GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
BÖLÜMÜ

ELM 218

PROBABILITY AND RANDOMNESS

BONUS HW 06

Son Teslim Tarihi:

Adı – Soyadı	Abdullah MEMISOGLU
Numarası	171024001

ELM-218-HWBONUS #06 Abdullah MENİŞOĞLU 171024001

HWTC #02 Solutions

1- A fair die is rolled twice and these rolls are independent. Let us denote the results of these rolls by the random variables R_1 and R_2, respectively. Now define another random variable in terms of these two through $X = |R_1 - R_2|$ Compute the conditional probability $P\{X \leq 2 \mid R_1 + R_2 \leq 6\}$

$P\{X \leq 2 \mid R_1 + R_2 \leq 6\}$ conditional probability

conditional probability → $P\{A|B\} = \dfrac{P\{AB\}}{P\{B\}}$

$$P\{X \leq 2 \mid R_1 + R_2 \leq 6\} = \frac{P\{\{X \leq 2\} \cap \{R_1 + R_2 \leq 6\}\}}{P\{R_1 + R_2 \leq 6\}}$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$\boxed{P\{R_1 + R_2 \leq 6\} = \frac{15}{36}} \qquad P\{\{X \leq 2\} \cap \{R_1 + R_2 \leq 6\}\} = \frac{11}{36}$$

$$P\{X \leq 2 \mid R_1 + R_2 \leq 6\} = \frac{P\{\{X \leq 2\} \cap \{R_1 + R_2 \leq 6\}\}}{P\{R_1 + R_2 \leq 6\}} = \frac{11/36}{15/36} = \boxed{\frac{11}{15}} //$$

2- Starting from tomorrow the probability that it rains is 0.3 for each day, independent of others. How many days after today should we expect the first rain? Additionally tell us the relation between Bernoulli and Geometric Random variables.

Biliyoruz ki "geometric random variable" Bernoulli denemelerinde başarılı olunan ilkin indexini tutar bu soruda "ilk yağmur beklentisi" dediği için $E[G] \rightarrow$ expectation hesabı "geometric random variable" için işler.

$$E[G] = \sum_{k=1}^{\infty} k \, pmf_G(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = p \cdot \frac{d}{dq}\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} q^k}_{A}\Big] =$$

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = q + q^2 + \dots = q(1+q+q^2 \dots) = q \cdot \frac{(1-q^{\infty})}{1-q} \quad 0<q<1 \text{ old.} \quad q \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)$$

$$= p \, \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p \cdot \left(\frac{(1-q)-(-q)}{(1-q)^2}\right) = p \cdot \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$p = 1-q$

Bu durumda "geometric random variable" için bir olayın başarılı olma olasılığı p ise ilk kez başarılı olma beklentisi $\frac{1}{p}$ imiş. Böylece $p = 0.3 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{p} = E[G] = \frac{10}{3}}$ ilk yağmur $\boxed{\frac{10}{3}}$ günün sonunda beklenir.

$\boxed{\text{cevap } \frac{10}{3} \text{ gün}}$

Bernoulli Random Variable: Bu değişken sadece 1 ve 0 değerleri alan değişkendir p olasılıklı bir olayın başarılı olma durumu ve diğer durumda sıfır

Geometric Random Variable: Bernoulli denemelerinde sonuç başarılı olana kadar olan deneme sayısı, başarılı olduğu deneme sayısıdır.

Örn. Bir hilesiz para atma olayında Tura gelmesi başarı sayılıyorsa Paranın ilk kez tura geldiği deneme sayısı "geometric random variable" temsil eder. support(x) = 1, 2, 3....

3. A soccer player scores penalties (with his attempts being independent of each other) with probability $p<1$. This player is to take 5 shots. Answer to following relevant questions (observe the inherent binomial distribution in this question).

ⓐ What is the probability that the player scores at least 3 of the 5 penalties.

$$P\{Y\geq 3\} = \sum_{k=3}^{5} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{5}{3} p^3 q^2 + \binom{5}{4} p^4 q + \binom{5}{5} p^5 q^0$$

$\rightarrow n=5$

$\hookrightarrow q = 1-p$

$$= \boxed{10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5}$$

ⓑ What is the probability that the player does not score at most 2 of the 5 penalties?

$\{$En fazla ikisini gole cevirme$\} = \{Y\leq 2\}$

$\{$En fazla ikisini gole cevirememe$\} = \{Y\leq 2\}^C = \{2 < Y \leq 5\}$

$\hookrightarrow$ support(Y)

$$= \sum_{k=3}^{5} \text{Pmf}_Y(k) = \text{ilk sorunun cevabıdır} = \boxed{10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5}$$

ⓒ What is the expected value of the number of the player's successful attemps on goals? (Bu soruda binom dağılımı gözleyiniz)

"Binomial Random Variable" a göre $E[Y^k] \Rightarrow$

Yukarıdaki nota göre

$$E[Y^k] = \sum_{i=0}^{n} i^k \text{Pmf}_Y(i) = \sum_{i=0}^{n} i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\boxed{i \cdot \binom{n}{i} = \frac{i \cdot n \cdot (n-1)!}{((n-1)-(i-1))! \cdot i!}}$$

$$E[Y^k] = n \cdot p \cdot E\left[(z+1)^{k-1}\right] \rightarrow k=1 \rightarrow n \cdot p \cdot E[1] \Rightarrow \boxed{E[Y] = n \cdot p}$$

$$\boxed{\text{expected value} = 5p} \; (n=5)$$

(d) What is the variance of the number of the player's successfull attempts on goal?

$E[Y] = np, \quad E[Y^2] = n.p.E[(z+1)^1] = n.p.\Big[\underbrace{E[z]}_{(n-1)p} + \underbrace{E[1]}_{1}\Big]$

$E[Y^2] = n.p.\big[(n-1)p+1\big]$ $\quad \rightarrow n.p(np-p+1)$

$var(Y) = E[Y^2] - \big[E[Y]^2\big] =$

$= np(np-p-1) - (np)^2 \Rightarrow (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$

$\boxed{var(Y) = 5p(1-p)}$

Bonus HW # 06 Abdullah MEMİŞOĞLU - 171024001.

Q1: If you happen to read text books on probability you will invaribly come across on abbreviation "i.i.d" which means "independent and identically distributed. ~~[illegible]~~.
Look up why "iid" random variables on probabilistic constructions happen to be so important. Do you come across other examples of such constructions, in addition to geometric and binomial random variables during your search?

Öncelikle "i.i.d" nedir?

i.i.d → Aynı Evrensel küme içinde eşit olasılık dağılımına sahip ve birbirinden bağımsız olan olaylara denir. Şöyle ki $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ i.i.d olduğu sürece her $i = 1,2 \ldots n \to X_i$ aynı "Mean" ve "Variance" değerlerine sahiptir $E(X_i) = \mu$; $Var(X_i) = \sigma^2$

$\boxed{i = 1,2,3 \ldots n}$

★ Peki neden bu kadar önemli?

• Bir kümenin bağımsız olaylarından oluştuğundan küme hakkında en çok bilgiyi verir.

• Kümeyi matematiksel bazı sistemlerin kullanımında ön koşul olduğundan çoğu zaman işimizi kolaylaştırmaktadır.

Q2 → Convince yourself by writing down several sentences of the equivalance of the nature done by a binomial RV, of bookkeeping, as stated and framed in red twice on the previous page, one of them stated rigorously through a mathematical expression.

★ Biliyoruz ki binomial random variable bir bernoulli deneme kümesinde başarılı olduğu bilgisini tutan tesadüfi değişkendir. Yani amacımız n deneme sonucunda kaç kez başarı sağlandığını bulmak. Bu yüzden n elemanlı ve "i.i.d Bernoulli Random Variable" lardan oluşan bir set oluşturuyoruz ve biliyoruz ki Bernoulli Random variable" seti sadece p=1 ve q=0 olasılık değerlerine sahip olabilen yapılar. Seti oluşturalım.

$\{X_1, X_2, X_3 \cdots X_n\}$ ve $\text{Support}(X_j) = \{0, 1\}$ $j = 1, 2 \ldots n$

Peki her başarılı durumda $X_j = 1$ başarısız durumda $X_j = 0$ ise ve ben n denemede kaç kez başarılı olunduğunu arıyorsam Binomial Random Variable değeri (başarı sayısı) şöyle olacaktır.

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 \cdots X_n$$

(her başarısız durum etkisiz (0), başarılı durum Y değişkenine 1 ekliyor ve günün sonunda Y başarılı olaylar sayısını tutan değişken olmuş olur.)

Bonus HW #06

Q3 → Show that the following is true for the cdf in eq 16:

$$\lim_{m \to -\infty} cdf_Y(m) = 0$$

$$\rightarrow \quad cdf_Y(m) = P\{Y \leq m\} = \sum_{k=0}^{m} pmf_Y(k) = \boxed{\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

★

$P\{Y \leq m\}$ ise biliyoruz ki Eq.4 (notlar) → support(Y) = 0, 1, ...

Eğer $Y \leq m$ ise support (m) = 0, 1 ..... olmalı

bu durumda $m \to -\infty$ için hiçbir durum gerçekleşemez.

$$\lim_{m \to -\infty} cdf_Y(m) = \lim_{m \to -\infty} \{Y \leq m\} = 0$$ bilinir