GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

ELM 218

PROBABILITY AND RANDOMNESS

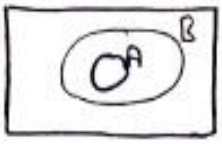
ÖDEV Bonus 5. Hafta

Son Teslim Tarihi:

Adı – Soyadı	Abdullah MEMISOGLU
Numarası	171024001

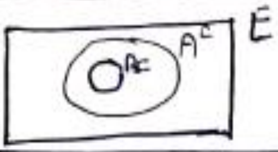
1. $A = \{$sınavdan tam not alman$\}$, $B = \{$dersi geçmen$\}$

$A \xrightarrow{\text{Implies}} B$



Aynı zamanda bu da sağlanır.

$B^c \xrightarrow{\text{Implies}} A^c$ "Eğer dersi geçemediysen, sınavdan tam not alamamışımdır"



2.

$R_1 \backslash R_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

(a) $P\{X \leq 3 \mid R_1 = 4\}$

given that

$R_1 = 4$ durumları işaretlenir buradak $X \leq 3$ olan durumların oranı alınır.

$R_1 = 4$ için her x 3'ten küçük olduğundan

$$\boxed{P\{X \leq 3 \mid R_1 = 4\} = \frac{6}{6} = 1}$$

(b) $P\{R_1 = 3 \mid X \geq 4\}$

Burada $X \geq 4$ durumlarını yuvarlak içine alalım. Hiçbir $R_1 = 3$ için $X \geq 4$ olanaz

$R_1 = 1, R_1 = 2, R_1 = 5, R_1 = 6$ 'da $X \geq 4$ gözlenir.

$$\boxed{P\{R_1 = 3 \mid X \geq 4\} = 0}$$

(3) Bernoulli olasılıksal değişkenlerinin her birinin p kadar başarı olasılığı, q kadar başarısızlık olasılığı olsun.

$\{G \geq 5\} = \{$En az 4 kez başarısız olunmuş olay$\}$ complementary two events $\boxed{q = 1-p}$

$\{G \geq 10\} = \{$En az 9 kez başarısız olunmuş olay$\}$

$$P\{10 < G \leq 5\} = P\{\{G \leq 5\} \cap \{G \leq 10\}^c\}$$

G	Probability of the corresponding event
1	$p = P\{X_1 = 1\}$
2	$q.p = P\{X_1 = 0, X_2 = 1\}$
$\vdots$	
k	$q^{k-1} p$

$\{G \leq 10\}^c = \{G > 10\} \rightarrow$

$$= P\{10 < G \leq 5\} = \underbrace{p.\sum_{k=5}^{9} q^{k-1}}_{P\{\{G \leq 5\} \cap \{G \leq 10\}^c\}} = p.(q^4 + q^5 + q^6 + q^7 + q^8)$$

$$= p.q^4.(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) = p.q^4.\frac{1-q^5}{1-q} \Rightarrow p = 1-q = \cancel{(1-q)}.\, q^4.\frac{(1-q^5)}{\cancel{(1-q)}}$$

↳ Geometrik seri toplamı

$$= \boxed{q^4.(1-q^5) = P\{10 < G \leq 5\}}$$

(4) Yukarıdaki örneği ele alırsak

$A = \{G \leq 10\}$ $\quad B = \{G \leq 5\}$ olsun $\quad P\{10 < G \leq 5\} = q^4.(1-q^5)$ olduğunu biliyoruz $P\{A^c \cap B\}$ ile bulduk

$A^c = \{G > 10\}$

support $(G) = 1, 2, 3, \ldots$

$$P\{A^c \cap B\} = q^4.(1-q^5) \stackrel{?}{=} P\{A^c\}.P\{B\}$$

$$P\{A^c\} = p.\sum_{k=10}^{\infty} q^{k-1}, \quad P\{B\} = p\sum_{k=1}^{5} q^{k-1}$$

$$P\{A^c\}.P\{B\} = p^2.\left(\sum_{i=1}^{5} q^{i-1} + \sum_{j=10}^{\infty} q^{k-1}\right\} = p^2.(q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^9 \ldots)$$

$= q^4.(1-q^5) \neq p^2.(q^0 + q^1 + \ldots)$ olduğundan bu olaylar

$P\{A^c \cap B\} \neq P\{A^c\}.P\{B\}$ bağımsız değildir.

Bonus HW #05 - Abdullah MEMİŞOĞLU - 171024001

→ Why the notation introduced in the Lecture 5 - Note 1 a better one than that I showed you earlier on the board.

On the board (1. Tanım)

$$cdf_X(i) = \sum_{k=-\infty}^{i} pmf_X(k) \qquad support(X) = \cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$$

On the Note (2. Tanım)

$$cdf_X(a_i) = \sum_{j=-\infty}^{i} pmf_X(a_j)$$

1. tanımda görüldüğü üzere toplam sembolündeki değişim tam sayılar ile sağlandığından (i) burada "discrete random variable" lar için "support" tam sayılardan oluşmaktadır. Ancak tam sayılardan oluşmak zorunda değildir. Bu sorunun çözümü 2. Tanım ile gelmekte ve toplam sembolündeki değişken ile (i) cdf ve pmf fonksiyonlarının girişi olan değişken (a_i) birbirlerinden ayrılmışlardır.

→ Eq. 3 gives you the summation based relation between the pmf and cdf. There was, if you remember, a difference relations as well between again the pmf and cdf. Express that difference relation making use of the notation in the previous note.

$$pmf_X(a_i) = P\{X = a_i\} \qquad cdf_X(a_i) = P\{X \le a_i\}$$

$$cdf_X(a_i) = P\{X \le a_i\} = P\{\{X = a_i\} \cup \{X = a_{i-1}\} \cup \{X = a_{i-2}\} \cdots\}\}$$

$\{X \le a_i\} \cap \{X = a_{i-1}\} \cap \cdots = \emptyset$ old için axiom 3 kullanılabilir.

$$P\{\bigcup_{i=-\infty}^{a_i} \{X = k\}\} \stackrel{ax\,3}{=} \sum_{k=-\infty}^{i} P\{X = k\} = \sum_{k=-\infty}^{a_i} pmf_X(a_k)$$

$$\boxed{cdf_X(a_i) = \sum_{k=-\infty}^{a_i} pmf(a_k)}$$

→ What does the following equation tell you in terms of limits operated upon the argument of the function called cdf, namely $cdf_X(a_i)$, with the argument being a_i, and the stated limit concerning the extreme values of the index "i" (eq4: $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} pmf_X(a_i) = 1$)

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=-\infty}^{j} pmf_X(a_i) \stackrel{\text{axiom3}}{=\!=\!=} P\left\{ \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{X = a_i\} \right\} = P\{E\} \stackrel{\text{axiom2}}{=\!=\!=} \underline{\underline{1}}$$

her bir $i \neq j$ $\{X = i\} \neq \{X = j\}$
olacağından mutually exclusive
böylece axiom 3 işler.

$$\lim_{j\to-\infty} \sum_{i=-\infty}^{j} pmf_X(a_i) \stackrel{\text{axiom3}}{=\!=\!=} P\left\{ \bigcup_{i=-\infty}^{-\infty} \{X = a_i\} \right\} = \underline{P\{\emptyset\} \stackrel{?}{=} 0}$$

$E^c = \emptyset \rightarrow$ axiom $\quad P\{E \cup E^c\} = \underline{1} \rightarrow P\{E\} + P\{E^c\} = 1 \rightarrow P\{E\} = 1$

$$\underline{P\{E^c\} = P\{\emptyset\} = 0}$$

→ Look up the word "subtlety".

subtlety ⇒ a small but important detail.

→ Look up the compound verb : "to encroach on"

to encroach on ⇒ to gradually cover more and more of an area. (yavaşça yayılmak)

→ Look up the words "ordeal".

ordeal ⇒ A very unpleasant and prolonged experience. (Çile, işkence)

→ Try to compute a formula for the third moment of G, $E[G^3]$

$E[G^3] = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 . pmf_G(k)$ → daha sonrasında $k(k-1)(k-2).q^{k-3}$ biçiminde 3 türev olarak yazabilmek için $k^3 - 3k^2 + 2k$ haline getirebilmeliyiz. O yüzden:

$E[G^3] = \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 . p . q^{-1}$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} (k^3-3k^2+2k) . p . q^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (3k^2-2k) q^{k-1} p$

$3k^2 - 2k$'yı ise $3k^2 - 3k + k$ olarak yazıp $k.k-1$ elde etmeliyiz.

$= \boxed{p.q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2) q^{k-3} + \sum_{k=1}^{+\infty} (3k^2-3k) q^{k-1} p + \sum_{k=1}^{\infty} k.q^{k-1}.p}$

$= p.q^2 . \frac{d^3}{dq^3}\left[\sum_{k=3}^{+\infty} q^k\right] + 3.\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-1} p + \sum_{k=1}^{\infty} k.p.q^{k-1}$

$= p.q^2 \frac{d^3}{dq^3}\left[\sum_{k=3}^{+\infty} q^k\right] + 3 \underbrace{p.q \frac{d^2}{dq^2}\left[\sum_{k=2}^{+\infty} q^k\right]}_{E[G^2]-E[G]} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k.p.q^{k-1}}_{E[G] = \frac{1}{p}}$

$= pq^2 \frac{d^3}{dq^3}\left[\sum_{k=3}^{+\infty} q^k\right] + 3\left(\frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}$

$= \boxed{pq^2 \frac{d^3}{dq^3}\left[\sum_{k=3}^{+\infty} q^k\right] + \frac{3+3q-3p}{p^2} + \frac{p}{p^2}}$

$\star\ E[G^2] = pq . \frac{d^2}{dq^2}\left[\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right] + E[G]$

$E[G^2] = \frac{1+q}{p^2}$

$E[G] = \frac{1}{p}$

$\underbrace{pq^2 \frac{d^3}{dq^3}\left[\sum_{k=3}^{+\infty} q^k\right]}_{A \text{ diyelim}}$ $E[G^3] = A + \frac{3q-2p+3}{p^2}$

A'yı bulalım

$$A = pq^2 \frac{d^3}{dq^3}\left[\sum_{k=3}^{\infty} q^k\right] = pq^2 \frac{d^3}{dq^3}\Big(\underbrace{q^3+q^4+q^5+\cdots}_{q^3\underbrace{(1+q+q^2\cdots)}_{\frac{1}{1-q}}}$$

$$= p \cdot q^2 \cdot \frac{d^3}{dq^3}\left(\frac{q^3}{1-q}\right)$$

$$= pq^2 \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{3q^2(1-q)+q^3}{(1-q)^2}\right) = pq^2 \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{-2q^3+3q^2}{(1-q)^2}\right)$$

$$= pq^2 \frac{d}{dq}\left(\frac{(-6q^2+6q)\cdot(1-q)^2+2(1-q)(3q^2-2q^3)}{(1-q)^4}\right)$$

$6q^3-6q^2-6q^2+6q$
$6q^2-12q^2+6q+4q^2-6q^3$
$2q^3-6q^2+6q$

$$= pq^2 \frac{d}{dq}\left(\frac{(1-q)(2q^3-6q^2+6q)}{(1-q)^4}\right) = pq^2 \frac{d}{dq}\left(\frac{(2q^3-6q^2+6q)}{(1-q)^3}\right)$$

$$= pq^2\left(\frac{(6q^2-12q+6)\cdot(1-q)^3+3(1-q)^2(2q^3-6q^2+6q)}{(1-q)^6}\right) = \frac{(6q^2-12q+6)(1-q)+3(2q^3-6q^2+6q)}{(1-q)^4}$$

$$= \frac{-6q^3+12q^2-6q+6q^2-12q+6+6q^3-18q^2+18q}{(1-q)^4} \cdot p \cdot q^2$$

$$= \frac{6}{(1-q)^4} \cdot p \cdot q^2 = \frac{6pq^2}{p^4} = \boxed{\frac{6q^2}{p^3} = A}$$

$$E[G^3] = A + \frac{3q-2p+3}{p^2} = \frac{6q^2}{p^3} + \underbrace{\frac{3q-2p+3}{p^2}}_{B}$$

$$B = \frac{3q-2(1-q)+3}{p^2} = \frac{\overbrace{3q-2+2q+3}^{p}}{} = \frac{5q+1}{p^2}$$

$$= \frac{6q^2}{p^3} + \frac{(5q+1)\cdot(1-q)}{p^3} = \frac{6q^2-5q^2-q+5q+1}{p^3} = \boxed{\frac{q^2+4q+1}{p^3}}$$

$$\boxed{E[G^3] = \frac{q^2+4q+1}{p^3}}$$

→ As a bonus hw, answer if the events $\{G>5\}$ and $\{G\leq 10\}$ are independent or not; Make use of the definition of independence

definition of independence →

$$P\{A\cap B\} \stackrel{?}{=} P\{A\}.P\{B\}$$

$A=\{G>5\}$

$B=\{G\leq 10\}$

$$P\{A\}=P\{G>5\}=\sum_{k=6}^{+\infty} pmf_G(k)=\sum_{k=6}^{+\infty} q^{k-1}p$$

$$P\{B\}=P\{G\leq 10\}=\sum_{k=1}^{10} pmf_G(k)=\sum_{k=1}^{10} q^{k-1}.p$$

$$\boxed{P\{A\cap B\}=\sum_{k=6}^{10} q^{k-1}p} = p.q^5(1+q+q^2+q^3+q^4) = p.q^5\frac{1-q^5}{1-q} = q^5.(1-q^4)$$

$$P\{A\}=\sum_{k=6}^{+\infty} q^{k-1}.p = p.(q^5+q^6+\cdots) = p.q^5.\frac{1}{1-q}$$

$$P\{B\}=p.(q^0+q^1+\cdots q^9) = p.\frac{1-q^{10}}{1-q}$$

$$P\{A\cap B\}=q^5.(1-q^4) \neq p.q^5.\frac{1}{1-q}.p.\frac{1-q^{10}}{1-q} = q^5(1-q^{10}) = P\{A\}.P\{B\}$$

$$P\{A\cap B\} \neq P\{A\}.P\{B\}$$

böylece $\{G>5\}$ ve $\{G\leq 10\}$ olayları bağımlıdır.