Máme

$$\frac{1}{h}(f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(x_1, \dots)) = A_k + \mu(\dots, 0, h, 0, \dots) \frac{\|(0, \dots, h, \dots, 0)\|}{h},$$

a limita na pravé straně je zřejmě A_k .

Teď již spojitost dostaneme. Vidíme, že v případě funkcí jedné proměnné není rozdíl mezi existencí derivace v bodě \mathbf{a} a vlastností mít totální diferenciál v tomto bodě. V případě více proměnných je však tento rozdíl zcela zásadní. Může být trochu překvapující, že zatímco existence parciálních derivací mnoho neznamená, existence spojitých parciálních derivací je něco úplně jiného.

2.2.3 Věta o totálním diferenciálu

Buď

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}, \mathbf{h}^{(1)} = (0, h_2, \dots, h_n), \mathbf{h}^{(2)} = (0, 0, h_3, \dots, h_n) \text{ atp.}$$

(takže $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{0}$). Potom máme

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)})) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty existují $0 \leq \Theta_k \leq 1$ takové, že

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)}) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \theta_k h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k$$

a můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} M &= \sum \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \|\mathbf{h}\| \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned}$$

Položíme

$$\mu(\mathbf{h}) = \begin{cases} \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \Theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \\ 0 \text{ pokud } \mathbf{h} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Jelikož $\left| \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \right| \leq 1$ a jelikož jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ spojité, $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \mu(\mathbf{h}) = 0$.

Můžeme tedy schematicky psát spojité PD \implies TD \implies PD

2.3 Pravidla pro počítání parciálních derivací

Aritmetická pravidla jsou stejná jako pro obyčejné derivace (tady totiž obyčejnými derivacemi jsou). Trochu jinak tomu je u pravidla pro skládání. Pro derivace jedné proměnné se dokazuje z formule

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h|\mu(h)$$

tedy z diferenciálu (který je pro ně totéž jako existence derivace). Pravidlo pro skládání v Pravidlo pro skládání v nejjednodušší podobě následuje.

2.3.1 Věta pro derivaci složených funkcí o více proměnných

Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v bodě \mathbf{a} . Nechť mají $g_k(t)$ derivace v bodě b a nechť je $g_k(b) = a_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Položme

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t)).$$

Potom má F derivaci v b , totiž

$$F'(b) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g'_k(b).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b+h)) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b) + (\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b))) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} + \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) \max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}. \end{aligned}$$

Máme $\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) = 0$ jelikož jsou funkce g_k spojité v b . Jelikož funkce g_k mají derivace, jsou $\max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}$ omezené v dostatečně malém okolí nuly. Limita poslední sčítance je tedy nula a máme

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(b+h) - F(b)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} g'_k(b)\end{aligned}$$

Co se děje geometricky: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem vnější funkce f nemá žádný důvod preferovat hlavní osy v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

2.3.2 Důsledek (Řetízkové Pravidlo)

Nechť má $f(\mathbf{x})$ *totální diferenciál* v bodě \mathbf{a} . Nechť mají funkce $g_k(t_1, \dots, t_r)$ parciální derivace v $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$ a nechť je $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Potom má funkce

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1, \dots, t_r) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

všechny parciální derivace v \mathbf{b} , a platí

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Skládali jsme

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Skládejme místo f m -tici funkcí $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, tedy $\mathbf{f} : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_m$

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{E}_m$$

Pravidlo z předchozí věty dá tedy

$$\frac{\partial (f_i \circ \mathbf{g})(b)}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Zavedeme-li matice $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right)_{ik}$ je $D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D\mathbf{f} \cdot D\mathbf{g}$ (napravo násobení matic), a tak to má být. $D\mathbf{h}$ je matice lineární aproximace funkce \mathbf{h} : *lineární aproximace se skládají spolu s aproximovanými funkcemi*.

2.4 Aritmetická pravidla z řetězového násobení

2.4.1 Násobení

$$f(u, v) = u \cdot v$$

Potom $\frac{\partial f}{\partial u} = v$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = u$ a pro $u = \psi(x)$ a $v = \phi(x)$ platí:

$$(\phi(x)\psi(x))' = \frac{\partial f}{\partial u} \phi'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \psi'(x) = \phi(x)\psi'(x) + \phi'(x)\psi(x)$$

2.4.2 Dělení

$$f(u, v) = \frac{u}{v}$$

Potom $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$ a $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$ a pro $u = \psi(x)$ a $v = \phi(x)$ platí:

$$\left(\frac{\phi(x)}{\psi(x)} \right)' = \frac{\partial f}{\partial u} \phi'(x) - \frac{\partial f}{\partial v} \psi'(x) = \frac{1}{\psi(x)} \phi'(x) + \frac{1}{\psi(x)^2} \psi'(x) = \frac{\psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2}$$

2.5 Lagrangeova věta ve více proměnných

Nechť má f spojité parciální derivace v konvexní otevřené množině $U \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom pro libovolné dva body $x, y \in U$ $\exists 0 \leq \theta \leq 1$ takové, že:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j} (y_j - x_j)$$

Důkaz: Mějme \mathbf{g} , pro které platí $g_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$. Potom máme $F(t) = f \circ \mathbf{g} = f(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ a

$$F'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} g'_j(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} (y_j - x_j)$$

Podle Lagrangeovy věty $\exists \theta : 0 \leq \theta \leq 1$:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = F'(\theta)$$

Poznámka: Často se užívá v tomto tvaru:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h})}{\partial x_j} h_j$$

(Porovnej s formulí pro totální diferenciál)

2.6 Tvrzení o záměnnosti pořadí při parciálních derivacích

Mějme funkci $f(x, y)$ takovou, že existují parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, které jsou spojité v nějakém okolí bodu (x, y) . Potom:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Důkaz: Pokusíme se spočítat obě derivace v jednom kroku, tedy počítejme limitu $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ funkce

$$F(h) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h^2}$$

Položíme li

$$\begin{aligned} \varphi_h(y) &= f(x+h, y) - f(x, y) \text{ a} \\ \psi_h(x) &= f(x, y+h) - f(x, y), \end{aligned}$$

dostaneme pro $F(h)$ dva výrazy:

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2} (\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) \\ F(h) &= \frac{1}{h^2} (\psi_h(x+h) - \psi_h(x)). \end{aligned}$$

První: Funkce φ_h má derivaci (podle y , jinou proměnnou nemá)

$$\varphi'_h(y) = \frac{\partial f(x+h, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

a tedy podle Lagrangeovy formule

$$\begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2} (\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) = \frac{1}{h} \varphi'_h(y + \theta_1 h) \\ &= \frac{\partial f(x+h, y + \theta_1 h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y + \theta_1 h)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Potom znovu, podle L. formule,

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x + \theta_2 h, y + \theta_1 h)}{\partial y} \right)$$

pro nějaká θ_1, θ_2 mezi 0 a 1.

Druhá, $\frac{1}{h^2}(\varphi_h(x+h) - \varphi_h(x))$ dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x + \theta_4 h, y + \theta_2 h)}{\partial x} \right)$$

Obě $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ a $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ jsou spojité (x, y) , a $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ můžeme počítat z kteréhokoli výrazu (první nebo druhá):

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

2.6.1 Důsledek tvrzení o záměnnosti

Nechť má funkce f v proměnných spojité parciální derivace do řádu k . Potom hodnoty těchto derivací záleží pouze na tom, kolikrát bylo derivováno v každé z proměnných x_1, \dots, x_n .

Tedy za daných předpokladů můžeme obecné parciální derivace řádu $r \leq k$ psát

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}} \text{ kde } r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$$

$$(r_j = 0 \text{ indukuje absenci symbolu } \partial x_j)$$

2.7 Věta o konvergentní podposloupnosti

Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Explicitně: Mějme $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall n : a \leq x_n \leq b$. Potom existuje podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ která konverguje v \mathbb{R} a platí $a \leq \lim_n x_{k_n} \leq b$

Důkaz: Vezměme

$$M = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq x_n \text{ pro nekonečně mnoho } n\}$$

M je neprázdná a omezená protože $a \in M$ a b je horní mez M . Musí tedy existovat $s = \sup(M)$ a platí $a \leq s \leq b$. Dále, pro každé n je množina

$$K(n) = \{k : s - \frac{1}{n} < x_k < s + \frac{1}{n}\}$$

nekonečná: skutečně, máme $x > s - \varepsilon$ takové, že $x_n > x$ pro nekonečně mnoho n , zatím co podle definice množiny M je jen konečně mnoho n takových, že $x_n \geq s + \varepsilon$.

Zvolme k_1 tak, aby

$$s - 1 < x_{k_1} < s + 1.$$

Mějme zvolena $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ taková, že $j = 1, \dots, n$

$$s - \frac{1}{j} < x_{k_j} < s + \frac{1}{j}.$$

Jelikož $K(n+1)$ je nekonečná, můžeme zvolit $k_{n+1} > k_n$ tak, aby

$$s - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} < s + \frac{1}{n+1}.$$

Takto zvolená podposloupnost $(x_{k_n})_n$ naší $(x_n)_n$ zřejmě konverguje k s .

3 Kompaktní prostory

3.1 Definice kompaktního prostoru

Metrický prostor (X, d) je kompaktní, pokud každá posloupnost v něm obsahuje konvergentní podposloupnost.

3.2 Tvzení o podprostoru kompaktního prostoru

Podprostor kompaktního prostoru je kompaktní právě když je uzavřený.

Důkaz:

1. Buď Y uzavřený podprostor kompaktního X a buď $(y_n)_n$ posloupnost v Y . Jako posloupnost v X má konvergentní podposloupnost s limitou a z uzavřenosti je konvergentní podposloupností a tato limita je v Y .
2. Nechť Y není uzavřená. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $y = \lim_n y_n \notin Y$. Potom $(y_n)_n$ nemůže mít podposloupnost konvergentní v Y protože každá její podposloupnost konverguje k y .

3.3 Tvzení o uzavřenosti podprostoru

Buď (X, d) libovolný metrický prostor a buď podprostor $Y \subseteq X$ kompaktní. Potom Y je uzavřený v (X, d) .

Důkaz: Nechť $(y_n)_n$ posloupnost v Y konverguje v X k limitě y . Potom každá podposloupnost $(y_n)_n$ konverguje k y a tedy je $y \in Y$.

Metrický prostor (X, d) je omezený, jestliže pro nějaké K platí, že

$$\forall x, y \in X : d(x, y) < K.$$

3.4 Tvzení o omezenosti kompaktního prostoru

Každý kompaktní prostor je omezený.

Důkaz: Zvolme x_1 libovolně a x_n tak, aby $d(x_1, x_n) > n$. Posloupnost $(x_n)_n$ nemá konvergentní podposloupnost; kdyby x byla limita takové podposloupnosti, bylo by pro dost velké n nekonečně mnoho členů této podposloupnosti blíže k x_1 než $d(x_1, x_n) + 1$, což je spor.

3.5 Věta o součinu kompaktních prostorů

Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

Důkaz: Stačí dokázat pro součin dvou prostorů. (protože součin prostorů je komutativní)

Buďte $(X, d_1), (Y, d_2)$ kompaktní a buď $((x_n, y_n))_n$ posloupnost v $X \times Y$. Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$ a konvergentní podposloupnost $(y_{k_n})_n$ posloupnosti $(y_n)_n$. Potom je

$$((x_{k_n}, y_{k_n}))_n$$

konvergentní podposloupnost posloupnosti $((x_n, y_n))_n$.

Kompaktní interval v \mathbb{E}_n : součin intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$

3.6 Věta : podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je omezený a uzavřený

Podprostor euklidovského prostoru \mathbb{E}_n je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.

Důkaz:

1. Že je uzavřený a omezený už víme (3.4, 3.5).
2. Buď nyní $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ omezený a uzavřený. Jelikož je omezený, je pro dostatečně velký kompaktní interval

$$Y \subseteq J^n \subseteq \mathbb{E}_n.$$

J^n je kompaktní jako součin intervalů $\langle a_i, b_i \rangle$, a jelikož je Y uzavřený v \mathbb{E}_n je též uzavřený v J^n a tedy kompaktní.

3.7 Tvzení: obraz spojitého zobrazení je kompaktní

Buď $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ spojitě zobrazení a buď $A \subseteq X$ kompaktní. Potom je $f[A]$ kompaktní.

Důkaz: Buď $(y_n)_n$ posloupnost v $f[A]$. Zvolme $x_n \in A$ tak, aby $y_n = f(x_n)$. Buď $(x_{k_n})_n$ konvergentní podposloupnost. Potom je $(y_{k_n})_n = (f(x_{k_n}))_n$ konvergentní podposloupnost $(x_n)_n$.

3.8 Tvzení: každá spojitá funkce na kompaktním prostoru nabývá maxima i minima

Buď (X, d) kompaktní. Potom každá spojitá funkce $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ nabývá maxima i minima (t.j. nejsou nekonečné).

Důkaz: Buď $Y = f[X] \subseteq \mathbb{R}$ kompaktní. Je to tedy omezená množina a musí mít supremum $M \in \mathbb{R}$ a infimum $m \in \mathbb{R}$. Zřejmě máme $d(m, Y) = d(M, Y) = 0$ a jelikož Y je uzavřená, $m, M \in Y$. Víme, že spojitá f je charakterizována tím, že všechny vzory uzavřených množin jsou uzavřené. Nyní vidíme, že je-li definiční obor kompaktní, platí též, že obrazy uzavřených podmnožin jsou uzavřené.

Z toho plyne následující:

3.9 Věta o vzájemně jednoznačném spojitém zobrazení

Je-li (X, d) kompaktní a je-li $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ vzájemně jednoznačné spojitě zobrazení, pak je f homeomorfismus.

Obecněji: Nechť $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je spojitě zobrazení. Mějme potom $g : (X, d) \rightarrow (Z, d'')$ a $h : (Y, d') \rightarrow (Z, d'')$ takové, že $h \circ f = g$. Potom je h spojitě. (chybí předpoklad)

Důkaz: Buď B uzavřená v Z . Potom je $A = g^{-1}[B]$ uzavřená \implies kompaktnost v $X \implies f[A]$ je kompaktní \implies uzavřená v Y . Jelikož je f zobrazení na, máme $f[f^{-1}[C]] = C \forall C$. Proto je

$$h^{-1}[B] = f[f^{-1}[h^{-1}[B]]] = f[(h \circ f)^{-1}[B]] = f[g^{-1}[B]] = f[A]$$

uzavřená.

3.10 Definice cauchyovské posloupnosti $(x_n)_n$

Posloupnost $(x_n)_n$ v (X, d) je **Cauchyovská**, jestliže

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$$

3.11 Tvrzení o konvergenci cauchyovské posloupnosti

Nechť má Cauchyovská posloupnost konvergentní podposloupnost. Potom posloupnost konverguje k limitě podposloupnosti.

Důkaz: Nechť je $(x_n)_n$ Cauchyovská a nechť $\lim_n x_{k_n} = x$. Buď $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pro $\forall m, n \geq n_1$ a $d(x_{k_n}, x) \leq \varepsilon$ pro $\forall n \geq n_2$. Položíme-li $n_0 = \max(n_1, n_2)$, máme pro $\forall n \geq n_0$ (protože $k_n \geq n$)

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < 2\varepsilon.$$

3.12 Definice úplného metrického prostoru

Metrický prostor (X, d) je **úplný**, pokud v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje.

3.13 Tvrzení: Podprostor úplného prostoru je úplný právě když je uzavřený

Podprostor úplného je úplný, právě když je uzavřený.

Důkaz:

1. Buď $Y \subseteq (X, d)$ uzavřený. Buď $(y_n)_n$ Cauchyovská v Y . Potom je Cauchyovská a tedy konvergentní v X a kvůli uzavřenosti je limita v Y .
2. Nechť Y není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n$ v Y konvergentní v X taková, že $\lim_n y_n \notin Y$. Potom je $(y_n)_n$ Cauchyovská v X a jelikož je vzálenost stejná, též v Y . Ale v Y nekonverguje.

3.14 Tvrzení: Každý kompaktní prostor je úplný

Každý kompaktní prostor je úplný.

Důkaz: Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost a tedy konverguje.

3.15 Lemma o cauchyovské posloupnosti

Posloupnost $(x_1^1, \dots, x_1^n), (x_1^2, \dots, x_n^2), \dots, (x_1^k, \dots, x_n^k), \dots$ je Cauchyovská v $\prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ právě když každá z posloupností $(x_i^k)_k$ je Cauchyovská v (X_i, d_i) .

Důkaz: \Rightarrow plyne bezprostředně z toho, že $d_i(u_i, v_i) \leq d((u_j)_j, (v_j)_j)$.

\Leftarrow : Nechť je každá $(x_i^k)_k$ Cauchyovská. Pro $\varepsilon > 0$ a i zvolme k_i tak, aby pro $k, l \geq k_i$ bylo $d_i(x_i^k, x_i^l) < \varepsilon$. Potom pro $k, l \geq \max_i k_i$ máme

$$d((x_1^k, \dots, x_n^k), (x_1^l, \dots, x_n^l)) < \varepsilon.$$

3.16 Věta: Součin úplných prostorů je úplný

Součin úplných prostorů je úplný. Speciálně, \mathbb{E}_n je úplný.

3.16.1 Důsledek

Podprostor Y euklidovského prostoru \mathbb{E}_n je úplný, právě když je uzavřený.

4 Implicitní funkce

4.1 Ilustrační příklady

4.1.1 Obecný příklad

Mějme spojitě reálné funkce $F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ v $n + m$ proměnných. Určuje systém rovnic

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

v nějakém smyslu funkce

$$f_i \equiv y_i(x_1, \dots, x_m)$$

pro $i \in \{1, \dots, n\}$? Pokud ano, jak a kde je určuje a jaké mají funkce vlastnosti?

Konkrétněji viz následující příklad.

4.1.2 Příklad pro $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Mějme $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, neboli rovnici

$$x^2 + y^2 = 1$$

Několik pozorování:

- Pro některá x_0 jako například $x_0 < -1$ řešení neexistuje, o funkci $y(x)$ nemluvě.
- Přestože řešení v nějakém okolí x_0 existuje, nemůžeme v nějakých situacích hovořit o funkci. Potřebujeme kolem řešení (x_0, y_0) vymezit okolí jak x_0 , tak y_0 .
- Máme také případy, jako ten, kdy $x_0 = 1$, kde je v okolí mnoho řešení, ale žádný (ani jednostranný) interval, kde by y bylo jednoznačné.

V případě $F(x, y)$ už žádná další situace nenastane.

4.2 Věta o implicitní funkci

Buď $F(x, y)$ reálná funkce definovaná v nějakém okolí bodu (x_0, y_0) . Nechť má F spojitě parciální derivace do řádu $k \geq 1$ a nechť platí:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0 \\ \left| \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \right| &\neq 0 \end{aligned}$$

Potom $\exists \delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists! y \in (y_0 - \Delta, y_0 + \Delta) : F(x, y) = 0$.

Dále, označíme-li toto jediné y jako $y = f(x)$, potom získaná $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě derivace do řádu k .

4.3 Věta o implicitních funkcích

Buďte $F_i(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m)$ pro $i \in 1, \dots, m$ funkce $n + m$ proměnných se spojitými parciálními derivacemi do řádu $k \geq 1$. Buď

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$$

a buď totální diferenciál v bodě $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0$$

Potom existují $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ takové, že pro každé

$$\mathbf{x} \in (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \dots \times (x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta)$$

existuje právě jedno

$$\mathbf{y} \in (y_1^0 - \Delta, y_1^0 + \Delta) \times \dots \times (y_m^0 - \Delta, y_m^0 + \Delta)$$

takové, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

4.4 Definice Jacobiho determinantu

Pro konečnou posloupnost funkcí

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_m))$$

a pro $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ se definuje **Jacobiho determinant** (Jacobián) jako

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{y})} = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$$

5 Extrémy

5.1 Věta o hledání extrémů funkcí

Buďte f, g_1, \dots, g_k reálné funkce definované na otevřené množině $D \subseteq \mathbb{E}_n$. Necht' mají spojitě parciální derivace. Necht' je hodnota matice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

maximální, tedy $k \leq n$, v každém bodě oboru D .

Jestliže funkce f nabývá v bodě $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ lokálního extrému podmíněného vazbami

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ taková, že $\forall i \in 1, \dots, n$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0$$

Důkaz: Matice M má hodnotu k právě když aspoň jedna její $k \times k$ podmatice M je regulární (a tedy má nenulový determinant). Dejme tomu,

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$

Potom podle věty o implicitních funkcích máme okolí bodu \mathbf{a} funkce $\phi_i(x_{k+1}, \dots, x_n)$ se spojitými parciálními derivacemi takové, že (píšme $\tilde{\mathbf{x}}$ pro (x_{k+1}, \dots, x_n))

$$g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0 \text{ pro } i = 1, \dots, k.$$

tedy lokální maximum nebo minimum funkce $f(\mathbf{x})$ v \mathbf{a} podmíněné danými vazbami dává lokální maximum či minimum (nepodmíněné) funkce

$$F(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}),$$

v $\tilde{\mathbf{a}}$, a tedy je

$$\frac{\partial F(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i = k+1, \dots, n,$$

to jest, podle řetízkového pravidla

$$\sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} \text{ pro } i = k+1, \dots, n.$$

Derivováním konstantní $g_i(\phi_1(\tilde{\mathbf{x}}), \dots, \phi_k(\tilde{\mathbf{x}}), \tilde{\mathbf{x}}) = 0$ dostaneme pro $j = 1, \dots, k$

$$\sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \text{ pro } i = k+1, \dots, n.$$

Dále použijeme znovu vlastnost toho, že determinant je nenulový. Vzhledem k hodnotě matice má systém lineárních rovnic

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, k$$

jediné řešení $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. To jsou rovnosti z tvrzení, ale jen pro $i \leq k$. Musíme ještě dokázat, že to platí i pro $i > k$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} &= \\ &= - \sum_{r=1}^k \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot \sum_{r=1}^k \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\ &= - \sum_{r=1}^k \left(\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\mathbf{a})}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = \\ &= - \sum_{r=1}^k 0 \cdot \frac{\partial \phi_r(\tilde{\mathbf{a}})}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

5.2 Definice Regulárního zobrazení

Buď $U \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená a necht' mají f_i pro $i \in 1, \dots, n$ spojitě parciální derivace. Výsledné zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{E}_n$$

je **regulární**, jestliže

$$\forall \mathbf{x} \in U : \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \neq 0$$

5.3 Tvzení o obrazu regulární funkce

Je-li $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ regulární, je obraz $\mathbf{f}[V]$ každé otevřené podmnožiny $V \subseteq U$ otevřený.

Důkaz: Vezměme $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{y}^0$. Definujeme $\mathbf{F} : V \times \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_n$ předpisem

$$F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i.$$

Potom je $\mathbf{F}(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$ a $\frac{D(\mathbf{F})}{D(\mathbf{x})} \neq 0$, a tedy můžeme použít větu o IF a dostaneme $\delta > 0$ a $\Delta > 0 : \forall \mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta \exists \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$ a $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i = 0$. To znamená, že máme $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (pozor, y_i jsou zde proměnné, x_j hledané funkce a

$$\Omega(\mathbf{y}^0, \delta) = \{\mathbf{y} : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < \delta\} \subseteq \mathbf{f}[V].$$

5.4 Tvzení o inverzi regulárního zobrazení

Buď $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ regulární zobrazení. Potom $\forall \mathbf{x}^0 \in U \exists$ otevřené okolí V takové, že restrikce $\mathbf{f}|_V$ je bijekce. Navíc, zobrazení $\mathbf{g} : \mathbf{f}[V] \rightarrow \mathbb{E}_n$ inverzní k $\mathbf{f}|_V$ je regulární.

Důkaz: Znovu použijeme zobrazení $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$, kde $F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}) - y_i$. Pro dost malé $\Delta > 0$ máme právě jedno $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ takové, že $\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \Delta$. Toto \mathbf{g} má navíc spojitě parciální derivace. Máme

$$D(id) = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) = D(\mathbf{f}) \cdot D(\mathbf{g}).$$

Podle řetízkového pravidla (a věty o násobení determinantů) je

$$\frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} \cdot \frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})} = \det D(\mathbf{f}) \cdot \det D(\mathbf{g}) = 1$$

a tedy je pro každé $\mathbf{y} \in \mathbf{f}[V]$, $\frac{D(\mathbf{g})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{y}) \neq 0$.

5.4.1 Důsledek tvrzení o inverzi regulárního zobrazení

Prosté regulární zobrazení $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{E}_n$ má regulární inverzi $\mathbf{g} : \mathbf{f}[U] \rightarrow \mathbb{E}_n$

6 Objemy a obsahy

$A \subseteq \mathbb{E}_m$ (speciálně \mathbb{E}_2)

6.1 Vlastnosti

- $A \subseteq B \implies \mathbf{vol}(A) \leq \mathbf{vol}(B)$
- A, B disjunktní $\implies \mathbf{vol}(A \cup B) = \mathbf{vol}(A) + \mathbf{vol}(B)$
- \mathbf{vol} je zachován isometrii
 - isometrie je zobrazení zachovávající vzdálenost
- V \mathbb{E}_2 : $\mathbf{vol}(\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
- V \mathbb{E}_n : $\mathbf{vol}(\prod_i \langle a_i, b_i \rangle) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$

Obecně platí:

$$\mathbf{vol}(A \cup B) = \mathbf{vol}(A) + \mathbf{vol}(B) - \mathbf{vol}(A \cap B).$$

- pokud jsou všechny definované
- $\mathbf{vol}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_4) \implies$ Princíp inkluze a exkluze

7 Stejněměrná spojitost

7.1 Definice stejnoměrné spojitosti

Řekneme, že $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ je stejnoměrně spojitá, je-li

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y : d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

. **Příklad:**

$f = (x \mapsto x^2) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá. Máme $|f(x) - f(y)| = |x + y| \cdot |x - y|$; tedy abychom dostali $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ v blízkosti $x = 100$ potřebujeme δ stokrát menší než v blízkosti $x = 1$.

7.2 Věta o stejnoměrné spojitosti

Je-li (X, d) kompaktní, je každé spojitá $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ stejnoměrně spojitá. Zejména to platí pro spojitá reálné funkce na kompaktních intervalech.

Důkaz: Nechť $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ není stejnoměrně spojitá. Potom $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \exists x_n, y_n :$

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$$

ale

$$d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{k_n})_n$ posloupnosti $(x_n)_n$. Označme $a = \lim_n x_{k_n}$. Potom podle $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ je též $a = \lim_n y_{k_n}$. Podle $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ nemůže být $f(a) = \lim_n f(x_{k_n})$ a zároveň $f(a) = \lim_n f(y_{k_n})$, a tedy f není ani spojitá.

8 Opakování

8.1 Riemannův integrál v jedné proměnné

Rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$: posloupnost

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Zjemnění:

$$P' : a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{n-1} < t'_n = b$$

$$\text{kde } \{t_j : j = 1, \dots, n-1\} \subseteq \{t'_j : j = 1, \dots, m-1\}.$$

Jemnost rozdělení $P : \mu(P) = \max_j(t_j - t_{j-1})$. Pro omezenou $f : J = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ a P definujeme dolní a horní součty

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}) \text{ resp.}$$

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1})$$

kde

$$m_j = \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}, M_j = \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}.$$

- Pokud P' zjemňuje P dostáváme

$$s(f, P) \leq s(f, P') \text{ a } S(f, P) \geq S(f, P')$$

- Pro každá dvě P_1, P_2 je

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2).$$

8.1.1 Riemannův integrál

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{s(f, P) : P \text{ rozdělení}\} \text{ a } \int_a^b f(x) dx = \inf\{S(f, P) : P \text{ rozdělení}\}$$

Prvnímu se říká dolní Riemannův integrál f přes $\langle a, b \rangle$, druhé je horní Riemannův integrál.

Je-li $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ označujeme společnou hodnotu

$$\int_a^b f(x) dx$$

a nazýváme ji Riemannův integrál funkce f přes $\langle a, b \rangle$.

8.1.2 Tvrzení o existenci Riemannova integrálu

Riemannův integrál $\int_a^b f(x) dx$ existuje právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists$ rozdělení P takové, že

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

Důkaz:

1. Nechť $\int_a^b f(x) dx$ existuje a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existují rozdělení P_1 a P_2 takové, že

$$S(f, P_1) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad s(f, P_2) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

Potom je pro společné zjemnění P těch dvou P_1, P_2

$$S(f, P) - s(f, P) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Nechť druhé tvrzení platí. Zvolme $\varepsilon > 0 : S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. Potom je

$$\overline{\int_a^b f(x) dx} \leq S(f, P) < s(f, P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b f(x) dx} + \varepsilon,$$

a jelikož ε bylo libovolně malé, vidíme, že $\overline{\int_a^b f(x) dx} = \underline{\int_a^b f(x) dx}$.

8.1.3 Věta: Existence Riemannova integrálu pro spojitě funkce v \mathbb{R}

Pro každou spojitou $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f$ existuje. **Důkaz:** Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$

tak, aby

$$\forall x, y : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Je-li $\mu(P) < \delta$ máme $t_j - t_{j-1} < \delta$ pro všechna j , a tedy

$$\begin{aligned} M_j - m_j &= \sup\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} - \inf\{f(x) : t_{j-1} \leq x \leq t_j\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(x) - f(y)| : t_{j-1} \leq x, y \leq t_j\} \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum (M_j - m_j)(t_j - t_{j-1}) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

8.1.4 Integrální věta o střední hodnotě

Buď $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Potom existuje $c \in \langle a, b \rangle$ takové, že

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Důkaz: Položme $m = \min\{f(x) | a \leq x \leq b\}$ a $M = \max\{f(x) | a \leq x \leq b\}$ Zřejmě

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Existuje tedy K takové, že $m \leq K \leq M$ a $\int_a^b f(x) dx = K(b - a)$. Jelikož f je spojitá, existuje $c \in \langle a, b \rangle$ takové, že $K = f(c)$.

8.1.5 Základní věta analýzy

Buď $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Pro $x \in \langle a, b \rangle$ definujeme

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Potom je $F'(x) = f(x)$

Důkaz: Pro $h \neq 0$ máme

$$\frac{1}{h}(F(x+h) - f(x)) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = \frac{1}{h} f(x + \theta h) h = f(x + \theta h)$$

8.1.6 Důsledky základní věty analýzy

1. Spojitá funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci spojitou na $\langle a, b \rangle$. Pro kteroukoli primitivní funkci G funkce f na (a, b) spojitou na $\langle a, b \rangle$ platí

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a).$$

2. Integrální věta o střední hodnotě:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f = f(c)(b-a) = F'(c)(b-a)$$

9 Riemannův integrál ve více proměnných

9.1 Pomocné definice

V \mathbb{E}_n : **Kompaktní interval** (n -rozměrný) je

$$J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

(interval nebo cihla)

Rozdělení intervalu J je posloupnost $P = (P^1, \dots, P^n)$ rozdělení:

$$P^j : a_j = t_{j0} < t_{j1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j$$

Intervalům

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1} \rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1} \rangle$$

říkáme cihly rozdělení P a $\mathcal{B}(P)$ je množina všech cihel rozdělení P . Je to skoro disjunktní rozklad intervalu J . Různé cihly z $\mathcal{B}(P)$ se totiž setkávají jen v podmnožinách okrajů, tedy v množinách objemu 0. Máme tedy:

$$\text{vol}(J) = \sum \{ \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(J) \}.$$

Jemnost rozdělení *Diametr* intervalu $J = \langle r_1, s_1 \rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n \rangle$ je

$$\text{diam}(J) = \max_i (s_i - r_i)$$

Jemnost rozdělení P je

$$\mu(P) = \max\{\text{diam}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Zjemnění

Rozdělení $Q = (Q^1, \dots, Q^n)$ zjemňuje rozdělení $P = (P^1, \dots, P^n)$ jestliže každé Q^j zjemňuje P^j .

Zjemnění Q rozdělení P vytváří rozdělení Q_B cihel $B \in \mathcal{B}(P)$ a máme skoro disjunktní sjednocení

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup \{\mathcal{B}(Q_B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Každá dvě rozdělení P, Q n -rozměrného kompaktního intervalu J mají společné zjemnění: \implies Je

dána omezená $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ na n -rozměrném kompaktním intervalu J a $B \subseteq J$ je n -rozměrný kompaktní podinterval intervalu J . Položme

$$m(f, B) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \text{ a}$$

$$M(f, B) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}.$$

Fakt: $m(f, B) \leq M(f, B)$ a je-li $C \subseteq B$, pak

$$m(f, C) \geq m(f, B) \text{ a } M(f, C) \leq M(f, B).$$

Pro rozdělení P intervalu J a omezenou funkci $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme

$$s_J(f, P) = \sum \{m(f, B) \cdot \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\},$$

$$S_J(f, P) = \sum \{M(f, B) \cdot \text{vol}(B) : B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Obecné pozorování:

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená, $X = \bigcup X_i$, $X_i = \bigcup X_{ij}$ jsou konečná skoro disjunktní sjednocení.

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in X_i\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x) : x \in X_{ij}\}$$

Triviálně $M_{ij} \leq M_i$ (M_i je horní mez množiny $\{f(x) : x \in X_{ij}\}$).

Tedy:

$$\begin{aligned} \sum_i M_i \text{vol}(X_i) &= \sum_i M_i \sum_j \text{vol}(X_{ij}) = \\ &= \sum_{ij} M_i \text{vol}(X_{ij}) \geq \sum_{ij} M_{ij} \text{vol}(X_{ij}) \end{aligned}$$

a podobně pro infima.

Tvrzení: Nechť Q zjemňuje P . Potom

$$s(f, Q) \geq s(f, P) \quad \text{a} \quad S(f, Q) \leq S(f, P)$$

Důkaz: Použijeme předchozí pozorování pro $\{X_i|i\} = \mathcal{B}(P)$, $\{X_{ij}|j\} = \mathcal{B}(Q_B)$ a samozřejmě i pro $\{X_{ij}|ij\} = \mathcal{B}(Q)$.

Tvrzení: Pro libovolná dvě rozdělení P, Q intervalu J máme $s(f, P) \leq S(f, Q)$.

Důkaz: Jelikož je triviálně $s(f, P) \leq S(f, P)$, použitím společného zjemnění R rozdělení P, Q dostaneme

$$s(f, P) \leq s(f, R) \leq S(f, R) \leq S(f, Q).$$

Množina $\{s(f, P) | P \text{ rozdělení}\}$ je tedy shora omezená a můžeme definovat dolní Riemannův integrál funkce f přes J jako

$$\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup\{s(f, P) | P \text{ rozdělení}\};$$

podobně definujeme horní Riemannův integrál

$$\overline{\int}_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf\{S(f, P) | P \text{ rozdělení}\}.$$

Jsou-li si rovny, máme Riemannův integrál funkce f přes J ; značení:

$$\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ nebo prostě } \int_J f$$

Jiné značení:

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, x_n$$

nebo

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Tvrzení: Riemannův integrál $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ existuje právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists$ rozdělení P :

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \varepsilon.$$

Důkaz: nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P)$$

a z toho máme

$$\overline{\int} \leq S_J(f, P) < \varepsilon + s_J(f, P) \leq \varepsilon + \underline{\int} \leq \varepsilon + \overline{\int};$$

kde ε může být libovolně malé.

9.2 Tvrzení o existenci Riemannova integrálu

Riemannův integrál $\int_J f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ existuje právě když $\forall \epsilon > 0$ existuje rozdělení P takové, že

$$S_J(f, P) - s_J(f, P) < \epsilon$$

Důkaz: Nerovnost dává

$$S_J(f, P) < \epsilon + s_J(f, P)$$

z toho dostaneme

$$\overline{\int} \leq S_J(f, P) \leq \epsilon + s_J(f, P) \leq \epsilon + \underline{\int} \leq \epsilon + \overline{\int}$$

pro libovolně malé ϵ

9.3 Věta: Každá spojitá funkce na n -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál

Každá spojitá funkce $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ na n -rozměrném kompaktním intervalu má Riemannův integrál $\int_J f$.

Důkaz: V \mathbb{E}_n budeme používat vzdálenost σ definovanou předpisem

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$$

Jelikož je f stejnoměrně spojitá, můžeme pro $\epsilon > 0$ zvolit $\delta > 0$ takové, že

$$\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)}$$

Připomeňme si jemnost $\mu(P)$. Je-li $\mu(P) < \delta$ je $\text{diam}(B) < \delta$ pro všechny $B \in \mathcal{B}(P)$ a tedy

$$\begin{aligned} M(f, B) - m(f, B) &= \sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in B\} - \inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in B\} \leq \\ &\leq \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\} = \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)} \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum \{(M(f, B) - m(f, B)) \cdot \text{vol}(B) | B \in \mathcal{B}(P)\} \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)} \sum \{\text{vol}(B) | B \in \mathcal{B}(P)\} = \frac{\epsilon}{\text{vol}(J)} \text{vol}(J) = \epsilon \end{aligned}$$

9.4 Fubiniova věta

Vezměme součin $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ intervalů $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$. Nechť existuje

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}\mathbf{y}$$

a nechť pro každé $\mathbf{x} \in J'$, resp. $\mathbf{y} \in J''$, existuje

$$\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad \text{resp.} \quad \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Potom je

$$\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}\mathbf{y} = \int_{J'} \left(\int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{J''} \left(\int_{J'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}$$

Tedy ve dvou proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$

ve třech proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1$$

a obecně

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_2 \right) dx_1$$

Důkaz: Položme

$$F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Dokážeme, že $\int_{J'} F$ existuje a že

$$\int_J f = \int_{J'} F$$

Zvolme rozdělení P intervalu J tak, aby

$$\int f - \epsilon \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \int f + \epsilon$$

Toto rozdělení je tvořeno rozděleními P' intervalu J' a P'' intervalu J'' . Máme

$$\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' \mid B' \in \mathcal{B}(P'), B'' \in \mathcal{B}(P'')\}$$

a každá cihla P se objeví jako právě jedno $B' \times B''$. Potom je

$$F(\mathbf{x}) \leq \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol} B''$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(F, P') &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \max_{\mathbf{x} \in B'} \left(\sum_{B'' \in \mathcal{B}} (P'') \max_{\mathbf{y} \in B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'') \right) \cdot \text{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B' \in \mathcal{B}(P')} \sum_{B'' \in \mathcal{B}(P'')} \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B' \times B''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \text{vol}(B'') \cdot \text{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B' \times B'' \in \mathcal{B}(P)} \max_{\mathbf{z} \in B' \times B''} f(\mathbf{z}) \cdot \text{vol}(B' \times B'') = \\ &= S(f, P) \end{aligned}$$

a podobně

$$s(f, P) \leq s(F, P')$$

Máme tedy

$$\int_J f - \epsilon \leq s(F, P') \leq \int_{J'} F \leq S(F, P) \leq \int_J f + \epsilon$$

a $\int_{J'} F$ je roven $\int_J f$.

9.5 Lebesgueův integrál

Riemannův integrál je intuitivně velmi uspokojivý a počítá to, co chceme, pokud tedy funguje. Jeho užití má ale několik problémů:

- Nemusí existovat i pro některé přirozeně definované funkce, nebo přinejmenším není snadno vidět, zda existuje.
- Nemůžeme provádět užitečné operace (limity, derivování) dost univerzálně.

Lebesgueův integrál je rozšíření Riemannova integrálu, kde můžeme dělat prakticky cokoli, za snadno zapamatelných podmínek. Několik Lebesgueovských pravidel:

1. Je-li interval a Riemannův integrál $\int_I f$ existuje, shoduje se s Lebesgueovým.
2. Pokud $\int_{D_n} f$ existuje pro $n = 1, 2, \dots$, existuje i

$$\int_{\bigcup D_n} f$$

3. Pokud $\int_D f_n$ existuje a posloupnost $(f_n)_n$ je monotónní, platí

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$$

4. Pokud $\int_D f_n$ existuje a $|f_n| \leq g$ pro nějaké g pro které existuje $\int_D g$, platí

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$$

5. Je-li D omezená, $|f_n(x)| \leq C$ a $\int_D f_n$ existují, platí

$$\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$$

6. Buď U okolí bodu t_0 a g takové, že existují $\int_D g$ a $\int_D f(t, x) dx$ a $\forall t \in U \setminus \{t_0\} : |f(t, x)| \leq g(x)$ (potom

$$\int_D f(t_0, x) dx = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_D f(t, x) dx$$

7. Jestliže pro integrovatelnou g platí

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq g(x)$$

a v nějakém okolí U bodu t_0 všechno dává smysl(?), potom platí

$$\int_D \frac{\partial f(t_0, -)}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_D f(t_0, -)$$

9.6 Tietzeova věta

Buď Y uzavřený podprostor metrického prostoru X . Potom můžeme každou spojitou reálnou funkci f na Y takovou, že $\forall x \in Y : a \leq f(x) \leq b$ rozšířit na stejně omezenou spojitou funkci g na X .

The End