

Matematická Analýza III

Poznámky z přednášek

Letní semestr 2020/2021

Viktor Soukup

Obsah

| | |
|-------------------|---|
| 1 První přednáška | 2 |
|-------------------|---|

1 První přednáška

Definice (Metrický prostor): Metrický prostor je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ zvaného metrika či vzdálenost, které $\forall x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Z této definice plyne i nezápornost.

Definice (Podprostor): Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový metrický prostor (X, d') , tak zvaný podprostor metrického prostoru (M, d) : pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme (X, d) .

Definice (Izometrie f): Izometrie f dvou metrických prostorů (M, d) a (N, e) je bijekce $f : M \rightarrow N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = e(f(x), f(y))$$

Pokud existuje, prostory (M, d) a (N, e) jsou izometrické.

Příklad (Euklidovský prostor (\mathbb{R}^n, e_n)): Jedním z nejdůležitějších příkladů metrických prostorů je $(n$ -rozměrný) Euklidovský prostor (\mathbb{R}^n, e_n) , $n \in \mathbb{N}$ s metrikou e_n danou pro $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body \bar{x} a \bar{y} . Euklidovským prostorem pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n) , když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Tvrzení $((\mathbb{R}^n, e_n)$ je MP.): (\mathbb{R}^n, e_n) je Metrický prostor.

Důkaz: TODO □

Příklad (Sférická metrika): Jako

$$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

označíme jednotkovou sféru (s poloměrem 1) v Euklidovském prostoru \mathbb{R}^3 . Funkci $s : S \times S \rightarrow [0, \pi]$ definujeme pro $\bar{x}, \bar{y} \in S$ jako

$$s(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} 0 & \dots \bar{x} = \bar{y} \\ \varphi & \dots \bar{x} \neq \bar{y} \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma polopřímkami vycházejícími z počátku $\bar{0} := (0, 0, 0)$ a body \bar{x} a \bar{y} . Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body \bar{x} a \bar{y} na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body \bar{x} a \bar{y} . Funkci nazveme sférickou metrikou.

Tvrzení $(S$ je Metrický Prostor): (S, s) je metrický prostor.

Důkaz: TODO □

Definice ((Horní) hemisféra H): (Horní) hemisféra H je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S.$$

Věta (H není plochá): *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$*

Důkaz: TODO □

Definice (Ultrametrika): Metrika d v metrickém prostoru (M, d) je ultrametrika nebo také nearchimédovská metrika, pokud splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)).$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \leq d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika.

Poznámka: V ultrametrických prostorech, krátce UMP, neplatí intuice založená na Euklidovských prostorech.

Tvrzení (trojúhelníky v UMP): *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný (má dvě stejně dlouhé strany).*

Důkaz: TODO □

Definice (Koule): (Otevřená) koule se středem $a \in M$ a poloměrem $r > 0$ b metrickém prostoru (M, d) je podmnožina

$$B(a, r) := \{x \in M | d(x, a) < r\} \subset M.$$

Vždy platí, že $B(a, r) \neq \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

Příklad (p -adické metriky): Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Definujeme p -adický řád čísla n :

$$\text{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 : p^m | n\})^1$$

Pro každé p definujeme $\text{ord}_p(0) := +\infty$.

Funkci $\text{ord}_p(\cdot)$ rozšíříme na zlomky. Pro nenulové $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\text{ord}_p(\alpha) := \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$$

a jinak znovu definujeme $\text{ord}_p(0) = \text{ord}_p(\frac{0}{b}) := +\infty$.

Tvrzení (Aditivita $\text{ord}_p(\cdot)$): *Platí, že*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \text{ord}_p(\alpha\beta) = \text{ord}_p(\alpha) + \text{ord}_p(\beta),$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (+\infty) := +\infty$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: TODO □

Definice (p -adické normy): Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0, 1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow [0, +\infty)$, tzv. p -adickou normu, jako

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p := c^{\text{ord}_p(\frac{a}{b})},$$

speciálně $|0|_p = c^{+\infty} := 0$

Definice (Normované těleso F): Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso F vybavené normou $|\cdot|_F : F \rightarrow [0, +\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky:

¹Zde $\cdot|$ značí relaci dělitelnosti na \mathbb{Z} , kde $a, b \in \mathbb{Z}$ je $a|b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$.

1. $\forall x \in F : |x|_F = 0 \Leftrightarrow x = 0_F$
2. $\forall x, y \in F : |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F$
3. $\forall x, y \in F : |x +_F y|_F \leq |x|_F + |y|_F$

Příklad: Základní příklady normovaných těles jsou např. \mathbb{Q}, \mathbb{R} nebo \mathbb{C} , kde je normou obvyklá absolutní hodnota $|\cdot|$

Tvrzení (o $|\cdot|_p$): *Pro každé prvočíslo p a každé $c \in (0, 1)$ je $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ normované těleso. Příslušný metrický prostor (\mathbb{Q}, d) , je ultrametrický prostor.*

Důkaz: TODO

□

Úlohy 1, 3, 5, 7 a 19 jsou DŮ(slaify) do 9.3.

The End