2.1.2 思考题

1. 数列收敛有很多等价的定义，比如：

(1). 数列 a_n 收敛于 a $\iff$ $\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n \geq N,$, 成立 $|a_n - a| < \epsilon$;

(2). 数列 a_n 收敛于 a $\iff$ $\forall m \in N_+, \exists N \in N_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < \frac{1}{m}$;

(3). 数列 a_n 收敛于 a $\iff$ $\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N$, 成立 $|a_n - a| < K\epsilon$, K 是一个与 ϵ 和 n 无关的常数；

解：(1). 先证充分性：

根据数列收敛的定义有：

$\forall\epsilon > 0, \exists N_1 \in N_+, \forall n > N_1, |a_n - a| < \epsilon$，取 $N = N_1 + 1$,

则 $\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$

再证必要性：

由于 $\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$ 对 $n \geq N$ 成立，

所以明显对于 $n > N$ 的情况也成立，即：

$\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

(2). 先证充分性：

对任意的 $m \in N_+$, 取 $\epsilon = \frac{1}{m}$ 易得。

再证必要性：

对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $m \in N_+$, 使得 $\epsilon \geq \frac{1}{m}$, 所以 $|a_n - a| < \frac{1}{m} \leq \epsilon$

(3). 先证充分性：

根据数列收敛有：$\forall\epsilon_1 > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon_1$

对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\epsilon_1 = K\epsilon$. 带入上式得证。

再证必要性：

$\forall\epsilon_1 > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\epsilon_1$

对任意的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{K}$. 带入上式得证。

2. 问：在数列收敛的定义中，N 是否 ϵ 的函数？

答：否。N 和 ϵ 可能有关，但不是函数关系

比如当 $n > N(\epsilon), |a_n - a| < \epsilon$, 此时 N 可以取 $N(\epsilon) + 1, N(\epsilon) + 2, ...$，不一定非要取 $N(\epsilon)$。

3. 判断正确与否：若 a_n 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon, |a_{n+1} - a| < \epsilon$

则 $|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a - a_n + a| \leq |a_{n+1} + a| + |a_n - a| < 2\epsilon$

根据上题的第三小题知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 成立。

若 a_n 有可能为 0，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 没有意义。

当 $a_n! = 0$ 时，不成立，比如 $a_{2n} = \frac{1}{n}, a_{2n+1} = \frac{1}{n^2}$.

4. 设收敛数列的每一项都是整数，问：该数列有什么特殊性质？

答：根据上一题结论，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ 取 $\epsilon = \frac{1}{2}$，知 $\exists N \in N_+, |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2}$

又 a_{n+1}, a_n 均为整数，所以 $|a_{n+1} - a_n|$ 也是整数，所以 $|a_{n+1} - a_n|$ 只能为 0，所以该数列从某项后只能是常数数列。

5. 问：收敛数列是否一定是单调数列？无穷小量是否一定是单调数列？

答：两个问题答案均为否。比如取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，数列收敛于 0，但是不单调。

6. 问：一个很小很小的量，例如取一米为单位长度时几个纳米大小的量，是否为无穷小量？如何刻画一个无穷小量的大小？

答：一个很小很小的量不是无穷小量。无穷小量是一个极限为 0 的数列，不是有限数的量。用无穷小量的阶可以刻画无穷小量的大小。

7. 问：正无穷大数列是否一定单调增加？无界数列是否一定是无穷大量？

答：正无穷大数列不一定单调增加，比如:

$$a_n=\begin{cases} n & n=2k \\ \frac{n}{2} & \text{n=2k+1} \end{cases}$$

无界数列不一定是无穷大量。比如：

$$a_n=\begin{cases} n & n=2k \\ 0 & \text{n=2k+1} \end{cases}$$

8. 判断正确与否：非负数列的极限是非负数，正数的极限是正数。

答：非负数列的极限一定是非负数。

反证法：假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a<0$, 由于 $a_n \geq 0|$ 所以 $|a_n-a|=a_n+|a|\geq|a|$

根据极限定义取 $\epsilon=|a|$ 则不存在 $N\in N_+,\forall n>N,|a_n-a|<\epsilon$

矛盾，所以 $a\geq 0$

正数的极限不一定是正数，比如：

$a_n=\frac{1}{n}$ 的极限为 0.

2.1.5 练习题

1. 按极限定义证明：

(1).$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-4}=3$

(2).$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=1$

(3).$\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$

(4).$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>0)$

解：(1).$|\frac{3n^2}{n^2-4}-3|=|\frac{3n^2-(3n^2-12)}{n^2-4}|=|\frac{12}{(n-2)(n+2)}|$

当 n>2 时，(n-2)(n+2)>n, 所以 $|\frac{12}{(n-2)(n+2)}|<\frac{12}{n}$, 所以对于给定 ϵ 取 $\epsilon>\frac{12}{n}$得$n>\frac{12}{\epsilon}$

取 $N=max\{2,[\frac{12}{\epsilon}]+1\}$ 即可。

(2).$|\frac{\sin n}{n}-1|=|\frac{\sin n-1}{n}|\leq|\frac{2}{n}|(\text{因为}-2\leq 1-\sin n\leq 0)$

对于给定的 $\epsilon>0$ 取 $N=[\frac{2}{\epsilon}]+1$ 即可。

(3). 令 $y_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}-1>-1$, 由 $(n-1)\geq\frac{n+1}{2}$

得 $1+n=(1+y_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}y_n^2\geq\frac{n(n+1)}{4}y_n^2$

得 $y_n\leq\sqrt{\frac{4}{n}}$

对于给定的 $\epsilon>0$, 取 $N=[\sqrt{\frac{4}{\epsilon}}]+1$ 即可。

(4). 当 $a\geq 11$ 时，$|\frac{a^n}{n!}|\leq\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n}$, 对于给定的 ϵ, 取 $N=[\frac{1}{\epsilon}]+1$ 即可。

当 $a\leq 1$ 时，$|\frac{a^n}{n!}|\leq|\frac{1}{n}|$, 所以对给定的 ϵ, 取 $N=[\frac{1}{\epsilon}]+1$ 即可。

当 a>1 时

当 $n>N_1^{N_1}+1$ 时, 记 $n=N_1^{N_1}+k(k=1,2,...)$, 则$a^n=a^{N_1}a^k$

$n!>n(N_1^{N_1}+1)(N_1^{N_1}+2)...(N_1^{N_1}+k)>nN_1^{N_1+k}>na^{N_1}a^k=na^n$

$|\frac{a^n}{n!}| < |\frac{a^n}{na^n}| = \frac{1}{n}$

所以对于给定的 $\epsilon > 0$ 取 $N = max\{N_1^{N_1}+1, [\frac{1}{\epsilon}+1]\}$ 即可。

2. 设 $a_n \geq 0, n \in N_+$, 数列 a_n 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

证：对任意的 $\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

由于 a_n 极限存在，所以 a_n 必有界。记为：$|a_n| \leq M$，所以 $\sqrt{a_n} \leq \sqrt{M}$

由 $|a_n - a| < \epsilon$，即 $|(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})| < \epsilon$

所以 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}| < \frac{\epsilon}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{M}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{M}+\sqrt{a}}\epsilon$

$\sqrt{M}+\sqrt{a}$ 为常数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$. 反之如何？

解：因为 $\forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

则 $|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \epsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$。

反之不成立，比如：$a_n = (-1)^n$

4. 下面一组题在本章中的许多极限计算中有用（并与第五章中的连续性概念有关）:

(1). 设 P(x) 是 x 的多项式。若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(a_n) = P(a)$;

(2). 设 b>0，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b^{a_n} = b^a$;

(3). 设 b>0，$\{a_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b a_n = \log_b a$;

(4). 设 b 为实数，$\{a_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^b = a^b$;

(5). 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n = \sin a$;

解：

(1).$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$即：$\forall\epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

且 a_n 有界，$|a_n| \leq M$

记 $P(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0$

$|b_i a_n^i - b_i a^i| = |b_i(a_n - a)(a_n^{i-1} + a_n^{i-2}a + ... + a_n a^{i-2} + a^{i-1})|$

$\leq |b_i||a_n - a|(|a_n^{i-1}| + |a_n^{i-2}a| + ... + |a_n a^{i-2}| + |a^{i-1}|)$

$\leq |a_n - a||b_i|(|M^{i-1}| + |M^{i-2}a| + ... + |M^{i-2}| + |a^{i-1}|)$

记 $c_i = |b_i|(|M^{i-1}| + |M^{i-2}a| + ... + |M^{i-2}| + |a^{i-1}|$, 则：

$|P(a_n) - P(a)| = |b_k(a_n^k - a^k) + b_{k-1}(a_n^{k-1} - a^{k-1}) + ...b_1(a_n - a)|$

$\leq |a_n - a|(c_k + c_{k-1} + ... + c_1) < (c_k + c_{k-1} + ... + c_1)\epsilon$

由于 $(c_k + c_{k-1} + ... + c_1)$ 是常数，所以根据定义有 $\lim\limits_{n\to\infty} P(a_n) = P(a)$

(2).

当 b=1 时显然成立。

当 b>1 时：

对于任意的 $0 < \epsilon < b^a$, 则：

$(\frac{\epsilon}{b^a}+1) > 1, \log_b(\frac{\epsilon}{b^a}+1) > 0, (1-\frac{\epsilon}{b^a}) < 1, \log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a}) < 0$

则一定存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时，$\log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a}) < (a_n - a) < \log_b(\frac{\epsilon}{b^a}+1)$, 所以有：

$1-\frac{\epsilon}{b^a} < b^{a_n - a} < b^{\log_b(1+\frac{\epsilon}{b^a})} = \frac{\epsilon}{b^a}+1$, 即：$|b^{a_n-a} - 1| < \frac{\epsilon}{b^a}$

所以有：$|b^{a_n} - b^a| = |b^a(b^{a_n-a} - 1)| < b^a|\frac{\epsilon}{b^a}| = \epsilon$

即对于 b>1 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} b^{a_n} = b^a$

当 b<1 时：

对于任意的 $0<\epsilon<b^a$, 则：

$(\frac{\epsilon}{b^a}+1)>1, \log_b(\frac{\epsilon}{b^a}+1)<0, (1-\frac{\epsilon}{b^a})<1, \log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})>0$

则一定存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时，$\log_b(1+\frac{\epsilon}{b^a})<(a_n-a)<\log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})$, 所以有：

$1+\frac{\epsilon}{b^a}>b^{a_n-a}>b^{\log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})}=1-\frac{\epsilon}{b^a}$, 即：$|b^{a_n-a}-1|<\frac{\epsilon}{b^a}$

所以有：$|b^{a_n}-b^a|=|b^a(b^{a_n-a}-1)|<b^a|\frac{\epsilon}{b^a}|=\epsilon$

即对于 b<1 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} b^{a_n}=b^a$

(3).

对任意的 $\epsilon>0$

当 b>1 时，存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$b^\epsilon-1>0, |a_n-a|<a(b^\epsilon-1)$，得 $a_n<ab^\epsilon$

$|\log_b a_n-\log_b a|=|\log_b\frac{a_n}{a}|=\epsilon$

当 b<1 时，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，$1-b^\epsilon>0, |a_n-a|<a(1-b^\epsilon)$，得 $a_n>ab^\epsilon$

$|\log_b a_n-\log_b a|=|\log_b\frac{a_n}{a}|=\epsilon$

(4).

当 b=1 是，结论明显成立。

当 b>1 时，对任意满足 $0<\epsilon<a^b$ 的 $\epsilon, \exists N_1, \forall n>N_1, b^a-\epsilon<a_n<b^a+\epsilon$

$|a_n^b-a^b|$