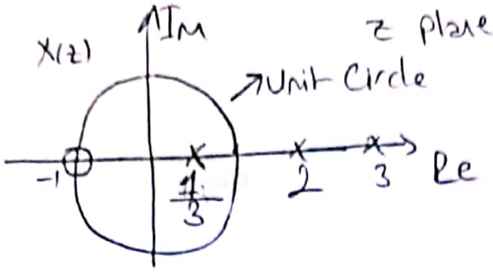
"Ödevi başka bir öğrenciden kopyalamadım, çözümleri kendim yaptım." Abdullah Mensoğlu 171024001

SORU 1 3.4



SORU-1a

Bir sinyalin z transformu olması için ROC'unun unit circle'ı barındırması gerekir.

Bu yüzden ROC: $\left[\frac{1}{3} \leq |z| < 3\right] \cap \left[\frac{1}{3} \leq |z| < 2\right] = \boxed{\frac{1}{3} < |z| < 2}$

Belirtilen ROC'a göre $|z| \geq 1/3 \rightarrow$ sağ yanlı $|z| < 2 \rightarrow$ sol yanlı. bu durumda $x[n]$ sinyali çift yanlıdır.

SORU-1b

Çift yanlı olması için ilgili ROC bölgesinin hem sağında hem solunda en az birer pole bulunmalıdır. Bu durumda olası ROC durumları,

1-) $\frac{1}{3} < |z| < 2$, 2-) $2 < |z| < 3$

SORU-1C

Kararlılığın sağlanması için ROC, unit circle'ı içermelidir. Nedensellik için ROC en dıştaki pole'dan de dışarıda olması gerekir. (Pole içermemeli) Bu iki şart aynı anda sağlanamayacağından mümkün değildir. denir.

SORU-2 3.6-c-d

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}, \quad |z| > 1/2$$

Partial fraction Expansion

SORU-2a

$\frac{1}{4}z^{-1}$, $\frac{1}{2}z^{-1}$

$$X(z) = \frac{K_1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{K_2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{(\cdots)}$$

$$K_1 = \left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right).X(z)\Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$K_2 = \left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z^{-1}=-2} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-2} = \frac{2}{1/2} = 4$$

$$X(z) = \frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x[n] = \left[-3.\left(\frac{-1}{4}\right)^n + 4.\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]u[n]}$$

Abdullah Memişoğlu
171024001

$\boxed{\text{SORU-2B}}$ $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$ $|z|>\frac{1}{2}$

$$X(z) = \frac{\cancel{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}{\cancel{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}.(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \quad |z|>\frac{1}{2} \text{ ise } \boxed{x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

$\boxed{\text{SORU-3}}$ causal LTI system $x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

z-transform of output $\rightarrow$ $Y(z) = \dfrac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})}$

$H(z) = ?$

$x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longrightarrow X(z) = \dfrac{-1}{1-z^{-1}} + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $\left(|z|>\frac{1}{2}\right) \cap \left(|z|<1\right)$

$\boxed{\text{ROC: } \frac{1}{2} < |z| < 1}$

$Y(z) = H(z).X(z)$ $\quad H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{\dfrac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})}}{\left(\dfrac{-1}{1-z^{-1}}\right) + \left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)}$

$$H(z) = \frac{\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right).\left(1-z^{-1}\right).\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}}{\cancel{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1+z^{-1}\right)\left(\cancel{1}-z^{-1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{\cancel{\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}.\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\cancel{\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}} = \frac{\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)}$$

$\boxed{H(z) = \dfrac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}}$ ★ $|z|>1$ (pole'den dolayı)

$\boxed{\text{SORU-3B}}$

$Y(z)$ için ROC: ROC$\{H(z)\} \cap$ ROC$\{X(z)\}$ ile elde edilir

ROC$\{H(z)\} \rightarrow |z|>1$
ROC$\{X(z)\} \rightarrow \frac{1}{2}<|z|<1$
$\Big\}$ $|z|<1$ durumu $H(z)$'den dolayı engellenir.
$|z|>\frac{1}{2} \cap |z|>1 \rightarrow$ ROC$\{Y(z)\} \rightarrow \underline{|z|>1}$

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

SORU-3C

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{K_1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{K_2}{(1+z^{-1})}$$

$$K_1 = (1-\tfrac{1}{2}z^{-1}).Y(z)\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+z^{-1})}\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{-1}{3}$$

$$K_2 = (1+z^{-1}).Y(z)\Big|_{z^{-1}=-1} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=-1} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

$$Y(z) = \frac{-1/3}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1/3}{(1+z^{-1})} \quad |z|>1$$

$$\boxed{y[n] = -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n] + \frac{1}{3}(-1)^n u[n]} = \left[-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}(-1)^n\right]u[n]$$

SORU 4 3.9

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

SORU-4A

$1-\frac{1}{2}z^{-1}=0 \quad |z|=\frac{1}{2}$ (pole) $\quad 1+\frac{1}{4}z^{-1}=0 \quad |z|=\frac{1}{4}$ pole

nedensel bir sistemde ROC pollerin dışında dur $|z|>\frac{1}{2} \cap |z|>\frac{1}{4} = \boxed{|z|>\frac{1}{2}}$

SORU-4B

sistemin ROC bölgesi $|z|=1$ noktasını içerdiğinden (LTI sistem) kararlıdır.

Abdullah Memişoğlu
171024001

SORU - 4C

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n u[-n-1]$$

$$\boxed{Y(z) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-2z^{-1}}} \left(|z| > \frac{1}{4} \cap |z| < 2\right) \to \boxed{\frac{1}{4} < |z| < 2}$$

ROC{Y(z)}

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{\left(\frac{-1/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4/3}{1-2z^{-1}}\right)}{\underbrace{\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}}_{B}} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right).\left(1-2z^{-1}\right)} = \underbrace{\frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}}_{A}$$

$$X(z) = \frac{A}{B} = \frac{\frac{\cancel{1+z^{-1}}}{\cancel{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}(1-2z^{-1})}}{\frac{\cancel{1+z^{-1}}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})\cancel{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}}} = \boxed{\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}} = X(z)}$$

$$ROC\{X(z)\} = \underbrace{ROC\{Y(z)\}}_{\frac{1}{4}<|z|<2} \cap \underbrace{ROC\{H(z)\}}_{|z|>\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{|z| < 2}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$x[n] = -2^n u[-n-1] + \frac{1}{2} \cdot \left(2^{n-1}\right).u[-n]$$

SORU - 4D

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{K_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{K_2}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$K_1 = \left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right).H(z)\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{3}{3/2} = 2$$

$$K_2 = \left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right).H(z)\Big|_{z^{-1}=-4} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$H(z) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{(-1)}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$h[n] = 2.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right] + (-1).\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] = \boxed{\left[2.\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n] = h[n]}$$

SORU-5 $x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$

Abdullah Memişoğlu
171024001

SORU-5A $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$

$x_c(t) \Rightarrow x_c(nT) = x[n]$

$$x[n] = \sin\left(20\pi . n . \underbrace{\frac{1}{100}}_{T}\right) + \cos\left(40\pi n . \frac{1}{100}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{100}}$$

SORU-5B unique değildir. sinyaller 2π periyodik olduğundan birden fazla T değeri bulunabilir.

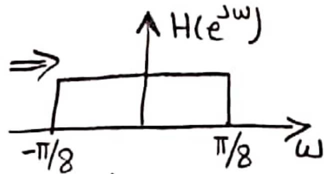
$$\sin(20\pi n T) + \cos(40\pi n T) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$\sin(20\pi n T + 2\pi n) + \cos(40\pi n T + 4\pi n) = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

$$\sin\left(20\pi n \underbrace{\left(T + \frac{1}{10}\right)}_{T_1}\right) + \cos\left(40\pi n \underbrace{\left(T + \frac{1}{10}\right)}_{T_1}\right) = \quad ''$$

$$T_1 = T + \frac{1}{10} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10} = \frac{11}{100}, \quad \boxed{T_1 = \frac{11}{100}, \frac{21}{100} \dots} \quad \boxed{T_1 = \frac{11}{100}}$$

SORU-6 Ideal lowpass filter with cutoff frequency $\pi/8$ radians $\Rightarrow$



SORU-6A bandlimited to 5kHz, max value of T that will avoid aliasing in the C/D converter?

$f = 5000$ Hz, $|\Omega| \geq 2\pi . 5000 = 10000$

The nyquist rate is the minimum rate at which a finite bandwidth signal needs to be sampled to retain all of the information.

$f = 5$kHz $\longrightarrow$ Nyquist frequency $\rightarrow$ 10kHz

$$T = \frac{1}{10kHz} \Rightarrow \boxed{T_{max} = \frac{1}{10.000} s}$$

Abdullah MEMİŞOĞLU
171024001

SORU-6B

$1/T = 10kHz$ cutoff freq = ?

$$\frac{1}{T} = 10kHz \rightarrow \frac{1}{w} = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\Omega}$$

$$\frac{\Omega}{w} = \frac{1}{T} \rightarrow \frac{\Omega}{\pi/8} = 10000 \rightarrow \Omega = \boxed{1250\pi = \Omega}$$

$$\Omega = 1250\pi \text{ rad/s} \rightarrow 2\pi . f_c = 1250\pi \rightarrow \boxed{f_c = 625 \text{ Hz}}$$

SORU-6C

Repeat Part b for $1/T = 20kHz$.

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\Omega}, \quad \frac{\Omega}{w} = \frac{1}{T} \rightarrow \Omega = \frac{\pi}{8}.20000$$

$$\Omega = 2500\pi = 2\pi f_c$$

$$\boxed{f_c = 1250 \text{ Hz}}$$

SORU-7

$H(e^{jw}) = jw/T \quad -\pi \le w \le \pi \quad T = 1/10 \text{ sec}$

SORU-7A

(i) $x_c(t) = \cos(6\pi t) \rightarrow t \rightarrow nT \rightarrow x[n] = \cos\left(6\pi n . \frac{1}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right)$

Öz fonksiyon özelliği ile;

$$y[n] = |H(e^{j3\pi/5})| . \cos\left(\frac{3\pi n}{5} + \alpha\right) \qquad \alpha : \angle H(e^{j3\pi/5})$$

$$|H(e^{j3\pi/5})| = \left|\frac{j . 3\pi/5}{1/10}\right| = \left|\frac{10 . j . 3\pi}{5}\right| = |j\,6\pi| = 6\pi$$

$$\angle H(e^{j3\pi/5}) = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) = \arctan\left(\frac{6\pi}{0}\right) \cong \arctan(\infty) \Rightarrow \alpha = \pi/2$$

$$\boxed{y[n] = 6\pi . \cos\left(\frac{3\pi n}{5} + \pi/2\right)} \rightarrow y[n] = -6\pi \sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right)$$

$$T = \frac{1}{10} \rightarrow y(t) = -6\pi . \sin\left(6\pi . \underbrace{\frac{n}{10}}_{t}\right) = -6\pi \sin(6\pi t)$$

$$\boxed{y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t)}$$

(ii)

$$x_c(t) = \cos(6\pi t) \longrightarrow x[n] = \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right) \qquad \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right) = \cos\left(\frac{7\pi n}{5}\right)$$

$$x_c(t) = \cos(14\pi t) \longrightarrow x[n] = \cos\left(\frac{7\pi n}{5}\right)$$

çift fonk.
2π periyodik

Eğer $\cos\left(\frac{7\pi n}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right)$ ise $\boxed{y_c(t) = -6\pi \sin(6\pi t)}$

Aynı çıkış elde edilir.

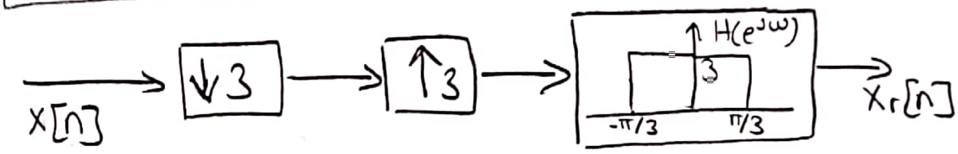
SORU-7B (i) şıkkında Nyquist frekans şartı sağlandığından differentiator davranışı görülür (ii) şıkkında ise ilgili şart sağlanmadığından aliasing oluşur. Aliasing hataları olacağından $y_c(t)$ davranışı differentiator değildir.

Abdullah MEMİŞOĞLU
17102400l

SORU-8

SORU-8A

Figure P.15



8A $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) \rightarrow$ Bu sinyal için $X(e^{jw})$ sinyali $w = +\pi/4$ ve $w = -\pi/4$ noktalarında değerler alır.

$\left|\frac{\pi}{4}\right| < \left|\frac{\pi}{3}\right|$ olduğundan aliasing oluşmaz. $\rightarrow \boxed{X_r[n] = x[n]}$

$H(e^{jw})$ LPF'i değeri

SORU-8B $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \rightarrow$ sinyal için $X(e^{jw}) \rightarrow w = \frac{\pi}{2}$ ve $w = -\frac{\pi}{2}$'de değer alır.

$\left|\frac{\pi}{2}\right| > \left|\frac{\pi}{3}\right|$ olduğundan aliasing hataları oluşur. $\boxed{X_r[n] \neq X[n]}$

SORU-8C $x[n] = \left[\frac{\sin(n\pi/8)}{\pi n}\right]^2$

$$x[n] = \left[\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin(n\pi/8)}{n\pi/8}\right]^2 = \frac{1}{64}\cdot\underbrace{\left[\frac{\sin(n\pi/8)}{n\pi/8}\right]^2}_{\operatorname{sinc}^2(\pi n/8)} \xrightarrow{F} \frac{1}{64}\Lambda(\pi/8)$$

$$\operatorname{sinc}^2[\alpha n] \xrightarrow{F.T} \frac{1}{\alpha}\Lambda(f/\alpha)$$

$$\frac{1}{64}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{\pi}{8}n\right] \xrightarrow{F.T} \frac{1}{\pi/8}\cdot\frac{1}{64}\cdot\Lambda(f/\pi/8)$$

$\left|\frac{\pi}{4}\right| < \left|\frac{\pi}{3}\right|$ old.dan aliasing yok

$X_r[n] = X[n]$