2.1.2 思考题

1. 数列收敛有很多等价的定义，比如：

(1). 数列 a_n 收敛于 a $\iff$ $\forall\epsilon>0, \exists N\in N_+, \forall n\geq N,$, 成立 $|a_n-a|<\epsilon$；

(2). 数列 a_n 收敛于 a $\iff$ $\forall m\in N_+, \exists N\in N_+, \forall n>N,$ 成立 $|a_n-a|<\frac{1}{m}$；

(3). 数列 a_n 收敛于 a $\iff$ $\forall\epsilon>0, \exists N\in N_+, \forall n>N,$ 成立 $|a_n-a|<K\epsilon$, K 是一个与 ϵ 和 n 无关的常数；

解：(1). 先证充分性：

根据数列收敛的定义有：

$\forall\epsilon>0, \exists N_1\in N_+, \forall n>N_1, |a_n-a|<\epsilon$，取 $N=N_1+1$,

则 $\forall\epsilon>0, \exists N\in N_+, \forall n\geq N, |a_n-a|<\epsilon$

再证必要性：

由于 $\forall\epsilon>0, \exists N\in N_+, \forall n\geq N, |a_n-a|<\epsilon$ 对 $n\geq N$ 成立，

所以明显对于 $n>N$ 的情况也成立，即：

$\forall\epsilon>0, \exists N\in N_+, \forall n>N, |a_n-a|<\epsilon$

(2). 先证充分性：

对任意的 $m\in N_+$, 取 $\epsilon=\frac{1}{m}$ 易得。

再证必要性：

对任意的 $\epsilon>0$, 总存在 $m\in N_+$, 使得 $\epsilon\geq\frac{1}{m}$, 所以 $|a_n-a|<\frac{1}{m}\leq\epsilon$

(3). 先证充分性：

根据数列收敛有：$\forall\epsilon_1>0, \exists N\in N_+, \forall n>N, |a_n-a|<\epsilon_1$

对任意的 $\epsilon>0$, 总存在 $\epsilon_1=K\epsilon$. 带入上式得证。

再证必要性：

$\forall\epsilon_1>0, \exists N\in N_+, \forall n>N, |a_n-a|<K\epsilon_1$

对任意的 $\epsilon>0$, 总存在 $\epsilon_1=\frac{\epsilon}{K}$. 带入上式得证。

2. 问：在数列收敛的定义中，N 是否 ϵ 的函数？

答：否。N 和 ϵ 可能有关，但不是函数关系

比如当 $n>N(\epsilon), |a_n-a|<\epsilon$, 此时 N 可以取 $N(\epsilon)+1, N(\epsilon)+2, ...$，不一定非要取 $N(\epsilon)$。

3. 判断正确与否：若 a_n 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

$\forall\epsilon>0, \exists N\in N_+, \forall n>N, |a_n-a|<\epsilon, |a_{n+1}-a|<\epsilon$

则 $|a_{n+1}-a_n|=|a_{n+1}-a-a_n+a|\leq|a_{n+1}+a|+|a_n-a|<2\epsilon$

根据上题的第三小题知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 成立。

若 a_n 有可能为 0，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 没有意义。

当 $a_n!=0$ 时，不成立，比如 $a_{2n}=\frac{1}{n}, a_{2n+1}=\frac{1}{n^2}$.

4. 设收敛数列的每一项都是整数，问：该数列有什么特殊性质？

答：根据上一题结论，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ 取 $\epsilon=\frac{1}{2}$，知 $\exists N\in N_+, |a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{2}$

又 a_{n+1}, a_n 均为整数，所以 $|a_{n+1}-a_n|$ 也是整数，所以 $|a_{n+1}-a_n|$ 只能为 0，所以该数列从某项后只能是常数数列。

5. 问：收敛数列是否一定是单调数列？无穷小量是否一定是单调数列？

答：两个问题答案均为否。比如取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，数列收敛于 0，但是不单调。

6. 问：一个很小很小的量，例如取一米为单位长度时几个纳米大小的量，是否为无穷小量？如何刻画一个无穷小量的大小？

答：一个很小很小的量不是无穷小量。无穷小量是一个极限为 0 的数列，不是有限数的量。用无穷小量的阶可以刻画无穷小量的大小。

7. 问：正无穷大数列是否一定单调增加？无界数列是否一定是无穷大量？

答：正无穷大数列不一定单调增加，比如:

$$a_n=\begin{cases} n & n=2k \\ \frac{n}{2} & \text{n=2k+1} \end{cases}$$

无界数列不一定是无穷大量。比如：

$$a_n=\begin{cases} n & n=2k \\ 0 & \text{n=2k+1} \end{cases}$$

8. 判断正确与否：非负数列的极限是非负数，正数的极限是正数。

答：非负数列的极限一定是非负数。

反证法：假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a<0$, 由于 $a_n \geq 0|$ 所以 $|a_n-a|=a_n+|a|\geq|a|$

根据极限定义取 $\epsilon=|a|$ 则不存在 $N\in N_+,\forall n>N,|a_n-a|<\epsilon$

矛盾，所以 $a\geq 0$

正数的极限不一定是正数，比如：

$a_n=\frac{1}{n}$ 的极限为 0.

2.1.5 练习题

1. 按极限定义证明：

(1).$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-4}=3$

(2).$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=1$

(3).$\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=1$

(4).$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>0)$

解：(1).$|\frac{3n^2}{n^2-4}-3|=|\frac{3n^2-(3n^2-12)}{n^2-4}|=|\frac{12}{(n-2)(n+2)}|$

当 n>2 时，(n-2)(n+2)>n, 所以 $|\frac{12}{(n-2)(n+2)}|<\frac{12}{n}$, 所以对于给定 ϵ 取 $\epsilon>\frac{12}{n}得n>\frac{12}{\epsilon}$

取 $N=max\{2,[\frac{12}{\epsilon}]+1\}$ 即可。

(2).$|\frac{\sin n}{n}-1|=|\frac{\sin n-1}{n}|\leq|\frac{2}{n}|(因为-2\leq 1-\sin n\leq 0)$

对于给定的 $\epsilon>0$ 取 $N=[\frac{2}{\epsilon}]+1$ 即可。

(3). 令 $y_n=(1+n)^{\frac{1}{n}}-1>-1$, 由 $(n-1)\geq\frac{n+1}{2}$

得 $1+n=(1+y_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}y_n^2\geq\frac{n(n+1)}{4}y_n^2$

得 $y_n\leq\sqrt{\frac{4}{n}}$

对于给定的 $\epsilon>0$, 取 $N=[\sqrt{\frac{4}{\epsilon}}]+1$ 即可。

(4).

当 $a\leq 1$ 时，$|\frac{a^n}{n!}|\leq|\frac{1}{n!}|\leq|\frac{1}{n}|$, 所以对给定的 ϵ, 取 $N=[\frac{1}{\epsilon}]+1$ 即可。

当 a>1 时, 记 $N_1=[a]+1,则a<N_1$

当 $n>N_1$

$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\times\frac{a}{2}...\times\frac{a}{N_1}...\times\frac{a}{n}<\frac{a^{N_1}}{N_1!}\frac{a}{n}$

所以取 $N=max\{N_1+1,[\frac{a^{N_1+1}}{N_1!\epsilon}]+1\}$

2. 设 $a_n\geq 0,n\in N_+$, 数列 a_n 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

证：

当 a=0 时，对任意的 $\epsilon>0,\epsilon^2>0,\exists N_1,\forall n>N_1,|a_n-a|=|a_n-0|=|a_n|<\epsilon^2$

所以 $\sqrt{a_n}<\epsilon$

当 a>0 时，对任意的 $\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|a_n-a|<\epsilon$

由 $|a_n-a|<\epsilon$，即 $|(\sqrt{a_n}-\sqrt{a})(\sqrt{a_n}+\sqrt{a})|<\epsilon$

所以 $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|<\frac{\epsilon}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\leq\frac{\epsilon}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\epsilon$

$\frac{1}{\sqrt{a}}$ 为常数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之如何？

解：因为 $\forall\epsilon>0,\exists N,\forall n>N,|a_n-a|<\epsilon$

则 $|a_n|-|a|\leq|a_n-a|<\epsilon$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$。

反之不成立，比如：$a_n=(-1)^n$

4. 下面一组题在本章中的许多极限计算中有用（并与第五章中的连续性概念有关）：

(1). 设 P(x) 是 x 的多项式。若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(a_n)=P(a)$;

(2). 设 b>0，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$;

(3). 设 b>0，$\{a_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_b a_n=\log_b a$;

(4). 设 b 为实数，$\{a_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^b=a^b$;

(5). 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin a$;

解：

(1).$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$即：$\forall\epsilon>0,\exists N\in N_+,\forall n>N,|a_n-a|<\epsilon$

且 a_n 有界，$|a_n|\leq M$

记 $P(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+...+b_1x+b_0$

$|b_ia_n^i-b_ia^i|=|b_i(a_n-a)(a_n^{i-1}+a_n^{i-2}a+...+a_na^{i-2}+a^{i-1})|$

$\leq|b_i||a_n-a|(|a_n^{i-1}|+|a_n^{i-2}a|+...+|a_na^{i-2}|+|a^{i-1}|)$

$\leq|a_n-a||b_i|(|M^{i-1}|+|M^{i-2}a|+...+|M^{i-2}|+|a^{i-1}|)$

记 $c_i=|b_i|(|M^{i-1}|+|M^{i-2}a|+...+|M^{i-2}|+|a^{i-1}|)\geq 0$, 则：

$|P(a_n)-P(a)|=|b_k(a_n^k-a^k)+b_{k-1}(a_n^{k-1}-a^{k-1})+...b_1(a_n-a)|$

$\leq|a_n-a|(c_k+c_{k-1}+...+c_1)<(c_k+c_{k-1}+...+c_1)\epsilon$

由于 $(c_k+c_{k-1}+...+c_1)$ 是常数，所以根据定义有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(a_n)=P(a)$

(2).

当 b=1 时显然成立。

当 b>1 时：

对于任意的 $0<\epsilon<b^a$, 则：

$(\frac{\epsilon}{b^a}+1)>1,\log_b(\frac{\epsilon}{b^a}+1)>0,(1-\frac{\epsilon}{b^a})<1,\log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})<0$

则一定存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时，$\log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})<(a_n-a)<\log_b(\frac{\epsilon}{b^a}+1)$, 所以有：

$1-\frac{\epsilon}{b^a}<b^{a_n-a}<b^{\log_b(1+\frac{\epsilon}{b^a})}=\frac{\epsilon}{b^a}+1$, 即：$|b^{a_n-a}-1|<\frac{\epsilon}{b^a}$

所以有：$|b^{a_n}-b^a|=|b^a(b^{a_n-a}-1)|<b^a|\frac{\epsilon}{b^a}|=\epsilon$

即对于 b>1 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$

当 b<1 时：

对于任意的 $0 < \epsilon < b^a$, 则：

$(\frac{\epsilon}{b^a}+1) > 1, \log_b(\frac{\epsilon}{b^a}+1) < 0, (1-\frac{\epsilon}{b^a}) < 1, \log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a}) > 0$

则一定存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时，$\log_b(1+\frac{\epsilon}{b^a}) < (a_n - a) < \log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})$, 所以有：

$1+\frac{\epsilon}{b^a} > b^{a_n-a} > b^{\log_b(1-\frac{\epsilon}{b^a})} = 1-\frac{\epsilon}{b^a}$, 即：$|b^{a_n-a}-1| < \frac{\epsilon}{b^a}$

所以有：$|b^{a_n}-b^a| = |b^a(b^{a_n-a}-1)| < b^a|\frac{\epsilon}{b^a}| = \epsilon$

即对于 b<1 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} b^{a_n} = b^a$

(3).

对任意的 $\epsilon > 0$

当 b>1 时，$b^{\epsilon}-1 > 0, b^{-\epsilon}-1 < 0$

存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，$a(b^{-\epsilon}-1) < a_n - a < a(b^{\epsilon}-1)$，得 $ab^{-\epsilon} < a_n < ab^{\epsilon}$, 所以：

$b^{-\epsilon} < \frac{a_n}{a} < b^{\epsilon} \Rightarrow -\epsilon < \log_b \frac{a_n}{a} < \epsilon$

$|\log_b a_n - \log_b a| = |\log_b \frac{a_n}{a}| < \epsilon$

当 b<1 时，$1-b^{\epsilon} > 0, 1-b^{-\epsilon} < 0$

存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，$a(1-b^{-\epsilon}) < a - a_n < a(1-b^{\epsilon})$，得 $ab^{-\epsilon} > a_n > ab^{\epsilon}$, 所以：

$b^{-\epsilon} > \frac{a_n}{a} > b^{\epsilon} \Rightarrow -\epsilon < \log_b \frac{a_n}{a} < \epsilon$

$|\log_b a_n - \log_b a| = |\log_b \frac{a_n}{a}| < \epsilon$

(4).

对任意的 $\epsilon > 0, (a^b+\epsilon)^{\frac{1}{b}} - a > 0, (a^b-\epsilon)^{\frac{1}{b}} - a < 0$, 存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时

$(a^b-\epsilon)^{\frac{1}{b}} - a < a_n - a < (\epsilon+a^b)^{\frac{1}{b}} - a$，得 $(a^b-\epsilon)^{\frac{1}{b}} < a_n < (a^b+\epsilon)^{\frac{1}{b}}$

所以 $a^b - \epsilon < a_n^b < a^b + \epsilon$, 即 $|a_n^b - a^b| < \epsilon$

或者 $a_n^b = e^{b\ln a_n}$, 由 (2),(3) 结果知结论成立。

(5).

对任意的 $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$, 存在 N, 当 n>N 时，$|a_n - a| < \epsilon$, 则：

$|\sin a_n - \sin a| = |2\cos\frac{a_n+a}{2}\sin\frac{a_n-a}{2}| \le 2|\sin\frac{a_n-a}{2}| < 2.|\frac{a_n-a}{2}| = \epsilon (0 < x < \frac{\pi}{2}, \sin x < x)$

5. 设 a>0, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$

证：$\frac{\log_a n}{n} = \frac{1}{n}\log_a n = \log_a \sqrt[n]{n}$

根据上一题的结论，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = \log_a 1 = 0.(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1)$.