SORU 1 $\quad y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1]$

$y[n] = ?$ $n \geq 0$. Burada $x[n] = \delta[n]$ olduğundan sistemin dürtü cevabı $y[n]$ sinyaline eşit olmalıdır. $X(s) = 1$ old. dan $\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) \rightarrow Y(s) = H(s)$

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

L.T $\quad Y(s) - \frac{3}{4}Y(s).e^{-s} + \frac{1}{8}Y(s).e^{-2s} = 2X(s).e^{-s}$

$$Y(s)\left[1 - \frac{3}{4}e^{-s} + \frac{1}{8}e^{-2s}\right] = X(s)\left[2e^{-s}\right]$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{2e^{-s}}{1 - \frac{3}{4}e^{-s} + \frac{1}{8}e^{-2s}} = \frac{2e^{-s}}{\underbrace{1 - \frac{3}{4}e^{-s} + \frac{1}{8}e^{-2s}}_{(1-\frac{1}{2}e^{-s}).(1-\frac{1}{4}e^{-s})}}$$

$$H(s) = \frac{K_1}{(1-\frac{1}{2}e^{-s})} + \frac{K_2}{(1-\frac{1}{4}e^{-s})} \longrightarrow K_1 = (1-\frac{1}{2}e^{-s}).H(s)\Big|_{e^{-s}=2} = \frac{2e^{-s}}{1-\frac{1}{4}e^{-s}}\Big|_{s^{-1}=2} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

$$K_2 = (1-\frac{1}{4}e^{-s}).H(s)\Big|_{s^{-1}=4} = \frac{2e^{-s}}{1-\frac{1}{2}e^{-s}} = \frac{8}{1-2} = -8$$

$$H(s) = \underbrace{\frac{8}{(1-\frac{1}{2}e^{-s})}}_{H_1(s)} - \underbrace{\frac{8}{(1-\frac{1}{4}e^{-s})}}_{H_2(s)} =$$

$$\boxed{F(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n].e^{-sn}}$$

$-\infty$ alt sınırının sıfır olması $u[n]$ getirir.

$$H_1(s) = 8.\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-s}}}_{\substack{a_1 = 1 \\ r = \frac{1}{2}.e^{-s}}} = 8.\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n.e^{-sn} \xleftrightarrow{L^{-1}} \boxed{h_1[n] = 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

$L^{-1} \rightarrow$ discrete Laplace transform.

bu ikisini sağlayan geometrik seri toplamı $|r| < 1$ olduğu için yakınsaktır. Böylece eşitliğin sağ tarafındaki gibi yazılabilir.

$$H_2(s) = -8.\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-s}} = (-8).\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-sn} \xleftrightarrow{L^{-1}} h_2[n] = (-8).\left(\frac{1}{4}\right)^n.u[n]$$

$a_1 = 1$
$r = \frac{1}{4}e^{-s}$

geom. seri açılımı

$$\boxed{h[n] = y[n] = h_1[n] + h_2[n] = 8.\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 8.\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]}$$

SORU-2

$y[n] = n \cdot y[n-1] + x[n]$, $\boxed{x[n] = y[n] - n \cdot y[n-1]}$

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

SORU-2A

$x[n] = \delta[n]$ ise, $x[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$x[0] = y[0] - 0 \cdot y[-1] = \boxed{y[0] = 1}$

$x[1] = y[1] - 1 \cdot y[0] = y[1] - 1 = 0$, $\boxed{y[1] = 1}$

$x[2] = y[2] - 2 \cdot y[1] = y[2] - 2 = 0$, $\boxed{y[2] = 2}$

$x[3] = y[3] - 3y[2] = y[3] - 6 = 0$, $\boxed{y[3] = 6}$

$x[4] = y[4] - 4 \cdot y[3] = y[4] - 24 = 0$, $\boxed{y[4] = 24}$

$\boxed{y[n] = \begin{cases} n!, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}}$

$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

$\boxed{y[n] = n! \cdot u[n]}$

$x[n] = \delta[n]$ old. dan $y[n] = h[n]$ dur

sistem nedensel olduğundan $h[n] = 0$ $n < 0$ ise bu sebepten $n0 = 0$

SORU-2B

Is the system linear?

Sistemin lineerliği ölçütü iki şartın sağlanmasıdır. ⟶ 1) Scaling property 2) Additivity property

$\sum_k a_k x_k[n] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \sum_k a_k y_k[n]$ → sağlanıyorsa sistem lineerdir.

Bu şartları kontrol etmek için, $x[n] = a\delta[n] + b\delta[n]$ seçilir. $x[0], x[1], x[2], \dots$ 'ya karşılık gelen $y[0], y[1], y[2] \dots$ $a \cdot h[n] + b \cdot h[n]$ sağlarsa sistem doğrusaldır.

$x[n] = a\delta[n] + b\delta[n] \rightarrow y[n] = 0$, $n < 0$,

$x[0] = a+b = y[0] - 0 \cdot y[-1] \Rightarrow y[0] = a+b$

$x[1] = y[1] - 1 \cdot y[0] = 0 \Rightarrow y[1] = y[0] = a+b$

$x[2] = y[2] - 2y[1] = 0 \Rightarrow y[2] = 2(a+b)$

$x[3] = y[3] - 3y[2] = 0 \Rightarrow y[3] = 6(a+b)$

$\vdots$

$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n!(a+b), & n \geq 0 \end{cases}$

$\boxed{y[n] = n! \cdot u[n] \cdot (a+b)}$

Genelleştirilmesi yapılabildiği için sistem $\boxed{\text{doğrusaldır}}$

SORU-2C Is the system time invariant?

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

time invariant sistemler girişteki t birimlik ötelemenin, çıkışta da t birimlik ötelemeye sahip olduğu sistemlerdir.

$x[n] \longrightarrow x[n-1] \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1[n] \stackrel{?}{=} y[n-1]$, $x[n-1] = \delta[n-1]$

$x[0] = 0$
$x[1] = 1$
$x[2] = 0$
$\vdots$

$x[0] = y[0] - 0 \cdot y_1[-1] = y[0] = 0$
$x[1] = y_1[1] - y[0] = y[1] = 1$
$x[2] = y_1[2] - 2y_1[1] = 0, \; y[2] = 2$
$x[3] = y_1[3] - 3y_1[2] = 0, \; y[3] = 6$
$\vdots$

$y_1[n] = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ n!u[n], & n > 0 \end{cases}$

$y_1[n] \stackrel{?}{=} y[n-1] = (n-1)! \cdot u[n-1] \rightarrow$

$y[n-1] = \begin{cases} 0, & n < 1 \\ (n-1)! \cdot u[n-1], & n \geq 1 \end{cases}$

$\left. \begin{array}{l} y[n-1]\big|_{n=2} = 1! \cdot u[1] = 1 \\ y_1[n]\big|_{n=2} = 2! \cdot u[2] = 2 \end{array} \right\}$ eşit olmadıklarından **zamanda bağımsız değildir**

SORU-3

* Sistemin çıkışı, girişin (sadece) o anki ve/veya geçmişteki değerlerine bağlı ise sistem causal (nedensel) dir.
* Sistemin o anki ve/veya geçmişteki değerleri ile gelecekteki değerlerine de bağlı bir çıkışı varsa sistem non-causal dır.
* Sistemin çıkışı, girişin sadece gelecekteki değerlerine bağlı ise anti-causaldır.

Sistemin "impulse response" 'u biliniyorsa nedensellik, $h[n] = 0, \; n < 0$ için şartının sağlanması ile elde edilir.

SORU-3A: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots\} \rightarrow$ nedensel $(h[n] = 0, \; n < 0)$

SORU-3B: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] = \{\underset{\uparrow}{0}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots\} \rightarrow$ nedensel $(h[n] = 0, \; n < 0)$

SORU-3C: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \{\cdots \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \cdots\} \rightarrow$ **nedensel değil**
$\hookrightarrow h[n] \neq 0, \; n < 0$

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

SORU-4

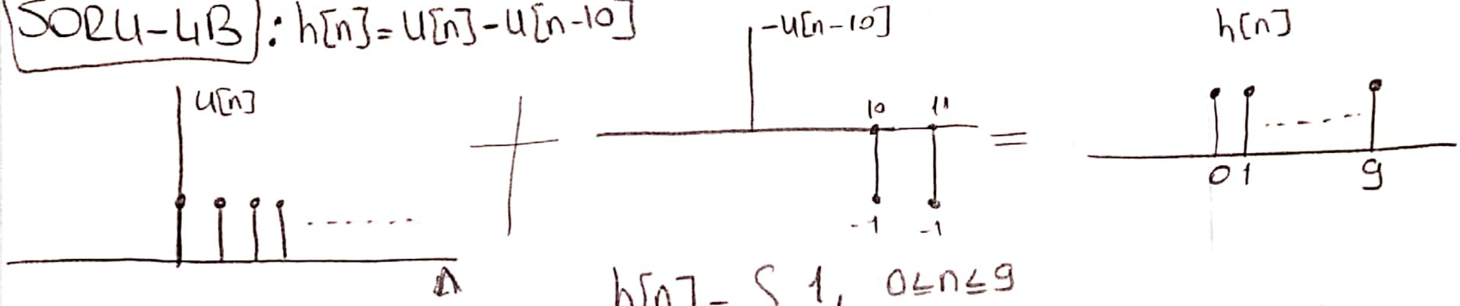
☆ Sistemin dürtü yanıtı bilindiğinde Stabilitenin ölçütü $\boxed{\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty}$ şartıdır

Yukarıdaki şart sağlanırsa sistem stabildir.

SORU-4A: $h[n] = 4^n u[n] \longrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{0}^{+\infty} 4^n \to +\infty$ $\boxed{\text{not stable}}$

$n \to +\infty \Rightarrow h[n] \to +\infty$

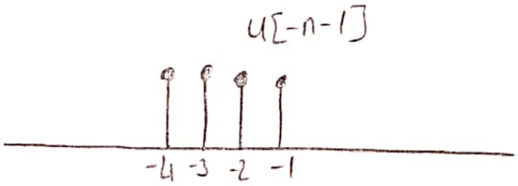
SORU-4B: $h[n] = u[n] - u[n-10]$



$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{0}^{9} 1 = 10 < \infty \longrightarrow \boxed{\text{Stable}}$$

SORU-4C $h[n] = 3^n u[-n-1]$



$$h[n] = \begin{cases} 3^n, & -\infty < n \le -1 \\ 0, & n > -1 \end{cases}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{-\infty}^{-1} 3^n \xrightarrow{n \to -n} \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} =} \to \sum_{n=1}^{\infty} a_1 . r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

$|r| < 1$ ise

$r = \frac{1}{3}$ $a_1 = 1$

$$\underbrace{1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}} - 1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \infty \longrightarrow \boxed{\text{Stable}}$$

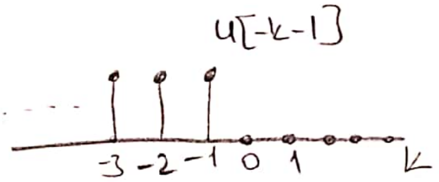
SORU-5 LTI sistemlerde $y[n] = x[n] * h[n] = \sum^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$ (eq.1)

Abdullah NEMİŞOĞLU
171024001

olarak verilir. $n-k=r$, $k=n-r$ değişken dönüşümü ile eq.1'de verilen konvolüsyon toplamı, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k]$ olarak da yazılabilir. ↳ eq.2

SORU-5.A $x[n] = u[n]$, $h[n] = a^n u[-n-1]$, $a>1$ için $y[n]=?$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] . h[k]}_{\text{eq.2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k] . u[-k-1] . a^k$$



Bu durumda $n \le -1$ ise toplam sınırları $(-\infty, n)$ olmalı çünkü n'den -1'e kadar olan kısım $u[n-k]$'da sıfır, eğer $n > -1$ ise toplam sembol sınırları $(-\infty, -1)$ olmalı çünkü -1,'den n'e olan kısım $u[-k-1]$'de sıfır değer alır. Bu durumda $y[n]$,

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{n} a^k, & n \le -1 \\ \sum_{-\infty}^{-1} a^k, & n > -1 \end{cases} \longrightarrow k \to -k \quad y[n] = \begin{cases} \sum_{k=-n}^{+\infty} a^{-k}, & n \le -1 \\ \sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k}, & n > -1 \end{cases}$$

$|a|<1$ ise a^{-k} toplamı sonucu ıraksak olurdu ancak $a>1$ olduğu biliniyor bu durumda (☆)

$n \le -1$ için: $\sum_{k=-n}^{+\infty} a^{-k} = a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots\ldots$, geometrik seri toplamıdır. Bu toplamın ıraksak olmadığı (☆) ile bilindiğine göre yakınsadığı değer, $\frac{a_1}{1-r}$ olur burada a_1 serinin ilk elemanı, r ise ardışık iki seri arasındaki oranı belirler.

$\downarrow$ $\underline{a_1}$ $\boxed{r = \frac{a^{n-1}}{a^n} = \frac{1}{a}}$

$$\sum_{k=-n}^{+\infty} a^{-k} = \boxed{\frac{a^n}{1-\frac{1}{a}}} \longrightarrow \boxed{a_1 = a^n}, \boxed{r = \frac{1}{a}}$$

$n>-1$ için $\sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} \Rightarrow a^{-1} + a^{-2} \ldots$ $\downarrow$ a_1 $r = \frac{a^{-2}}{a^{-1}} = \frac{1}{a} \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} = \boxed{\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}} \longrightarrow a_1 = \frac{1}{a}, r = \frac{1}{a}$

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} \frac{a^n}{1-1/a}, & n \le -1 \\ \frac{a^{-1}}{1-a^{-1}}, & n > -1 \end{cases}}$$

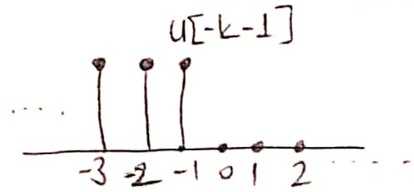
☆☆
☆

SORU-5B

$x[n] = u[n-4]$, $h[n] = 2^n u[-n-1]$

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\,h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[\underbrace{n-k-4}_{n-4-k}] \cdot 2^k u[-k-1]$$



$n \leq 3$ ise toplam sınırı $(-\infty, n-4)$ alınır. Sebebi ise $(n-4)$ ile (-1) arası değerlerin karşılığı $u[n-k-4]$ te sıfırdır. $n>3$ ise, $n-4>-1$ olacağından toplam üst sınırı -1 olarak alınır. (-1) ile $(n-4)$ arası değerleri $u[-k-1]$ sıfırlar. Bu durumda

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{n-4} 2^k, & n \leq 3 \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k, & n > 3 \end{cases}$$

$$n \leq 3 \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{n-4} 2^k = \sum_{4-n}^{+\infty} 2^{-k} \Rightarrow 2^{n-4} + 2^{n-5} + 2^{n-6} \cdots$$

$$\boxed{a_1 = 2^{n-4}},\quad \boxed{r = \frac{2^{n-5}}{2^{n-4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}}$$

$$y[n] = \frac{2^{n-4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^{n-4}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2^{n-4} = \boxed{2^{n-3},\ n \leq 3}$$

eq.1

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} 2^k = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} \cdots$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad r = \frac{2^{-2}}{2^{-1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1/2}{1-1/2} = 1 \qquad n>3$$

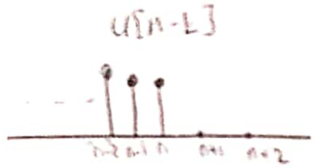
eq.2

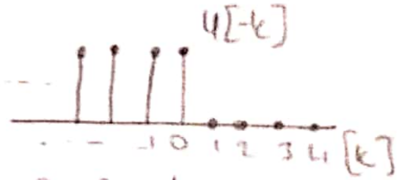
$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 2^{n-3}, & n \leq 3 \ \rightarrow \text{eq.1} \\ 1, & n > 3 \ \text{eq.2} \end{cases}}$$

SORU- 5C $x[n] = u[n]$, $h[n] = (0.5).2^n u[-n]$

Abdullah Memişoğlu
171026001

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k].h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k]\ 0.5.2^k u[-k]$$





$n \leq 0$ ise toplam sınırı $(-\infty, n)$ olarak ayarlarız gerekli; $[n,0]$ aralığını $u[n-k]$ sıfırlar.
$n > 0$ ise " " $(-\infty, 0)$ " " " $[0,n]$ " $u[-k]$ "

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{n} (0.5).2^k, & n \leq 0 \\ \sum_{k=-\infty}^{0} (0.5).2^k, & n > 0 \end{cases} \rightarrow (0.5).(2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} \ldots\ldots)$$

$a_1 \quad r = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$

$n \leq 0$ ise $|2^n| < 1$ sağlanır.

$$y[n] = \frac{a_1}{1-r} = \left(\frac{2^n}{1-\frac{1}{2}}\right).0.5 \quad n \leq 0$$

$$\boxed{y[n] = 2^n, \ n \leq 0}$$

$n > 0$ ise $\sum_{k=-\infty}^{0} (0.5).2^k = (0.5).\underbrace{(2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} \ldots\ldots)}$

$a_1 = 2^0 = 1$
$r = \frac{1}{2}$

$$\underbrace{\qquad}\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{0} (0.5).2^k = 0.5.2 = 1 \quad , \ n > 0$$

$$\boxed{y[n] = \begin{cases} 2^n, & n \leq 0 \\ 1, & n > 0 \end{cases}}$$

7