

Automaty a Gramatiky

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Obsah

1	První přednáška	2
2	Druhá přednáška	4
3	Třetí přednáška	8
4	Čtvrtá přednáška	11
5	Pátá přednáška	14
6	Šestá přednáška	17
6.1	Formální (generativní) gramatiky, bezkontextové gramatiky	17
7	Sedmá přednáška	22
7.1	Zásobníkový automat	22

1 První přednáška

Poznámka (Chomského hierarchie): Automaty a gramatiky - dva způsoby popisu:

Turingovy stroje	\leftrightarrow	gramatiky Typu 0
lineárně omezené automaty	\leftrightarrow	kontextové gramatiky, monotónní gramatiky
zásobníkové automaty	\leftrightarrow	bezkontextové gramatiky
konečné automaty (DFA, NFA, λ NFA)	\leftrightarrow	regulární jazyky

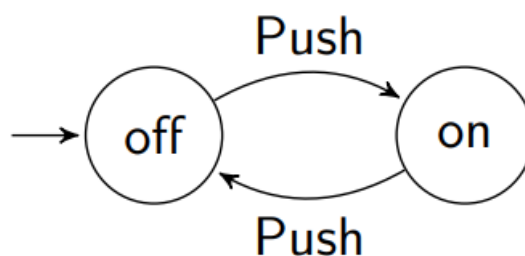
Nejjednodušší jsou nejnižší, turingův stroj je nejkomplikovanější. Každá gramatika odpovídá nějaké třídě automatů.

Proč to řešíme?

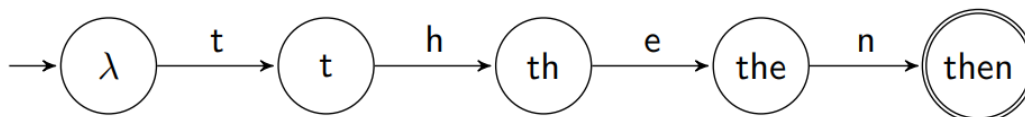
- zpracování přirozeného jazyka,
- překladače (lexikální, syntaktická analýza...),
- návrh, popis, verifikace hardware...
- hledání výskytu slova v textu (grep),
- verifikace systémů s konečně mnoha stavy

Příklad:

1. Návrh a verifikace integrovaných obvodů, např. Konečný automat modelující spínač on/off



2. Lexikální analýza, např. Konečný automat rozpoznávající slovo *then*



Definice (Deterministický konečný automat (DFA)): $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

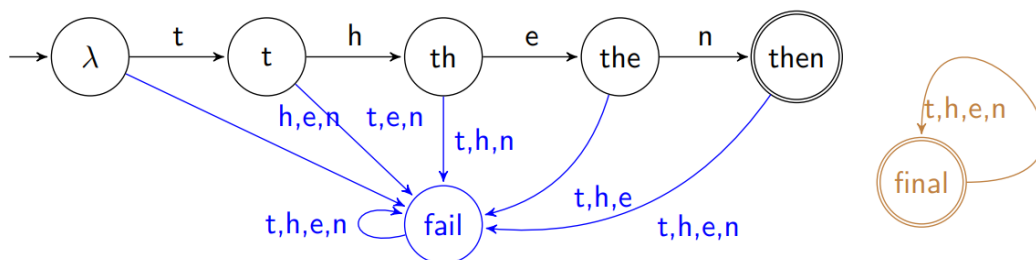
1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme Q
2. konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, značíme Σ
3. **přechodové funkce** zobrazení $Q \times X \rightarrow Q$, značíme δ , která bude reprezentovaná hranami grafu
4. **počátečního stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud'

5. neprázdné **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojíým kruhem či šipkou 'ven'.

Poznámka:

Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav *fail* a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do *fail*.

Pokud je množina F prázdná, přidáme do ní i Q nový stav *final* do kterého vedou jen přechody z něj samotného $\forall s \in \Sigma : \delta(\text{final}, s) = \text{final}$.



Příklad:

Automat A přijímající $L = x01y : x, y \in \{0,1\}^*$.

Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, q_1)$

Reprezentujeme stavovým diagramem (grafem), pomocí tabulky nebo stavovým stromem

Definice (Abeceda, slova, jazyky): Mějme neprázdnou množinu symbolů Σ .

- **Slovo** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí λ nebo ϵ
- **Množinu všech slov v abecedě** Σ značíme Σ^*
- množinu všech neprázdných slov v abecedě značíme Σ^+
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě Σ

Definice (Operace na Σ^*):

1. **zřetězení slov** $u.v$ nebo uv
2. **mocnina** (počet opakování) $u^n (u^0 = \lambda, u^1 = u, u^{n+1} = u^n.u)$
3. **délka slova** $|u| (|\lambda| = 0, |auto| = 4)$
4. **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově u značíme $|u|_s (|zmrzlina|_z = 2)$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce): Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$.

Rozšířenou přechodovou funkci $\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ (tranzitivní uzávěr δ) definujeme induktivně:

1. $\delta^*(q, \lambda) = q$,
2. $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Poznámka: Pokud se v textu objeví δ aplikované na slova, míní se tím δ^* .

Definice (Jazyk rozpoznávaný (přijímaný, akceptovaný) konečným automatem): Jazykem rozpoznávaným konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w : w \in \Sigma^* \& \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

- Slovo w je přijímáno automatem A , právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk L je rozpoznatelný konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L = L(A)$.
- Třidu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme \mathcal{F} , nazveme **regulární jazyky**.

Věta (Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky): *Mějme regulární jazyk L . Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na L) tak, že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:*

1. $y \neq \lambda$
2. $|xy| \leq n$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_0$, slovo xy^kz je také v L .

Důkaz:

- Mějme regulární jazyk L , pak existuje DFA A s n stavy, že $L = L(A)$.
- Vezměme libovolné slovo $a_1a_2a_3 \dots a_m = w \in L$ délky $m \geq n, a_i \in \Sigma$.
- Definujeme: $\forall i p_i = \delta^*(q_0, a_1a_2 \dots a_i)$. Platí $p_0 = q_0$.
- Máme $n + 1 p_i$ a n stavů, některý se opakuje, vezměme první takový, t. j. $(\exists i, j : 0 \leq i < j \leq n \wedge p_i = p_j)$.
- Definujeme $x = a_1a_2 \dots a_i, y = a_{i+1}a_{i+2} \dots a_j, z = a_{j+1}a_{j+2} \dots a_m$, t.j. $w = xyz, y \neq \lambda, |xy| \leq n$.
- pak y^k můžeme opakovat libovolněkrát a vstup je také akceptovaný.

□

Příklad (Aplikace pumping lemmatu): TODO

2 Druhá přednáška

Definice (Kongruence): Mějme konečnou abecedu Σ a relaci ekvivalence \sim na Σ^* (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:

1. \sim je pravá kongruence, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*) u \sim v \implies uw \sim vw$.
2. je konečného indexu, jestliže rozklad Σ^* / \sim má konečný počet tříd.
3. Třidu kongruence \sim obsahující slovo u značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.

Věta (Myhill-Nerodova Věta): *Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou Σ . Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. L je rozpoznatelný konečným automatem,
2. \exists pravá kongruence \sim konečného indexu nad Σ^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu Σ^* / \sim .

Důkaz:

1. \implies 2.; t.j. automat \implies pravá kongruence konečného indexu
 - definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.

- je to ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní)
- je to pravá kongruence (z definice δ^*)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w | \delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q \in F} \{w | \delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q \in F} [w | \delta^*(q_0, w) = q]_{\sim}.$$

2. \implies 1.; t.j. pravá kongruence konečného indexu \implies automat

- abeceda automatu nazveme Σ
- za stavy Q volíme třídy rozkladu Σ^* / \sim
- počáteční stav $q_0 \equiv [\lambda]_{\sim}$
- koncové stavy $F = \{c_1, \dots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=1, n} c_i$
- přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
- $L(A) = L$

$$w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=1, n} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \dots \vee w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \dots \vee [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$$

□

Příklad: Sestrojte automat přijímající jazyk

$$L = \{w | w \in a, b^* \& |w|_a = 3k + 2\},$$

t. j. obsahuje $3k + 2$ symbolů a .

1. $|u|_x$ značí počet symbolů x ve slově u
2. definujeme $u \sim v \equiv (|u|_a \bmod 3 = |v|_a \bmod 3)$
3. třídy ekvivalence 0, 1, 2
4. L odpovídá třídě 2
5. a - přechody do následující třídy
6. b - přechody zachovávající třídu

28. slide, doplň obrázek

Příklad (Neregulární pumpovatelný jazyk): Ne-regulární jazyk, který lze pumpovat

Jazyk $L = \{u | u = a^+ b^i c^i \vee u = b^i c^j\}$ není regulární (Myhill-Nerodova věta), ale vždy lze pumpovat první písmeno.

1. Předpokládejme, že L je regulární
2. \implies pak \exists pravá kongruence \sim_L konečného indexu m , L je sjednocení některých tříd Σ^* / \sim_L
3. vezmeme množinu slov $S = \{ab, abb, abbb, \dots, ab^{m+1}\}$
4. existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy
 $i \neq j$ $ab^i \sim ab^j$
 přidáme c^i $ab^i c^i \sim ab^j c^i$ \sim je kongruence
 spor $ab^i c^i \in L \& ab^j c^i \notin L$ $s' L$ je sjednocení některých tříd Σ^* / \sim_L .

Definice (Dosažitelný stav): Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a $q \in Q$. Řekneme, že stav je dosažitelný, jestliže $\exists w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, w) = q$.

Příklad: Algoritmus na hledání dosažitelných stavů : DFS (důkaz asi není nutný)

Definice (Automatový homomorfismus): Necht' A_1, A_2 jsou DFA. Řekneme, že zobrazení $h : Q_1 \rightarrow Q_2$ je (automatovým) homomorfismem, jestliže:

$$\begin{array}{ll} h(q_{0_1}) = q_{0_2} & \text{'stejné' počáteční stavy} \\ h(\delta_1(q, x)) = \delta_2(h(q), x) & \text{'stejné' přechodové funkce} \\ q \in F_1 \Leftrightarrow h(q) \in F_2 & \text{'stejné' koncové stavy.} \end{array}$$

Homomorfismus prostý a na nazýváme isomorfismus.

Definice (Ekvivalence automatů): Dva konečné automaty A, B nad stejnou abecedou Σ jsou ekvivalentní, jestliže rozpoznávají stejný jazyk, t. j. $L(A) = L(B)$.

Věta (Věta o ekvivalenci automatů): *Existuje-li homomorfismus konečných automatů A_1 do A_2 , pak jsou A_1 a A_2 ekvivalentní.*

Důkaz:

1. Pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ konečnou iterací

$$h(\delta_1^*(q, w)) = \delta_2^*(h(q), w)$$

2. dále

$$\begin{aligned} w \in L(A_1) &\Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0_1}, w) \in F_1 \\ &\Leftrightarrow h(\delta_1^*(q_{0_1}, w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(h(q_{0_1}, w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(q_{0_2}, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(A_2) \end{aligned}$$

□

Definice (Ekvivalence stavů): Říkáme, že stavy $p, q \in Q$ konečného automatu A jsou ekvivalentní, pokud:

1. Pro všechna vstupní slova $w : \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$.

Pokud dva stavy nejsou ekvivalentní, říkáme že jsou rozlišitelné.

Příklad: Ten example je na slide 36, nejlepší s tím obrázkem

Definice (Algoritmus hledání rozpoznatelných stavů v DFA): Následující algoritmus nalezne rozlišitelné stavy:

1. Základ: Pokud $p \in F$ (přijímající) a $q \notin F$, pak je dvojice $\{p, q\}$ rozlišitelná.
2. Indukce: Necht' $p, q \in Q, a \in \Sigma$ a o dvojici $r, s : r = \delta(p, a), s = \delta(q, a)$ víme, že jsou rozlišitelné. Pak i $\{p, q\}$ jsou rozlišitelné.
3. opakuj dokud \exists nová trojice $p, q \in Q, a \in \Sigma$.

Doplň obrázky zo slidov, 37/38

Věta: Pokud dva stavy nejsou odlišeny předchodícím algoritmem, pak jsou tyto stavy ekvivalentní.

Důkaz: Korektnost algoritmu

1. Uvažujme špatné páry stavů, které jsou rozlišitelné a algoritmus je nerozlišil.
2. Vezměme z nich pár p, q rozlišitelný nejkratším slovem $w = a_1 \dots a_n$.
3. Stavy $r = \delta(p, a_1), s = \delta(q, a_1)$ jsou rozlišitelné kratším slovem $a_2 \dots a_n$, takže pár není mezi špatnými.
4. Tedy jsou „vyškrtnuté“ algoritmem.
5. Tedy v příštím kroku algoritmus rozliší i p, q .

□

Poznámka: Čas výpočtu je polynomiální vzhledem k počtu stavů.

1. V jednom kole uvažujeme všechny páry, t.j. $O(n^2)$.
2. Kol je maximálně $O(n^2)$, protože pokud nepřidáme křížek, končíme.
3. Dohromady $O(n^4)$.

Algoritmus lze zrychlit na $O(n^2)$ pamatováním stavů, které závisí na páru $\{r, s\}$ a sledováním těchto seznamů „zpátky“.

Definice (Redukovaný DFA): Deterministický konečný automat je redukovaný, pokud

1. nemá dosažitelné stavy,
2. žádné dva stavy nejsou ekvivalentní.

Definice (Redukt): Konečný automat B je redukem automatu A, jestliže:

1. B je redukovaný,
2. A a B jsou ekvivalentní

ADD PICS PLS (*don't shout pls*)

Věta (Algoritmus na nalezení reduktu DFA A):

1. Ze vstupního DFA A eliminujeme stavy nedosažitelné z počátečního stavu.
2. Najdeme rozklad zbylých stavů na třídy ekvivalence.
3. Konstruujeme DFA B na třídách ekvivalence jakožto stavech.
Přechodová funkce B γ , mějme $S \in Q_B$. Pro libovolné $q \in S$ označíme T třídu ekvivalence $\delta(q, a)$ a definujeme $\gamma(S, a) = T$. Tato třída musí být stejná pro všechna $q \in S$.
4. Počáteční stav B je třída obsahující počáteční stav A.
5. Množina přijímajících stavů B jsou bloky odpovídající přijímacím stavům A.

3 Třetí přednáška

Definice (Algoritmus na testování ekvivalence regulárních jazyků): Ekvivalenci regulárních jazyků L, M testujeme následovně:

1. Najdeme $DFAA_L, A_M$ rozpoznávající $L(A_L) = L, L(A_M) = M, Q_L \cap Q_M = \emptyset$.
2. Vytvoříme DFA sjednocením stavů a přechodů $(Q_L \cup Q_M, \Sigma, \delta_L \cap \delta_M, q_L, F_L \cap F_M)$; zvolíme jeden z počátečních stavů.
3. Jazyky jsou ekvivalentní právě když počáteční stavy původních DFA jsou ekvivalentní.

[Nedeterministické konečné automaty (NFA)] Nedeterministický automat může být ve více stavech paralelně. Má schopnost 'uhodnout' něco o vstupu.

přidat obrázek zo slidov (61. slide)

Definice (NFA): Nedeterministický konečný automat (NFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny stavů, zpravidla značíme Q ,
2. konečné množiny vstupních symbolů, značíme Σ
3. přechodové funkce, zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ vracející podmnožinu Q .
4. množiny počátečních stavů $S_0 \subseteq Q$,
5. množiny koncových (přijímajících) stavů $F \subseteq Q$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce): Pro přechodovou funkci δ NFA je rozšířená přechodová funkce δ^*

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ definovaná indukcí:

start: $\delta^*(q, \lambda) = q$. ind. indukční krok:

$$\delta^*(q, wx) = \bigcup_{p \in \delta^*(q, w)} \delta(p, x)$$

t. j. množina stavů, do kterých se mohou dostat posloupností 'správně označených'

Definice (Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem): Mějme NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$, Pak

$$L(A) = \{w : (\exists q_0 \in S_0) \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

je jazyk přijímaný automatem A .

Tedy $L(A)$ je množina slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje alespoň jeden přijímající stav.

Algoritmus (Podmnožinová konstrukce): Podmnožinová konstrukce začíná s NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, S_0, F_N)$. Cílem je popis deterministického DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$, pro který $L(N) = L(D)$.

1. Q_D je množina podmnožin $Q_N, Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$ (potenční množina).

Poznámka: Nedosažitelné stavy můžeme vynechat

2. Počáteční stav DFA je stav označený S_0 , t.j. prvek Q_D .
3. $F_D = \{S : S \in \mathcal{P}(Q_N) \& S \cap F_N \neq \emptyset\}$, tedy S obsahuje alespoň jeden přijímající stav N .

4. Pro každé $S \subseteq Q_N$ a každý vstupní symbol $a \in \Sigma$,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a).$$

Věta (Převod NFA na DFA): Pro DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, S_0, F_D)$ vytvořený podmnožinovou konstrukcí z NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ platí $L(N) = L(D)$.

Důkaz: Indukcí dokážeme, že $\delta_D^*(S_0, w) = \delta_N^*(q_0, w)$. □

Můžeme přidat ještě tzv. λ -přechod.

Definice (λ -přechod): Dovolíme přechody na λ , prázdné slovo, t.j. bez přečtení vstupního symbolu.
doplnit obrázok, 68. slide

Definice (λ -uzávěr): Pro $q \in Q$ definujeme λ -uzávěr $\lambda CLOSE(q)$ rekurzivně:

1. Stav q je $\lambda CLOSE(q)$.
2. Je-li $p \in \lambda CLOSE(q)$ a $r \in \delta(p, \lambda)$, pak i $r \in \lambda CLOSE(q)$.

Pro $S \subseteq Q$ definujeme $\lambda CLOSE(S) = \bigcup_{q \in S} \lambda CLOSE(q)$.

Definice (Rozšířená přechodová funkce a jazyk přijímaný λ -NFA): Nechť $E = (Q, \Sigma, \delta, S_0, F)$ je λ -NFA. Rozšířenou přechodovou funkci δ^* definujeme následovně:

1. $\delta^*(q, \lambda) = \lambda CLOSE(q)$.
2. indukční krok: $v = wa$, kde $w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$.

$$\delta^*(q, wa) = \lambda CLOSE \left(\bigcup_{p \in \delta^*(q, w)} \delta(p, a) \right)$$

Věta (Eliminace λ -přechodů): Jazyk L je rozpoznatelný λ -NFA právě když je L regulární.

Důkaz: Pro libovolný λ NFA $E = (Q_E, \Sigma, \delta_E, S_0, F_E)$ zkonstruujeme DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ přijímající stejný jazyk jako E .

1. $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_E), \forall S \subseteq Q_E : \lambda CLOSE(S) \in Q_D$. V Q_D může být i \emptyset .
2. $q_D = \lambda CLOSE(S_0)$.
3. $F_D = \{S : S \in Q_D \& S \cap F_E \neq \emptyset\}$.
4. Pro $S \in Q_D, a \in \Sigma$ definujeme $\delta_D(S, a) = \lambda CLOSE(\bigcup_{p \in S} \delta(p, a))$.

□

Definice (Množinové operace nad jazyky): Mějme dva jazyky L, M . Definujeme následující operace:

1. binární sjednocení $L \cup M = \{w : w \in L \vee w \in M\}$

Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova začínající a^i nebo tvaru $b^j c^j$.

2. průnik $L \cap M = \{w : w \in L \& w \in M\}$

Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky končící na 'baa'.

3. rozdíl $L - M = \{w : w \in L \& w \notin M\}$
4. doplněk (komplement) $\bar{L} = -L = \{w : w \in L\} = \sigma^* - L$

Poznámka: Příklad: jazyk obsahuje slova nekončící na 'a'.

Věta (de Morganova pravidla): 1. $L \cap M = \overline{\bar{L} \cup \bar{M}}$

$$2. L \cup M = \overline{\bar{L} \cap \bar{M}}$$

$$3. L - M = L \cap \bar{M}$$

Věta (Uzavřenost na množinové operace): *Mějme regulární jazyky L, M . Pak jsou následující jazyky také regulární:*

1. sjednocení $L \cup M$
2. průnik $L \cap M$
3. rozdíl $L - M$
4. doplněk $\bar{L} = \Sigma^* - L$.

Důkaz:

1. Pokud δ není pro některé dvojice q, a definovaná, přidáme nový nepřijímající stav q_n a do něj přechod pro vše dříve nedefinované plus $\forall a \in \Sigma \cup \lambda : \delta(q_n, a) = q_n$.
2. Pak stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajícího deterministického FA $F = Q_A - F_A$.
3. pro rozdíl doplníme funkci δ na totální.
4. Zkonstruuje součinný automat,

$$Q = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta((p_1, p_2), x) = (\delta_1(p_1, x), \delta_2(x)), (q_{01}, q_{02}, F))$$

5. průnik: $F = F_1 \times F_2$
6. sjednocení: $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$
7. rozdíl: $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

□

Definice (Řetězcové operace nad jazyky):

1. zřetězení jazyků ... $L.M = \{uv : u \in L \& v \in M\}$, $L.x = L.x$ a $x.L = x.L$ pro $x \in \Sigma$
2. mocniny jazyka ... $L^0 = \lambda$, $L^{i+1} = L^i.L$
3. pozitivní iterace ... $L^+ = L^1 \cup L^2 \dots \bigcup_{i \geq 1} L^i$
4. obecná iterace ... $L^* = L^0 \cup L^1 \cup \dots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$, tedy $L^* = L^+ \cup \lambda$
5. otočení jazyka ... $L^R = \{u^R : u \in L\}$
6. levý kvocient L podle M ... M
 $L = \{u : uv \in L \& u \in M\}$

7. levá derivace L podle $w \dots \partial_w L = \{w\}$
 L

8. pravý kvocient L podle $M \dots L/M = \{u : uv \in L \& v \in M\}$

9. pravá derivace L podle $w \dots \partial_w^R L = L/\{w\}$.

Věta: Jsou-li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M, L^*, L^+, L^R, M$
 LaL/M .

Věta: Jsou-li L, M regulární jazyky, je regulární i $L.M$.

Důkaz: Vezmeme DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, pak $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tak, že $L = L(A_1)$ a $M = L(A_2)$.

Definujeme Nedeterministický automat $B = (Q \cup q_0, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ kde:

$Q = Q_1 \cup Q_2$ předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenujeme, končíme až po přečtení slova z L_2			
$\delta(q_0, \lambda)$	$= q_1, q_2$	pro $q_1 \in F_1$	$t.j. \lambda \in L(A_1)$
$\delta(q_0, \lambda)$	$= q_1$	pro $q_1 \notin F_1$	$t.j. \lambda \notin L(A_1)$
$\delta(q_0, x)$	$= \emptyset$	pro $x \in \Sigma$	
$\delta(q, x)$	$= \delta_1(q, x)$	pro $q \in Q_1 \& \delta_1(q, x) \notin F_1$	počítáme v A_1
	$= \delta_1(q, x), q_2$	pro $q \in Q_1 \& \delta_1(q, x) \in F_1$	nedet. přechod z A_1
	$= \delta_2(q, x)$	pro $q \in Q_2$	počítáme v A_2

Pak $L(B) = L(A_1).L(A_2)$.

I have zero idea how this should be formatted properly, pls fix later. - 3O11

□

4 Čtvrtá přednáška

Věta (Lemma(L^*, L^+)): Je-li L regulární jazyk, je regulární i L^*, L^+ .

1. Idea: Opakovaný výpočet automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
2. Realizace: nedeterministické rozhodnutí, zda pokračovat nebo restart
3. speciální stav pro příjem $\lambda \in L^0$ (pro L^+ vynecháme či $\notin F$).

Důkaz: Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tak, že $L = L(A)$. Definujeme NFA automat $B = (Q \cup q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F \cup q_B)$, kde:

$\delta_B(q_B, \lambda) = q_0$ nový stav q_B pro příjem λ přejdeme do q_0

$\delta_B(q_B, x) = \emptyset$ pro $x \in \Sigma$

$\delta_B(q, x) = \delta(q, x)$ pokud $q \in Q \& \delta(q, x) \notin F$ uvnitř A

$= \delta(q, x), q_0$ pokud $q \in Q \& \delta(q, x) \in F$ možný restart

Pak $L(B) = L(A)^*(q_B \in F_B), L(B) = L(A^+)(q_B \notin F_B)$.

□

Věta (Lemma(L^R)): Je-li L regulární jazyk, je regulární i L^R .

1. Zřejmě $(L^R)^R = L$ a tedy stačí ukázat jeden směr.
2. idea: obrátíme šipky ve stavovém diagramu; nedeterministický FA

Důkaz: TO DOOT, 67. slide

□

Věta (Lemma ($M \setminus LaL/M$)): Jsou-li L, M regulární jazyky, je regulární i $M \setminus L$ a M/L .

1. idea: A_L budeme startovat ve stavech, do kterých se lze dostat slovem M .

Důkaz:

1. $v \in M \setminus L$
2. $\Leftrightarrow (\exists u \in M) uv \in L$
3. $\Leftrightarrow (\exists u \in M, \exists q \in Q) \delta(q_0, u) \& \delta(q, v) \in F$
4. $\Leftrightarrow \exists q \in S_0 \& \delta(q, v) \in F$
5. $\Leftrightarrow v \in L(B)$

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tak, že $L = L(A)$.

TO DOOT, nestihol som

□

Definice (Regulární výrazy): Regulární výrazy (RV) jsou:

1. algebraický popis jazyků
2. deklarativním způsobem, jak vyjádřit slova, která chceme přijímat.
3. Schopné definovat všechny a pouze regulární jazyky.
4. Můžeme je brát jako programovací jazyk, uživatelsky přívětivý popis konečného automatu
5. Syntaktická analýza potřebuje silnější nástroj, bezkontextové gramatiky, budou následovat

Regulární výrazy $\alpha, \beta \in \text{RegE}(\Sigma)$ nad konečnou neprázdnou abecedou $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a jejich hodnota $L(\alpha)$ jsou definovány induktivně:

TO DOOT, je tam tabuľka na ktorú pri tejto rýchlosti nemám čas prepísať správne, slide 70.

Definice (Priorita): Nejvyšší prioritu má iterace $*$, nižší konkatenace (zřetězení), nejnižší sjednocení $+$.

Věta (Kleeneho věta (varianta)): Každý jazyk reprezentovaný konečným automatem lze zapsat jako regulární výraz.

Každý jazyk popsany regulárním výrazem můžeme zapsat jako λ -NFA (a tedy i DFA).

Důkaz: Převod RegE výrazu na λ -NFA automat.

Důkaz indukcí dle struktury R. Základ:

V každém kroku zkonstruujeme λ -NFA rozpoznávající stejný jazyk $L(R) = L(E)$ se třemi dalšími vlastnostmi:

1. Právě jeden přijímající stav,
2. Žádné hrany do počátečního stavu,
3. Žádné hrany z koncového stavu.

Asi je nutné doplniť obrázok, keďže aj na prednáške to bolo popísané obrázkom (slide 72)

□

Definice (Regulární výraz z DFA): Mějme DFA $AQ_A = \{1, \dots, n\}$ o n stavech.

Nechť $R^{(k)}_{ij}$ je regulární výraz, $L(R^{(k)}_{ij}) = \{w : \delta_{\leq k}^*(i, w) = j\}$ množina slov převádějících stav i do stavu j a A cestou, která neobsahuje stav s vyšším indexem než k .

Budeme rekurzivně konstruovat $R^{(k)}_{ij}$ pro $k = 0, \dots, n$.

$k = 0, i \neq j : R^{(0)}_{ij} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \dots + \mathbf{a_m}$, kde a_1, \dots, a_m jsou symboly označující hrany i do j (nebo $R^{(0)}_{ij} = \emptyset$ nebo $R^{(0)}_{ij} = \mathbf{a}$ pro $m = 0, 1$).

$k = 0, i = j : \text{smýčky}, R^{(0)}_{ij} = \lambda + \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \dots + \mathbf{a_m}$, kde a_1, a_2, \dots, a_m jsou symboly na smyčkách v i .

Důkaz: TODOOT, celý slide je závislý na obrázku ... 75slide □

Poznámka (Shrnutí převodu mezi reprezentacemi regulárních jazyků): **TODOO, takisto obrázok**
Převod NFA na DFA

1. λ uzávěr v $O(n^3)$ - prohledává n stavů násobeno n^2 hran pro λ přechody.
2. Podmnožinová konstrukce, DFA s až 2^n stavy. Pro každý stav, $O(n^3)$ času na výpočet přechodové funkce.

Převod DFA na NFA

1. Přidat množinové závorky k přechodové funkci a přechody pro λ u λ -NFA.

Převod automatu DFA na RegE regulární výraz

1. $O(n^3 4^n)$

RegE výraz na automat

1. V čase $O(n)$ vytvoříme λ -NFA.

Definice (Substituce jazyků): Mějme konečnou abecedu Σ . Pro každé $x \in \Sigma$ budiž $\sigma(x)$ jazyk v nějaké abecedě Y_X . Dále položíme:

1. $\sigma(\lambda) = \lambda$
2. $\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$

Zobrazení $\sigma : \Sigma \rightarrow P(Y^*)$, kde $Y = \bigcup_{x \in \Sigma} Y_X$ se nazývá substituce.

$\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$

nevypouštějící substituce je substituce, kde žádné $\sigma(x)$ neobsahuje λ .

Definice (Homomorfismus (jazyků), inverzní homomorfismus): homomorfismus h je speciální případ substituce, kde obraz je vždy jen jednoslovný jazyk (vynecháváme u něj závorky), t.j. $(\forall x \in \Sigma) h(x) = w_x$.

Pokud $\forall x : w_x \neq \lambda$, jde o nevypouštějící homomorfismus.

Inverzní homomorfismus $h^{-1}(L) = \{w : h(w) \in L\}$.

Věta (Uzavřenost na homomorfismus): *Je-li jazyk L $\forall x \in \Sigma$ jazyk $\sigma(x), h(x)$ regulární, pak je regulární i $\sigma(L), h(L)$.*

Důkaz: Strukturální indukci „probubláváním“ algebraickým popisem jazyka o základních, sjednocení, zřetězení a iterace. Tvrzení: $\sigma(L(E)) = L(\sigma(E))$. $\sigma(\lambda) = \lambda$, $\sigma(\emptyset) = \emptyset$, $\sigma(x) = \sigma(x)$, $\sigma(L(\alpha + \beta)) = L(\sigma(\alpha) + \sigma(\beta))$ atd.

TODOOT, 84 slide □

Definice (Inverzní homomorfismus): Necht h je homomorfismus abecedy Σ do slov nad abecedou T . Pak $h^{-1}(L)$, 'h inverze L' je množina řetězců

$$h^{-1}(L) = \{w : w \in \Sigma^*; h(w) \in L\}.$$

Věta: *Je-li h homomorfismus abecedy Σ do abecedy T a L je regulární jazyk abecedy T , pak $h^{-1}(L)$ je také regulární jazyk.*

Důkaz: Mějme DFA $A = (Q, T, \delta, q_0, F)$ pro L .

Konstruujeme DFA pro $h^{-1}(L)$.

1. Definujeme $B(Q, \Sigma, \gamma, q_0, F)$ kde $\gamma(qq, a) = \delta^*(q, h(a))$ (δ^* operace na řetězcích).
2. Indukcí dle $|w|$, $\gamma^*(q_0, w) = \delta^*(q_0, h(w))$.
3. Proto B přijíma právě řetězce $w \in h^{-1}(L)$.

□

5 Pátá přednáška

Příklad: Necht' $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Definujeme jazyk $L = \{w \in \Sigma^*; \delta^*(q_0, w) \in F\}$ a pro každý stav $q \in Q$ existuje prefix x_q slova w tak, že $\delta^*(q_0, x_q) = q$.

Tento jazyk L je regulární.

1. M označme $M = L(A)$.
2. T definujeme novou abecedu T trojic $\{[pq]; p, q \in Q, a \in \Sigma, \delta(p, a) = q\}$.
3. h definujeme homomorfizmus $(\forall p, q, a)h([pq]) = a$.
4. L_1 Jazyk $L = h^{-1}(M)$ je regulární, protože M je regulární (DFA inverzní homomorfizmus).
5. $h^{-1}(101)$ obsahuje $2^3 = 8$ řetězců, např.

$$[p1p][q0q][p1p] \in [p1p], [q1q][p0q], [q0q][p1p], [q1q].$$

L_2 Vynutíme začátek q_0 . Definujeme:

$$E_1 = \bigcup_{a \in \Sigma, q \in Q} [q_0 a q] =$$

$$E_1 = [q_0 a_1 q_0], [q_0 a_2 q_1], \dots, [q_0 a_m q_n]$$

Pak $L_2 = L_1 \cap L(E_1, T^*)$.

L_3 Vynutíme stejné sousedící stavy. Definujeme ne-odpovídající dvojice:

$$E_2 = \bigcup_{q \neq r, p, q, r, s \in Q, a, b \in \Sigma} [paq][rbs].$$

Definujeme $L_3 = L_2 - L(T^*.E_2.T^*)$.

Končí v přijímajícím stavu, protože jsme začali v jazyku M přijímaném DFA A .

L_4 Všechny stavy. $\forall q \in Q$ definujeme E_q jako regulární výraz sjednocení všech symbolů T takových, že q není ani na první, ani na poslední pozici. Odečteme $L(E_q^*)$ od L_3 . $L_4 = L_3 - \bigcup_{q \in Q} E_q^*$.

L Odstráníme stavy, necháme symboly. $L = h(L_4)$, tedy L je regulární.

Věta: Lze algoritmicky rozhodnout, zda jazyk přijímaný DFA, NFA, λ – NFA je prázdný.

Jazyk je prázdný právě když žádný z koncových stavů není dosažitelný. Dosažitelnost lze testovat $O(n^2)$.

Věta: Pro daný řetězec $w : |w| = n$ a regulární jazyk L lze algoritmicky rozhodnout, zda je $w \in L$.

Důkaz:

1. DFA: Spust' automat, pokud $|w| = n$, při dobré reprezentaci a konstantním čase přechodu $O(n)$.
2. NFA o s stavech: čas $O(ns^2)$. Každý vstupní symbol aplikujeme na všechny
3. DOPLNIT, NESTIHAM

□

Definice (Algebraický popis jazyků): Pro konečnou neprázdnou abecedu Σ označme $RJ(\Sigma)$ nejmenší třídu jazyků, která:

1. obsahuje prázdný jazyk \emptyset ,

2. pro každé ...

3. NESTIHAM

Věta (Kleene): *NESTIHAM* Aight, please fill this in later.

Dvousměrné (dvoucestné) konečné automaty
Konečný automat provádí následující činnosti:

1. přečte písmeno
2. změní stav vnitřní jednotky
3. posune čtecí hlavu doprava

Čtecí hlava se nesmí vracet.

Definice (Dvousměrný konečný automat): Dvousměrným (dvoucestným) konečným automatem nazýváme pětici $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

1. Q je konečná množina stavů,
2. Σ je konečná množina vstupních symbolů přechodové funkce δ je zobrazení $Q \times \Sigma \rightarrow Q \times -1, 1$ rozšířené o pohyb hlavy
3. $q_0 \in Q$ počáteční stav,
4. množina přijímajících stavů $F \subseteq Q$.

Poznámka: Je deterministický, nedeterministický zavádět nebudeme.

Poznámka: Nulový pohyb hlavy lze, jen trochu zkomplikuje důkaz dále.

Definice: Slovo w je přijato dvousměrným konečným automatem, pokud:

1. výpočet začal na prvním písmenu slova w vlevo v počátečním stavu,
2. čtecí hlava poprvé opustila slovo w vpravo v některém přijímajícím stavu,
3. mimo čtené slovo není výpočet definován (výpočet zde končí a slovo není přijato).

Poznámka: 1. Ke slovům si můžeme přidat speciální koncové znaky $\# \notin \Sigma$

2. funkce $\partial_{\#}$ odstraní $\#$ zleva, $\partial_{\#}^R$ zprava.
3. Je-li $L(A) = \#w\# | w \in L \subseteq \Sigma^*$ regulární, potom i L je regulární
4. $L = \partial_{\#} \dots$ **DOPLNIT**

Věta: Jazyky přijímané dvousměrným konečným automatem jsou právě regulární jazyky.

Důkaz: konečný automat \rightarrow dvousměrný automat
NESTIHOL SOM

□

Věta: Algoritmus: Funkce f_u popisující výpočet 2DFA nad slovem u

Definujeme funkci $f_u : Q \cup q_0^{\downarrow} \rightarrow Q \cup 0$

1. $f_u(q_0^{\downarrow})$ popisuje v jakém stavu poprvé odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vlevo v počátečním stavu q_0 ,

2. $f_u(p) : p \in Q$ v jakém stavu opět odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vpravo v p ,
3. symbol 0 značí, že daná situace nenastane (odejdeme vlevo nebo cyklus)
4. Definujeme ekvivalenci slov následovně: $u \sim w \Leftrightarrow_d ef f_u = f_w$

Poznámka: t.j. slova jsou ekvivalentní, pokud mají stejné 'výpočtové' funkce

Regulárnost 2DFA

NESTIHOL SOM

Důkaz:

1. Potřebujeme převést návraty na lineární výpočet
2. Zajímají nás jen přijímající výpočty
3. Díváme se na řezy mezi symboly (v jakém stavu přechází na další políčko)

Pozorování:

1. stavy se v přechodu řezu střídají (doprava, doleva)
2. první stav jde doprava, poslední také doprava
3. v deterministických přijímajících výpočtech nejsou cykly
4. první a poslední řez obsahují jediný stav

Formální převod 2DFA na NFA

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvousměrný (deterministický) konečný automat. Definujeme ekvivalentní nedeterministický automat $B = (Q^l, \Sigma, \delta^l, (q_0), F^l)$, kde:

1. Q^l jsou všechny korektní přechodové posloupnosti
 - (a) posloupnosti stavů $(q^1, \dots, q^k) : q^i \in Q$
 - (b) délka posloupnosti je lichá ($k = 2m + 1$)
 - (c) žádný stav se neopakuje na liché ani sudé pozici ($\forall i \neq j)(q^{2i} \neq q^{2j}) \& (\forall i \neq j)(q^{2i+1} \neq q^{2j+1})$)
2. $F^l = (q) | q \in F$ posloupnosti délky 1
3. $\delta^l(c, a) = \{d | d \in Q^l \& c \xrightarrow{a} d \text{ je lokálně konzistentní přechod pro } a \}$
 - (a) existuje bijekce : $h : c_{odd} \cup d_{even} \rightarrow c_{even} \cup d_{odd}$, tak, že:
 - (b) pro $h(q) \in c_{even}$ je $(h(q), -1) = \delta(q, a)$
 - (c) pro $h(q) \in d_{odd}$ je $(h(q), +1) = \delta(q, a)$

□

Automaty s výstupem (motivace)

1. Dosud jediná zpráva z automatu: 'Jsme v přijímajícím stavu'.
2. Můžeme z FA získat více informací? Můžeme ... **NESTIHAM**

Definice (Mooreův stroj): **NESTIHOL SOM**

Příklad (Mooreův stroj pro tenis): Mooreův stroj pro počítání tenisového skóre.

1. Vstupní abeceda: ID hráče, který uhrál bod
2. Výstupní abeceda & stavy: skóre (t. j. $Q = Y, \mu(q) = q$)

Doplň obrázok z prednášok (98. slide)

Definice (Mealyho stroj): Mealyho (sekvenčním) strojem nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$, resp. pěťici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M)$, kde

1. Q je konečná neprázdná množina stavů
2. Σ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)
3. Y je konečná neprázdná množina symbolů (výstupní abeceda)
4. **NESTIHAM**

TU BOL TIEZ NEJAKY TEXT ESTE

Příklad (Mealyho stroj): Mealyho stroj - automat, který dělí vstupní slovo v binárním tvaru číslem 8 (celočíslně).

1. Posun o tři bity doprava
2. potřebujeme si pamatovat poslední trojici bitů
3. vlastně tříbitová dynamická paměť

I když nevíme, kde automat startuje, po třech symbolech začne počítat správně.

Věta (Převod Mealyho stroje na Mooreův): *Pro každý Mealyho stroj existuje Mooreův stroj převádějící každé vstupní slovo na stejné výstupní slovo.*

Důkaz: Sestrojíme Mooreův stroj B tak, aby $\forall q, w$ **NESTIHOLO SOM** :) □

6 Šestá přednáška

Definice (Palindromy): Palindrom je řetězec w stejný při čtení zepředu i zezadu, tj. $w = w^R$.

Věta: *Jazyk $L_{pal} = \{w : w = w^R, w \in \Sigma^*\}$ není regulární.*

Důkaz: Sporem. Předpokládejme L_{pal} je regulární, nechť n je konstanta z pumping lemma, uvažujme slovo $w = 0^n 1 0^n$.

Z pumping lemmatu lze rozložit $w = xyz$, y obsahuje jednu nebo více z prvních n nul. Tedy xz má být v L_{pal} ale není, t.j. není regulární. □

6.1 Formální (generativní) gramatiky, bezkontextové gramatiky

Definice: Formální (generativní) gramatika je $G = (V, T, P, S)$ složena z

1. konečné množiny **neterminálů** (variables) V ,
2. neprázdné konečné množiny **terminálních symbolů** (terminálů) T ,
3. **počáteční symbol** $S \in V$,

4. konečné množiny **pravidel (produkcí)** P reprezentující rekurzivní definici jazyka. Každé pravidlo má tvar

$$\beta A_\gamma \rightarrow A \in V, \beta, \gamma, \omega \in (V \cup B)^*$$

t. j. levá strana obsahuje aspoň jeden neterminální symbol.

Definice (Bezkontextová gramatika (CFG)): je $G = (V, T, P, S)$ gramatika, obsahující pouze pravidla tvaru

$$A \rightarrow \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$$

Definice (Chomského hierarchie): **CHOMSKÉHO HIERARCHIE, DOPLNIT, 112/113**

Definice (Derivace \Rightarrow^*): Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$.

1. Říkáme, že α se **přímo přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow_G \omega$ nebo $\alpha \Rightarrow \omega$) jestliže

$$\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta \beta \nu, \omega = \eta \gamma \nu \& (\beta \rightarrow \gamma) \in P$$

2. Říkáme, že α se přepíše na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow^* \omega$) jestliže

$$\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \beta_n = \omega$$

t. j. $\alpha \Rightarrow^* \alpha$.

3. posloupnost β_1, \dots, β_n nazýváme derivací (odvození)

4. pokud $\forall i \neq j : \beta_i \neq \beta_j$, hovoříme o minimálním odvození

Definice (Jazyk generovaný gramatikou G): Jazyk $L(G)$ gramatiky $G = (V, T, P, S)$ je množina terminálních řetězců, pro které existuje derivace ze startovního symbolu

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Jazyk neterminálu $A \in V$ definujeme $L(A) = \{w \in T^* \mid A \Rightarrow_G^* w\}$.

Definice (Gramatika typu 3, pravá lineární): Gramatika G je **pravá lineární, t.j. Typu 3** pokud obsahuje pouze pravidla tvaru

$$A \rightarrow wB, A \rightarrow w, A, B \in V, w \in T^*.$$

Příklad:

1. $P = \{S \rightarrow 0S, 1A \mid \lambda, A \rightarrow 0A \mid 1B, B \rightarrow 0B \mid 1S\}$
2. $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011B \Rightarrow 0110B \Rightarrow 01101S \Rightarrow 01101$

Věta: $L \in RE \Rightarrow L \in \mathcal{L}_3$

Pro každý jazyk rozpínavý konečným automatem existuje gramatika typu 3, která ho generuje.

Důkaz:

1. $L = L(A)$ pro deterministický konečný automat A .
2. definujeme gramatiku $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, kde pravidla P mají tvar

$$p \rightarrow aq \text{ když } \delta(p, a) = q$$

$$p \rightarrow \lambda \text{ když } p \in F$$

3. je $L(A) = L(G)$?

$$(a) \lambda \in L(A) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow (q_0 \rightarrow \lambda) \in P \Leftrightarrow \lambda \in L(G)$$

$$(b) a_1 \dots a_n \in L(A) \Leftrightarrow \exists q_0, \dots, q_n \in Q : \delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}, q_n \in F \Leftrightarrow (q_0 \xRightarrow{a_1} q_1 \xRightarrow{a_2} \dots \xRightarrow{a_n} q_n) \text{ je derivace pro } a_1, \dots, a_n \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n \in L(G)$$

□

Příprava převodu gramatiky typu 3 na forall

1. Opačný směr

- (a) pravidla $A \rightarrow aB$ kódujeme do přechodové funkce
- (b) pravidla $A \rightarrow \lambda$ určují koncové stavy
- (c) pravidla $A \rightarrow a_1, \dots, a_n B, A \rightarrow a_1, \dots, a_n$ s více neterminály rozepíšeme
 - i. zavedeme nové neterminály $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_N$
 - ii. vytvoříme pravidla $A \rightarrow a_1 Y_2, Y_2 \rightarrow a_2 Y_3, \dots, Y_n \rightarrow a_n B$
 - iii. resp. $Z \rightarrow a_1 Z_1, Z_1 \rightarrow a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \rightarrow a_n Z_n, Z_n \rightarrow \lambda$
- (d) pravidla $A \rightarrow B$ obpovídají λ přechodům
 - i. zbavíme se jich tranzitivním uzávěrem
 - ii. nebo musíme tranzitivně uzavřít $S \rightarrow B$ pro hledání $S \rightarrow \lambda$.

Věta: Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \rightarrow aB, A \rightarrow \lambda, A, B \in V, a \in T$.

Důkaz: Pro gramatiku $G = (V, T, S, P)$ definujeme $G^| = (V^|, T, S, P^|)$, kde pro každé pravidlo zavedeme dostatečný počet nových neterminálů $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$ a definujeme

DOPLNIT TABULKU

□

Věta ($\lambda - NFA$ pro gramatiku typu 3 rozpoznávající stejný jazyk): Pro každý jazyk L generovaný gramatikou typu 3 existuje $\lambda - NFA$ rozpoznávající L .

Důkaz:

1. Vezmeme $G = (V, T, P, S)$ obsaující jen pravidla tvaru $A \rightarrow aB, A \rightarrow \lambda, A, B \in V, a \in T$ generující L (předchozí lemma)
2. definujeme nedeterministický $\lambda - NFA$ $A = (V, T, \delta, S, F)$ kde :
 - (a) $F = \{A | (A \rightarrow \lambda) \in P\}$
 - (b) $\delta(A, a) = \{B | (A \rightarrow aB) \in P\}$

3. $L(G) = L(A)$

(a) **DOPLNIT, 121**

□

Definice (Levé (a pravé) lineární gramatiky): Gramatiky typu 3 nazýváme také **pravé lineární** (neterminál je vždy vpravo).

Gramatika G je levá lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \rightarrow Bw, A \rightarrow w, A, B \in V, w \in T^*$.

Věta: Jazyky generované levou lineární gramatikou jsou právě regulární jazyky.

Důkaz: **DOPLNIT, 122**

□

Definice (Lineární gramatika, jazyk): Gramatika je lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \rightarrow uBw$, $A \rightarrow w$, $A, B \in V$, $u, w \in T^*$ (na pravé straně vždy maximálně jeden neterminál).

Lineární jazyky jsou právě jazyky generované lineárními gramatikami.

1. Zřejmě platí: regulární jazyky \subseteq lineární jazyky,
2. Jde o vlastní podmnožinu \subsetneq .

Příklad (Lineární, neregulární jazyk): Jazyk $L = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$ není regulární jazyk, ale je lineární, generovaný gramatikou s pravidly $S \rightarrow 0S1 | 01$.

Definice (Bezkontextová gramatika): Bezkontextová gramatika je gramatika, kde všechna pravidla jsou tvaru $A \rightarrow \omega$, $\omega \in (V \cup T)^*$

CFG pro jednoduché výrazy

1. $E \rightarrow I$
2. $E \rightarrow E + E$
3. $E \rightarrow E * E$
4. $E \rightarrow (E)$
5. $I \rightarrow a$
6. $I \rightarrow b$
7. $I \rightarrow Ia$
8. $I \rightarrow Ib$
9. $I \rightarrow I0$
10. $I \rightarrow I1$

Pravidla 1 až 4 definují výraz.

Pravidla 5 až 10 definují identifikátor I odpovídající regulárnímu výrazu $(a + b)(a + b + 0 + 1)^*$.

Definice (Derivační strom): Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$. Derivační strom pro G je strom, kde

1. Kořen (kreslíme nahoře) je označen startovním symbolem S ,
2. každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem V .
3. Každý uzel je ohodnocen prvkem $\in V \cup T \cup \lambda$.
4. Je-li uzel ohodnocen λ , je jediným dítětem svého rodiče.
5. Je-li A ohodnocení vrcholu a jeho děti *zleva pořadě* jsou ohodnoceny X_1, \dots, X_k , pak $(A \rightarrow X_1, \dots, X_k) \in P$ je pravidlo gramatiky.

Definice (Strom dává slovo (yield)): Říkáme, že derivační strom dává slovo w (yield), jestliže w je slovo složené z ohodnocení listů bráno zleva doprava.

Definice (Levá a pravá derivace): 1. Levá derivace (leftmost) $\Rightarrow_{lm}, \Rightarrow_{lm}^*$ v každém kroku přepisuje nejlevější neterminál.

2. Pravá derivace (rightmost) $\Rightarrow_{rm}, \Rightarrow_{rm}^*$ v každém kroku přepisuje nejpravější neterminál.

Věta: Pro danou gramatiku $G = (V, T, P, S)$ a $w \in T^*$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $A \Rightarrow^* w$.
2. $A \Rightarrow_{lm}^* w$.
3. $A \Rightarrow_{rm}^* w$.
4. Existuje derivační strom s kořenem A dávající slovo w .

Věta: Mějme $CFG G = (V, T, P, S)$ a derivační strom s kořenem A dávající slovo $w \in T^*$. Pak existuje levá derivace $A \Rightarrow_{lm}^* w$ v G .

Tvrzení (Příprava důkazu, „obalení derivace“): Mějme následující derivaci:

$$E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \rightarrow ab.$$

Důkaz: Pro libovolná slova $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ je také derivace:

$$\alpha E \beta \Rightarrow \alpha I \beta \Rightarrow \alpha Ib \beta \Rightarrow \alpha ab \beta.$$

□

Důkaz: \exists derivační strom, pak \exists levá derivace \Rightarrow_{lm}

Indukcí podle výšky stromu:

1. Základ: výška 1: Kořen A s dětmi dávajícími w . Je to derivační strom, proto $A \rightarrow w$ je pravidlo $\in P$, tedy $A \Rightarrow_{lm} w$ v jednom kroku.
2. Indukce: výška $n > 1$. Kořen A s dětmi X_1, X_2, \dots, X_k .
 - (a) Je-li $X_i \in T$, definujeme $w_i \equiv X_i$.
 - (b) Je-li $X_i \in V$, z indukčního předpokladu $X_i \Rightarrow_{lm}^* w_i$.

Levou derivaci konstruujeme induktivně pro $i = 1, \dots, k$ složíme $A \Rightarrow_{lm}^* w_1 w_2 \dots w_i X_{i+1} X_{i+2} \dots X_k$.

- (a) Pro $X_i \in T$ jen zavedeme čítač $i++$.
- (b) Pro $X_i \in V$ prepíšeme derivaci: $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \dots \Rightarrow_{lm} w_i n a$

$$w_1 w_2 \dots w_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2} \dots X_k \Rightarrow_{lm}$$

$$w_1 w_2 \dots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} X_{i+2} \dots X_k \Rightarrow_{lm}$$

$$\Rightarrow_{lm} w_1 w_2 \dots w_{i-1} w_i X_{i+1} X_{i+2} \dots X_k$$

Pro $i = k$ dostaneme levou derivaci $w \in A$.

□

7 Sedmá přednáška

7.1 Zásobníkový automat

Zásobníkové automaty jsou rozšířením λ - NFA nedeterministických konečných automatů s λ přechody.

Přidanou věcí je zásobník. Ze zásobníku můžeme číst, přidávat na vrch a odebírat z vrchu zásobníku znak $\in \Gamma$.

Může si pamatovat neomezené množství informace.

Zásobníkové automaty definují bezkontextové jazyky.

Deterministické zásobníkové automaty přijímají jen vlastní podmnožinu bezkontextových jazyků.

Definice (Zásobníkový automat): (PDA) je $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

1. Q konečná množina stavů,
2. Σ neprázdná konečná množina vstupních symbolů,
3. Γ neprázdná konečná zásobníková abeceda,
4. δ přechodová funkce : $Q \times (\Sigma \cup \lambda) \times \Gamma \rightarrow P_{FIN}(Q \times \Gamma^*)$, $\delta(p, a, X) \ni (q, \gamma)$ kde q je nový stav a γ je řetězec zásobníkových symbolů, který nahradí X na vrcholu zásobníku,
5. $q_0 \in Q$ počáteční stav
6. $Z_0 \in \Gamma$ počáteční zásobníkový symbol. Víc na začátku zásobníku není.
7. F množina přijímajících (koncových) stavů; může být nedefinovaná.

V jednom časovém kroku zásobníkový automat:

1. Přečte na vstupu žádný nebo jeden symbol (λ přechody pro prázdný vstup.)
2. Přejde do nového stavu.
3. Nahradí symbol na vrchu zásobníku libovolným řetězcem (λ odpovídá samotnému *pop*, jinak následuje *push* jednoho nebo více symbolů).

Příklad (Zásobníkový automat pro jazyk: $L_{ww^R} = ww^R : w \in (0 + 1)^*$): PDA přijímající L_{ww^R} :

1. Start q_0 reprezentuje odhad, že ještě nejsme uprostřed.
2. V každém kroku nedeterministicky hádáme:
 - (a) Zůstat q_0 (ještě nejsme uprostřed)
 - (b) Přejít λ přechodem do q_1 (už jsme viděli střed).
3. V q_0 přečte vstupní symbol a dá (push) ho na zásobník
4. V q_1 srovná vstupní symbol s vrcholem zásobníku. Pokud se shodují, přečte vstupní symbol a umaže (pop) vrchol zásobníku
5. Když vyprázdníme zásobník, přijmeme vstup, který jsme doteď přečetli.

Příklad (PDA pro L_{ww^R}): **TO DO, (slide 143, example 7.2)**

Definice (Přechodový diagram pro zásobníkový automat): Přechodový diagram pro zásobníkový automat obsahuje:

1. Uzly, které odpovídají stavům PDA .

2. Šipka 'odnikud' ukazuje počáteční stav, dvojité kruhy označují přijímající stavy.
3. Hrana odpovídá přechodu PDA. Hrana označená $a, X \rightarrow \alpha$ ze stavu p do q znamená $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$
4. Konvence je, že počáteční symbol zásobníku značíme Z_0 .

Definice (Notace zásobníkových automatů):

$a, b, c, *, +, 1, (,)$	symboly vstupní abecedy
p, q, r	stavy
u, v, w, x, y, z	řetězce vstupní abecedy
X, Y, E, I, S	zásobníkové symboly
α, β, γ	řetězce zásobníkových symbolů

Definice (Situace zásobníkového automatu): Situaci zásobníkového automatu reprezentujeme trojicí (q, w, γ) , kde

1. q je stav,
2. w je zbývajících vstup a
3. γ je obsah zásobníku (vrch zásobníku je vlevo).

Situaci značíme zkratkou (ID) z anglického *instantaneous description*.

Definice (\vdash, \vdash^* posloupnosti situací): Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Definujeme \vdash_P nebo \vdash následovně:

1. Nechť $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha), p, q \in Q, a \in (\Sigma \cup \lambda), X \in \Gamma, \alpha \in \Gamma^*$.

$$\forall w \in \Sigma^*, \beta \in \Gamma^* : (p, aw, X\beta) \vdash (q, w, \alpha\beta).$$

2. Symboly \vdash_P^* a \vdash^* používáme na označení nuly a více kroků zásobníkového automatu, t. j.

- (a) $I \vdash^* I$ pro každou situaci I
- (b) $I \vdash^* J$ pokud existuje situace $K : I \vdash K \& K \vdash^* J$.

3. Čteme $I \vdash^* J$ situace I vede na situaci J , $I \vdash J$ situace I bezprostředně vede na situaci J .

Definice (Jazyk přijímaný koncovým stavem, prázdným zásobníkem): Mějme zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Pak $L(P)$ je:

$$L(P) = \{w : (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \alpha) \text{ pro nějaké } q \in F \text{ a libovolný řetězec } \alpha \in \Gamma^*; w \in \Sigma^*\}$$

jazyk akceptovaný prázdným zásobníkem $N(P)$ definujeme:

$$L(P) = \{w : (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \lambda, \lambda) \text{ pro nějaké } q \in Q ; w \in \Sigma^*\}$$

Příklad: Zásobníkový automat z předchozího příkladu akceptuje L_{wwr} koncovým stavem.

Příklad: $P' \equiv P$ z předchozího příkladu, jen změníme instrukci, aby umazala poslední symbol

$$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_2, Z_0) \text{ nahradíme}$$

$$\delta(q_1, \lambda, Z_0) = (q_2, \lambda)$$

$$\text{ nyní } L(P') = N(P') = L_{wwr}.$$

Příklad (If-else přijímané prázdným zásobníkem): **TO DO, 7.5, 149 slide**

Příklad (Přijímání koncovým stavem): TO DO, 7.6, 149 slide

Věta (Nečtený vstup a dno zásobníku P neovlivní výpočet): *Mějme $PDAP = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$. Potom pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ a $\gamma \in \Gamma^*$ platí: $(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (q, yw, \beta\gamma)$. Speciálně pro $\gamma = \lambda$ a/nebo $w = \lambda$.*

Důkaz: Indukcí podle počtu situací mezi $(p, xw, \alpha\gamma)$ a $(q, yw, \beta\gamma)$. Každý krok $(p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta)$ je určen bez w a/nebo γ . Proto je možný i se symboly na konci vstupu / dně zásobníku. \square

Poznámka:

$$\text{Pro } PDAP = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F), (p, xw, \alpha) \vdash_P^* (q, yw, \beta) : (p, x, \alpha) \vdash_P^* (q, y, \beta).$$

Pro zásobník ale obdoba neplatí. PDA může zásobníkové symboly γ použít a zase je tam naskládat (push). $L = 0^i 1^i 0^j 1^j$, situace $(p, 0^{i-j} 1^i 0^j 1^j, 0^j Z_0) \vdash^* (q, 1^j, 0^j Z_0)$, mezitím vyčistíme zásobník k Z_0

Věta (Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku): *Mějme $L = L(P_F)$ pro nějaký PDA.*

$P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$. *Pak existuje $PDAP_N$ takový, že $L = L(P_N)$.*

Důkaz: *Nechť $P_N = (Q \cup p_0, p, \Sigma, \Gamma \cup X_0, \delta_N, p_0, X_0)$, kde:*

1. $\delta_N(p_0, \lambda, X_0) = (q, Z_0 X_0)$ start,
2. $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \lambda, Y \in \Gamma) : \delta_N(q, a, Y) = \delta_F(q, a, Y)$ simulujeme
3. $\forall (q \in F, Y \in \Gamma \cup X_0), \delta_N(q, \lambda, Y) \ni (p, \lambda)$ přijmout pokud P_F přijíma,
4. $\forall (Y \in \Gamma \cup X_0), \delta_N(p, \lambda, Y) = (p, \lambda)$ vyprázdníme zásobník.

Pak $w \in N(P_N) \Leftrightarrow w \in L(P_F)$. \square

Věta (Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu): *Pokud $L = N(P_N)$ pro nějaký PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, pak existuje PDA $P_F : L = L(P_F)$.*

Důkaz:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, p_f)$$

kde δ_F je:

1. $\delta_F(p_0, \lambda, X_0) = (q_0, Z_0 X_0)$ start
2. $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \lambda, Y \in \Gamma), \delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y)$.
3. Navíc, $\delta_F(q, \lambda, X_0) \ni (p_f, \lambda) \forall q \in Q$.

Chceme ukázat, že $w \in L(P_N) \Leftrightarrow w \in L(P_F)$.

1. (if) P_F přijíma následovně: $(p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0 X_0) \vdash_{P_F=N_F}^* (q, \lambda, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \lambda, \lambda)$.
2. (only if) Do p_f nelze dojít jinak než předchozím bodem.

\square

Věta ($L(CFG), L(PDA), N(PDA)$): *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. Jazyk L je bezkontextový, t.j. generovaný CFG,
2. Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem koncovým stavem.
3. Jazyk L je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.

Důkaz: TO DO, doplnit graf z 153 (theorem 7.1) \square

Algoritmus (Konstrukce PDA z CFG): Mějme CFG gramatiku $G = (V, T, P, S)$. Konstruuujeme $PDA P = (q, T, V \cup T, \delta, q, S)$.

1. Pro neterminály $A \in V, \delta(q, \lambda, A) = (q, \beta) : A \rightarrow \beta$ je pravidlo G .
2. Pro každý terminál $a \in T, \delta(q, a, a) = (q, \lambda)$.

Příklad (Konverze gramatiky): **TODO, strana 154, example 7.7**

Věta (Přijímání prázdným zásobníkem ze CFG): Pro $PDA P$ konstruovaný z $CFG G$ algoritmem výše je $N(P) = L(G)$.

Důkaz:

1. Levá derivace: $E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a * E \Rightarrow a * I \Rightarrow a * b$
2. Posloupnost situací: $(q, a * b, E) \vdash (q, a * b, E * E) \vdash (q, a * b, I * E) \vdash (q, a * b, a * E) \vdash (q, *b, *E) \vdash (q, b, E) \vdash (q, b, I) \vdash (q, b, b) \vdash (q, \lambda, \lambda)$.

Pozorování:

1. Kroky derivace simulují PDA přepisy zásobníku
2. odmazávaný vstup u PDA v derivaci zůstává až do konce
3. až PDA vymaže terminály, pokračuje v přepisech.

$$w \in N(P) \Leftarrow w \in L(G)$$

Nechť $w \in L(G)$, w má levou derivaci $S = \gamma_1 \Rightarrow_{Im} \gamma_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \gamma_n = w$.

Indukcí podle i dokážeme $(q, w, S) \vdash_P^* (q, v_i, \alpha_i) : \gamma_i = u_i \alpha_i$ je levá sentenciální forma a $u_i v_i = w$. □

The End