Geometrie pro počítačovou grafiku

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Verze 0.1
11. března 2021

Obsah

1 První přednáška

Využití:

1. počítačová grafika, animace
2. počítačový design
3. robotika, mechanika, CNC stroje
4. zpracování obrazu, umělé vidění...

1.1 Shodná zobrazení

Existuje šest shodností v rovině:

1. osová souměrnost
2. otočení
3. středová souměrnost
4. posunutí
5. posunuté zrcadlení
6. identita

Definice: osová souměrnost
Nechť je daná přímka o, kterou nazýváme osa souměrnosti. Potom pro obraz M' libovolného bodu M této přímky o platí $M' = M$. Ke každému X, který neleží na přímce o sestrojíme obraz X' následujícím způsobem:

Bodem X vedeme kolmici k na přímku o a její patu označíme X_0. Na polopřímce opačné k polopřímce X_0X sestrojíme bod X' tak, že $|X'X_0| = |XX_0|$. Takto definované zobrazení nazýváme osová souměrnost s osou o.

Příklad: Je daná přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p.
Najděte všechny body $X \in p$ takové, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.
Řešení: jeden z bodů promítneme pomocí souměrnosti na druhou stranu a spojíme s druhým.
Pak bod X bude průsečník $|AB'|$ a p.
zo slidov 4. slide

Poznámka:

1. Shodné zobrazení, jehož všechny samodružné body vyplní přímku o, je souměrnost podle osy o (alternativní definice).
2. Jestliže existují na přímce dva různé samodružné body, pak každý bod této přímky je samodružný.
3. Má-li shodnost alespoň tři nekolineární samodružné body, je to identita.
4. Má-li shodnost dva různé samodružné body a není identitou, pak je osovou souměrností.
5. Samodružné přímky osové souměrnosti jsou přímky kolmé na osu souměrnosti.

Příklad: Napište analytické vyjádření osové souměrnosti s osami x a y.
Řešení: Vezmeme na ose x bod $M = M'$. Víme, že všechny body na x budou samodružné. Jiné body, které neleží na přímce (osi) x bude mít nějaké souřadnice $B = [x, y]$. Potom $B' = [x, -y] = [x', y']\forall x, y$. Víme, že $x' = y$ a $y' = -y$. To je analytické vyjádření osové souměrnosti podle osi x. Podobně obráceně pro y.

Příklad: Obecný tvar přímky: Napište analytické vyjádření osové souměrnosti podle osy $o : ax + by + c = 0$ (Potažmo konkrétně 3x+4y-7=0).
Řešení:(**screenshot z prednášky, okolo 50. minuty záznamu**)

Definice: Otočení
Otočení (rotace) je zobrazení určené středem S a orientovaným úhlem velikosti ϕ, které bodu S přirazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost ϕ. Bod S nazýváme střed otáčení a ϕ je úhel otáčení.

Poznámka:

1. Shodnost, která není ani identitou ani osovou souměrností, má nejvýše jeden samodružný bod.
2. Shodnost s právě jedním samodružným bodem je rotace (alternativní definice).
3. Složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami vznikne otočení, jehož středem je průsečník těchto os.
4. Otočení se středem S a úhlem α převádí přímku p v přímku p' různoběžnou s p. Přitom dva vrcholové úhly, které p a p' svírají, mají velikost α.
5. Složením posunusí, rotace $R(O, \alpha)$ a posunutím dostaneme rotaci o libovolném středu.

2 Druhá přednáška

Příklad: Odvoďte analytické vyjádření otočení se středem v počátku souřadnicové soustavy o úhel α. Potom ukažte, že toto zobrazení má jeden bod <fuk>.

Definice (Středová souměrnost)**:** Středová souměrnost se středem v S je shodné zobrazení, které bodu S přiřazuje týž bod S a libovolnému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'.

Poznámka (Vlastnosti středové souměrnosti)**:** Platí:

1. Středovou souměrnost lze chápat jako speciální případ rotace.
2. Lze ji rozložit na dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou navzájem kolmé a procházejí středem souměrnosti S, který je jejich průsečíkem.
3. Je jednoznačně určena svým středem.
4. Má jediný samodružný bod a všechny směry jsou samodružné.
5. Obrazem každé přímky je přímka s ní rovnoběžná. Přímka, která prochází středem souměrnosti je samodružná.

Příklad: Je daná úsečka (těžnice) $|AS_{BC}| = 5cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, s danou těžnicí t_a, $c = 4cm, b = 7cm$.
TODO reseni

Příklad: Odvoďte analytické vyjádření středové souměrnosti v rovině.
TODO reseni

Definice (Posunutí)**:** Orientovanou úsečkou AB je dán vektor $\vec{v} = \vec{AB}$. Posunutí(translace) je zobrazení, které každému bodu roviny X přiřazuje bod X' tak, že $XX' = \vec{v}$, to znamená $X' = X + \vec{v}$.

Poznámka (Vlastnosti posunutí)**:** 1. Lze definovat též jako shodnost složenou ze dvou osových souměrností s různými rovnoběžnými osami. Směr posunutí je kolmý na směr těchto os a jeho velikost je rovna dvojnásobku těchto vzdáleností.

2. Posunutí nemá žádný samodružný bod.

Příklad: Odvoďte analytické vyjádření posunutí.
TODO reseni

Definice (Grupa shodností v eukleidovském prostoru)**:** Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné, jestliže pro každé dva body $X, Y \in \mathbb{R}^n$ platí $|f(X)f(Y)| = |XY|$

- Každé shodné zobrazení je prosté a afinní.
- Úsečka se zobrazí na úsečku, bod na bod atd.

Věta: *Složení dvou shodných zobrazení je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti je opět shodnost.*

Důkaz: TODO $\square$

Věta: *Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru: $f(X) = AX + p$, kde $p \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a A je matice $n \times n$ splňující $A^T A = I_n$.*

Důkaz: TODO $\square$

Věta: *Ke každé shodnosti existuje inverzní zobrazení.*

Důkaz: TODO $\square$

Definice (Přímé, nepřímé zobrazení)**:** Zobrazení f je přímé, pokud $\det(A) = 1$ a nepřímé, pokud $\det(A) = -1$

Důsledek (Důsledky k předcházejícím větám)**:**

- Všechny shodnosti v $\mathbb{R}^n$ tvoří grupu $E(n)$. Její dimenze je $n(n+1)/2$.
- Lineární zobrazení vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ do sebe, dané maticí A se nazývá asociované lineární zobrazení f.
- Bodům, které se zobrazí na sebe sama říkáme samodružné body $f(X) = X$. Směrům říkáme samodružné směry.
- Reálná vlastní čísla metice A mohou být pouze ± 1.
- Přímé shodnosti tvoří podgrupu.
- Shodná zobrazení, kde $A = E$ tvoří podgrupu posunutí.
- Shodná zobrazení, kde $p = 0$ tvoří podgrupu isometrií.

Věta: *Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^2$ je buď posunutí, nebo otočení. Každá nepřímá shodnost je buď osová souměrnost, nebo posunutá osová souměrnost. (směr posunutí je rovnoběžný s osou)*

Důkaz: TODO $\square$

The End