



GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ

ELEC365

Fundamentals of Digital Communication

Instructor : Oğuz KUCUR

MATLAB ÖDEVİ

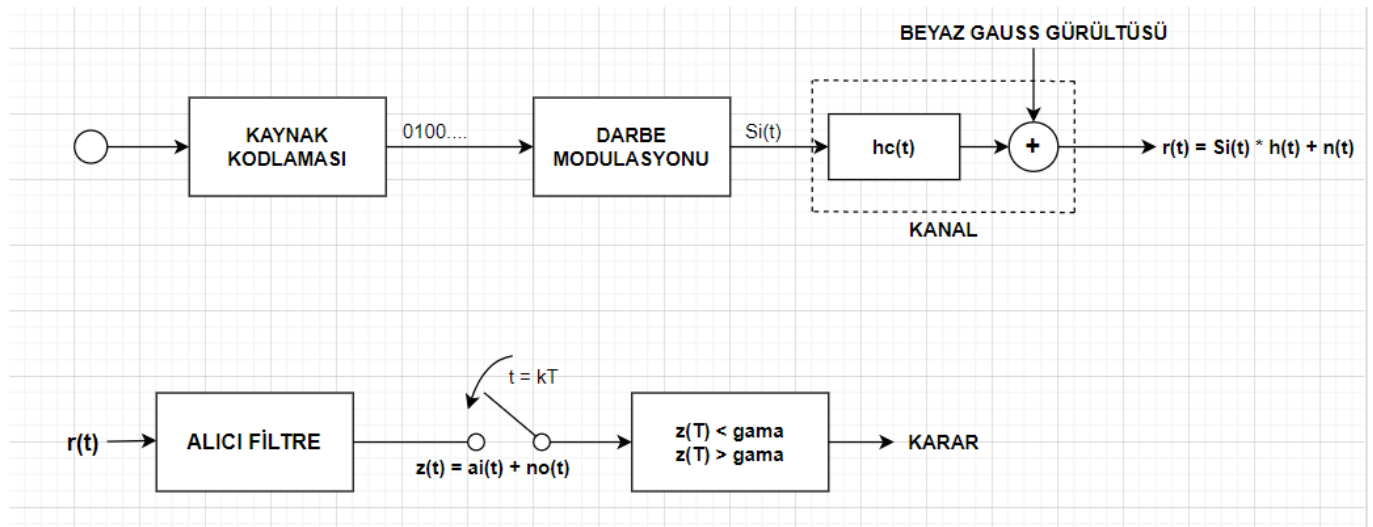
Abdullah MEMİŞOĞLU

171024001

GİRİŞ

Bu ödev temel bant haberleşmesini anlamayı ve yorumlamayı amaçlamaktadır. Ödev kapsamında sistem blok şeması çizilerek temel bant haberleşmesinde karar yapısının kurulması işlemi gösterilmektedir. Ödev sorusu gereği ilgili sistem için eşit olasılıklı bitler ve eşit olmayan olasılıklı bitler olmak üzere iki durum incelenmektedir. Bu kapsamda sistemin analitik çıkarımları yapılarak teorik değerler elde edilmektedir. Değerler MATLAB simülasyon ortamına aktarılarak, sistem simülasyon ortamında gerçekleştirilmektedir. Simülasyon sonucunda bit hata olasılık eğrileri elde edilerek iki sistem kıyaslanmakta ve yorumlanmaktadır.

TEMEL BANT HABERLEŞMESİ BLOK ŞEMASI



Şekil 1: Temel Bant Haberleşmesi Blok Şeması

Şekil 1’de özetlenmiş olan yapı ödev kapsamında gerçekleştirilmektedir. İlgili sinyaller ödev şartlarını sağlayacak şekilde belirlenerek, teorik çıkarımlar sonucu elde edilen veriler simülasyon ortamında doğrulanmaktadır.

ANALİTİK ÇIKARIMLAR

Aşağıda sistemin “1” ve “0” bitleri için iletilen işaretler verilmektedir.

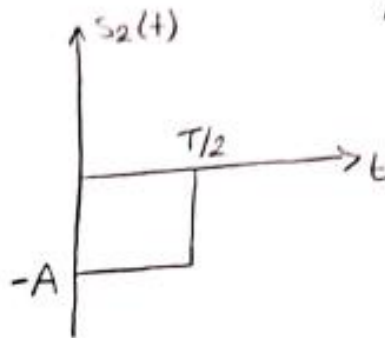
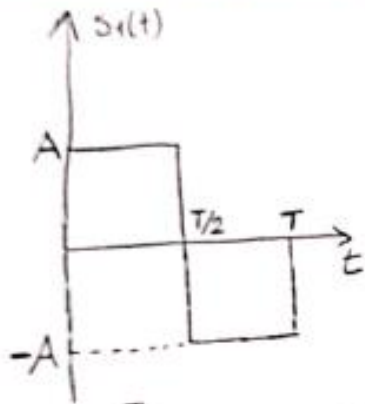
$$s_1(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T/2 \\ -A & T/2 \leq t \leq T \\ 0 & \text{Diğer} \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} -A & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{Diğer} \end{cases}$$

İlgili işaretler aşağıdaki gibi elde edilmekte ve işaretlere bağlı matematiksel çıkarımlar yapılmaktadır.

ELM-365 MATLAB ÖDEVİ ANALİTİK ÇIKARIMLAR

(2) (Eşit Olasılıklı Bitler)

Abdullah NEMİSOĞLU
171024001



$$a_i(t) = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)] \cdot s_i(t) dt \rightarrow a_1(T) = \int_0^{T/2} (A - (-A)) \cdot A dt + \int_{T/2}^T (-A) \cdot (-A) dt$$

$$= 2A^2 \frac{T}{2} = \underline{\underline{A^2 T}} = A^2 \left(T - \frac{T}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{A^2 T}{2}}}$$

$$a_2(T) = \int_0^{T/2} (A - (-A)) \cdot (-A) dt = \int_0^{T/2} -2A^2 dt = -2A^2 \cdot \frac{T}{2} = \underline{\underline{-A^2 T}} = a_2(T)$$

$$\boxed{a_1(T) = \frac{3A^2 T}{2}}$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_0^2}{a_1 \cdot a_2} \ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right) + \frac{a_1 + a_2}{2}$$

*Eşit olasılıklı bitler için $\ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right) = \ln(1) = 0$ olacağından $\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$ olarak yazılır

$$\gamma_0 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\frac{3A^2 T}{2} - A^2 T}{2} = \underline{\underline{\frac{A^2 T}{4} = \gamma_0}}$$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{A^2 T}{4}}$$

$$\boxed{a_1(T) = \frac{3A^2 T}{2}}$$

$$\boxed{a_2(T) = -A^2 T}$$

Abdullah MEMİSOĞU
171024001

$$E_{s1} = \int_0^T |s_1(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} (A)^2 dt + \int_{T/2}^T (-A)^2 dt$$

$$= A^2(T/2 - 0) + A^2(T - T/2) = A^2T = E_{s1}$$

$$E_{s2} = \int_0^T |s_2(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} (-A)^2 dt = A^2(T/2 - 0) = \frac{A^2T}{2} = E_{s2}$$

$E_b = 1$ kabulü ile A^2T değeri bulunması:

$$E_b = E_{s1} \cdot P(s_1) + E_{s2} \cdot P(s_2) = A^2T \cdot \frac{1}{2} + \frac{A^2T}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3A^2T}{4} = 1$$

$$A^2T = \frac{4}{3}$$

$A^2T = \frac{4}{3}$ ise;

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot A^2T = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$$

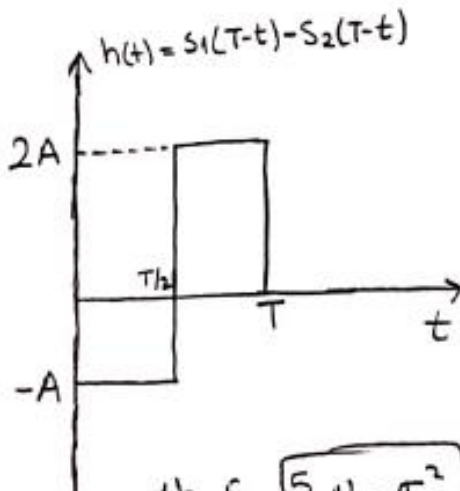
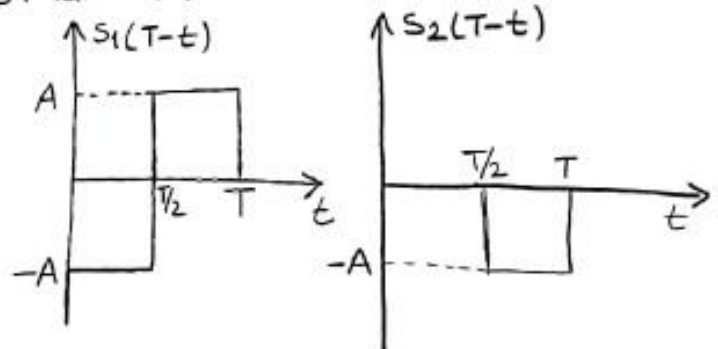
$$a_2 = -A^2T = -\frac{4}{3}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{4} \cdot A^2T = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -\frac{4}{3} \\ \gamma_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \cdot E_h$ olduğundan E_h değeri için $h(t)$ bulunmalıdır.

$$h(t) = s_1(T-t) - s_2(T-t)$$



$$E_h = \int_0^T |h(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} |(-A)|^2 dt + \int_{T/2}^T |(2A)|^2 dt$$

$$E_h = A^2(T/2 - 0) + 4A^2(T - T/2)$$

$$E_h = \frac{A^2T}{2} + 2A^2T$$

$$E_h = \frac{5A^2T}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3} = E_h (*)$$

$$(*) \sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \cdot E_h = \frac{5}{3} N_0 = \sigma_0^2$$

⑥ $P(1) = \frac{1}{5}$, $P(0) = \frac{4}{5}$ için;

Abdullah MEMİSOĞLU
171024001

Bu durumda $s_1(t)$ ve $s_2(t)$ sinyalleri değişmeyeceğinden;

$$E_h = \frac{5A^2T}{2}, \quad a_1(T) = \frac{3A^2T}{2}, \quad a_2 = -A^2T, \quad E_{s1} = A^2T, \quad E_{s2} = \frac{A^2T}{2}$$

yukarıdaki 5 terim A^2T 'ye bağlı değerleri olasılıklardan bağımsızdır.

$E_b = 1$ eşitliği ile A^2T değerinin hesaplanması:

$$E_b = E_{s1}P(s_1) + E_{s2}P(s_2) = A^2T \cdot \frac{1}{5} + \frac{A^2T}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3A^2T}{5} = 1$$

$$\Rightarrow A^2T = \frac{5}{3}$$

$$a_1(T) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{2}, \quad a_2(T) = -\frac{5}{3}$$

$$E_{s1} = \frac{5}{3}$$

$$E_{s2} = \frac{1}{2} \cdot A^2T = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$E_h = \frac{5}{2} \cdot A^2T = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{25}{6}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \cdot E_h = \frac{25}{6} \cdot \frac{N_0}{2} = \frac{25}{12} N_0 = \sigma_0^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_0^2}{(a_1 - a_2)} \cdot \ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right) + \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\gamma_0 = \frac{\frac{25}{12} N_0}{\frac{5}{2} + \frac{5}{3}} \cdot \ln(4) + \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{3}}{2} = 0.6931 \cdot N_0 + 0.4166 = \gamma_0$$

Eşit Olasılıklı Bitler
Gönderim Soruları

$$a_1(T) = 2$$

$$a_2(T) = -\frac{4}{3}$$

$$\gamma_0 = 1/3$$

$$E_{s1} = 4/3$$

$$E_{s2} = 2/3$$

$$E_h = 10/3$$

$$\sigma_0^2 = \frac{5}{3} N_0$$

$P(1) = \frac{1}{5}$, $P(0) = \frac{4}{5}$ için
Gönderim soruları

$$a_1(T) = 5/2$$

$$a_2(T) = -5/3$$

$$\gamma_0 = 0.6931 \cdot N_0 + 0.4166$$

$$E_{s1} = 5/3$$

$$E_{s2} = 5/6$$

$$E_h = 25/6$$

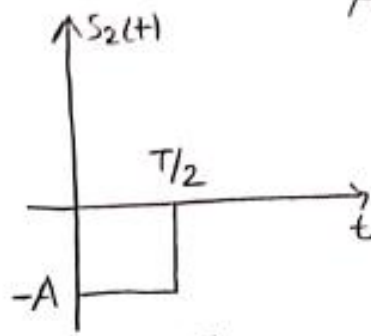
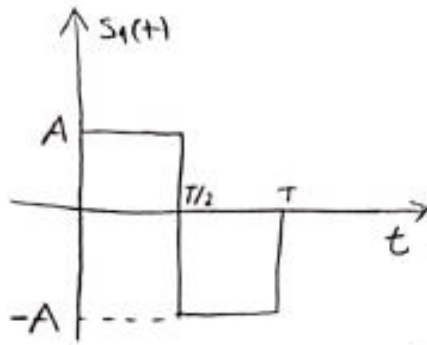
$$\sigma_0^2 = \frac{25}{12} N_0$$

③

Abdullah MEMİSOĞU

171024001

Amme



$$E_d = \int_0^T s_1(t)^2 dt + \int_0^T s_2(t)^2 dt - 2 \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t) dt$$

$$E_d = \int_0^{T/2} A^2 dt + \int_{T/2}^T (-A)^2 dt + \int_0^{T/2} (-A)^2 dt - 2 \int_0^{T/2} A \cdot (-A) dt - 2 \int_{T/2}^T 0 dt$$

$$E_d = \frac{A^2 T}{2} + A^2 (T - T/2) + \frac{A^2 T}{2} - 2(-A)^2 \frac{T}{2}$$

$$E_d = \frac{5A^2 T}{2}$$

$E_d \rightarrow$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) \rightarrow$$

Eşit Olasılıklı bitler	$P(0) = \frac{4}{5}, P(1) = \frac{1}{5}$
$\frac{5}{2} \cdot A^2 T = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$	$\frac{5}{2} \cdot A^2 T = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$
$Q\left(\sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{N_0}}\right)$	$Q\left(\sqrt{\frac{25}{12} \cdot \frac{1}{N_0}}\right)$

Burada $\frac{1}{N_0}$ ayrı yazımının sebebi $E_b = 1$ kabulüdür. $E_b = 1$ olduğundan Q fonksiyonu içerisinde E_b/N_0 oranı bulunur. Bu oran kritiktir ve Matlab simülasyonunda Q fonksiyonu içerisindeki $\frac{5}{3}$ ve $\frac{25}{12}$ katsayıları ilgili alanlarda kullanılacak katsayılardır.

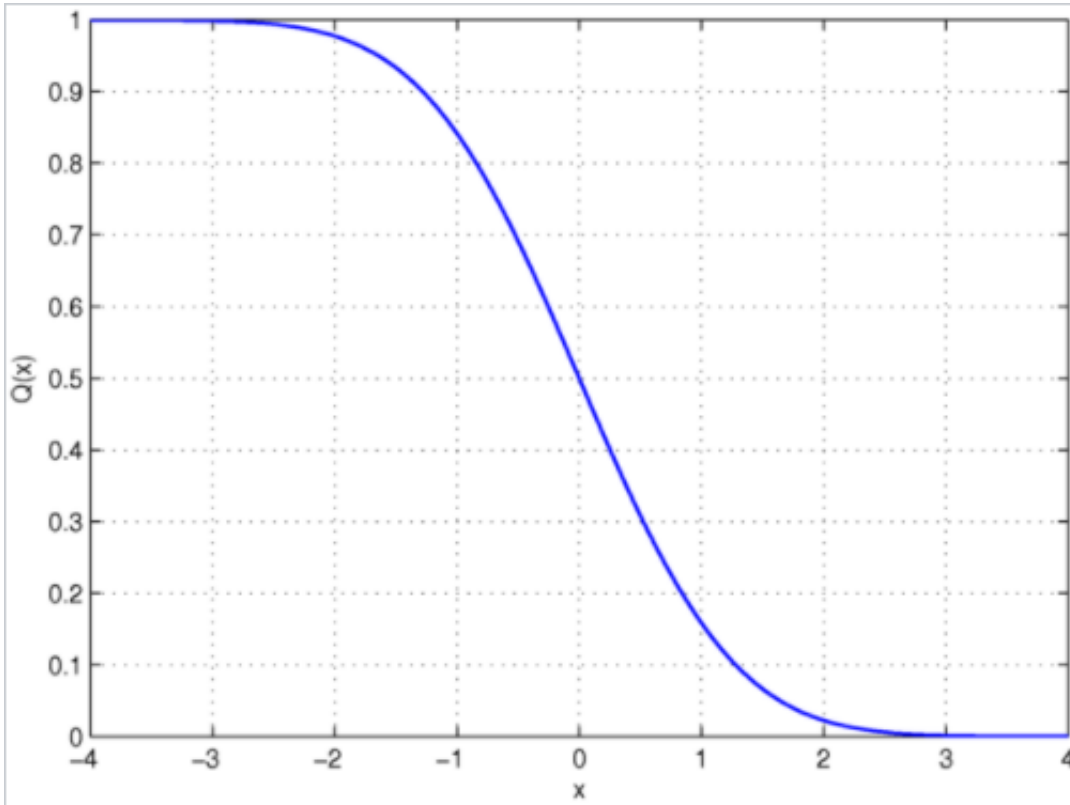
İlgili değerler analitik olarak hesaplanmıştır. Simülasyonda kullanılacak ve analitik olarak hesaplanmış olan tüm değerler aşağıdaki tablodaki gibidir.

Eşit Olasılıklı Bitler İçin		P(1) = 1/5, P(0) = 4/5 Durumu İçin	
$a_1(T)$	2	$a_1(T)$	5/2
$a_2(T)$	- 4/3	$a_2(T)$	- 5/3
Γ_0	1/3	Γ_0	$0.6931 \cdot N_0 + 0.416$
E_{s1}	4/3	E_{s1}	5/3
E_{s2}	2/3	E_{s2}	5/6
E_h	10/3	E_h	25/6
σ_0^2	$(5/3)N_0$	σ_0^2	$(25/12) N_0$
E_d	10/3	E_d	25/6
P_b	$Q(\sqrt{5/3N_0})$	P_b	$Q(\sqrt{25/12N_0})$

Tablo 1: Analitik Çıkarım Sonuç Tablosu

Tablo 1’de matematiksel çıkarım sonuçları görülmektedir. Analitik çıkarımlar sonucu yapılabilecek kıyas aşağıdaki gibidir:

Bir temel bant haberleşme sisteminde “1” ve “0” bitleri için iletilen işaretler aynı olduğu durumda ($s_1(t)$ ve $s_2(t)$) bitlerin eşit olasılıklı olma durumlarına göre bit hata olasılıkları değişmektedir. Bu değişiklik tablo 1’den de gözlenebilmektedir. P_b sonucunda Q fonksiyonu girdisi belirli oranda değişmektedir. Bu değişimi anlamak için Q fonksiyonu incelenmelidir. Q fonksiyonu girdisi arttıkça azalan bir olasılık fonksiyonudur. Her x değeri için $0 < Q(x) < 1$ sağlanırken, x değerinin artışı ile $Q(x)$ azalmaktadır. Aşağıda Q fonksiyonu çizimi verilmektedir.

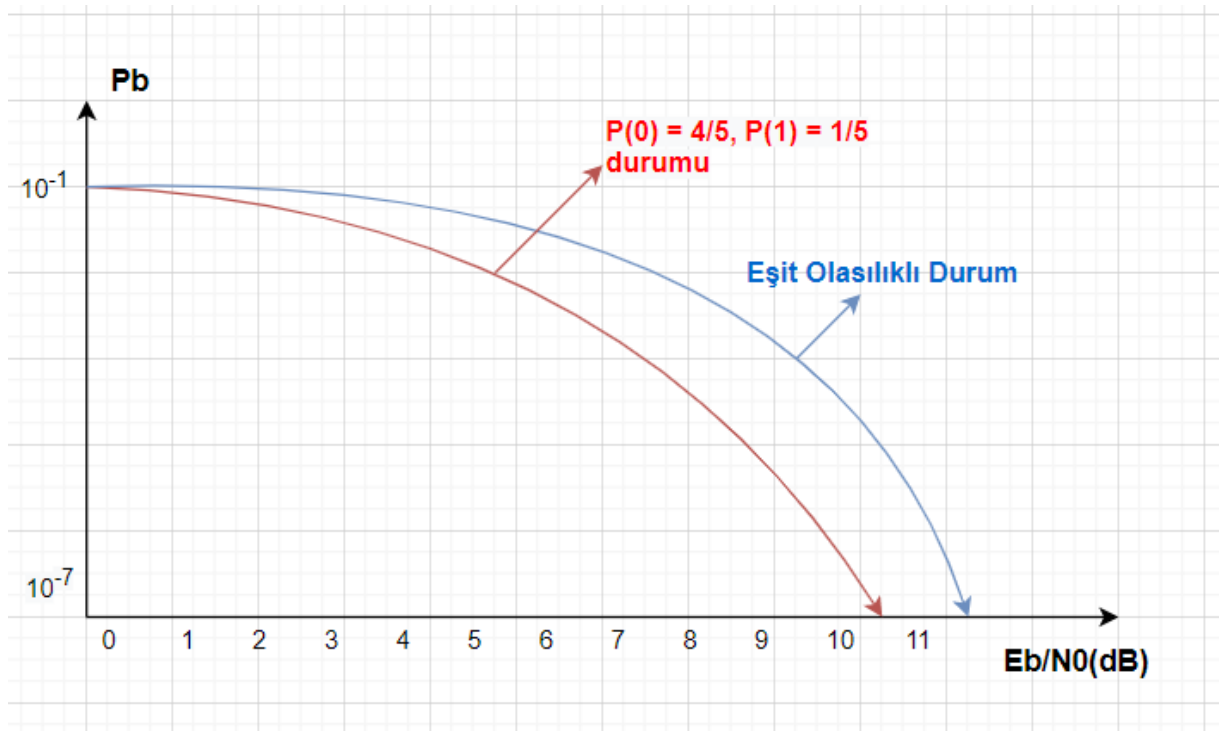


Şekil 2: Q(x) Fonksiyonu Grafiği

Q fonksiyonu karakterine bağılı olarak bitlerin eşit olasılıklı olup olmamasına göre bit hata olasılığı değişkenlik gösterecektir. Bit hata olasılığını Q fonksiyonu karakteristiğine ve Tablo 1'de bulunan girdilerine göre iki durum için analiz etmek mümkündür.

Eşit olasılıklı bitler için $P_b = Q(\sqrt{5/3N_0})$

Eşit olmayan olasılıklı bitler için $P_b = Q(\sqrt{25/12N_0})$ olarak bulunmuştur. Burada eşit olmayan olasılıklı bitler durumunda Q girdisinin ilk durumun 1.25 katı olduğu görülür. Q fonksiyonu girdisindeki artış bit hata olasılığını düşürecektir. Böylece $P(1) = 1/5$, $P(0) = 4/5$ durumunda bit hata olasılığı düşürülmüştür yorumu yapılır. Böylece analitik çıkarımlar sonucunda iki durum için beklenen bit hata olasılığı grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3: Bit Hata Olasılıkları Grafiği

Yukarıda verilen sayısal değerler tahminidir. Analitik çıkarımlar ile belirlenebilecek unsurlar grafiğin karakteristiği ve eşit olasılıklı durumun daha büyük değerler almasıdır. İlgili tüm analitik çıkarımlar ile simülasyon tamamlandığında doğru grafikler elde edilebilir.

MATLAB KODU

```
%Hazirlayan: Abdullah MEMISOGLU
%Ogrenci No: 171024001
%ELM365 - MATLAB ODEVI

% %%Esit Olasılıklı Bitler Icin:

%Sistem Baslatma
clc;
close all;
clear all;

% Her SNR degeri icin uretilecek bit miktarı N = 50.000.000
% * En az 10.000.000
N=5*10^7;

% rand("state", N); random sayı üreticini N değerine göre ayarlamaktadır.
rand("state",100);

% randn("state", N); random sayı üreticini N değerine göre ayarlamaktadır.
randn("state",200);

% N/2 adet x < 0.5, N/2 adet x > 0.5 sayı üretmeyi sağlayan yapı.
ip = rand(1,N)>0.5;

% a1 ve a2 kararlarının oluşturulduğu yapı.
% 1 gelirse a1 = 2, 0 gelirse a2 = -4/3
ai=(10/3)*ip-(4/3);

% Analitik olarak hesaplanan varyans degerinin N0 bagimli yazilisi.
n=sqrt(5)/sqrt(3)*[randn(1,N)+1i*randn(1,N)];

% Analitik olarak hesaplanan gama degerinin yazilisi.
gama = (1/3);

% Ilgili cizimde x eksenini belirleyen Eb/No oraninin
tanımlanması
Eb_No_dB=[-4:14];
```

```

for i=1:length(Eb_No_dB)
    % z = ai + n0 işleminin yazılması
    % Eb = 1,  $10\log_{10}(1/N_0) = [-4:14]$ 
    z=ai+10^(-Eb_No_dB(i)/20)*n;

    % Karar bölgesi
    ipHat=real(z)>(gama);

    % Hata hesabi
    nErr(i)=size(find ([ip-ipHat]),2);
end

% Simulasyon sonucu
simBError=nErr/N;

% Teorik Sonuc
% Analitik cikarimlarda elde edilen Pb icin katsayi icermektedir.
TheoricBError=0.5*erfc(sqrt(5)/sqrt(6)*sqrt(10.^(Eb_No_dB/10)));

% plot
figure
semilogy(Eb_No_dB,TheoricBError, "bo-");
hold on
semilogy(Eb_No_dB,simBError, "rx-");
axis([-4 14 10^-5 0.5]);
grid on
legend("Theoric","Simulation");
xlabel("Eb/ No (dB)");
ylabel(" Bit Error Rate ");
title("Eşit Olasılıklı Durumun Grafiği");

% % P(0) = 4/5, P(1) = 1/5 için
%

% Her SNR degeri icin uretilecek bit miktari N = 50.000.000
% * En az 10.000.000
N2=5*10^7;

% N/2 adet x < 0.5, N/2 adet x > 0.5 sayi uretmeyi saglayan yapi.
ip2 = rand(1,N2)>0.5;

% a1 ve a2 kararlarinin olusturuldugu yapi.
% 1 gelirse a1 = 2, 0 gelirse a2 = -4/3
ai2=(25/6)*ip2-(5/3);

```

```

% Analitik olarak hesaplanan varyans degerinin N0 bagimli yazilisi.
n2=sqrt(25)/sqrt(12)*[randn(1,N2)+1i*randn(1,N2)];

% Ilgili cizimde x eksenini belirleyen Eb/No oraninin tanimlanmasi
Eb_No_dB2 = [-4:14];

for i=1:length(Eb_No_dB2)
    % Bu kisimda gama N0 bagimli oldugundan
    % for dongusu icerisinde deger atamasi yapilmistir.
    N02 = 1/(10.^(Eb_No_dB2(i)/10));
    gama2 = (0.6931*N02 + 0.4166);

    % z = ai + n0 isleminin yazilmasi
    % Eb = 1, 10log10(1/N0) = [-4:14]
    z2=ai2+10^(-Eb_No_dB2(i)/20)*n2;

    % Karar bolgesi
    ipHat2=real(z2)>(gama2);

    % Hata hesabi
    nErr2(i)=size(find ([ip2-ipHat2]),2);
end

% Simulasyon sonucu
simBError2=nErr2/N2;

% Teorik Sonuc
% Analitik cikarimlarda elde edilen Pb icin katsayi icermektedir.
TheoricBError2=0.5*erfc(sqrt(25)/sqrt(24)*sqrt(10.^(Eb_No_dB2/10)));

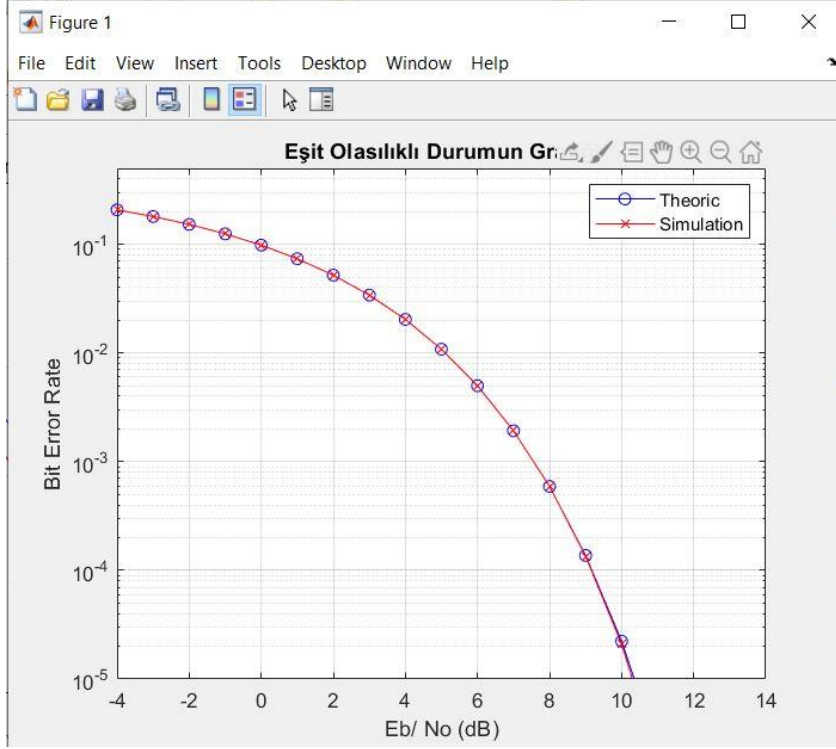
% Esit Olasilikli Olmayan Durum icin Cizdirme Islemleri
figure
semilogy(Eb_No_dB2,TheoricBError2, "bo-");
hold on
semilogy(Eb_No_dB2,simBError2, "rx-");
axis([-4 14 10^-5 0.5]);
grid on
legend("Theoric","Simulation");
xlabel("Eb/ No (dB)");
ylabel(" Bit Error Rate ");
title("P(0)=4/5, P(1)=1/5 Durumu Grafiği");

% Iki durumun kiyaslanmasi icin Cizdirme Islemleri
figure
semilogy(Eb_No_dB,simBError, "bo-");
hold on
semilogy(Eb_No_dB2,simBError2, "rx-");
axis([-4 14 10^-5 0.5]);
grid on
legend("Eşit Olasılıklı","P(0)=4/5, P(1)=1/5");
xlabel("Eb/ No (dB)");
ylabel(" Bit Error Rate ");
title("İki Durumun Kıyaslanması Grafiği");

```

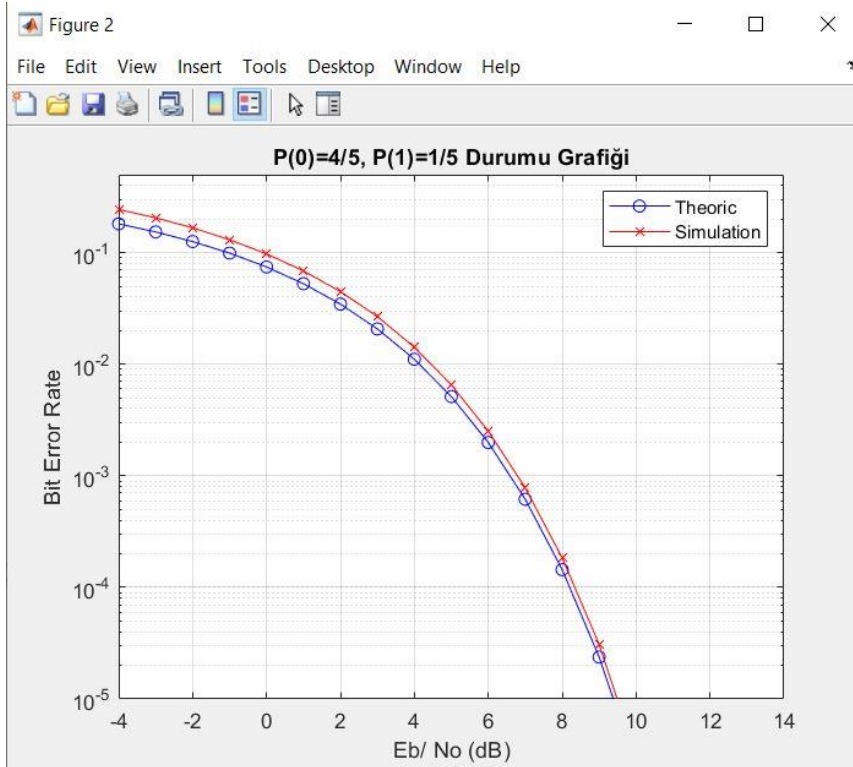
SİMÜLASYON ÇIKTILARI

Eşit Olasılıklı Olma Durumu:



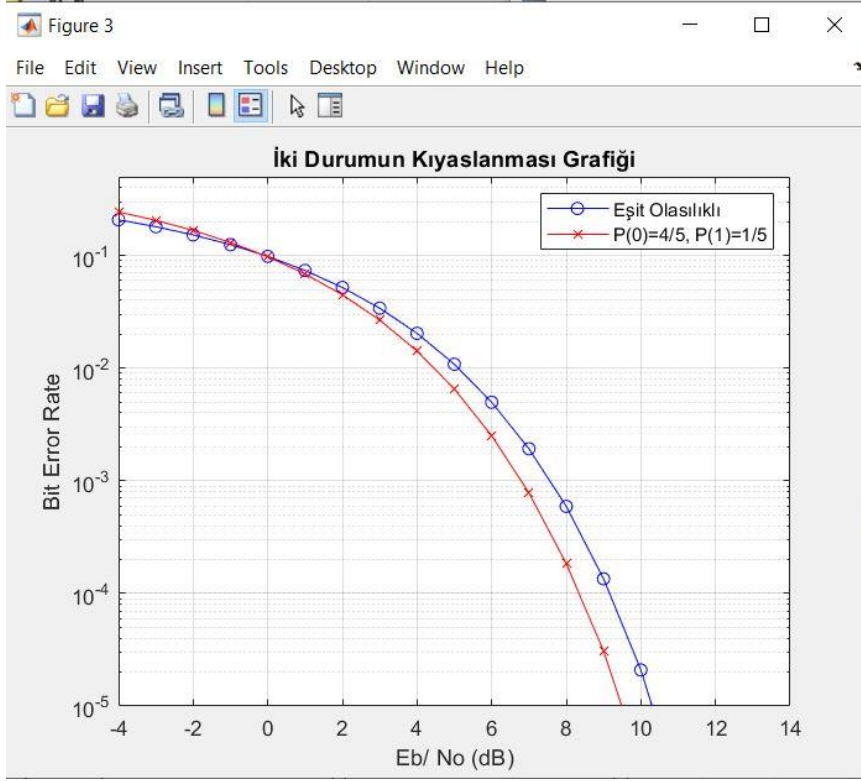
Şekil 4: Eşit Olasılıklı Durum Simülasyon Çıktısı

$P(1) = 1/5$, $P(0) = 4/5$ Durumu:



Şekil 5: $P(1) = 1/5$, $P(0) = 4/5$ Durumu Simülasyon Çıktısı

Her İki Durumun Kıyaslanması Grafiği:



Şekil 6: İki Durumun Kıyas Grafiği

SONUÇLAR VE YORUMLAR

Şekil 4 ve Şekil 5 kıyası yapıldığında aynı karakteristikte bit hata olasılığı grafikleri gözlenmektedir. Gözlem sonucunda aynı sistemde bitlerin olasılıkları değiştirilerek bit hata olasılığı değerleri ve grafiği değiştirildiği gözlemlenmiştir. BHO eğrisinin belirli x değerlerinde daha düşük değer alması istenir. Bu ödev kapsamında olasılık dağılımı değiştirilerek belirli x değerinde BHO değerinin azaltılması sağlanmıştır. Bu durum Şekil 6'da görülebilmektedir. Ödev kapsamında bir temel bant haberleşmesinde alıcı ve verici yapılarının tasarımı, tasarımda kullanılması gereken verilerin analitik çıkarımlarının yapılması ve çıkarım sonuçlarının simülasyon ortamına aktarılması becerileri edinilmiştir. Analitik çıkarımlar ve simülasyon sonucu kıyaslanarak tutarlılığı kontrol edilmiştir. MATLAB ortamında analitik verilerin oluşturulması ve analizi gerçekleştirilmiştir.