Automaty a Gramatiky

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Verze 0.1
16. dubna 2021

Obsah

1 První přednáška

Poznámka (Chomského hierarchie)**:** Automaty a gramatiky - dva způsoby popisu:

Turingovy stroje	$\leftrightarrow$	gramatiky Typu 0
lineárně omezené automaty	$\leftrightarrow$	kontextové gramatiky, monotónní gramatiky
zásobníkové automaty	$\leftrightarrow$	bezkontextové gramatiky
konečné automaty (DFA,NFA, λNFA)	$\leftrightarrow$	regulární jazyky

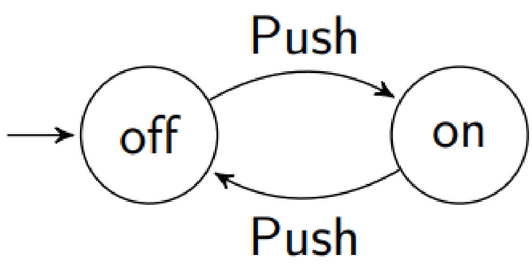
Nejjednodušší jsou nejníž, turingův stroj je nejkomplikovanější. Každá gramatika odpovídá nějaké třídě automatů.

Proč to řešíme?

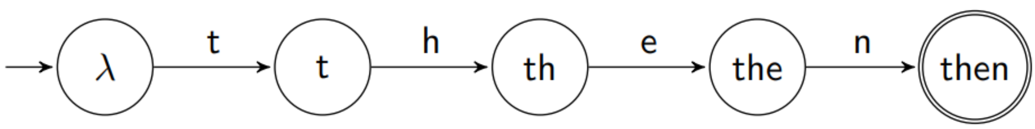
- zpracování přirozeného jazyka,
- překladače (lexikální, syntaktická analýza...),
- návrh, popis, verifikace hardware...
- hledání výskytu slova v textu (grep),
- verifikace systémů s konečně mnoha stavy

Příklad:

1. Návrh a verifikace integrovaných obvodů, např. Konečný automat modelující spínač on/off



2. Lexikální analýza, např. Konečný automat rozpoznávajíci slovo *then*



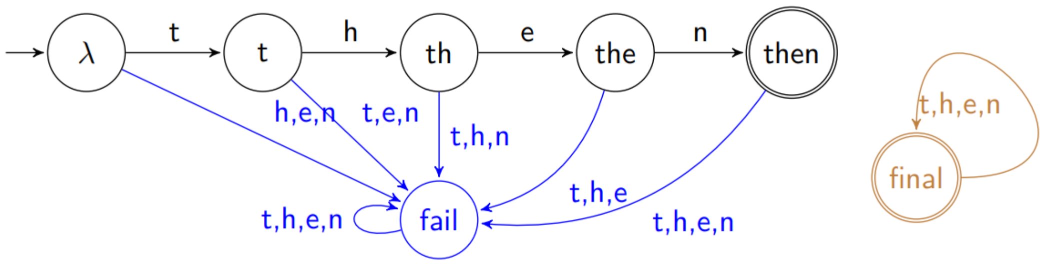
Definice (Deterministický konečný automat (DFA))**:** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
2. konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, znažíme Σ
3. **přechodové funkce** zobrazení $Q \times X \to Q$, značíme δ, která bude reprezentovaná hranami grafu
4. **počátečného stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud'

5. neprázdné **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojitým kruhem či šipkou 'ven'.

Poznámka:
Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav *fail* a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do *fail*.

Pokud je množina F prázdná, přidáme do ní i Q nový stav *final* do kterého vedou jen přechody z něj samotného $\forall s \in \Sigma : \delta(final, s) = final$.



Příklad:
Automat A přijímající $L = x01y : x, y \in \{0, 0\}*$.

Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, 0, 1, \delta, q_0, q_1)$

Reprezentujeme stavovým diagramem (grafem), pomocí tabulky nebo stavovým stromem

Definice (Abeceda, slova, jazyky)**:** Mějme neprázdnou množinu symbolů Σ.

- **Slovo** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí λ nebo ϵ
- **Množinu všech slov v abecedě** Σ značíme Σ^*
- množinu všech neprádzných slov v abecedě značíme Σ^+
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě Σ

Definice (Operace na Σ^*)**:**

1. **zřetězení slov** $u.v$ nebo uv
2. **mocnina** (počet opakování) $u^n(u^0 = \lambda, u^1 = u, u^{n+1} = u^n.u)$
3. **délka slova** $|u|(|\lambda| = 0, |auto| = 4)$
4. **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově u značíme $|u|_s(|zmrzlina|_z = 2)$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce)**:** Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
Rozšířenou přechodovou funkci δ^*: $Q \times \Sigma^* \to Q$ (tranzitivní uzávěr δ)
definujeme induktivně:

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$,
2. $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w)x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Poznámka: Pokud se v textu objeví δ aplikované na slova, míní se tím δ^*.

Definice (Jazyk rozpoznávaný(přijímaný, akceptovaný) konečným automatem)**:** Jazykem rozpoznávaným konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w : w \in \Sigma^* \& \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

- Slovo w je *přijímáno* automatem A, právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk L je rozpoznatelný konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.

Věta (Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky)**:** *Mějme regulární jazyk L. Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) tak, že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:*

1. $y \neq \lambda$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_0$, *slovo xy^kz je také v L.*

Důkaz:

- *Mějme regulární jazyk L, pak existuje DFA A s n stavy, že $L = L(A)$.*
- *Vezměme libovolné slovo $a_1a_2a_3 \dots a_m = w \in L$ délky $m \geq n, a_i \in \Sigma$.*
- *Definujeme: $\forall i p_i = \delta^*(q_0, a_1a_2 \dots a_i)$. Platí $p_0 = q_0$.*
- *Máme $n + 1 p_i$ a n stavů, některý se opakuje, vezměme první takový, t. j. $(\exists i, j : 0 \leq i < jqleqn\&p_i = p_j)$.*
- *Definujeme $x = a_1a_2 \dots a_i, y = a_{i+1}a_{i+2} \dots a_j, z = a_{j+1}a_{j+2} \dots a_m$, t.j. $w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n$.*
- *pak y^k můžeme opakovat libovolněkrát a vstup je také akceptovaný.*

$\square$

Příklad (Aplikace pumping lemmatu)**:** TODO

2 Druhá přednáška

Definice (Kongruence)**:** Mějme konečnou abecedu Σ a relaci ekvivalnece $\sim$ na Σ^* (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:

1. $\sim$ je pravá kongruence, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*)\ u \sim v \implies uw \sim vw$.
2. je konečného indexu, jestliže rozklad $\Sigma^* / \sim$ má konečný počet tříd.
3. Třídu kongruence $\sim$ obsahujíci slovo u značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.

Věta (Myhill-Nerodova Věta)**:** *Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ. Potom následujíci tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *L je rozpoznatelný konečným automatem,*
2. *$\exists$ pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^* / \sim$.*

Důkaz:

1. $\implies$ 2.; t.j. automat $\implies$ pravá kongruence konečného indexu
   - definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.

- je to ekvivalnece (reflexivní, symetrická, tranzitivní)
- je to pravá kongruence (z definice δ^*)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w|\delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q\in F}\{w|\delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q\in F}[w|\delta^*(q_0, w) = q]_\sim.$$

2. $\implies$ 1.; t.j. pravá kongruence konečného indexu $\implies$ automat
   - abeceda automatu nazveme Σ
   - za stavy Q volíme třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim$
   - počáteční stav $q_0 \equiv [\lambda]_\sim$
   - koncové stavy $F = \{c_1, \dots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=[1,n]} c_i$
   - přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
   - $L(A) = L$

$$w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=[1,n]} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \dots w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \dots [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$$

$\square$

Příklad: Sestrojte automat přijímající jazyk

$$L = \{w|w \in a, b^* \& |w|_a = 3k + 2\},$$

t. j. obsahuje $3k + 2$ symbolů a.

1. $|u|_x$ značí počet symblů x ve slově u
2. definujeme $u \sim v \equiv (|u|_a mod 3 = |v|_a mod 3)$
3. třídy ekvivalence $0, 1, 2$
4. L odpovídá třídě 2
5. a - přechody do následujíci třídy
6. b - přechody zachovávajíci třídu

28. slide, doplniť obrázok

Příklad (Neregulární pumpovatelný jazyk)**:** Ne-regulární jazyk, který lze pumpovat

Jazyk $L = \{u|u = a^+b^ic^i \vee u = b^ic^j\}$ není regulární (Myhill-Nerodova věta), ale vždy lze pumpovat první písmeno.

1. Předpokládejme, že L je regulární
2. $\implies$ pak $\exists$ pravá kongruence $\sim_L$ konečného indexu m, L je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$
3. vezmeme množinu slov $S = \{ab, abb, abbb, \dots, ab^{m+1}\}$
4. existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy

$i \neq j$	$ab^i \sim ab^j$	
přidáme c^i	$ab^ic^i \sim ab^jc^i$	$\sim$ je kongruence
spor	$ab^ic^i \in L \& ab^jc^i \notin L$	s'L je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$.

Definice (Dosažitelný stav)**:** Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a $q \in Q$. Řekneme, že stav je dosažitelný, jestliže $\exists w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) = q$.

Příklad: Algoritmus na hledání dosažitelných stavů : DFS (důkaz asi není nutný)

Definice (Automatový homomorfismus)**:** Nechť A_1, A_2 jsou DFA. Řekneme, že zobrazení $h : Q_1 \to Q_2, Q_1$ na Q_2 je (automatovým) homomorfismem, jestliže:

$$\begin{array}{ll} h(q_{0_1}) = q_{0_2} & \text{'stejné' počáteční stavy} \\ h(\delta_1(q,x)) = \delta_2(h(q),x) & \text{'stejné' přechodové funkce} \\ q \in F_1 \Leftrightarrow h(q) \in F_2 & \text{'stejné' koncové stavy.} \end{array}$$

Homomorfismus prostý a na nazývame isomorfismus.

Definice (Ekvivalence automatů)**:** Dva konečné automaty A, B nad stejnou abecedou Σ jsou ekvivalentní, jestliže rozpoznávají stejný jazyk, t. j. $L(A) = L(B)$.

Věta (Věta o ekvivalenci automatů)**:** *Existuje-li homomorfismus konečných automatů A_1 do A_2, pak jsou A_1 a A_2 ekvivalentní.*

Důkaz:

1. Pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ konečnou iterací
$$h(\delta_1^*(q,w)) = \delta_2^*(h(q),w)$$

2. dále
$$\begin{aligned} w \in L(A_1) &\Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0_1}, w) \in F_1 \\ &\Leftrightarrow h(\delta_1^*(q_{0_1}, w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(h(q_{0_1,w})) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(q_{0_2}, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(A_2) \end{aligned}$$

□

Definice (Ekvivalence stavů)**:** Říkáme, že stavy $p, q \in Q$ konečného automatu A jsou ekvivalentní, pokud:

1. Pro všechna vstupní slova $w : \delta^*(p,w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q,w) \in F$.

Pokud dva stavy nejsou ekvivalentní, říkáme že jsou rozlišitelné.

Příklad: Ten example je na slide 36, najlepšie s tým obrázkom

Definice (Algoritmus hledání rozpoznatelných stavů v DFA)**:** Následujíci algoritmus nalezne rozlišitelné stavy:

1. Základ: Pokud $p \in F$ (přijímajíci) a $q \notin F$, pak je dvojice $\{p, q\}$ rozlišitelná.
2. Indukce: Nechť $p, q \in Q, a \in \Sigma$ a o dvojici $r, s : r = \delta(p, a), s = \delta(q, a)$ víme, že jsou rozlišitelné. Pak i $\{p, q\}$ jsou rozlišitelné.
3. opakuj dokud $\exists$ nová trojice $p, q \in Q, a \in \Sigma$.

Doplniť obrázky zo slidov, 37/38

Věta: *Pokud dva stavy nejsou odlišeny předchodzím algoritmem, pak jsou tyto stavy ekvivalentní.*

Důkaz: Korektnost algoritmu

1. Uvažujme špatné páry stavů, které jsou rozlišitelné a algoritmus je nerozlišil.
2. Vezměme z nich pár p, q rozlišitelný nejkratším slovem $w = a_1 \dots a_n$.
3. Stavy $r = \delta(p, a_1), s = \delta(q, a_1)$ jsou rozlišitelné kratším slovem $a_2 \dots a_n$, takže pár není mezi špatnými.
4. Tedy jsou „vyškrtnuté" algoritmem.
5. Tedy v příštim kroku algoritmus rozliší i p, q.

$\square$

Poznámka: Čas výpočtu je poylnomiální vzhledem k počtu stavů.

1. V jednom kole uvažujeme všechny páry, t.j. $O(n^2)$.
2. Kol je maximálně $O(n^2)$, protože pokud nepřidáme křížek, končíme.
3. Dohromady $O(n^4)$.

Algoritmus lze zrychlit na $O(n^2)$ pamatováním stavů, které závisí na páru $\{r, s\}$ a sledovaním těchto seznamů „zpátky".

Definice (Redukovaný DFA)**:** Deterministický konečný automat je redukovaný, pokud

1. nemá dosažitelné stavy,
2. žádne dva stavy nejsou ekvivalentní.

Definice (Redukt)**:** Konečný automat B je reduktem automatu A, jestliže:

1. B je redukovaný,
2. A a B jsou ekvivalentní

ADD PICS PLS *(don't shout pls)*

Věta (Algoritmus na nalezení reduktu DFA A)**:**

1. *Ze vstupního DFA A eliminujeme stavy nedosažitelné z počátečního stavu.*
2. *Najdeme rozklad zbylých stavů na třídy ekvivalence.*
3. *Konstruujeme DFA B na třídách ekvivalence jakožto stavech.*
   Přechodová funkce B γ, mějme $S \in Q_B$. Pro libovolné $q \in S$ označíme T třídu ekvivalence $\delta(q, a)$ a definujeme $\gamma(S, a) = T$. Tato třída musí být stejná pro všechna $q \in S$.
4. *Počáteční stav B je třída obsahujíci počáteční stav A.*
5. *Množina přijímajícich stavů B jsou bloky odpovídajíci přijímacím stavům A.*

3 Třetí přednáška

Definice (Algoritmus na testování ekvivalnece regulárních jazyků)**:** Ekvivalenci regulárních jazyků L,M testujeme následovně:

1. Najdeme $DFAA_L, A_M$ rozpoznávajíci $L(A_L) = L, L(A_M) = M$, $Q_L \cap Q_M = \emptyset$.
2. Vytvoříme DFA sjednocením stavů a přechodů $(Q_L \cup Q_M, \Sigma, \delta_L \cap \delta_M, q_L, F_L \cap F_M)$; zvolíme jeden z počátečních stavů.
3. Jazyky jsou ekvivalentní právě když počáteční stavy původních DFA jsou ekvivalentní.

[Nedeterministické konečné automaty (NFA)] Nedeterministický automat může být ve více stavech paralelně. Má schopnost 'uhodnout' něco o vstupu.

pridať obrázok zo slidov (61. slide)

Definice (NFA)**:** Nedeterministický konečný automat (NFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny stavů, zpravidla značíme Q,
2. konečné množiny vstupních symbolů, značíme Σ
3. přechodové funkce, zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ vracejíci podmnožinu Q.
4. množiny počátečních stavů $S_0 \subseteq Q$,
5. množiny koncových (přijímajícich) stavů $F \subseteq Q$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce)**:** Pro přechodovou funkci δ NFA je rozšířená přechodová funkce δ^*
$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ definovaná indukcí:
start: $\delta^*(q, \lambda) = q$. ind. indukční krok:

$$\delta^*(q, wx) = \bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, x)$$

t. j. množina stavů, do kterých se mohu dostat posloupností 'správně označených'

Definice (Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem)**:** Mějme NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$, Pak

$$L(A) = \{w : (\exists q_0 \in S_0)\delta^*(q_0, w \cap F \neq \emptyset)\}$$

je jazyk přijímaný automatem A.

Tedy $L(A)$ je množina slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje alespoň jeden přijímajíci stav.

Definice: Algortismus : Podmnožinová konstrukce

Podmnožinová konstrukce začíná s NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S_0, F_N)$. Cílem je popis deterministického DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$, pro který $L(N) = L(D)$.

1. Q_D je množina podmnožin $Q_N, Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$ (potenční množina).

   Poznámka: Nedosažitelné stavy můžeme vynechat

2. Počáteční stav DFA je stav označený S_0, t.j. prvek Q_D.
3. $F_D = \{S : S \in \mathcal{P}(Q_N) \& S \cap F_N \neq \emptyset\}$, tedy S obsahuje alespoň jeden přijímajíci stav N.

4. Pro každé $S \subseteq Q_N$ a každý vstupní symbol $a \in \Sigma$,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).$$

Věta: *Převod NFA na DFA*

Pro DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$ vytvořený podmnožinovou konstrukcí z NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ platí $L(N) = L(D)$.

Důkaz: Indukcí dokážeme, že $\delta_D^*(S_0, w) = \delta_N^*(q_0, w)$. □
Můžeme přidat ještě tzv. λ-přechod.

Definice: Dovolíme přechody na λ, prázdné slovo, t.j. bez přečtení vstupního symbolu.
doplniť obrázok, 68. slide

Definice: λ-uzávěr
Pro $q \in Q$ definujeme λ-uzávěr $\lambda CLOSE(q)$ rekurzivně:

1. Stav q je $\lambda CLOSE(q)$.
2. Je-li $p \in \lambda CLOSE(q)$ a $r \in \delta(p, \lambda)$, pak i $r \in \lambda CLOSE(q)$.

Pro $S \subseteq Q$ definujeme $\lambda CLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} \lambda CLOSE(q)$.

Definice: Rozšířená přechodová funkce a jazyk přijímaný λ-NFA

Nechť $E = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ je λ-NFA. Rozšířenou přechodovou funkci δ^* definujeme následovně:

1. $\delta^*(q, \lambda) = \lambda CLOSE(q)$.
2. indukční krok: $v = wa$, kde $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

$$\delta^*(q, wa) = \lambda CLOSE\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, a)\right)$$

Věta: *Eliminace λ-přechodů*

Jazyk L je rozpoznatelný λ-NFA právě když je L regulární.

Důkaz: Pro libovolný λNFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, S_0, F_E)$ zkonstruujeme DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ přijímajíci stejný jazyk jako E.

1. $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_E), \forall S \subseteq Q_E : \lambda CLOSE(S) \in Q_D$. V Q_D může být i $\emptyset$.
2. $q_D = \lambda CLOSE(S_0)$.
3. $F_D = \{S : S \in Q_D \& S \cap F_E \neq \emptyset\}$.
4. Pro $S \in Q_D, a \in \Sigma$ definujeme $\delta_D(S, a) = \lambda CLOSE(\bigcup_{p \in S} \delta(p, a))$.

□

Definice: Množinové operace nad jazyky

Mějme dva jazyky L, M. Definujeme následujíci operace:

1. binární sjednocení $L \cup M = \{w : w \in L \vee w \in M\}$

   Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova začínajíci a^i nebo tvaru $b^j c^j$.

2. průnik $L \cap M = \{w : w \in L \& w \in M\}$

   Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky končíci na 'baa'.

3. rozdíl $L - M = \{w : w \in L \& w \notin M\}$

4. doplněk (komplement) $\overline{L} = -L = \{w : w \in L\} = \sigma^* - L$

   Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova nekončíci na 'a'.

Věta: *de Morganova pravidla:*

1. $L \cap M = \overline{\overline{L} \cup \overline{M}}$
2. $L \cup M = \overline{\overline{L} \cap \overline{M}}$
3. $L - M = L \cap \overline{M}$

Věta: *Uzavřenost na množinové operace*

Mějme regulární jazyky L, M. Pak jsou následujíci jazyky také regulární:

1. *sjednocení $L \cup M$*
2. *průnik $L \cap M$*
3. *rozdíl $L - M$*
4. *doplněk $\overline{L} = \Sigma^* - L$.*

Důkaz:

1. Pokud δ není pro některé dvojice q, a definovaná, přidáme nový nepřijímajíci stav q_n a do něj přechod pro vše dříve nedefinované plus $\forall a \in \Sigma \cup \lambda : \delta(q_n, x) = q_n$.
2. Pak stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajíciho deterministického FA $F = Q_A - F_A$.
3. pro rozdíl doplníme funkci $\delta natotln. Zkonstruujemesouinovautomat, Q = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta((p_1, p_2), x) = (\delta_1(p_1, x), \delta_2, x)), (q_{0_1}, q_{0_2}, F)$
4. průnik: $F = F_1 \times F_2$

   sjednocení: $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$

   rozdíl: $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

□

Definice: Řetězcové operace nad jazyky

1. zřetězení jazyků ... $L.M = \{uv : u \in L \& v \in M\}$, $L.x = L.x$ a $x.L = x.L$ pro $x \in \Sigma$
2. mocniny jazyka ... $L^0 = \lambda$, $L^{i+1} = L^i.L$
3. pozitivní iterace ... $L^+ = L^1 \cup L^2 \cdots \bigcup_{i \geq 1} L^i$
4. obecná iterace ... $L^* = L^0 \cup L^1 \cup \cdots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, tedy $L^* = L^+ \cup \lambda$

5. otočení jazyka ... $L^R = \{u^R : u \in L\}$
6. levý kvocient L podle M ... M
   $L = \{u : uv \in L \& u \in M\}$
7. levá derivace L podle w ... $\partial_w L = \{w\}$
   L
8. pravý kvocient L podle M ... $L/M = \{u : uv \in L \& v \in M\}$
9. pravá derivace L podle w ... $\partial^R_w L = L/\{w\}$.

Věta: *Jsou-li L, M regulární jazyky, je regulární i* $L.M, L^*, L^+, L^R, M$
LaL/M.

Věta: *Jsou-li L,M regulární jazyky, je regulární i* $L.M$.

Důkaz: Vezmeme DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, pak $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tak, že $L = L(A_1)$ a $M = L(A_2)$.
Definujeme Nedeterministický automat $B = (Q \cup q_0, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ kde:

$\delta(q_0$
pro q_1
$\delta(q_0$
pro q_1
$\delta(q_0$

$Q = Q_1 \cup Q_2$
pro x

předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenujeme, končíme až po přečtení slova z L_2
$\delta(q$

pro $q \in Q_1 \&$

pro $q \in Q_1 \&$

pro q

Pak $L(B) = L(A_1).L(A_2)$. □