Matematická Analýza III

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Verze 0.1
10. března 2021

Obsah

1 První přednáška

Definice (Metrický prostor)**:** Metrický prosto je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení $d : M \times M \to \mathbb{R}$ zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z této definice plyne i nezápornost.

Definice (Podprostor)**:** Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (x, d'), tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d): pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d).

Definice (Izometrie f)**:** Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Pokud existuje, prostory (M, d) a (N, e) jsou izometrické.

Příklad (Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n)$)**:** Jedním z nejdůležitějších příkladů metrických prostorů je (n-rozměrný) Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^n, e_n), n \in \mathbb{N}$ s metrikou e_n danou pro $\overline{x} = (x_1, ..., x_n), \overline{y} = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (x, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Tvrzení ($(\mathbb{R}^n, e_n)$ je MP.)**:** $(\mathbb{R}^n, e_n)$ *je Metrický prostor.*

Důkaz: TODO □

Příklad (Sférická metrika)**:** Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

označíme jednotkovou sféru (s poloměrem 1) v Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Funkci $s : S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} 0 \ \ ... \ \ \overline{x} = \overline{y} \\ \varphi \ \ ... \ \ \overline{x} \neq \overline{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřímkami vycházejícími z počátku $\overline{0} := (0, 0, 0)$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení (S je Metrický Prostor)**:** (S, s) *je metrický prostor.*

Důkaz: TODO □

Definice ((Horní) hemisféra H)**:** (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S | x_3 \geq 0\} \subset S.$$

Věta (*H* není plochá)**:** *Metrický prostor* (H, s) *není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru* (X, e_n) *s* $X \subset \mathbb{R}^n$

Důkaz: TODO □

Definice (Ultrametrika)**:** Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika nebo také nearchimédovská metrika, pokud splňuje silnou trojúhélníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)).$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika.

Poznámka: V ultrametrických prostorech, krátce UMP, neplatí intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (trojúhelníky v UMP)**:** *V ultrametrickém prostoru* (M, d) *je každý trojúhélník rovnoramenný (má dvě stejně dlouhé strany).*

Důkaz: TODO □

Definice (Koule)**:** (Otevřená) koule se středem $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ b metrickém prostoru (M, d) je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M | d(x, a) < r\} \subset M.$$

Vždy platí, že $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

Příklad (p-adické metriky)**:** Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Definujeme p-adický řád čísla n:

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m | n\})^1$$

Pro každé p definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Funkci $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ rozšíříme na zlomky. Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(a)$$

a jinak znovu definujeme $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (Aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$)**:** *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : ord_p(\alpha\beta) = ord_p(\alpha) + ord_p(\beta),$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (+\infty) := +\infty$ *pro každé* $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: TODO □

Definice (p-adické normy)**:** Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $| \cdot |_p : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$, tzv. p-adickou normu, jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(\frac{a}{b})},$$

speciálně $|0|_p = c^{+\infty := 0}$

Definice (Normované tělěso F)**:** Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, | \cdot |_F)$, psáno zkráceně $(F, | \cdot |_F)$, je těleso F vybavené normou $| \cdot |_F : F \to [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky:

[1]Zde $\cdot | \cdot$ značí relaci dělitelnosti na $\mathbb{Z}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$ je $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$.

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \Leftrightarrow x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y|_F \leq |x|_F + |y|_F$

Příklad: Základní příklady normovaných těles jsou např. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, kde je normou obvyklá absolutní hodnota $|\cdot|$

Tvrzení (o $|\cdot|_p$)**:** *Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ normované těleso. Příslušný metrický prostor $(\mathbb{Q}, d)$, je ultrametrický prostor.*

Důkaz: TODO □

Úlohy 1, 3, 5, 7 a 19 jsou DÚ(slajdy) do 9.3.

2 Druhá přednáška

Definice (Triviální norma)**:** Triviální norma na libovolném tělěse F je funkce $||\cdot||$ s $||0_F|| = 0$ a $||x|| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Definice (Kanonická p-adická norma)**:** Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je kanonická p-adická norma $||\cdot||_p$ definovaná jako

$$||\alpha||_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}$$

to jest v obecné p-adické normě $|\cdot|_p$ klademe $c := \frac{1}{p}$.

Věta (A. Ostrowski)**:** *Nechť $||\cdot||$ je norma na tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Pak nastává právě jedna ze tří následujícich možností:*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0, 1]$ takové, že $||x|| = |X|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p takové, že $||x|| = |x|_p = c^{ord_p(x)}$*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz: TODO □

Poznámka (Konvence)**:** $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ jsou reálná čísla a $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Limitu píšeme jako $\lim a_n = a$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definice (Limita)**:** Nechť je (M, d) metrický prostor, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. (a_n) má limitu v (M, d), pokud

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

.

Definice (Konvergence, Divergence)**:** Pokud má (a_n) limitu, řekneme, že je konvergentní. Pokud limitu nemá, je divergentní.

Definice (Kompaktní metrický prostor)**:** Buď (M, d) metrický prostor a $X \subset M$. Řekneme, že X je kompaktní, pokud

$$\forall (a_n) \subset X \exists (a_{m_n}) \exists a \in X : \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = a.$$

Jinak řečeno, každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X. Metrický prostor (M, d) je kompaktní, pokud M je kompaktní.

Definice (Spojité zobrazení mezi Metrickými prostory)**:** Buďte (M, d) a (N, e) metrické prostory a buď $f : M \to N$ zobrazení mezi nimi. f je spojité v $a \in M$, pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \in M : d(x, a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Zobrazení f je spojité, pokud je spojité v každém bodě $a \in M$.

Věta (Princip maxima)**:** *Nechť (M, d) je metrický prostor,*

$$f : M \to \mathbb{R}$$

je funkce z M do reálné osy a $X \subset M$ je neprázdná kompaktní množina. Pak

$$\exists a, b \in X \forall x \in X : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Funkce f tedy na X nabývá svou nejmenší hodnotu $f(a)$ a největší hodnotu $f(b)$.

Důkaz: TODO □

Definice (Součin metrických prostorů)**:** Pro metrické prostory (M, d) a (N, e) definujeme jejich součin $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ je na něm dána jako

$$(d \times e)((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + e(a_2, b_2)^2}$$

2.1 Charakterizace kompaktních množin v Euklidovckých metrických prostorech

Definice (Otevřená množina)**:** Množina $X \in M$ v metrickém prostoru (M, d) je otevřená, pokud

$$\forall a \in X \exists r > 0 : B(a, r) \subset X.$$

Definice (Uzavřená množina)**:** Množina X je uzavřená, pokud $M \backslash X$ je otevřená.

Definice (Omezená množina)**:** Množina X je omezená, pokud

$$\exists a \in M \exists r > 0 : X \subset B(a, r)$$

Definice (Diametr)**:** Diametr(průměr) množiny X je s $V := \{d(a, b) | a, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \ldots \text{ množina} V \text{je shora omezená} \\ +\infty & \ldots \text{ množina} V \text{není shora omezená} \end{cases}$$

Věta (Kompaktní $\Rightarrow$ uzavřená a omezená, součin)**:** *Platí následující:*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (M, d), pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.*

2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní metrické prostory, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní metrický prostor.*

Důkaz: TODO □

Věta (Kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$)**:** *V každém Euklidovském metrickém prostoru* $(\mathbb{R}^n, e_n)$ *je množina* $X \subset \mathbb{R}^n$ *kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Důkaz: TODO $\square$

The End