Automaty a Gramatiky

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Verze 0.1
11. května 2021

Obsah

1 První přednáška

Poznámka (Chomského hierarchie)**:** Automaty a gramatiky - dva způsoby popisu:

Turingovy stroje	$\leftrightarrow$	gramatiky Typu 0
lineárně omezené automaty	$\leftrightarrow$	kontextové gramatiky, monotónní gramatiky
zásobníkové automaty	$\leftrightarrow$	bezkontextové gramatiky
konečné automaty (DFA,NFA, λNFA)	$\leftrightarrow$	regulární jazyky

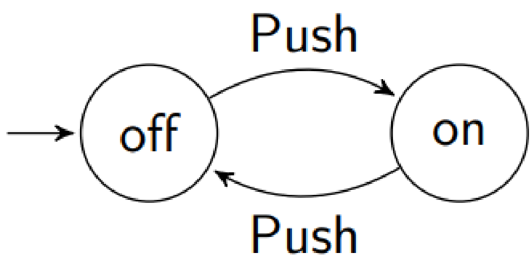
Nejjednodušší jsou nejníž, turingův stroj je nejkomplikovanější. Každá gramatika odpovídá nějaké třídě automatů.

Proč to řešíme?

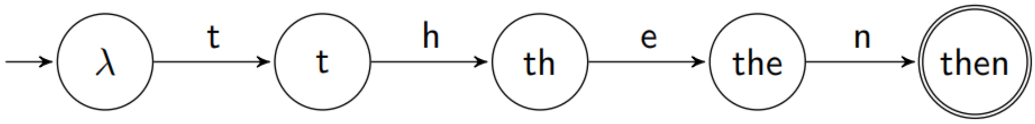
- zpracování přirozeného jazyka,
- překladače (lexikální, syntaktická analýza...),
- návrh, popis, verifikace hardware. . .
- hledání výskytu slova v textu (grep),
- verifikace systémů s konečně mnoha stavy

Příklad:

1. Návrh a verifikace integrovaných obvodů, např. Konečný automat modelující spínač on/off



2. Lexikální analýza, např. Konečný automat rozpoznávajíci slovo *then*



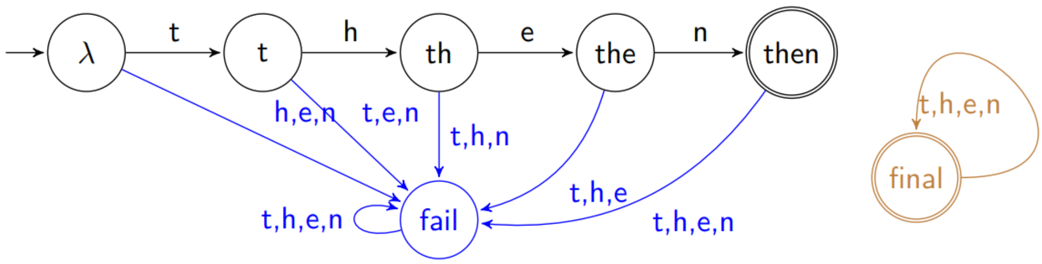
Definice (Deterministický konečný automat (DFA))**:** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
2. konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, znažíme Σ
3. **přechodové funkce** zobrazení $Q \times X \to Q$, značíme δ, která bude reprezentovaná hranami grafu
4. **počátečného stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud'

5. neprázdné **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojitým kruhem či šipkou 'ven'.

Poznámka:
Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav *fail* a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do *fail*.

Pokud je množina F prázdná, přidáme do ní i Q nový stav *final* do kterého vedou jen přechody z něj samotného $\forall s \in \Sigma : \delta(final, s) = final$.



Příklad:
Automat A přijímající $L = x01y : x, y \in \{0, 0\}*$.

Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, 0, 1, \delta, q_0, q_1)$

Reprezentujeme stavovým diagramem (grafem), pomocí tabulky nebo stavovým stromem

Definice (Abeceda, slova, jazyky)**:** Mějme neprázdnou množinu symbolů Σ.

- **Slovo** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí λ nebo ϵ
- **Množinu všech slov v abecedě** Σ značíme Σ^*
- množinu všech neprádzných slov v abecedě značíme Σ^+
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě Σ

Definice (Operace na Σ^*)**:**

1. **zřetězení slov** $u.v$ nebo uv
2. **mocnina** (počet opakování) $u^n(u^0 = \lambda, u^1 = u, u^{n+1} = u^n.u)$
3. **délka slova** $|u|(|\lambda| = 0, |auto| = 4)$
4. **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově u značíme $|u|_s(|zmrzlina|_z = 2)$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce)**:** Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
Rozšířenou přechodovou funkci δ^*: $Q \times \Sigma^* \to Q$ (tranzitivní uzávěr δ)
definujeme induktivně:

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$,
2. $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w)x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Poznámka: Pokud se v textu objeví δ aplikované na slova, míní se tím δ^*.

Definice (Jazyk rozpoznávaný(přijímaný, akceptovaný) konečným automatem)**:** Jazykem rozpoznávaným konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w : w \in \Sigma^* \& \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

- Slovo w je *přijímáno* automatem A, právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk L je rozpoznatelný konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.

Věta (Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky)**:** *Mějme regulární jazyk L. Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) tak, že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:*

1. $y \neq \lambda$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_0$, *slovo xy^kz je také v L.*

Důkaz:

- *Mějme regulární jazyk L, pak existuje DFA A s n stavy, že $L = L(A)$.*
- *Vezměme libovolné slovo $a_1a_2a_3 \dots a_m = w \in L$ délky $m \geq n, a_i \in \Sigma$.*
- *Definujeme: $\forall i p_i = \delta^*(q_0, a_1a_2 \dots a_i)$. Platí $p_0 = q_0$.*
- *Máme $n + 1 p_i$ a n stavů, některý se opakuje, vezměme první takový, t. j. $(\exists i, j : 0 \leq i < jqleqn\&p_i = p_j)$.*
- *Definujeme $x = a_1a_2 \dots a_i, y = a_{i+1}a_{i+2} \dots a_j, z = a_{j+1}a_{j+2} \dots a_m$, t.j. $w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n$.*
- *pak y^k můžeme opakovat libovolněkrát a vstup je také akceptovaný.*

□

Příklad (Aplikace pumping lemmatu)**:** TODO

2 Druhá přednáška

Definice (Kongruence)**:** Mějme konečnou abecedu Σ a relaci ekvivalnece $\sim$ na Σ^* (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:

1. $\sim$ je pravá kongruence, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*)\ u \sim v \implies uw \sim vw$.
2. je konečného indexu, jestliže rozklad $\Sigma^*/\sim$ má konečný počet tříd.
3. Třídu kongruence $\sim$ obsahujíci slovo u značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.

Věta (Myhill-Nerodova Věta)**:** *Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ. Potom následujíci tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *L je rozpoznatelný konečným automatem,*
2. *$\exists$ pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.*

Důkaz:

1. $\implies$ 2.; t.j. automat $\implies$ pravá kongruence konečného indexu
   - definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.

- je to ekvivalnece (reflexivní, symetrická, tranzitivní)
- je to pravá kongruence (z definice δ^*)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w|\delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q \in F} \{w|\delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q \in F} [w|\delta^*(q_0, w) = q]_\sim.$$

2. $\implies$ 1.; t.j. pravá kongruence konečného indexu $\implies$ automat

- abeceda automatu nazveme Σ
- za stavy Q volíme třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim$
- počáteční stav $q_0 \equiv [\lambda]_\sim$
- koncové stavy $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=[1,n]} c_i$
- přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
- $L(A) = L$

$$w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=[1,n]} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \ldots w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \ldots [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$$

□

Příklad: Sestrojte automat přijímající jazyk

$$L = \{w|w \in a, b^* \& |w|_a = 3k + 2\},$$

t. j. obsahuje $3k + 2$ symbolů a.

1. $|u|_x$ značí počet symblů x ve slově u
2. definujeme $u \sim v \equiv (|u|_a mod 3 = |v|_a mod 3)$
3. třídy ekvivalence $0, 1, 2$
4. L odpovídá třídě 2
5. a - přechody do následujíci třídy
6. b - přechody zachovávajíci třídu

28. slide, doplniť obrázok

Příklad (Neregulární pumpovatelný jazyk)**:** Ne-regulární jazyk, který lze pumpovat

Jazyk $L = \{u|u = a^+ b^i c^i \vee u = b^i c^j\}$ není regulární (Myhill-Nerodova věta), ale vždy lze pumpovat první písmeno.

1. Předpokládejme, že L je regulární
2. $\implies$ pak $\exists$ pravá kongruence $\sim_L$ konečného indexu m, L je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$
3. vezmeme množinu slov $S = \{ab, abb, abbb, \ldots, ab^{m+1}\}$
4. existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy

$i \neq j$	$ab^i \sim ab^j$	
přidáme c^i	$ab^i c^i \sim ab^j c^i$	$\sim$ je kongruence
spor	$ab^i c^i \in L \& ab^j c^i \notin L$	s$'L$ je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$.

Definice (Dosažitelný stav)**:** Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a $q \in Q$. Řekneme, že stav je dosažitelný, jestliže $\exists w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) = q$.

Příklad: Algoritmus na hledání dosažitelných stavů : DFS (důkaz asi není nutný)

Definice (Automatový homomorfismus)**:** Nechť A_1, A_2 jsou DFA. Řekneme, že zobrazení $h : Q_1 \to Q_2, Q_1$ na Q_2 je (automatovým) homomorfismem, jestliže:

$$\begin{array}{ll} h(q_{0_1}) = q_{0_2} & \text{'stejné' počáteční stavy} \\ h(\delta_1(q, x)) = \delta_2(h(q), x) & \text{'stejné' přechodové funkce} \\ q \in F_1 \Leftrightarrow h(q) \in F_2 & \text{'stejné' koncové stavy.} \end{array}$$

Homomorfismus prostý a na nazývame isomorfismus.

Definice (Ekvivalence automatů)**:** Dva konečné automaty A, B nad stejnou abecedou Σ jsou ekvivalentní, jestliže rozpoznávají stejný jazyk, t. j. $L(A) = L(B)$.

Věta (Věta o ekvivalenci automatů)**:** *Existuje-li homomorfismus konečných automatů A_1 do A_2, pak jsou A_1 a A_2 ekvivalentní.*

Důkaz:

1. Pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ konečnou iterací

$$h(\delta_1^*(q, w)) = \delta_2^*(h(q), w)$$

2. dále

$$\begin{aligned} w \in L(A_1) &\Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0_1}, w) \in F_1 \\ &\Leftrightarrow h(\delta_1^*(q_{0_1}, w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(h(q_{0_1, w})) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(q_{0_2}, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(A_2) \end{aligned}$$

□

Definice (Ekvivalence stavů)**:** Říkáme, že stavy $p, q \in Q$ konečného automatu A jsou ekvivalentní, pokud:

1. Pro všechna vstupní slova $w : \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$.

Pokud dva stavy nejsou ekvivalentní, říkáme že jsou rozlišitelné.

Příklad: Ten example je na slide 36, najlepšie s tým obrázkom

Definice (Algoritmus hledání rozpoznatelných stavů v DFA)**:** Následujíci algoritmus nalezne rozlišitelné stavy:

1. Základ: Pokud $p \in F$ (přijímajíci) a $q \notin F$, pak je dvojice $\{p, q\}$ rozlišitelná.
2. Indukce: Nechť $p, q \in Q, a \in \Sigma$ a o dvojici $r, s : r = \delta(p, a), s = \delta(q, a)$ víme, že jsou rozlišitelné. Pak i $\{p, q\}$ jsou rozlišitelné.
3. opakuj dokud $\exists$ nová trojice $p, q \in Q, a \in \Sigma$.

Doplniť obrázky zo slidov, 37/38

Věta: *Pokud dva stavy nejsou odlišeny předchodzím algoritmem, pak jsou tyto stavy ekvivalentní.*

Důkaz: Korektnost algoritmu

1. Uvažujme špatné páry stavů, které jsou rozlišitelné a algoritmus je nerozlišil.
2. Vezměme z nich pár p, q rozlišitelný nejkratším slovem $w = a_1 \ldots a_n$.
3. Stavy $r = \delta(p, a_1), s = \delta(q, a_1)$ jsou rozlišitelné kratším slovem $a_2 \ldots a_n$, takže pár není mezi špatnými.
4. Tedy jsou „vyškrtnuté“ algoritmem.
5. Tedy v příštim kroku algoritmus rozliší i p, q.

□

Poznámka: Čas výpočtu je poylnomiální vzhledem k počtu stavů.

1. V jednom kole uvažujeme všechny páry, t.j. $O(n^2)$.
2. Kol je maximálně $O(n^2)$, protože pokud nepřidáme křížek, končíme.
3. Dohromady $O(n^4)$.

Algoritmus lze zrychlit na $O(n^2)$ pamatováním stavů, které závisí na páru $\{r, s\}$ a sledovaním těchto seznamů „zpátky“.

Definice (Redukovaný DFA)**:** Deterministický konečný automat je redukovaný, pokud

1. nemá dosažitelné stavy,
2. žádne dva stavy nejsou ekvivalentní.

Definice (Redukt)**:** Konečný automat B je reduktem automatu A, jestliže:

1. B je redukovaný,
2. A a B jsou ekvivalentní

ADD PICS PLS *(don't shout pls)*

Věta (Algoritmus na nalezení reduktu DFA A)**:**

1. *Ze vstupního DFA A eliminujeme stavy nedosažitelné z počátečního stavu.*
2. *Najdeme rozklad zbylých stavů na třídy ekvivalence.*
3. *Konstruujeme DFA B na třídách ekvivalence jakožto stavech.*
   Přechodová funkce B γ, mějme $S \in Q_B$. Pro libovolné $q \in S$ označíme T třídu ekvivalence $\delta(q, a)$ a definujeme $\gamma(S, a) = T$. Tato třída musí být stejná pro všechna $q \in S$.
4. *Počáteční stav B je třída obsahujíci počáteční stav A.*
5. *Množina přijímajícich stavů B jsou bloky odpovídajíci přijímacím stavům A.*

3 Třetí přednáška

Definice (Algoritmus na testování ekvivalnece regulárních jazyků)**:** Ekvivalenci regulárních jazyků L,M testujeme následovně:

1. Najdeme $DFAA_L, A_M$ rozpoznávajíci $L(A_L) = L, L(A_M) = M$, $Q_L \cap Q_M = \emptyset$.
2. Vytvoříme DFA sjednocením stavů a přechodů $(Q_L \cup Q_M, \Sigma, \delta_L \cap \delta_M, q_L, F_L \cap F_M)$; zvolíme jeden z počátečních stavů.
3. Jazyky jsou ekvivalentní právě když počáteční stavy původních DFA jsou ekvivalentní.

[Nedeterministické konečné automaty (NFA)] Nedeterministický automat může být ve více stavech paralelně. Má schopnost 'uhodnout' něco o vstupu.

pridať obrázok zo slidov (61. slide)

Definice (NFA)**:** Nedeterministický konečný automat (NFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny stavů, zpravidla značíme Q,
2. konečné množiny vstupních symbolů, značíme Σ
3. přechodové funkce, zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ vracejíci podmnožinu Q.
4. množiny počátečních stavů $S_0 \subseteq Q$,
5. množiny koncových (přijímajících) stavů $F \subseteq Q$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce)**:** Pro přechodovou funkci δ NFA je rozšířená přechodová funkce δ^*

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ definovaná indukcí:

start: $\delta^*(q, \lambda) = q$. ind. indukční krok:

$$\delta^*(q, wx) = \bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, x)$$

t. j. množina stavů, do kterých se mohu dostat posloupností 'správně označených'

Definice (Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem)**:** Mějme NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$, Pak

$$L(A) = \{w : (\exists q_0 \in S_0)\delta^*(q_0, w \cap F \neq \emptyset)\}$$

je jazyk přijímaný automatem A.

Tedy $L(A)$ je množina slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje alespoň jeden přijímajíci stav.

Algoritmus (Podmnožinová konstrukce)**:** Podmnožinová konstrukce začíná s NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S_0, F_N)$. Cílem je popis deterministického DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$, pro který $L(N) = L(D)$.

1. Q_D je množina podmnožin $Q_N, Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$ (potenční množina).

   Poznámka: Nedosažitelné stavy můžeme vynechat

2. Počáteční stav DFA je stav označený S_0, t.j. prvek Q_D.
3. $F_D = \{S : S \in \mathcal{P}(Q_N) \& S \cap F_N \neq \emptyset\}$, tedy S obsahuje alespoň jeden přijímajíci stav N.

4. Pro každé $S \subseteq Q_N$ a každý vstupní symbol $a \in \Sigma$,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).$$

Věta (Převod NFA na DFA)**:** *Pro DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$ vytvořený podmnožinovou konstrukcí z NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ platí $L(N) = L(D)$.*

Důkaz: Indukcí dokážeme, že $\delta^*_D(S_0, w) = \delta^*_N(q_0, w)$. □

Můžeme přidat ještě tzv. λ-přechod.

Definice (λ-přechod)**:** Dovolíme přechody na λ, prázdné slovo, t.j. bez přečtení vstupního symbolu.

doplniť obrázok, 68. slide

Definice (λ-uzávěr)**:** Pro $q \in Q$ definujeme λ-uzávěr $\lambda CLOSE(q)$ rekurzivně:

1. Stav q je $\lambda CLOSE(q)$.
2. Je-li $p \in \lambda CLOSE(q)$ a $r \in \delta(p, \lambda)$, pak i $r \in \lambda CLOSE(q)$.

Pro $S \subseteq Q$ definujeme $\lambda CLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} \lambda CLOSE(q)$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce a jazyk přijímaný λ-NFA)**:** Nechť $E = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ je λ-NFA. Rozšířenou přechodovou funkci δ^* definujeme následovně:

1. $\delta^*(q, \lambda) = \lambda CLOSE(q)$.
2. indukční krok: $v = wa$, kde $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

$$\delta^*(q, wa) = \lambda CLOSE\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, a)\right)$$

Věta (Eliminace λ-přechodů)**:** *Jazyk L je rozpoznatelný λ-NFA právě když je L regulární.*

Důkaz: Pro libovolný λNFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, S_0, F_E)$ zkonstruujeme DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ přijímajíci stejný jazyk jako E.

1. $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_E), \forall S \subseteq Q_E : \lambda CLOSE(S) \in Q_D$. V Q_D může být i $\emptyset$.
2. $q_D = \lambda CLOSE(S_0)$.
3. $F_D = \{S : S \in Q_D \& S \cap F_E \neq \emptyset\}$.
4. Pro $S \in Q_D, a \in \Sigma$ definujeme $\delta_D(S, a) = \lambda CLOSE(\bigcup_{p \in S} \delta(p, a))$.

□

Definice (Množinové operace nad jazyky)**:** Mějme dva jazyky L, M. Definujeme následujíci operace:

1. binární sjednocení $L \cup M = \{w : w \in L \vee w \in M\}$

   Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova začínajíci a^i nebo tvaru $b^j c^j$.

2. průnik $L \cap M = \{w : w \in L \& w \in M\}$

   Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky končíci na 'baa'.

3. rozdíl $L - M = \{w : w \in L \& w \notin M\}$

4. doplněk (komplement) $\overline{L} = -L = \{w : w \in L\} = \sigma^* - L$

   Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova nekončíci na 'a'.

Věta (de Morganova pravidla)**:** *1.* $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$

2. $L \cup M = \overline{\overline{L} \cap \overline{M}}$

3. $L - M = L \cap \overline{M}$

Věta (Uzavřenost na množinové operace)**:** *Mějme regulární jazyky L, M. Pak jsou následujíci jazyky také regulární:*

1. sjednocení $L \cup M$

2. průnik $L \cap M$

3. rozdíl $L - M$

4. doplněk $\overline{L} = \Sigma^* - L$.

Důkaz:

1. Pokud δ není pro některé dvojice q, a definovaná, přidáme nový nepřijímajíci stav q_n a do něj přechod pro vše dříve nedefinované plus $\forall a \in \Sigma \cup \lambda : \delta(q_n, x) = q_n$.

2. Pak stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajíciho deterministického FA $F = Q_A - F_A$.

3. pro rozdíl doplníme funkci δ na totální.

4. Zkonstruujeme součinový automat,

$$Q = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta((p_1, p_2), x) = (\delta_1(p_1, x), \delta_2, x)), (q_{0_1}, q_{0_2}, F)$$

5. průnik: $F = F_1 \times F_2$

6. sjednocení: $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

7. rozdíl: $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

□

Definice (Řetězcové operace nad jazyky)**:**

1. zřetězení jazyků ... $L.M = \{uv : u \in L \& v \in M\}$, $L.x = L.x$ a $x.L = x.L$ pro $x \in \Sigma$

2. mocniny jazyka ... $L^0 = \lambda$, $L^{i+1} = L^i.L$

3. pozitivní iterace ... $L^+ = L^1 \cup L^2 \cdots \bigcup_{i \geq 1} L^i$

4. obecná iterace ... $L^* = L^0 \cup L^1 \cup \cdots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, tedy $L^* = L^+ \cup \lambda$

5. otočení jazyka ... $L^R = \{u^R : u \in L\}$

6. levý kvocient L podle M ... M
   $L = \{u : uv \in L \& u \in M\}$

7. levá derivace L podle w ... $\partial_w L = \{w\}$
   L

8. pravý kvocient L podle M ... $L/M = \{u : uv \in L \& v \in M\}$

9. pravá derivace L podle w ... $\partial^R_w L = L/\{w\}$.

Věta: *Jsou-li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M, L^*, L^+, L^R, M$*
LaL/M.

Věta: *Jsou-li L,M regulární jazyky, je regulární i $L.M$.*

Důkaz: Vezmeme DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, pak $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tak, že $L = L(A_1)$ a $M = L(A_2)$.
Definujeme Nedeterministický automat $B = (Q \cup q_0, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ kde:
$Q = Q_1 \cup Q_2$ předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenujeme, končíme až po přečtení slova z L_2

$\delta(q_0, \lambda)$	$= q_1, q_2$	pro $q_1 \in F_1$	$t.j. \lambda \in L(A_1)$
$\delta(q_0, \lambda)$	$= q_1$	pro $q_1 \notin F_1$	$t.j. \lambda \notin L(A_1)$
$\delta(q_0, x)$	$= \emptyset$	pro $x \in \Sigma$	
$\delta(q, x)$	$= \delta_1(q, x)$	pro $q \in Q_1 \& \delta_1(q, x) \notin F_1$	počítáme v A_1
	$= \delta_1(q, x), q_2$	pro $q \in Q_1 \& \delta_1(q, x) \in F_1$	nedet. přechod z A_1
	$= \delta_2(q, x)$	pro $q \in Q_2$	počítáme v A_2

Pak $L(B) = L(A_1).L(A_2)$.
I have zero idea how this should be formatted properly, pls fix later. - 3O11 □

4 Čtvrtá přednáška

Věta (Lemma(L^*, L^+))**:** *Je-li L regulární jazyk, je regulární i L^*, L^+.*

1. *Idea: Opakovaný výpočet automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*

2. *Realizace: nedeterministické rozhodnutí, zda pokračovat nebo restart*

3. *speciální stav pro příjem $\lambda \in L^0$ (pro L^+ vynecháme či $\notin F$).*

Důkaz: Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tak, že $L = L(A)$. Definujeme NFA automat $B = (Q \cup q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F \cup q_B)$, kde:
$\delta_B(q_B, \lambda) = q_0$ nový stav q_B pro příjem λ přejdeme do q_0
$\delta_B(q_B, x) = \emptyset$ pro $x \in \Sigma$
$\delta_B(q, x) = \delta(q, x)$ pokud $q \in Q \& \delta(q, x) \notin F$ uvnitř A
$= \delta(q, x), q_0$ pokud $q \in Q \& \delta(q, x) \in F$ možný restart
Pak $L(B) = L(A)^*(q_B \in F_B), L(B) = L(A^+)(q_B \notin F_B)$. □

Věta (Lemma(L^R))**:** *Je-li L regulární jazyk, je regulární i L^R.*

1. *Zřejmě $(L^R)^R = L$ a tedy stačí ukázat jeden směr.*

2. *idea: obrátíme šipky ve stavovém diagramu; nedeterministický FA*

Důkaz: TO DOOT, 67. slide □

Věta (Lemma ($M \backslash LaL/M$))**:** *Jsou-li L, M regulární jazyky, je regulární i $M \backslash L$ a M/L.*

1. *idea: A_L budeme startovat ve stavech, do kterých se lze dostat slovem M.*

Důkaz:

1. $v \in M \backslash L$
2. $\Leftrightarrow (\exists u \in M) uv \in L$
3. $\Leftrightarrow (\exists u \in M, \exists q \in Q) \delta(q_0, u) \& \delta(q, v) \in F$
4. $\Leftrightarrow \exists q \in S_0 \& \delta(q, v) \in F$
5. $\Leftrightarrow v \in L(B)$

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tak, že $L = L(A)$.
TO DOOT, nestihol som □

Definice (Regulární výrazy)**:** Regulární výrazy (RV) jsou:

1. algebraický popis jazyků
2. deklarativním způsobem, jak vyjádřit slova, která chceme přijímat.
3. Schopné definovat všechny a pouze regulární jazyky.
4. Můžeme je brát jako programovací jazyk, uživatelsky přívětivý popis konečného automatu
5. Syntaktická analýza potřebuje silnější nástroj, bezkontextové gramatiky, budou následovat

Regulární výrazy $\alpha, \beta \in RegE(\Sigma)$ nad konečnou neprázdnou abecedou $\Sigma = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a jejich hodnota $L(\alpha)$ jsou definovány induktivně:
TO DOOT, je tam tabuľka na ktorú pri tejto rýchlosti nemám čas prepísať správne, slide 70.

Definice (Priorita)**:** Nejvyšší prioritu má iterace *, nižší konkatenace(zřetězení), nejnižší sjednocení $+$.

Věta (Kleeneho věta (varianta))**:** *Každý jazyk reprezentovaný konečným automatem lze zapsat jako regulární výraz.*
Každý jazyk popsaný regulárním výrazem můžeme zapsat jako $\lambda - NFA$ (a tedy i DFA).

Důkaz: Převod RegE výrazu na $\lambda - NFA$ automat.
Důkaz indukcí dle struktury R. Základ:
V každém kroku zkonstruujeme $\lambda - NFAE$ rozpoznávající stejný jazyk $L(R) = L(E)$ se třemi dalšími vlastnostmi:

1. Právě jeden přijímající stav,
2. Žádné hrany do počátečního stavu,
3. Žádné hrany z koncového stavu.

Asi je nutné doplniť obrázok, keďže aj na prednáške to bolo popísané obrázkom (slide 72) □

Definice (Regulární výraz z DFA)**:** Mějme DFA $AQ_A = \{1, \ldots, n\}$ o n stavech.
Nechť $R^(k)_{ij}$ je regulární výraz, $L(R^(k)_{ij}) = \{w : \delta^*_{\leq k}(i, w) = j\}$ množina slov převádějících stav i do stavu j a A cestou, která neobsahuje stav s vyšším indexem než k.
Budeme rekurivně konstruovat $R^(k)_{ij}$ pro $k = 0, \ldots, n$.
$k = 0, i \neq j : R^(0)_{ij} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \cdots + \mathbf{a_m}$, kde $a_1, \ldots, a_m$ jsou symboly označující hrany i do j (nebo $R^(0)_{ij} = \emptyset$ nebo $R^(0)_{ij} = \mathbf{a}$ pro $m = 0, 1$).
$k = 0, i = j$: smyčky, $R^(0)_{ij} = \lambda + \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \cdots + \mathbf{a_m}$, kde $a_1, a_2, \ldots a_m$ jsou symboly na smyčkách v i.

Důkaz: TODOOT, celý slide je závislý na obrázku ... 75slide □

Poznámka (Shrnutí převodu mezi reprezentacemi regulárních jazyků)**: TODOO, takisto obrázok**
Převod NFA na DFA

1. λ uzávěr v $O(n^3)$ - prohledává n stavů násobeno n^2 hran pro λ přechody.
2. Podmnožinová konstrukce, DFA s až 2^n stavy. Pro každý stav, $O(n^3)$ času na výpočet přechodové funkce.

Převod DFA na NFA

1. Přidat množinové závorky k přechodové funkci a přechody pro λ u λ-NFA.

Převod automatu DFA na RegE regulární výraz

1. $O(n^3 4^n)$

RegE výraz na automat

1. V čase $O(n)$ vytvoříme λ-NFA.

Definice (Substituce jazyků)**:** Mějme konečnou abecedu Σ. Pro každé $x \in \Sigma$ budiž $\sigma(x)$ jazyk v nějaké abecedě Y_X. Dále položíme:

1. $\sigma(\lambda) = \lambda$
2. $\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$

Zobrazení $\sigma : \Sigma \to P(Y^*)$, kde $Y = \bigcup_{x \in \Sigma} Y_X$ se nazývá substituce.
$\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$
nevypouštějíci substituce je substituce, kde žádné $\sigma(x)$ neobsahuje λ.

Definice (Homomorfismus (jazyků), inverzní homomorfismus)**:** homomorfizmus h je speciální případ subsittuce, kde obraz je vždy jen jednoslovný jazyk (vynecháváme u něj závorky), t.j. $(\forall x \in \Sigma) h(x) = w_x$.
Pokud $\forall x : w_x \neq \lambda$, jde o nevypouštějíci homomorfizmus.
Inverzní homomorfizmus $h^{-1}(L) = \{w : h(w) \in L\}$.

Věta (Uzavřenost na homomorfismus)**:** *Je-li jazyk L i $\forall x \in \Sigma$ jazyk $\sigma(x), h(x)$ regulární, pak je regulární i $\sigma(L), h(L)$.*

Důkaz: Strukturální indukcí „probublááváním" algebraickým popisem jazyka o základních, sjednocení, zřetězení a iterace. Tvrzení: $\sigma(L(E)) = L(\underline{\sigma}(E))$. $\sigma(\lambda) = \lambda$, $\sigma(\emptyset) = \emptyset$, $\sigma(x) = \underline{\sigma}(x)$, $\sigma(L(\alpha + \beta)) = L(\underline{\sigma}(\alpha) + \underline{\sigma}(\beta))$ atd.
TODOOT, 84 slide □

Definice (Inverzní homomorfismus)**:** Nechť h je homomorfizmus abecedy Σ do slov nad abecedou T. Pak $h^{-1}(L)$, 'h inverze L' je množina řetězců

$$h^{-1}(L) = \{w : w \in \Sigma^*; h(w) \in L\}.$$

Věta: *Je-li h homomorfizmus abecedy Σ do abecedy T a L je regulární jazyk abecedy T, pak $h^{-1}(L)$ je také regulární jazyk.*

Důkaz: Mějme DFA $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ pro L.
Konstruujeme DFA pro $h^{-1}(L)$.

1. Definujeme $B(Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$ kde $\gamma(qq, a) = \delta^*(q, h(a))(\delta^*$ operace na řetězcích).
2. Indukcí dle $|w|$, $\gamma^*(q_0, w) = \delta^*(q_0, h(w))$.
3. Proto B přijíma právě řetězce $w \in h^{-1}(L)$.

□

5 Pátá přednáška

Příklad: Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Definujeme jazyk $L = \{w \in \Sigma^*; \delta^*(q_0, w) \in F\}$ a pro každý stav $q \in Q$ existuje prefix x_q slova w tak, že $\delta^*(q_0, x_q) = q$.

Tento jazyk L je regulární.

1. M označme $M = L(A)$.
2. T definujeme novou abecedu T trojic $\{[paq]; p, q \in Q, a \in \Sigma, \delta(p, a) = q\}$.
3. h definujeme homomorfizmus $(\forall p, q, a)h([paq]) = a$.
4. L_1 Jazyk $L_=h^{-1}(M)$ je regulární, protože M je regulární (DFA inverzní homomorfizmus).
5. $h^{-1}(101)$ obsahuje $2^3 = 8$ řetězců, např.

$$[p1p][q0q][p1p] \in [p1p], [q1q][p0q], [q0q][p1p], [q1q].$$

L_2 Vynutíme začátek q_0. Definujeme:
$E_1 = \bigcup_{a \in \Sigma, q \in Q} [q_0 a q] =$
$E_1 = [q_0 a_1 q_0], [q_0 a_2 q_1], \ldots, [q_0 a_m q_n]$
Pak $L_2 = L_1 \cap L(E_1, T^*)$.

L_3 Vynutíme stejné sousedíci stavy. Definujeme ne-odpovídajíci dvojice:
$E_2 = \bigcup_{q \neq r, p, q, r, s \in Q, a, b \in \Sigma} [paq][rbs]$.
Definujeme $L_3 = L_2 - L(T^*.E_2.T*)$.

Končí v přijímajícím stavu, protože jsme začali v jazyku M přijímaném DFA A.

L_4 Všechny stavy. $\forall q \in Q$ definujeme E_q jako regulární výraz sjednocení všech symbolů T takových, že q není ani na první, ani na poslední pozici. Odečteme $L(E_q^*)$ od $L_3.L_4 = L_3 - \bigcup_{q \in Q} E_q^*$.

L Odstráníme stavy, necháme symboly. $L = h(L_4)$, tedy L je regulární.

Věta: *Lze algoritmicky rozhodnou, zda jazyk přijímaný $DFA, NFA, \lambda - NFA$ je prázdný. Jazyk je prázdný právě když žádny z koncových stavů není dosažitelný. Dosažitelnost lze testovat $O(n^2)$.*

Věta: *Pro daný řetězec $w : |w| = n$ a regulární jazyk L lze algoritmicky rozhodnout, zda je $w \in L$.*

Důkaz:

1. DFA: Spusť automat, pokud $|w| = n$, při dobré reprezentaci a konstantním čase přechodu $O(n)$.
2. NFA o s stavech: čas $O(ns^2)$. Každý vstupní symbol aplikujeme na všechny
3. **DOPLNIT, NESTIHAM**

□

Definice (Algebraický popis jazyků)**:** Pro konečnou neprázdnou abecedu Σ označme $RJ(\Sigma)$ nejmenší třídu jazyků, která:

1. obsahuje prázdný jazyk $\emptyset$,

2. pro každé ...
3. **NESTIHAM**

Věta (Kleene)**:** ***NESTIHAM*** *Aight, please fill this in later.*

Dvousměrné (dvoucestné) konečné automaty
Konečný automat provádí následující činnosti:

1. přečte písmeno
2. změní stav vnitřní jednotky
3. posune čtecí hlavu doprava

Čtecí hlava se nesmí vracet.

Definice (Dvousměrný konečný automat)**:** Dvousměrným (dvoucestným) konečným automatem nazýváme pětici $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

1. Q je konečná množina stavů,
2. Σ je konečná množina vstupních symbolů přechodové funkce δ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q \times -1, 1$ rozšířené o pohyb hlavy
3. $q_0 \in Q$ počáteční stav,
4. množina přijímajícich stavů $F \subseteq Q$.

Poznámka: Je deterministický, nedeterministický zavádět nebudeme.

Poznámka: Nulový pohyb hlavy lze, jen trochu zkomplikuje důkaz dále.

Definice: Slovo w je přijato dvousměrným konečným automatem, pokud:

1. výpočet začal na prvním písmenu slova w vlevo v počátečním stavu,
2. čtecí hlava poprvé opustila slovo w vpravo v některém přijímajícim stavu,
3. mimo čtené slovo není výpočet definován (výpočet zde končí a slovo není přijato).

Poznámka: 1. Ke slovům si můžeme přidat speciální koncové znaky $\# \notin \Sigma$

2. funkce $\partial_\#$ odstrání # zleva, $\partial_\#^R$ zprava.
3. Je-li $L(A) = \#w\#|w \in L \subseteq \Sigma^*$ regulární, potom i L je regulární
4. $L = \partial_\#$... **DOPLNIT**

Věta: *Jazyky přijímané dvousměrným konečným automatem jsou právě regulární jazyky.*

Důkaz: konečný automat → dvousměrný automat
NESTIHOL SOM □

Věta: *Algoritmus: Funkce f_u popisujíci výpočet $2DFA$ nad slovem u*

Definujeme funkci $f_u : Q \cup q_0^| \to Q \cup 0$

1. *$f_u(q_0^|)$ popisuje v jakém stavu poprvé odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vlevo v počátečním stavu q_0,*

2. *$f_u(p) : p \in Q$ v jakém stavu opět odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vpravo v p,*
3. *symbol 0 značí, že daná situace nenastane (odejdeme vlevo nebo cyklus)*
4. *Definujeme ekvivalenci slov následovně: $u \sim w \Leftrightarrow_d eff_u = f_w$*

   Poznámka: t.j. slova jsou ekvivalentní, pokud mají stejné 'výpočtové' funkce

Regulárnost 2DFA

NESTIHOL SOM

Důkaz:

1. Potřebujeme převést návraty na lineární výpočet
2. Zajímají nás jen přijímajíci výpočty
3. Díváme se na řezy mezi symboly (v jakém stavu přechází na další políčko)

Pozorování:

1. stavy se v přechodu řezu střídají (doprava, doleva)
2. první stav jde doprava, poslední také doprava
3. v deterministických přijímajících výpočtech nejsou cykly
4. první a poslední řez obsahují jediný stav

Formální převod 2DFA na NFA

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvousměrný (deterministický) konečný automat. Definujeme ekvivalentní nedeterministický automat $B = (Q^|, \Sigma, \delta^|, (q_0), F^|)$, kde:

1. $Q^|$ jsou všechny korektní přechodové posloupnosti
   (a) posloupnosti stavů $(q^1, \ldots, q^k) : q^i \in Q$
   (b) délka posloupnosti je lichá $(k = 2m + 1)$
   (c) žádný stav se neopakuje na liché ani sudé pozici $(\forall i \neq j)(q^{2i} \neq q^{2j})\&(\forall i \neq j)(q^{2i+1} \neq q^{2j+1})$
2. $F^| = (q)|q \in F$ posloupnosti délky 1
3. $\delta^|(c, a) = \{d|d \in Q^|\&c \to^a d$ je lokálně konzistentní přechod pro a $\}$
   (a) existuje bijekce : $h : c_{odd} \cup d_{even} \to c_{even} \cup d_{odd}$, tak, že:
   (b) pro $h(q) \in c_{even}$ je $(h(q), -1) = \delta(q, a)$
   (c) pro $h(q) \in d_{odd}$ je $(h(q), +1) = \delta(q, a)$

□

Automaty s výstupem (motivace)

1. Dosud jediná zpráva z automatu: 'Jsme v přijímajícim stavu'.
2. Můžeme z FA získat více informací? Můžeme ... **NESTIHAM**

Definice (Mooreův stroj)**: NESTIHOL SOM**

Příklad (Mooreův stroj pro tenis)**:** Mooreův stroj pro počítaní tenisového skóre.

1. Vstupní abeceda: ID hráče, který uhrál bod
2. Výstupní abeceda & stavy: skóre (t. j. $Q = Y, \mu(q) = q$

Doplniť obrázok z prednášok (98. slide)

Definice (Mealyho stroj)**:** Mealyho (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$, resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M)$, kde

1. Q je konečná neprázdná množina stavů
2. Σ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)
3. Y je konečná neprázdná množina symbolů (výstupní abeceda)
4. **NESTIHAM**

TU BOL TIEZ NEJAKY TEXT ESTE

Příklad (Mealyho stroj)**:** Mealyho stroj - automat, který dělí vstupní slovo v binárním tvaru číslem 8 (celočíselně).

1. Posun o tři bity doprava
2. potřebujeme si pamatovat poslední trojici bitů
3. vlastně tříbitová dynamická paměť

I když nevíme, kde automat startuje, po třech symbolech začne počítat správně.

Věta (Převod Mealyho stroje na Mooreův)**:** *Pro každý Mealyho stroj existuje Mooreův stroj převádějící každé vstupní slovo na stejné výstupní slovo.*

Důkaz: Sestrojme Mooreův stroj B tak, aby $\forall q, w$ **NESTIHOL SOM :)** □

6 Šestá přednáška

Definice (Palindromy)**:** Palindrom je řetězec w stejný při čtení zepředu i zezadu, tj. $w = w^R$.

Věta: *Jazyk* $L_{pal} = w : w = w^R, w \in \Sigma^*$ *není regulární.*

Důkaz: Sporem. Předpokládejme L_{pal} je regulární, nechť n je konstatnta z pumping lemma, uvažujme slovo $w = 0^n 1 0^n$.

Z pumping lemmatu lze rozložit $w = xyz$, y obsahuje jednu alebo více z prvních n nul. Tedy xz má být v L_{pal} ale není, t.j. není regulární. □

6.1 Formální (generativní) gramatiky, bezkontextové gramatiky

Definice: Formální (generativní) gramatika je $G = (V, T, P, S)$ složena z

1. konečné množiny **neterminálů** (variables) V,
2. neprázdné konečné množiny **terminálních symbolů (terminálů)** T,
3. **počáteční symbol** $S \in V$,

4. konečné množiny **pravidel (produkcí)** P reprezentující rekurzivní definici jazyka. Každé pravidlo má tvar
$$\beta A_\gamma \to A \in V, \beta, \gamma, \omega \in (V \cup B)^*$$
t. j. levá strana obsahuje aspoň jeden neterminální symbol.

Definice (Bezkontextová gramatika (CFG))**:** je $G = (V, T, P, S)$ gramatika, obsahující pouze pravidla tvaru
$$A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$$

Definice (Chomského hierarchie)**: CHOMSKÉHO HIERARCHIE, DOPLNIT, 112/113**

Definice (Derivace $\Rightarrow^*$)**:** Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$.

1. Říkáme, že α se **přímo přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow_G \omega$ nebo $\alpha \Rightarrow \omega$) jestliže
$$\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta\beta\nu, \omega = \eta\gamma\nu \& (\beta \to \gamma) \in P$$
2. Říkáme, že α se přepíše na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow^* \omega$) jestliže
$$\exists \beta_1, \dots \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \beta_n = \omega$$
t. j. $\alpha \Rightarrow^* \alpha$.
3. posloupnost $\beta_1, \dots, \beta_n$ nazýváme derivací (odvození)
4. pokud $\forall i \neq j : \beta_i \neq \beta_j$, hovoříme o minimálním odvození

Definice (Jazyk generovaný gramatikou G)**:** Jazyk $L(G)$ gramatiky $G = (V, T, P, S)$ je množina terminálních řetězců, pro které existuje derivace ze startovního symbolu
$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow^*_G w\}$$

Jazyk neterminálu $A \in V$ definujeme $L(A) = \{w \in T^* | A \Rightarrow^*_G w\}$.

Definice (Gramatika typu 3, pravá lineární)**:** Gramatika G je **pravá lineární, t.j. Typu 3** pokud obsahuje pouze pravidla tvaru

$A \to wB, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

Příklad:

1. $P = \{S \to 0S, 1A|\lambda, A \to 0A|1B, B \to 0B|1S\}$
2. $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011B \Rightarrow 0110B \Rightarrow 01101S \Rightarrow 01101$

Věta: $L \in RE \Rightarrow L \in \mathcal{L}_3$
Pro každý jazyk rozpornávaný konečným automatem existuje gramatika typu 3, která ho generuje.

Důkaz:

1. $L = L(A)$ pro deterministický konečný automat A.
2. definujeme gramatiku $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, kde pravidla P mají tvar
$$p \to aq \text{ když } \delta(p, a) = q$$
$$p \to \lambda \text{ když } p \in F$$

3. je $L(A) = L(G)$?
   (a) $\lambda \in L(A) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow (q_0 \to \lambda) \in P \Leftrightarrow \lambda \in L(G)$
   (b) $a_1 \dots a_n \in L(A) \Leftrightarrow \exists q_0, \dots q_n \in Q : \delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}, q_n \in F \Leftrightarrow (q_0 \implies a_1 q_1 \implies \dots a_1 \dots a_n q_n \implies a_1, \dots a_n)$ je derivace pro $a_1, \dots a_n \Leftrightarrow a_1, \dots a_n \in L(G)$

□

Příprava převodu gramatiky typu 3 na forall

1. Opačný směr
   (a) pravidla $A \to aB$ kódujeme do přechodové funkce
   (b) pravidla $A \to \lambda$ určují koncové stavy
   (c) pravidla $A \to a_1, \dots a_n B, A \to a_1, \dots a_n$ s více neterminály rozepíšeme
      i. zavedeme nové neterminály $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_N$
      ii. vytvoříme pravidla $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \dots Y_n \to a_n B$
      iii. resp. $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \lambda$
   (d) pravidla $A \to B$ obpovídají λ přechodům
      i. zbavíme se jich tranzitivním uzávěrem
      ii. nebo musíme tranzitívně uzavřít $S \to B$ pro hledání $S \to \lambda$.

Věta: *Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \lambda, A, B \in V, a \in T$.*

Důkaz: Pro gramatiku $G = (V, T, S, P)$ definujeme $G^| = (V^|, T, S, P^|)$, kde pro každé pravidlo zavedeme dostatečný počet nových neterminálů $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$ a definujeme
DOPLNIT TABULKU □

Věta ($\lambda - NFA$ pro gramatiku typu 3 rozpoznávajíci stejný jazyk)**:** *Pro každý jazyk L generovaný gramatikou typu 3 existuje $\lambda - NFA$ rozpoznávajíci L.*

Důkaz:

1. Vezmeme $G = (V, T, P, S)$ obsaující jen pravidla tvaru $A \to aB, A \to \lambda,\ A, B \in V, a \in T$ generující L (předchozí lemma)
2. definujeme nedeterministický $\lambda - NFA$ $A = (V, T, \delta, S, F)$ kde :
   (a) $F = \{A | (A \to \lambda) \in P\}$
   (b) $\delta(A, a) = \{B | (A \to aB) \in P\}$
3. $L(G) = L(A)$
   (a) **DOPLNIT, 121**

□

Definice (Levé (a pravé) lineární gramatiky)**:** Gramatiky typu 3 nazýváme také **pravé lineární** (neterminál je vždy vpravo).

Gramatika G je levá lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \to Bw, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

Věta: *Jazyky generované levou lineární gramatikou jsou právě regulární jazyky.*

Důkaz: DOPLNIT, 122 □

Definice (Lineární gramatika, jazyk)**:** Gramatika je lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \rightarrow uBw, A \rightarrow w, A, B \in V, u, w \in T^*$ (na pravé straně vždy maxiálne jeden neterminál).

Lineární jazyky jsou právě jazyky generované lineárnimi gramatikami.

1. Zřejmě platí: regulární jazyky $\subseteq$ lineární jazyky,
2. Jde o vlastní podmnožinu $\subsetneq$.

Příklad (Lineární, neregulární jazyk)**:** Jazyk $L = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$ není regulární jazyk, ale je lineární, generovaný gramatikou s pravidly $S \rightarrow 0S1|01$.

Definice (Bezkontextová gramatika)**:** Bezkontextová gramatika je gramatika, kde všechna pravidla jsou tvaru $A \rightarrow \omega, \omega \in (V \cup T)^*$

CFG pro jednoduché výrazy

1. $E \rightarrow I$
2. $E \rightarrow E + E$
3. $E \rightarrow E * E$
4. $E \rightarrow (E)$
5. $I \rightarrow a$
6. $I \rightarrow b$
7. $I \rightarrow Ia$
8. $I \rightarrow Ib$
9. $I \rightarrow I0$
10. $I \rightarrow I1$

Pravidla 1 až 4 definují výraz.

Pravidla 5 až 10 definují identifikátor I odpovídajíci regulárnímu výrazu $(a + b)(a + b + 0 + 1)^*$.

Definice (Derivační strom)**:** Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$. Derivační strom pro G je strom, kde

1. Kořen (kreslíme nahoře) je označen startovním symbolem S,
2. každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem V.
3. Každý uzel je ohodnocen prvkem $\in V \cup T \cup \lambda$.
4. Je-li uzel ohodnocen λ, je jediným dítětem svého rodiče.
5. Je-lin A ohodnocení vrcholu a jeho děti *zleva pořadě* jsou ohodnoceny $X_1, \ldots, X_k$, pak $(A \rightarrow X_1, \ldots, X_k) \in P$ je pravidlo gramatiky.

Definice (Strom dáva slovo (yield))**:** Říkáme, že derivační strom dáva slovo w (yield), jestliže w je slovo složené z ohodnocení listů bráno zleva doprava.

Definice (Levá a pravá derivace)**:** 1. Levá derivace (leftmost) $\Rightarrow_{lm}, \Rightarrow_{lm}^*$ v každém kroku přepisuje nejlevější neterminál.

2. Pravá derivace (rightmost) $\Rightarrow_{rm}, \Rightarrow_{rm}^*$ v každém kroku přepisuje nejpravější neterminál.

Věta: *Pro danou gramatiku $G = (V, T, P, S)$ a $w \in T^*$ jsou následujíci tvrzení ekvivalentní:*

1. $A \Rightarrow^* w$.
2. $A \Rightarrow^*_{lm} w$.
3. $A \Rightarrow^*_{rm} w$.
4. *Existuje derivační strom s kořenem A dávajíci slovo w.*

Věta: *Mějme CFGG $= (V, T, P, S)$ a derivační strom s kořenem A dávající slovo $w \in T^*$. Pak existuje levá derivace $A \Rightarrow^*_{lm} w$ v G.*

Tvrzení (Příprava důkazu, „obalení derivace“)**:** *Mějme následující derivaci:*

$$E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \rightarrow ab.$$

Důkaz: Pro libovolná slova $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ je také derivace:

$$\alpha E\beta \Rightarrow \alpha I\beta \Rightarrow \alpha Ib\beta \Rightarrow \alpha ab\beta.$$

□

Důkaz: $\exists$ derivační strom, pak $\exists$ levá derivace $\Rightarrow_{lm}$

Indukcí podle výšky stromu:

1. Základ: výška 1: Kořen A s dětmi dávajícimi w. Je to derivační strom, proto $A \rightarrow w$ je pravidlo $\in P$, tedy $A \Rightarrow_{lm} w$ v jednom kroku.
2. Indukce: výška $n > 1$. Kořen A s dětmi $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
   (a) Je-li $X_i \in T$, definujeme $w_i \equiv X_i$.
   (b) Je-li $X_i \in V$, z indukčního předpokladu $X_i \Rightarrow^*_{lm} w_i$.

   Levou derivaci konstruujeme induktivně pro $i = 1, \ldots, k$
   složíme $A \Rightarrow^*_{lm} w_1 w_2 \ldots w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k$.

   (a) Pro $X_i \in T$ jen zavedeme čítač $i{+}{+}$.
   (b) Pro $X_i \in V$ přepíšeme derivaci: $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \cdots \Rightarrow_{lm} w_i na$

$$w_1 w_2 \ldots w_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k \Rightarrow_{lm}$$

$$w_1 w_2 \ldots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k \Rightarrow_{lm}$$

$$\Rightarrow_{lm} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k$$

   Pro $i = k$ dostaneme levou derivaci $w \in A$.

□

7 Sedmá přednáška

7.1 Zásobníkový automat

Zásobníkové automaty jsou rozšířením $\lambda{-}NFA$ nedeterministických konečných automatů s λ přechody.

Přidanou věcí je zásobník. Ze zásobníku můžeme číst, přidávat na vrch a odebírat z vrchu zásobníku znak $\in \Gamma$.

Může si pamatovat neomezené množství informace.

Zásobníkové automaty definují bezkontextové jazyky.

Deterministické zásobníkové automaty přijímají jen vlastní podmnožinu bezkontextových jazyků.

Definice (Zásobníkový automat)**:** (PDA) je $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

1. Q konečná množina stavů,
2. Σ neprázdná konečná množina vstupních symbolů,
3. Γ neprázdná konečná zásobníková abeceda,
4. δ přechodová funkce : $Q \times (\Sigma \cup \lambda) \times \Gamma \to P(_{FIN}(Q \times \Gamma^*))$, $\delta(p, a, X) \ni (q, \gamma)$ kde q je nový stav a γ je řetězec zásobníkových symbolů, který nahradí X na vrcholu zásobníku,
5. $q_0 \in Q$ počáteční stav
6. $Z_0 \in \Gamma$ počáteční zásobníkový symbol. Víc na začátku zásobníku není.
7. F množina přijímajícich (koncových) stavů; může být nedefinovaná.

V jednom časovém kroku zásobníkový automat:

1. Přečte na vstupu žádný nebo jeden symbol (λ přechody pro prázdný vstup.)
2. Přejde do nového stavu.
3. Nahradí symbol na vrchu zásobníku libovolným řetězcem (λ odpovídá samotnému *pop*, jinak následuje *push* jednoho nebo více symbolů).

Příklad (Zásobníkový automat pro jazyk: $L_{wwr} = ww^R : w \in (0 + 1)^*$)**:** PDA přijímající L_{wwr}:

1. Start q_0 reprezentuje odhad, že ještě nejsme uprostřed.
2. V každém kroku nedeterministicky hádáme:
   (a) Zůstat q_0 (ještě nejsme uprostřed)
   (b) Přejít λ přechodem do q_1 (už jsme viděli střed).
3. V q_0 přečte vstupní symbol a dá (push) ho na zásobník
4. V q_1 srovná vstupní symbol s vrcholem zásobníku. Pokud se shodují, přečte vstupní symbol a umaže (pop) vrchol zásobníku
5. Když vyprázdníme zásobník, přijmeme vstup, který jsme doteď přečetli.

Příklad (PDA pro L_{wwr})**: TO DO, (slide 143, example 7.2)**

Definice (Přechodový diagram pro zásobníkový automat)**:** Přechodový diagram pro zásobníkový automat obsahuje:

1. Uzly, které odpovídají stavům PDA.

2. Šipka 'odnikud' ukazuje počáteční stav, dvojité kruhy označují přijímající stavy.

3. Hrana odpovídá přechodu PDA. Hrana označená $a, X \to \alpha$ ze stavu p do q znamená $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$

4. Konvence je, že počáteční symbol zásobníku značíme Z_0.

Definice (Notace zásobníkových automatů)**:**

$a, b, c, *, +, 1, (,)$	symboly vstupní abecedy
p, q, r	stavy
u, v, w, x, y, z	řetězce vstupní abecedy
X, Y, E, I, S	zásobníkové symboly
α, β, γ	řetězce zásobníkových symbolů

Definice (Situace zásobníkového automatu)**:** Situaci zásobníkového automatu reprezentujeme trojicí (q, w, γ), kde

1. q je stav,

2. w je zbývající vstup a

3. γ je obsah zásobníku (vrch zásobníku je vlevo).

Situaci značíme zkratkou (ID) z anglického *instantaneousdescription*.

Definice ($\vdash, \vdash^*$ posloupnosti situací)**:** Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Definujeme $\vdash_P$ nebo $\vdash$ následovně:

1. Nechť $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha), p, q \in Q, a \in (\Sigma \cup \lambda), X \in \Gamma, \alpha \in \Gamma^*$.

$$\forall w \in \Sigma^*, \beta \in \Gamma^* : (p, aw, X\beta) \vdash (q, w, \alpha\beta).$$

2. Symboly $\vdash_P^*$ a $\vdash^*$ používáme na označení nuly a více kroků zásobníkového automatu, t. j.

   (a) $I \vdash^* I$ pro každou situaci I

   (b) $I \vdash^* J$ pokud existuje situace $K : I \vdash K \& K \vdash^* J$.

3. Čteme $I \vdash^* J$ situace I vede na situaci J, $I \vdash J$ situace I bezprostředně vede na situaci J.

Definice (Jazyk přijímaný koncovým stavem, prázdným zásobníkem)**:** Mějme zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Pak $L(P)$ je:

$$L(P) = \{w : (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \alpha) \text{ pro nějaké } q \in F \text{ a libovolný řetězec } \alpha \in \Gamma^*; w \in \Sigma^*\}$$

jazyk akceptovaný prázdným zásobníkem $N(P)$ definujeme:

$$L(P) = \{w : (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \lambda) \text{ pro nějaké } q \in Q \ ; w \in \Sigma^*\}$$

Příklad: Zásobníkový automat z předchozího příkladu akceptuje L_{wwr} koncovým stavem.

Příklad: $P' \equiv P$ z předchozího příkladu, jen změníme instrukci, aby umazala poslední symbol
$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_2, Z_0)$ nahradíme
$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_2, \lambda)$
nyní $L(P') = N(P') = L_{wwr}$.

Příklad (If-else přijímané prázdným zásobníkem)**: TO DO, 7.5, 149 slide**

Příklad (Přijímaní koncovým stavem)**: TO DO, 7.6, 149 slide**

Věta (Nečtený vstup a dno zásobníku P neovlivní výpočet)**:** *Mějme* $PDAP = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *a* $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$*. Potom pro libovolné slovo* $w \in \Sigma^*$ *a* $\gamma \in \Gamma^*$ *platí :* $(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (q, yw, \beta\gamma)$*. Speciálně pro* $\gamma = \lambda$ *a/nebo* $w = \lambda$*.*

Důkaz: Indukcí podle počtu situací mezi $(p, xw, \alpha\gamma)$ a $(q, yw, \beta\gamma)$. Každý krok $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$ je určen bez w a/nebo γ. Proto je možný i se symboly na konci vstupu / dně zásobníku. □

Poznámka:

$$\text{Pro } PDAP = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F), (p, xw, \alpha) \vdash_P^* (q, yw, \beta) : (p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta).$$

Pro zásobník ale obdoba neplatí. PDA může zásobníkové symboly γ použít a zase je tam naskládat (push). $L = 0^i 1^i 0^j 1^j$, situace $(p, 0^{i-j} 1^i 0^j 1^j, 0^j Z_0) \vdash^* (q, 1^j, 0^j Z_0)$, mezitím vyčistíme zásobník k Z_0

Věta (Od přijímajíciho stavu k prázdneému zásobníku)**:** *Mějme* $L = L(P_F)$ *pro nějaký PDA.* $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$*. Pak existuje* $PDAP_N$ *takový, že* $L = L(P_N)$*.*
Důkaz: *Nechť* $P_N = (Q \cup p_0, p, \Sigma, \Gamma \cup X_0, \delta_N, p_0, X_0)$*, kde:*

1. $\delta_N(p_0, \lambda, X_0) = (q, Z_0 X_0)$ *start,*
2. $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \lambda, Y \in \Gamma) : \delta_N(q, a, Y) = \delta_F(q, a, Y)$ *simulujeme*
3. $\forall (q \in F, Y \in \Gamma \cup X_0), \delta_N(q, \lambda, Y) \ni (p, \lambda)$ *přijmout pokud* P_F *přijíma,*
4. $\forall (Y \in \Gamma \cup X_0), \delta_N(p, \lambda, Y) = (p, \lambda)$ *vyprázdníme zásobník.*

Pak $w \in N(P_N) \Leftrightarrow w \in L(P_F)$*.* □

Věta (Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu)**:** *Pokud* $L = N(P_N)$ *pro nějaký PDA* $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$*, pak existuje PDA* $P_F : L = L(P_F)$*.*
Důkaz:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, p_f)$$

kde δ_F *je:*

1. $\delta_F(p_0, \lambda, X_0) = (q_0, Z_0 X_0)$ *start*
2. $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \lambda, Y \in \Gamma), \delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y)$*.*
3. *Navíc,* $\delta_F(q, \lambda, X_0) \ni (p_f, \lambda) \forall q \in Q$*.*

Chceme ukázat, že $w \in L(P_N) \Leftrightarrow w \in L(P_F)$*.*

1. *(if)* P_F *přijíma následovně:* $(p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_F = N_F}^* (q, \lambda, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \lambda, \lambda)$*.*
2. *(only if) Do* p_f *nelze dojít jinak než předchozím bodem.*

□

Věta $(L(CFG), L(PDA), N(PDA))$**:** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Jazyk L je bezkontextový, t.j. generovaný* CFG*,*
2. *Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem koncovým stavem.*
3. *Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.*

Důkaz: TO DO, doplnit graf z 153 (theorem 7.1) □

Algoritmus (Konstrukce PDA z $CFGG$)**:** Mějme CFG gramatiku $G = (V, T, P, S)$. Konstruujeme $PDAP = (q, T, V \cup T, \delta, q, S)$.

1. Pro neterminály $A \in V, \delta(q, \lambda, A) = (q, \beta) : A \to \beta$ je pravidlo G.
2. Pro každý terminál $a \in T, \delta(q, a, a) = (q, \lambda)$.

Příklad (Konverze gramatiky)**: TODO, strana 154, example 7.7**

Věta (Přijímání prázdným zásobníkem ze CFG)**:** *Pro PDA P konstruovaný z CFG G algoritmem výše je N(P) = L(G).*

Důkaz:

1. Levá derivace: $E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * I \Rightarrow a * b$
2. Posloupnost situací: $(q, a*b, E) \vdash (q, a*b, E*E) \vdash (q, a*b, I*E) \vdash (q, a*b, a*E) \vdash (q, *b, *E) \vdash (q, b, E) \vdash (q, b, I) \vdash (q, b, b) \vdash (q, \lambda, \lambda)$.

Pozorování:

1. Kroky derivace simuluje $PDA\lambda$ přepisy zásobníku
2. odmazávaný vstup u PDA v derivaci zůstává až do konce
3. až PDA vymaže terminály, pokračuje v přepisech.

$w \in N(P) \Leftarrow w \in L(G)$
Nechť $w \in L(G)$, w má levou derivaci $S = \gamma_1, \Rightarrow_{Im} \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = w$.
Indukcí podle i dokážeme $(q, w, S) \vdash_P^* (q, v_i, \alpha_i) : \gamma_i = u_i\alpha_i$ je levá sentenciální forma a $u_i v_i = w$. □

8 Osmá přednáška

Příklad: Gramatika $G = (S, L, R, (,), P, S)$:

1. $S \to LR|SS|LA$
2. $A \to SR$
3. $L \to ($
4. $R \to)$

$$S \Rightarrow LR \Rightarrow (R \Rightarrow ()$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow LRS \Rightarrow (RS \Rightarrow ()S \Rightarrow ()LR \Rightarrow ()(R \Rightarrow ()()$$

$$S \Rightarrow LA \Rightarrow (A \Rightarrow (SR \Rightarrow (LRR \Rightarrow ((RR \Rightarrow (()R \Rightarrow (())$$

Příklad: Gramatika pro zjednodušené aritmetické výrazy $I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$

1. $F \to I|(E)$
2. $T \to F|T * F$
3. $E \to T|E + T$

$$E \Rightarrow T \Rightarrow T * F \Rightarrow F * F \Rightarrow I * F \Rightarrow a * F \Rightarrow a * I \Rightarrow a * Ib \Rightarrow a * bb$$

Příklad: CYK Algoritmus

Gramatika $G = (S, A, L, R, (,), P, S)$

1. $S \to LR|SS|LA$
2. $A \to SR$
3. $L \to ($
4. $R \to)$

Tabulku vyplňujeme odspodu
DOPLNIT TABULKU (pripnuta fotka na discorde)

Věta: *Algoritmus CYK (Cocke-Younger-Kasami) v čase* $O(n^3)$

1. *Mějme gramatiku v ChNF* $G = (V, T, P, S)$ *pro jazyk* L *a slovo* $w = a_1a2 \dots a_n \in T^*$
2. *Vytvořme trojúhelníkovou tabulku:*
   (a) *horizontální osa* w,
   (b) X_{ij} *jsou množiny neterminálů* A *takových, že* $A \Rightarrow^* a_ia_{i+1} \dots a_j$.
   (c) *Základ:* $X_{ii} = A; A \to a_i \in P$
   (d) *Indukce:* $X_{ij} = A \to BC; B \in X_{ik}, C \in X_{k+1,j}$
3. *Vyplňujeme tabulku zdola nahoru*
4. *Pokud* $S \in X_{1,n}$, *potom* $w \in L(G)$.

Definice: Chomskeho normální forma

Chomského normálni forma: všechna pravidla tvaru $A \to BC$ nebo $A \to a$, A, B, C jsou neterminály, a terminál
Každý bezkontextový jazyk (kromě slova λ) je generovaný gramatikou v Chomského normálním tvaru.
Postupně provedeme zjednodušení gramatiky, nejdřív:

1. **nestihol som (+-163 slide)**

Definice: zbytečný, užitečný, generující, dosažitelný symbol

1. Symbol X je užitečný v gramatice $G = (V, T, P, S)$ pokud existuje derivace tvaru $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$, kde $w \in T^*, X \in (V \cup T), \alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.
2. Pokud X není užitečný, říkáme, že je zbytečný.
3. X je generující pokud $X \Rightarrow^* w$ pro nějaké slovo $w \in T^*$. Vždy $w \Rightarrow^* w$ v nula krocích.
4. X je dosažitelný, pokud $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$ pro nějaká $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$

Věta: $NechG = (V, T, P, S)$ *je* CFG, *předpokládejme* $L(G) = \emptyset$ *Zkonstruujeme* $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S)$ *následově:*

1. *Eliminujeme ne-generující symboly a pravidla je obsahující*

2. *poté eliminujeme všechny symboly které jsou nedosažitelné.*

Pak G_1 nemá zbytečné symboly a $L(G_1) = L(G)$.

Věta: *Algoritmus : Generující symboly*

Základ: Každý $a \in T$ je generující.
Indukce: $\forall$ pravidlo $A \to \alpha, : \forall$ symbol $\in \alpha$ je generující. Pak i A je generující. Včetně $A \to \lambda$.

Věta: *Algoritmus : Dosažitelné symboly*

Základ: S je dosažitelný.
Indukce: Je-li A dosažitelný, pro všechna pravidla $A \to \alpha$ jsou všechny symboly v α dosažitelné.

Věta: *Výše uvedené algoritmy najdou právě všechny generující / dosažitelné symboly.*

Definice: Nulovatelný neterminál

Neterminál A je nulovatelný, pokud $A \Rightarrow^* \lambda$.

Pro nulovatelné neterminály na pravé strané pravidla $B \to CAD$, vytvoříme dvě verze pravidla: s a bez nulovatelného terminálu.

Definice: Algoritmus: Nalezení nulovatelných symbolů v G

Základ: Pokud $A \to \lambda$ je pravidlo G, pak A je nulovatelné.
Indukce: Pokud $B \to C_1 \dots C_k$, kde jsou všechna C_i nulovatelná, je i B nulovatelné. (terminály nejsou nulovatelné nikdy).

Definice: Algoritmus: Konstrukce gramatiky bez λ-pravidel z G

1. Najdi nulovatelné symboly
2. Pro každé ... **Nestihol som pretože borka nahodila rychlost jak ježek na principoch**

Definice: Jednotkové pravidlo

Jednotkové pravidlo je $A \to B \in P$, kde A, B jsou oba neterminály.

Definice: Jednotkový pár

nestihol som :)

Definice: Algoritmus: Nalezení jednotkových párů

Základ: (A, A) pro každý $A \in V$ je jednotkový pár.
Indukce: Je-li (A, B) jednotkový pár a $(B \to C) \in P$, pak (A, C) je jednotkový pár.

Definice: Nejaký ďalší algoritmus ktorý som nestihol

Věta: *Gramatika v normálním tvaru, redukovaná*

Mějme bezkontextovou gramatiku $G, L(G) - \lambda \neq \emptyset$. Pak existuje $CFGG_1 : L(G_1) = L(G) - \lambda \& G_1$ neobsahuje λ-pravidla ani zbytečné symboly. Gramatika G_1 se nazývá redukovaná.
Důkaz: *Idea důkazu:*

1. *Začneme eliminací λ-pravidel*
2. *Eliminujeme ... :))))))))))))))))))))))))))))*

□

9 Devátá přednáška

Definice: Chomského normální tvar

O bezkontextové gramatice $G = (V, T, P, S)$ bez zbytečných symbolů kde jsou všechna pravidla v jednou ze dvou tvarů

1. $ABC, A, B, C \in V$,
2. $A \to a, A \in V, a \in T$,

říkáme, že je v Chomského normálním tvaru (ChNF).
Potřebujeme dva další kroky:

1. pravé strany délky 2 a více předělat na samé neterminály
2. rozdělit pravé strany délky 3 a více neterminálů na více pravidel

Poznámka: neterminály:

1. pro každý terminál a vytvoříme nový neterminál, řekněme A.
2. přidáme pravidlo $A \to a$,
3. použijeme A místo a na pravé straně pravidel délky 2 a více.

Poznámka:

Věta: *Gramatika v normálním tvaru, redukovaná*

Mějme bezkontextovou gramatiku $G, L(G) - \lambda \neq \emptyset$. Pak existuje $CFGG_1 : L(G_1) = L(G) - \lambda$ a G_1 neobsahuje λ-pravidla, jednotková pravidla ani zbytečné symboly. Gramatika G_1 se nazývá redukovaná.
Důkaz:

1. *Začneme eliminací λ-pravidel*
2. *Eliminujeme jednotková pravidla. Tím nepřidáme λ-pravidla.*
3. *Eliminujeme zbytečné symboly. Tím nepřidáme žádná pravidla.*

□

Věta: *ChNF*

Mějme bezkontextovou gramatiku $G, L(G) - \lambda \neq \emptyset$. Pak existuje $CFGG_1$ v ChNF taková, že $L(G_1) = L(G) - \lambda$

Příklad: DOPLNIT Z DISCORDU 8.10

Věta: *Velikost derivačního stromu gramatiky v CNF*

Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v ChNF, který dáva slovo w. Je-li délka nejdelší cesty n, pak $|w| \leq 2^{n-1}$. ***Důkaz:***

Indukcí dle n,

1. $|a| = 1 = 2^0$
2. $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

□

Poznámka: Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v ChNF, který dáva slovo $w, |w| > p = 2^{n-1}$. Pak ve stromě existuje cesta delší než n.

Věta: *Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky*

Mějme bezkontextový jazyk L. Pak $\exists n \in \mathbb{N} : \forall z \in L, |z| > n : z = uvwxy :$

1. $|vwx| \leq n$
2. $vx \neq \lambda$
3. $\forall i \geq 0, uv^iwx^iy \in L$.

OBRAZOK 8.2 Důkaz:

náznak důkazu:vezmeme derivační strom pro z najdeme nejdelší cestu na ní dva stejné neterminály tyto neterminály určí dva podstromy. podstromy definují rozklad slova nyní můžeme větší podstrom posunout (i > 1) nebo nahradit menším podstromem (i = 0)

Důkaz:

1. *vezmeme gramatiku v ChNF (pro $L = \lambda$ a $\emptyset$ zvolíme $n = 1$)*
2. *Nechť $|V| = k; n = 2^k$.*
3. *Pro $z \in L, |z| > 2^k$ má v derivačním stromu z cestu delší než k.*
4. *vezmeme nejdelší cestu; terminál kam vede označíme t.*
5. *ASpoň dva z posledních $(k+1)$ neterminálů na cestě do t jsou stejné*
6. *vezmeme dvojici A^1, A^2 nejblíže k t (určuje podstromy T^1, T^2)*
7. *cesta z A^1 do t je nejdelší v podstromu T^1 a má délku maximálně $(k+1)$ (tedy slovo dané stromem T^1 není delší než 2^k (tedy $|vwx| \leq n$))*
8. *z A^1 vedou vě cesty (ChNF), jedna do T^2, druhá do zbytku wx (ChNF je nevyouštějící, tedy $vx \neq \lambda$)*
9. *derivace slova ($A^1 \Rightarrow^* vA^2x, A^2 \Rightarrow^* w$); $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^2xy \Rightarrow^* uvwxy$*
10. *posuneme-li A^2 do $A^1 \rightarrow S \Rightarrow^* uA^2y \Rightarrow^* uwy$*
11. *posuneme-li A^1 do A^2 ($i = 2, 3, \dots$) $righarrowS \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^1xy \Rightarrow^* uvvA^2xxy \Rightarrow^* uvvwxxy$.*

□

Definice: Deterministický zásobníkový automat (DPDFA)

Zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je deterministický PDA právě když platí:

1. $\delta(q, a, X)$ je nejvýše jednoprvková $\forall(q, a, X) \in Q \times (\Sigma \cup \lambda) \times \Gamma$.
2. Je-li $\delta(q, a, X)$ neprázdná pro nějaké $a \in \Sigma$, pak $\delta(q, \lambda, X)$ musí být prázdná.

Věta:

$$RL \subsetneq L(P_{DPDA}) \subsetneq L(P_{PDA}) = CFL = N(P_{PDA}) \supsetneq N(P_{DPDA})$$

Nechť L je regulární jazyk, pak $L = L(P)$ pro nějaký $DPDAP$. ***Důkaz:*** *DPDA může simulovat deterministický konečný automat a ignorovat zásobník (nechat tam Z_0).* □

Poznámka: Jazyk L_{wcwr} je přijímaný DPDA ale není regulární.

Důkaz neregularity z pumping lemmatu na slovo $0^n c 0^n$.

10 Desátá přednáška

10.1 Uzávěrová vlastnosti

Věta: *CFL uzavřené na sjednocení, konkatenaci, uzávěr, reverzi*

CFL jsou uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iteraci (*), pozitivní iteraci (+), homomorfismus, zrcadlový obraz w^R. ***Důkaz:***

- *Sjednocení:*
  - *pokud $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ přejmenujeme neterminály,*
  - *přidáme nový symbol S_{new} a pravidlo $S_{new} \to S_1|S_2$.*
- *Zřetězení $L_1.L_2$*
  - $S_{new} \to S_1 S_2$ *(pro $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, jinak přejmenujeme)*
- *iterace $L* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$*
  - $S_{new} \to SS_{new}|\lambda$
- *pozitivní iterace $L^+ = \bigcup_{igeq1} L^i$*
  - $S_{new} \to SS_{new}|S$
- *zrcadlový obraz $L^R = \{w^R | w \in L\}$*
  - $X \to \omega^R$ *obrátíme pravou stranu pravidel.*

□

Příklad: • Jazyk $L = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 1\} = \{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \cap \{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\}$ není CFL, i když oba členy průniku jsou bezkontextové, dokonce deterministické bezkontextové.

$$\{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \to \{S \to AC, A \to 0A1|01, C \to 2C|2\}$$

$$\{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\} \to \{S \to AB, A \to 0A|0, B \to 1B2|12\}$$

• průnik není CFL z pumping lemmatu.
paralelní běh dvou zásobníkových automatů

- řídící jednotky umíme spojit (viz konečné automaty)
- čtení umíme spojit (jeden automat může čekat)
- bohužel dva zásobníky nelze obecně spojit do jednoho

dva neomezené zásobníky → Turingův stroj, rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$

Věta: *CFL i DCFL jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem*

- *Mějme L bezkontextový jazyk a R regulární jazyk.*
  Pak $L \cap R$ je bezkontextový jazyk.
- *Mějme L deterministický CFL a R regulární jazyk.*
  Pak $L \cap R$ je deterministický CFL.

Důkaz:

- *zásobníkový a konečný automat můžeme spojit*
  - *FA* $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$
  - *PDA přijímaný stavem* $M_1 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$
- *nový automat* $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_1, q_2), Z_0, F_1 \times F_2)$
  - $((r, s), \alpha) \in \delta((p, q), a, Z)$ *právě když*
  - $a \neq \lambda : r = \delta_1(p, a) \& (s, \alpha) \in \delta_2(q, a, Z)$ *. . . automaty čtou vstup, PDA mění zásobník, FA stojí.*
  - $a = \lambda : (s, \alpha) \in \delta_2(q, \lambda, Z)$
  - $r = p$
- *zřejmě* $L(M) = L(A_1) \cap L(M_2)$
  - *paralelní běh automatů.*

□

Příklad: Substituce
Mějme gramatiku $G = (E, a, +, (,), E \to E + E|(E)|a, E)$. Mějme substituci:

- $\sigma(a) = L(G_a), G_a = (I, a, b, 0, 1, I \to I0|I1|Ia|Ib|a|b, I)$,
- $\sigma(+) = -, \times, :, div, mod$,
- $\sigma(() = ($,
- $\sigma()) =)$.
- $(a + a) + a \in L(G)$
- $(a001 - bba) * b_1 \in \sigma((a + a) + a) \subset \sigma(L(G))$,
- v $\sigma(a)$ chybí + pro ukázku, že $(a + a) + a \notin \sigma(L(G))$.

Co se stane, když změníme definici:

- $\sigma(() = (, [$,

- $\sigma()) =),]$?

Příklad: Homomorfismus
Mějme gramatiku $G = (E, a, +, (,), E \rightarrow E + E|(E)|a, E)$. Mějme homomorfismus:

- $h(a) = \lambda$
- $h(+) = \lambda$
- $h(() = left$
- $h()) = right$
- $h((a + a) + a) = leftright$,
- $h^{-1}(leftright) \ni (a + +)a$.

Věta: *CFL jsou uzavřené na substituci*

Mějme CFL jazyk L nad Σ a substituci σ na Σ takovou, že $\sigma(a)$ je CFL $\forall a \in \Sigma$. Pak je i $\sigma(L)$ CFL (bezkontextový). ***Důkaz:***

- *Idea: listy v derivačním stromu generují další stromy,*
- *Přejmenujeme neterminály na jednoznačné všude v $G = (V, \Sigma, P, S), G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a), a \in \Sigma$.*
- *Vytvoříme novou gramatiku $G = (V', T', P', S)$ pro $\sigma(L)$:*
  - $V' = V \cup \bigcup_{a \in \Sigma} V_a$,
  - T'

□

Příklad: Substituce

Věta: *CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfismus*

Mějme CFL jazyk L a homomorfismus h. Pak $h^{-1}(L)$ je bezkontextový jazyk. Je-li $TODO$ ***Důkaz:***

- *pro L máme PDA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (koncovým stavem)*
- $h : T \rightarrow \Sigma^*$
- *definujeme PDA $M' = (Q', T, \Gamma, \delta', [q_0, \lambda], Z_0, F \times \lambda)$, kde*

DOPLNIT, slide 196

Pro deterministický PDA M je i M' deterministický.

□

197

Důkaz: Důkaz sporem

- Nechť L je bezkontextový jazyk

- $L_1 = \{01^j2^k3^l | j,k,l \geq 0\}$ je regulární Jazyk
  - $S \to 0B, B \to 1B|C, C \to 2C|D, D \to 3D|\lambda$
- $L \cap L_1 = 01^i2^i3^i | i \geq 0$ není bezkontextový $\implies$ spor

□

Věta: *Rozdíl s regulárním jazykem*

Mějme bezkontextový jazyk L a regulární jazyk R. Pak:

- *$L - R$ je CFL.*

Důkaz: *$L - R = L \cap R, \overline{R}$ je regulární.* □

Věta: *CFL nejsou uzavřené na doplněk ani rozdíl*

Mějme bezkontextové jazyky L, L_1, L_2, regulární jazyk R. Pak:

- *$\overline{L}$ nemusí být CFL. $\ldots L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1}}$* ***TODO***

10.2 Uzávěrové vlastnosti deterministických CFL

- Rozumné programovací jazyky jsou deterministické CFL.
- Deterministické bezkontextové jazyky
  - nejsou uzavřené na průnik
  - jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem
  - jsou uzavřené na inverzní homomorfismus

Věta: *Doplněk deterministického CFL je opět deterministický CFL.* ***Důkaz:***

- *idea: prohodíme koncové a nekoncové stavy*
- *nedefinované kroky ošetříme 'podložkou' na zásobníku*
- *cyklus odhalíme pomocí čítače*
- *až po přečtení slova prochází koncové a nekoncové stavy (stačí si pamatovat, zda prošel koncovým stavem.)*

□

Uzávěrové vlastnosti v kostce - doplnit tabulku (202/255-274)

Poznámka: Ne-uzavřenost deterministických CFL **Důkaz:** Vzhledem k uzavřenosti DCFL na doplněk by byl DCFL i $\overline{L} \cap a*b*c* = a^ib^jc^k | i = j = k$, o kterém víme, že není CFL (pumping lemma) □

DCFL nejsou uzavřené na homomorfismus (201/255-274)

11 Jedenástá přednáška

The End