

Pravděpodobnost a Statistika 1

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup, Lukáš Salak

Obsah

1	První přednáška	2
2	Druhá přednáška	5
2.1	Opakování	5
3	Třetí přednáška	8
4	Čtvrtá přednáška	11
5	Pátá přednáška	15
6	Šestá přednáška	17

1 První přednáška

Modely náhody \rightarrow Pravděpodobnost \rightarrow Pozorovaná data \rightarrow Modely náhody

Model náhody např. kostka $1, \dots, 6$,

Pozorovaná data : $1, 5, 4, 3, 3$

otázka na pravděpodobnost: jaká je pravděpodobnost... hodně pozorovaných dat \rightarrow statistika na model náhody.

Příklad (Schwartz-Zippel algoritmus): Máme dány dva polynomy $f(x), g(x)$ stupně d . Chceme zjistit, zda jsou stejné, a to co nejrychleji.

Problém: $g(x)$ je součin několik polynomů stupně $\leq \frac{d}{4}$, dostáváme víc než lineární čas.

Řešení: Algoritmus: zvolíme náhodně $x \in \{1, 2, \dots, 100d\}$, ověříme, zda $f(x_1) = g(x_1)$. Když $f \neq g$, tak x_1 je kořen polynomu $f - g$ takových x_1 je $\leq d$.

$$P(f(x_1) = g(x_1) : f \neq g) \leq \frac{1}{100}$$

Pokud jsme spokojeni s 1%, končíme, když ne, volíme $x_2, x_3, \dots \in \{1, 2, \dots, 100d\}$, pak

$$P(\text{Pro } x_1, x_2, x_3 \dots f(x_i) = g(x_i) : f \neq g) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 10^{-6}$$

... aproximační algoritmy

Některé jevy neumíme/nechceme popsat kauzálně

1. hod kostkou
2. tři hody kostkou, nekonečně mnoho hodů kostkou
3. hod šípkou na terč
4. počet emailů za den
5. dobu běhu programu (v reálném počítači)...

Důvody:

- fyzikální vlastnost přírody
- komplikovaný proces (počasí, medicína, molekuly plynu...)
- neznáme vlivy (působení dalších lidí, programů...)
- randomizované algoritmy (test prvočíselnosti, quicksort)
- náhodné grafy (Ramseyovy čísla)

Pro popis pomocí teorie pravděpodobnosti napřed vybereme množinu elementárních jevů Ω (sample space)

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} = [6] \implies \text{hod kostkou}$$

$$\Omega = [6]^3 \implies \text{hod třemi kostkami}$$

Definice (Prostor jevů): $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ je prostor jevů (též σ -algebra), pokud

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Často $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, to je možné vždy, když je Ω spočetná, např. pro $\Omega = \mathbb{R}$ to již nejde.

Definice (Pravděpodobnost): $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ se nazývá pravděpodobnost (probability), pokud:

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$, a
2. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, pro libovolnou posloupnost po dvou *disjunktních* jevů **TODOOT**

Šance (odds) jevu A je $O(A) = \frac{P(A)}{P(A^c)}$. Např. šance na výhru je 1 ku 2 znamená, že pravděpodobnost výhry je $\frac{1}{3}$; šance, že na kostce padne šestka je 1 ku 5.

Konvence:

- „ A je jistý jev“ znamená $P(A) = 1$. Také se říká, že A nastává skoro jistě (almost surely), zkráceně s.j. (a.s.).
- „ A je nemožný jev“ znamená $P(A) = 0$.

$$P(A) = 0 \Rightarrow^? A = \emptyset$$

\leftarrow axiom

\rightarrow platí často, ne vždy

- Např. $A = \text{střed kruhu (házení šipek na terč)} \implies P(A) = 0$ B spočetná (konečná, velká jako \mathbb{N}) množina:

$$P(B) = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

B_i je i -tý bod, $B = \bigcup B_i$

Věta (Vlastnosti pravděpodobnostního prostoru): V pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) platí pro $A, B \in \mathcal{F}$:

1. $P(A) + P(A^c) = 1$
2. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_i P(A_i)$ (subaditiva, Booleova nerovnost) (nevyžadujeme disjunktnost, pak by platila rovnost)

Důkaz:

1. $\Omega = A \cup A^c$; A, A^c disj.,
 $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$
2. $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$
3. cvičení **TODOOT**

4. trik zdisjunktnění: z $A_1, A_2 \dots$ uděláme disjunktní množiny

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_1 \cup A_2 \dots$$

$$B_i \subseteq A_i \implies P(B_i) \leq P(A_i)$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset : j < i \dots B_i \cap B_j \subseteq B_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\subseteq \text{ok}$$

opačná inkluze **TODOOT**

$$P\left(\bigcup A_i\right) = P\left(\bigcup B_i\right) = \sum P(B_i) \leq \sum P(A_i).$$

□

Příklad (Pravděpodobnostní prostory):

1. Konečný s uniformní pravděpodobností

Ω je libovolná konečná množina, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

2. Diskrétní

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots\}$ je libovolná spočetná množina. Jsou dány $p_1, p_2 \dots \in [0, 1]$ se součtem 1.

$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$ (cinknutá loterie, nějaké možnosti mají jiné procenta)

3. Spojitý

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ pro vhodné d (Ω např. uzavřená nebo otevřená)

\mathcal{F} vhodná (obsahuje např. všechny otevřené množiny)

$f: \Omega \rightarrow [0, 1]$ je funkce taková, že $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$.

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

Speciální případ: $f(x) = 1/V_d(\Omega)$

$P(A) = \frac{V_d(A)}{V_d(\Omega)}$, kde $V_d(A) = \int_A 1$ je d -rozměrný objem A .

4. Bernoulliho krychle - nekonečné opakování

$\Omega = S^{\mathbb{N}}$, kde S je diskrétní s pravděpodobností Q ,

\mathcal{F} vhodná (obsahuje např. všechny množiny tvaru

$$A = A_1 \times \dots \times A_k \times S \times S \times \dots)$$

$$P(A) = Q(A_1) \dots Q(A_k)$$

Příklad (Nepříklady):

1. Náhodné přirozené číslo: můžeme si vybrat mnoha způsoby, Ale všechna přirozená čísla nemají stejnou pravděpodobnost.

není možné, aby měly všechny stejnou nenulovou pravděpodobnost, protože pokud $P(0) = P(1) = P(2) \dots = P$ tak $P(\mathbb{N}) = p + p + p \dots = \infty$.

2. Náhodné reálné číslo

3. Betranův paradox

Definice (Podmíněná pravděpodobnost): Pokud $A, B \in \mathcal{F}$ a $P(B) > 0$, pak definujeme podmíněnou pravděpodobnost A při B (probability of A given B) jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$Q(A) := P(A|B)$. Pak (Ω, \mathcal{F}, Q) je pravděpodobnostní prostor.

Definice (Zřetězené podmínování): $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

Věta: Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots \text{TODOOT}$$

2 Druhá přednáška

2.1 Opakování

1. definice pravděpodobnostního prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) : dva axiomy,
2. **naivní** pravděpodobnostní prostor: Ω konečná, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
 $P(A) := |A|/|\Omega|$
3. **diskrétní** pravděpodobnostní prostor: $\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots$,
 $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \sum_i p_i = 1$
 $P(A) := \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$
4. **geometrický** pravděpodobnostní prostor:
 $\omega \subseteq \mathbb{R}^d$ s konečným objemem,
 $P(A) := V_d(A)/V_d(\Omega)$
5. pravděpodobnostní prostor **spojitý s hustotou**:
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ s funkcí f , kde $\int_{\Omega} f = 1$,
 $P(A) := \int_A f$

V pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) platí pro $A, B \in \mathcal{F}$

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$... ($A^c = \Omega \setminus A$)
2. $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$... PIE
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq \sum_i P(A_i)$ (subaditivita, Booleova nerovnost)
5. Definujeme podmíněnou pravděpodobnost (pro $P(B) > 0$).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

6. $Q(A) = P(A|B)$ splňuje axiomy pro pravděpodobnost.

$$P(\emptyset|B) = 0$$

$$P(\Omega|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(A_1 \circ A_2|B) = \frac{P((A_1 \circ A_2) \cup B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B) + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)}} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

Definice (Zřetězené podmínování):

$$P(A \cup B) = P(B)P(A|B)$$

Věta: Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Důkaz: indukcí □

Příklad: Příklad: vytáhneme 3 karty z balíčku 52 karet. Jaká je $P(\text{žádné srdce})$?

A_i = i-tá karta není srdce

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) = \frac{13 * 3}{52} \times \frac{13 * 3 - 1}{51} \times \frac{13 * 3 - 2}{50}$$

$$\frac{\# \text{dobrých}}{\# \text{všech}} = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}}$$

Definice: Spočetný systém množin $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ je rozklad (partition) Ω , Pokud

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a
2. $\bigcup_i B_i = \Omega$.

Věta: Věta o úplné pravdě. = Rozbor všech možností

Pokud B_1, B_2, \dots je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$$

(sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$$

(sjednocení disjunktních množin)

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$$

Příklad: Máme tři mince: P+O, P+P, O+O. Jaká je pravděpodobnost, že padne orel?

Označíme M_1, M_2, M_3 pro P+O, P+P, O+O.

$$\begin{aligned} P(O) &= P(M_1)P(O|M_1) + P(M_2)P(O|M_2) + P(M_3)P(O|M_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rychlejší je vypsát si strom a pak počítat výsledné jevy

Příklad (Gambler's ruin - zbankrotování hazardního hráče.): Máme a korun, náš protivráč b korun. Hrajeme opakovaně spravedlivou hru o 1 Kč, dokud někdo nepřijde o všechny peníze. Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje?

Důkaz:

$$\begin{aligned}
P_a &= P(\text{z této pozice vyhrájeme}) \\
P_0 &= 0, P_n = 1 \dots (a + b = n) \\
P(\text{výhra} | 1. \text{ kolo výhra}) &P(1. \text{ kolo výhra}) \\
+ P(\text{výhra} | 1. \text{ kolo prohra}) &P(1. \text{ kolo prohra}) \\
\text{výhra} &\implies P_{a+1}, \text{ prohra} \implies P_{a-1} \\
P_a &= \frac{P_{a+1}}{2} + \frac{P_{a-1}}{2} \\
\text{ekvivalencia} &\iff \text{pls} \\
P_a - P_{a-1} &= P_{a+1} - P_a = \Delta \\
1 = P_n = P_0 + n * \Delta &\implies \Delta = \frac{1}{n} \\
P_a &= \frac{a}{a+b} = \frac{a}{n}
\end{aligned}$$

□

Věta (Bayesova Věta): *Pokud B_1, B_2, \dots je rozklad Ω , $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$ a $P(B_j) > 0$, tak*

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i)P(A|B_i)}.$$

*(sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).***Důkaz:**

$$\begin{aligned}
P(B_j|A)P(A) &= P(B_j)P(A|B_j) \\
P(A \cap B_j) &= P(B_j \cap A)
\end{aligned}$$

□

Příklad: N = nemocný, T = testovaný, specif. $P(N|T)$, sens. $P(T|N)$.

$$P(N|T) = \frac{P(N)P(T|N)}{P(N)P(T|N) + P(N^c)P(T|N^c)} = \frac{p * 0.8}{p * 0.8 + (1-p) * 0.01}$$

$$p = 0.001 \dots 7\%$$

$$p = 0.0016 \dots 56\% \dots \text{momentální stav testování}$$

$$p = 0.05 \dots 80\%$$

Definice: Jevy $A, B \in \mathcal{F}$ jsou nezávislé (independenent) pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Pak také platí $P(A|B) = P(A)$, pokud $P(B) > 0$.**Definice:** Jevy $\{A_i : i \in I\}$ jsou (vzájemně) nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J , nazýváme jevy $\{A_i\}$ po dvou nezávislé (pairwise independenent).

Definice: Necht' pro množiny z prostoru jevů platí

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

a $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Pak platí

$$P(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i).$$

Důkaz:

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_3 \setminus A_2) + \dots$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (P(A_1) + \dots + P(A_i \setminus A_{i-1})) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i).$$

□

$A_n \subset P, O^{\mathbb{N}}, A_n =$ mezi prvními n hody padl aspoň jednou orel.

$$P(A) = P(\geq 1 \text{ orel v } \infty \text{ hodech}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dots = 1$$

Definice (Náhodná veličina): Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) . Funkci $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme diskrétní náhodná veličina, pokud $I_m(X)$ je spočetná množina a pokud pro všechna reálna x platí

$$\{x \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}.$$

Definice: Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny X je funkce $p_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ taková, že

$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{x \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

Definice: $\sum_{x \in I_m(X)} p_X(x) = 1$

Definice: $S := I_m(X)1, Q(A) := \sum_{x \in A} p_X(x)$
 $(S, \mathcal{P}(S), Q)$ je diskrétní pravděpodobnostní prostor.

Definice: Pro $S = \{s_i : i \in I\}$ spočetnou množinu reálných čísel a $c_i \in [0, 1]$ $\sum_{i \in I} c_i = 1$ existuje pravděpodobnostní prostor a diskrétní n.v. X na něm taková, že $p_X(s_i) = c_i$ pro $i \in I$.

3 Třetí přednáška

Definice (Distribuční funkce): Distribuční funkce (cumulative distribution function, CDF) n.v. X je funkce

$$F_X(x) := P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

1. F_X je neklesající funkce
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
4. F_X je zprava spojitá

Příklad: $X = \{0 \text{ s pravděpodobností } \frac{1}{2}, 1 \text{ s pravděpodobností } \frac{1}{2}\}$

Důkaz: F_X je neklesající funkce

$$x < y \implies P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$$

protože $A = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$,

$B = \{\omega : X(\omega) \leq y\}$, pak

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

□

Důkaz: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

$$A_n = X \leq n; \text{ platí } A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$$

Takže $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, podle věty o spojitosti pak

$$P(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(n)$$

□

druhá limita obdobně

Definice (Bernoulliho/alternativní rozdělení):

1. X = počet orlů při jednom hodu nespravedlivou mincí.

2. Značíme $X \sim \text{Bern}(p)$. Někdy se značí $\text{Alt}(p)$.

1. Dáno $p \in [0, 1]$.

2. $p_X(1) = p$

3. $p_X(0) = 1 - p$

4. $p_X(k) = 0$ pro $k \neq 0, 1$

1. Pro libovolný jev $A \in \mathcal{F}$ definujeme *indikátorovou* n.v. I_A :

2. $I_A(\omega) = 1$ pokud $\omega \in A$, $I_A(\omega) = 0$ jinak.

3. $I_A \sim \text{Bern}(P(A))$.

Definice:

1. X = počet orlů při n hodech nespravedlivou mincí.

2. Dáno $p \in [0, 1]$ – pravděpodobnost orla při jednom hodu.

3. Značíme $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

1. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ pro nezávislé n.v. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(p)$.

2. $p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pro $k \in 0, 1, \dots, n$.

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

$$(p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Definice (Hypergeometrické rozdělení):

1. X = počet vytažených červených míček při n tazích, v osudí je K červených z N celkových míček

2. Dáno n, N, K .

3. Značíme $X \sim \text{Hyper}(N, K, n)$.

4. $p_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Definice (Poissonovo rozdělení (poasón)):

1. Značíme $X \sim Pois(\lambda)$.
2. Dáno reálné $\lambda > 0$.
3. $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
4. $Pois(\lambda)$ je limitou $Bin(n, \lambda/n) \dots \sim X_n \dots \lambda$ pevné
5. X popisuje např. počet emailů, které dostaneme za jednu hodinu.

chceme $\sum \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\ P(X_n = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Poznámka (Poissonovo paradigma): A_1, \dots, A_n jsou (skoro-)nezávislé jevy s $P(A_i) = p_i$, $\lambda = \sum_j p_j$.
Nechť n je velké, každé p_i malé. Pak přibližně platí

$$\sum_{i=1}^n I_{A_i} \sim Pois(\lambda)$$

Definice (Geometrické rozdělení):

1. X = kolikátým hodem mincí padl první orel.
2. Značíme $X \sim Geom(p)$.
3. Dáno $p \in [0, 1]$.
4. $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$, pro $k = 1, 2, \dots$
5. Někdy se tomuto rozdělení říká posunuté geometrické, a za normální geometrické se považuje rozdělení $X - 1$, t.j. počet neúspěšných hodů.

Důkaz: chceme $\sum (1-p)^{k-1}p = 1$

$$= \frac{(1-p)^0 p}{1 - (1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

□

Definice (Střední hodnota): Pokud X je diskrétní n.v., tak její střední hodnota (expectation) je označovaná $\mathbb{E}(X)$ a definovaná

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(X)} x \times P(X = x),$$

pokud součet má smysl.

Nechť X je definovaná na diskrétním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Pak střední hodnotu lze také definovat

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega).$$

... vážený průměr **Důkaz:** dk., že obě definice souhlasí.

$$\sum_{x \in \text{Im}(X)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} (x \times P(\omega \in \Omega : X(\omega) = x))$$

□

Definice (Rozptyl): Rozptyl(variace) n.v. X nazveme číslo $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$.
Značíme jej $\text{var}(X)$

Věta:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Definice (LOTUS (Law of The Unconscious Statisticist)): Pro reálnou funkci g a diskrtétní n.v. X je $Y = g(X)$ také diskrétní n.v.

Věta (LOTUS): Pokud X je diskrétní n.v. a g reálná funkce, tak

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x)P(X = x)$$

pokud součet má smysl.

Důkaz:

$$Y = g(X)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \sum_{y \in Y} y \times P(Y = y) \dots \text{definice} \\ &= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x)P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x)P(X = x) \end{aligned}$$

□

4 Čtvrtá přednáška

Věta: Nechť X, Y jsou diskrétní n.v. a $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Pokud $P(X \geq 0) = 1$ a $\mathbb{E}(X) = 0$, tak $P(X = 0) = 1$.
2. Pokud $\mathbb{E}(X) \geq 0$ tak $P(X \geq 0) > 0$.
3. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
4. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Důkaz: 1.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X} xP(X = x) = 0P(X = 0) + \sum_{x > 0 \& x \in X} xP(X = x) = \sum_{x < 0 \& x \in X} xP(X = x) = 0$$

$$\implies \forall x > 0 : P(x = x) = 0 \implies P(X = 0) = 1$$

2.

$$\mathbb{E}(X) = \sum xP(X \geq x) = 0$$

kdyby ne: $P(x \geq 0) = 0$, všechny členy v sumě by byly záporné...spor

3.

$$\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{x \in X} (ax + b)P(X = x) = a \sum xP(X = x) + b \sum P(X = x)$$

4.

$$\mathbb{E}(X + Y) = \sum_{\omega} (X(\omega) + Y(\omega))P(\omega) = \sum X(\omega)P(\omega) + \sum Y(\omega)P(\omega) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

□

Věta: Nechť X je diskrétní n.v. nabývající jen hodnot z $\mathbb{N} = 0, 1, 2, s$. Pak platí

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} P(X = k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) = \sum \sum P(\omega \in \Omega : X(\omega) = k) \\ &= \sum P(\omega \in \Omega : X(\omega) > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \end{aligned}$$

□

Definice (Rozptyl): Rozptyl (*variance*) n.v. X nazveme číslo $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$. Značíme jej $\text{var}(X)$ (kvadratické měření odchylky)

1. Směrodatná odchylka (standard deviation) $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$

Poznámka: "stejně jednotky jako X "

2. Měří, jak je daleko "typicky" X od $\mathbb{E}(X)$. Mohli bychom to měřit i jinak (např. $\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|)$), ale rozptyl je výhodnější.

Věta:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}(X) \\ \text{var}(X) &= \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 \\ &= \end{aligned}$$

□

Definice (Podmíněná střední hodnota): Pokud X je diskrétní n.v. a $P(B) > 0$, tak podmíněná střední hodnota X za předpokladu B (conditional expectation of X given by B)

Věta (Věta o úplné střed. hodnotě): Pokud B_1, B_2, \dots je rozklad Ω a X je d.n.v., tak

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X|B_i)P(B_i)$$

kdykoliv má součet smysl. (Sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0.)

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_i P(B_i) \mathbb{E}(X|B_i) \\ &= \sum_i P(B_i) \sum_x x P(X=x|B_i) \\ &= \sum_x x \left(\sum_i P(B_i) P(X=x|B_i) \right) \end{aligned}$$

□

Poznámka:

Rozbor všech možností: $X \sim \text{Geom}(p)$

$B_1 = S \dots$ první pokus úspěšný

$B_2 = B_1^C = F \dots$ první pokus neúspěšný

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= P(S) \mathbb{E}(X|S) + P(F) \mathbb{E}(X|F) \\ &= p \cdot 1 + (1-p) (\mathbb{E}(X) + 1) \\ p \mathbb{E}(X) &= p + (1-p) \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Věta (Parametry rozdělení - Bernoulliho):

Pro $X \sim \text{Bern}(p)$ je

$$1. \mathbb{E}(X) = p$$

$$2. \text{var}(X) = p(1-p)$$

Důkaz: $\mathbb{E}(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) = P(X=1) = p$

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X-p)^2 = (0-p)^2 P(X=0) + (1-p)^2 P(X=1) = p(1-p)(p + (1-p)) = p(1-p) \quad \square$$

Věta (Parametry rozdělení - binomické):

Pro $X \sim \text{Bin}(n, p)$ je

$$1. \mathbb{E}(X) = np$$

$$2. \text{var}(X) = np(1-p)$$

Důkaz:

1. První postup: $X = \sum_{i=1}^n X_i$, kde $X_i = [i\text{-tý hod úspěš}]$

$$\mathbb{E}(X_i) = P(X_i = 1) = p$$

2. Druhý postup:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n kP(X=k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n pn \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= pn(p + (1-p))^{n-1} = np\end{aligned}$$

□

Věta (Parametry rozdělení - hypergeometrické): Pro $X \sim \text{Hyper}(N, K, n)$ je

1. $\mathbb{E}(X) = n \frac{K}{N}$

2. $\text{var}(X) = n \frac{K}{N} (1 - \frac{K}{N}) \frac{N-n}{N-1}$

1. První postup: $X = \sum_{i=1}^n X_i$, kde $X_i = [i\text{-tý míček červený}]$

$$\mathbb{E}(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{K}{N}$$

2. Druhý postup:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^K Y_j, \text{ kde } Y_j = [\text{byl vytažen (z } n \text{ tahů) míček s číslem } j]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_j) &= P(Y_j = 1) = \frac{n}{N} \\ &= \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}\end{aligned}$$

SKONTROLOVAŤ, STRATIL SOM SA :Sadge: <- later :sadge:

Věta (Parametry rozdělení - geometrické): Pro $X \sim \text{Geom}(p)$ je

1. $\mathbb{E}(X) = n \frac{1}{p}$

2. $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Věta (Parametry rozdělení - hypergeometrické): Pro $X \sim \text{Hyper}(N, K, n)$ je

1. $\mathbb{E}(X) = \lambda$

2. $\text{var}(X) = \lambda$

$$\begin{aligned}P(X=k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ \mathbb{E}(X) &= \sum k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \\ \lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} &= \lambda\end{aligned}$$

Definice (Základní popis náhodných vektorů): 1. X, Y - nestihol som, lebo preskočil slide za 2 sekundy :) boli tam asi 4 odrážky

Definice: Nejaká definícia, nesithol som, lebo som rantoval.

Cool, to pak musime dohledat a fixnout :sadge:

Definice (Marginální rozdělení):

1. Máme-li dáno $p_{X,Y}$, jak zjistit rozdělení jednotlivých složek, t.j. p_X a p_Y ?

Je tohle skutečne definice, když u ni je dukaz? :kek:

Důkaz: Necht X, Y jsou diskrétní n.v. Pak:

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_{Y \in \text{Im}(Y)} P(X = x \& Y = y) = \sum_{Y \in \text{Im}(Y)} p_{X,Y}(x, y)$$

$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{X \in \text{Im}(X)} P(X = x \& Y = y) = \sum_{Y \in \text{Im}(Y)} p_{X,Y}(x, y)$$

□

Definice (Nezávislost náhodných veličin): Diskrétní n.v. X, Y jsou nezávislé (independent) pokud pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ nezávislé. To nastane právě když

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Věta (Součin nezávislých n.v.): Pro nezávislé diskrétní n.v. X, Y platí

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{x \in \text{Im}(X), y \in \text{Im}(Y)} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_x x P(X = x) \sum_y y P(Y = y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

□

5 Pátá přednáška

Definice (Coupling):

1. $X = \sum_{i=1}^n X_i$ kde X_1, \dots, X_n jsou n.n.v. $\dots \sim \text{Bern}(p)$
2. $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ kde Y_1, \dots, Y_n jsou n.n.v. $\dots \sim \text{Bern}(q) \dots o < q$
3. vztah X, Y není určen, můžou být jakékoliv.
4. Zařídíme, že nebudou nezávislé, dokonce bude vždy $X \leq Y$.
5. Stačí definovat:

$$\text{pokud } X_i = 1 \text{ tak } Y_i = 1$$

$$\text{pokud } X_i = 0 \text{ tak } Y_i \text{ buď } 1 \text{ nebo } 0$$

$$\implies Y_1, \dots, Y_n \text{ jsou n.n.v. } \implies Y \sim \text{Bin}(n, q)$$

$$\implies X \leq Y \text{ vždy } (Y \leq k \implies X \leq k) \implies P(X \leq k) \geq P(Y \leq k)$$

Věta (Funkce náhodného vektoru):

Necht X, Y jsou n.v. na (Ω, \mathcal{F}, P) , necht $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

1. Pak $Z = g(X, Y)$ je n.v. na (Ω, \mathcal{F}, P)

2. platí pro ni

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} \sum_{y \in \text{Im}(Y)} g(x, y) P(X = x, Y = y)$$

Věta (Linearita střední hodnoty):

Pro X, Y n.v. a $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Důkaz:

$$g(x, y) = ax + by$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + bY) &= \mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x, y} g(x, y) P(X = x, Y = y) = \sum_{x, y} ax P(X = x, Y = y) \\ &+ \sum_{x, y} by P(X = x, Y = y) = \sum_x ax P(X = x) + \sum_y by P(Y = y) \end{aligned}$$

□

Věta (Konvoluce): Pokud X, Y jsou diskrétní náhodné veličiny, tak pro $Z = X + Y$ platí

$$P(Z = z) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} P(X = x, Y = z - x).$$

Pokud X, Y jsou navíc nezávislé, tak

$$P(Z = z) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} P(X = x) P(Y = z - x).$$

Důkaz:

$$P_z = \sum_x P_X(x) P_Y(z - x) \dots \text{konvoluce}$$

$$P(Z = z) = \sum_k P(X = k \& Y = z - k)$$

$$= \sum_{k=0}^m P(X = k) P(Y = z - k)$$

$$= \sum \binom{m}{k} P^k (1-p)^{m-k} \binom{n}{z-k} p^{z-k} (1-p)^{n-(z-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^m p^z (1-p)^{m+n-z} \binom{m}{k} \binom{n}{z-k}$$

$$= p^z (1-p)^{m+n-z} \sum \binom{m}{k} \binom{n}{z-k}$$

$$= \text{Bin}(m+n, p)$$

□

Definice (Podmíněné rozdělení): X, Y - diskrétní náhodné veličiny na (Ω, \mathcal{F}, P) , $A \in \mathcal{F}$

1. $p_{X|A}(x) := P(X = x|A)$... příklad: X je výsledek hození kostkou, A = padlo sudé číslo

2. $p_{X|Y}(x|y) := P(X = x|Y = y)$... příklad: X, Z jsou výsledky dvou nezávislých hodů kostkou, $Y = X + Z$.

Definice (Obecná náhodná veličina): Náhodná veličina (random variable) na (Ω, \mathcal{F}, P) je zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, které pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x \in \mathcal{F}$$

...

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Definice (Spojitá náhodná veličina): N.v. X se nazývá spojitá (continuous), pokud existuje nezáporná reálná funkce f_X tak, že

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Někdy se též používá pojem absolutně spojitá veličina.

Funkce f_X se nazývá hustota (probability density function) náhodné veličiny X .

Podmínka na hustotu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1 \dots \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

6 Šestá přednáška

Definice (Kvantilová funkce): Pro náhodnou veličinu X definujeme *kvantilovou funkci* $Q_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pomocí

$$Q_X(p) := \min\{x \in \mathbb{R} : p \leq F_X(x)\}$$

1. Pokud F_X je spojitá, tak $Q_X = F_X^{-1}$.
2. Obecně platí: $Q_X(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$.
3. $Q_X(\frac{1}{2})$ = medián (pozor, když F_X není rostoucí)
4. Pokud F_X je spojitá, tak $Q_X = F_X^{-1}$.

Definice (Spojitá náhodná veličina): N.v. X se nazývá spojitá (*continuous*) pokud existuje nezáporná reálná funkce f_X tak, že

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

1. Alternativně: máme zadanou funkci $f \geq 0$ s $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$.
2. Vybereme náhodný bod pod grafem f .
3. Označíme jeho souřadnice (X, Y) .
4. Pak je X n.v. s hustotou f .

Věta (Práce s hustotou): *Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X . Pak*

1. $P(X = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t) dt \forall a, b \in \mathbb{R}$.

3. V důsledku taky platí (pro rozumnou množinu A):

$$P(X \in A) = \int_A f_X(t) dt$$

Důkaz:

$$2 \implies 1 : P(x \leq X \leq x) = \int_x^x f = 0$$

$$2 : P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^b f - \int_{-\infty}^a f$$

$$P(a \leq X \leq b) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(a - \frac{1}{n} < X \leq b) = \lim \int_{a - \frac{1}{n}}^b f = \int_a^b f$$

□

Definice (Střední hodnota spojitě n.v.): Nechť spojitá n.v. X má hustotu f_X . Pak její střední hodnota (*expectation, expected value, mean*) je označována $\mathbb{E}(X)$ a definována

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

pokud integrál má smysl, t.j. pokud se nejedná o typ $\infty - \infty$.

1. Analogie s výpočtem těžiště tyče ze znalosti hustoty
2. Diskretizace.

Věta (LOTUS): Pokud X je spojitá n.v. s hustotou f_X a g reálná funkce, tak

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

pokud integrál má smysl. (Důkaz pomocí substituce v integrálu)

Věta (Linearita střední hodnoty): Pro X_1, \dots, X_n diskrétní nebo spojitě n.v. platí

$$\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$$

Definice (Rozptyl spojitě n.v.):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

Označíme-li $\mu = \mathbb{E}(X)$, tak

$$\text{var}(X) := \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

Věta: Pro spojitě n.v. platí $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

Důkaz: (Důkaz jako pro diskrétní n.v.)

□

Věta (Rozptyl součtu): Pro X_1, \dots, X_n nezávislé diskrétní nebo spojitě n.v. platí

$$\text{var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n).$$

Důkaz: Triviální. □

Definice (Uniformní rozdělení): N.v. X má uniformní rozdělení na intervalu $[a, b]$, píšeme $X \sim U(a, b)$, pokud $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in [a, b]$ a $f_X(x) = 0$ jinak.

Definice (Exponenciální rozdělení):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \dots x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \dots x \geq 0 \end{cases}$$

Poznámka: X modeluje např. čas před příchodem dalšího telefonního hovoru do callcentra, dotazu na webserver, čas do dalšího blesku v bouřce atd.

Poznámka: Souvislost $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ a $Y \sim \text{Geom}(p)$

1. $P(X > x) = e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$
2. $P(Y > n) = (1 - p)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$

Definice (Standardní normální rozdělení):

1. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
2. $\Phi(x)$ - primitivní funkce k ϕ
3. Standardní normální rozdělení $N(0, 1)$ má hustotu ϕ a distribuční funkci Φ .
4. Pokud $Z \sim N(0, 1)$, tak $\mathbb{E}(Z) = 0$ a $\text{var}(Z) = 1$.

Definice (Obecné normální rozdělení):

1. Pro $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ položíme $X = \mu + \sigma Z$, kde $Z \sim N(0, 1)$.
2. Píšeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ - obecné normální rozdělení
3. Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má hustotu $\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = P(X \leq \mu + \sigma z) = F_X(\mu + \sigma z)$$

Poznámka (Odolnost vůči součtu): Pokud X_1, \dots, X_k jsou n.n.v., kde $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, pak

$$X_1 + \dots + X_k \sim N(\mu, \sigma^2),$$

Poznámka (Normální rozdělení - klíčové vlastnosti):

1. Pravidlo 3σ (68 – 95 – 99.7 rule)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68\%$$

$$2\sigma = 95$$

$$3\sigma = 99.7$$
2. Centrální limitní věta

The End