1.3.2 练习题 1. 关于 bernoulli 不等式的推广：

(1). 当 $-2 \le h \le -1$ 时，bernoulli 不等式 $(1+h)^n \ge 1+nh$ 仍然成立。

(2). 当 $h \ge 0$ 时，成立不等式 $(1+h)^n \ge \frac{n(n-1)h^2}{2}$, 并推广之。

(3) 证明：当 $a_i > 1-(i=0,1,2,...,n)$ 且同号，则成立不等式

$\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i) \ge 1+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

解：

(1). 证明：当 $-2 \le h \le -1$ 时，$-1 \le 1+h \le 0$，所以有 $-1 \le (1+h)^n \le 0$

$(1+h)^n - 1 = h(1+(1+h)+(1+h)^2+...+(1+h)^n-1) \ge 1+nh$

(2). 证明：

当 n=1,2 时容易验证不等式成立。当 n 大于 2 的时候：

$(1+h)^n = 1+C_n^1h+C_n^2h^2+...+h^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+...+h^n > \frac{n(n-1)h^2}{2}$

(3). 证明：

用数学归纳法，当 n=1 时容易验证不等式成立，假设当 n=k 时不等式成立，即：

$\prod\limits_{i=1}^{k}(1+a_i) \ge 1+\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$

记 $A_k = \prod\limits_{i=1}^{k}(1+a_i), B_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$

当 n=k+1 时，$A_{k+1} = A_k \times (1+a_{k+1}) \ge (1+B_k)(1+a_{k+1})$

$= 1+B_k+a_{k+1}+B_ka_{k+1}1+b_{k+1}+B_ka_{k+1} \ge 1+B_{k+1}$

不等式成立，得证。

2. 阶乘 $n!$ 在数学分析以及其他课程中经常出现，以下是几个有关的不等式，它们都可以从平均值不等式得到。

(1). 当 $n > 1$ 时，$n! < (\frac{n+1}{2})^n$;

(2). 利用 $(n!)^2 = (n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)...(1\cdot n)$ 证明当 n>1 时成立：

$n! < (\frac{n+2}{\sqrt{6}})^n$;

(3). 比较 (1) 和 (2) 中的两个不等式优劣，并说明原因；

(4). 对任意实数 r 成立 $(\sum\limits_{k=1}^{n} k^r)^n \ge n^n(n!)^r$

解：

(1). 证：

$n! < (\frac{1+2+...+n}{n})^n = (\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n})^n = (\frac{n+1}{2})^n$, 得证。

(2). 证：

由 $k \cdot (n-k+1) < (\frac{k+n-k+1}{2})^2 = (\frac{n+1}{2})^2$ 得：

由 $k \cdot (n-k+1) = nk - k^2 + k$ 得：

$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1))...(n \cdot 1) < (\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} nk - \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} k}{n})^n$

$= (\frac{n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}}{n})^n = (\frac{(n+1)}{6} \cdot (3n - (2n+1) + 3))^n$

$= (\frac{(n+1)}{6} \cdot (n+2))^n < (\frac{(n+2)^2}{6})^n$

两边开方得：$n! < (\frac{n+2}{\sqrt{6}})^n$

(3).(2) 中的不等式比 (1) 中的不等式更优，因为 $\frac{n+2}{\sqrt{6}} < \frac{n+1}{2}$

(4). 证：

$(\sum\limits_{k=1}^{n} k^r)^n \geq (n\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} k^r})^n = n^n(n!)^r$

3. 证明几何平均值-调和平均值不等式：$(\prod\limits_{k=1}^{n})^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$

证：

因为：$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} = \frac{n}{(\prod\limits_{k=1} n)^{\frac{1}{n}}}$. 所以：

$(\prod\limits_{k=1}^{n})^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$

4. 证明：当 a,b,c 为非负数时成立 $\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$

证：

先证前半部分：$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt{\frac{3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca}}{3}} = \sqrt[3]{abc}$

再证后半部分：

由 $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$ 两边叠加得 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

两边同时加上 $2ab+2bc+2ca$ 得 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$

即 $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, 开方整理即得。

5. 证明以下几个不等式：

(1).$|a-b| \geq |a| - |b|$ 和 $|a-b| \geq ||a| - |b||$

(2).$|a_1| - \sum\limits_{k=2}^{n} |a_k| \leq |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, 又问：左边可否为 $||a_1| - \sum\limits_{k=2}^{n} |a_k||$

(3).$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a+b|} + \frac{|b|}{1+|a+b|}$

(4).$|(a+b)^n - a^n| \leq (|a| + |b|)^n - |a|^n$

解：

(1).$|a-b|+|b|\geq|a-b+b|=|a|$ 即 $|a-b|\geq|a|-|b|$

根据前面的不等式有 $|a-b|\geq|a|-|b|$，又 $|a-b|=|b-a|\geq|b|-|a|$, 即：$-|a-b|\leq||a|-|b||\leq|a-b|$ 所以有 $|a-b|\geq||a|-|b||$

(2). 先证后半部分：

用数学归纳法：

当 n=1，2 时不等式明显成立。假设当 n=k 时不等式成立，即：

$|\sum\limits_{i=1}^{k}a_i|\leq\sum\limits_{i=1}^{k}|a_i|$

则当 n=k+1 时有：

$\sum\limits_{i=1}^{k+1}|a_i|=\sum\limits_{i=1}^{k}|a_i|+|a_{k+1}|\geq|\sum\limits_{i=1}^{k}a_i|+|a_{k+1}|\geq|\sum\limits_{i=1}^{k}a_i+a_{k+1}|=|\sum\limits_{i=1}^{k+1}a_i|$

不等式对 n=k+1 成立。

再证前半部分：

根据前面所证，有：

$|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k|+\sum\limits_{k=2}^{n}|a_k|=|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k|+\sum\limits_{k=2}^{n}|-a_k|\geq|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=2}^{n}(-a_k)|=|a_1|$ 即：

$|a_1|-\sum\limits_{k=2}^{n}|a_k|\leq|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k|$. 左边不能为 $||a_1|-\sum\limits_{k=2}^{n}|a_k||$, 比如取 $|a_1=0,a_2=2,a_3=-9|$, 不等式不成立。

(3).

当 $|a+b|=0$ 时不等式显然成立。当 $|a+b|>0$ 时：

$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{1}{\frac{1}{|a+b|}+1}\leq\frac{1}{\frac{1}{|a|+|b|}+1}=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$

(4).$|(a+b)^n-a^n|=|\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k-a^n|=|\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k|a|^{n-k}|b|^k$

$=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k|a|^{n-k}|b|^k-|a|^n=(|a|+|b|)^n-|a|^n$

6. 试按下列提示，给出 cauchy 不等式的几个不通证明：

(1) 用数学归纳法。

(2) 用 lagrange 恒等式：$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2-(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_kb_k|)^2=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(|a_k||b_i|-|a_i||b_k|)^2$。

(3). 利用不等式 $|AB|\leq\frac{A^2+B^2}{2}$

(4). 构造复的辅助数列：$c_k=a_k^2-b_k^2+2i|a_kb_k|,k=1,2,...n$, 再利用

$|\sum\limits_{k=1}^{n}c_k|\leq\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k|$

解：

(1). 用数学归纳法：当 n=2 时容易验证不等式成立。当 n>2 时，假设当 n=k 时不等式成立，即：

$\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2 \geq (\sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i)^2$, 当 n=k+1 时：

$\sum\limits_{i=1}^{k+1} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{k+1} b_i^2 = (\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2)(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2 \sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2 \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$

$\geq (\sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i)^2 + 2\sqrt{a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \sum\limits_{i=1}^{k} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{k} b_i^2} + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$

$\geq (\sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i)^2 + 2a_{k+1} b_{k+1} \sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$

$= (\sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1})^2 = (\sum\limits_{i=1}^{k+1} a_i b_i)^2$

(2). 等式右边非负，整理即得。

(3). 如果 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$, 则不等式显然成立，当 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2! = 0$ 时，记 $\lambda^2 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_i^2}}$

$\lambda^2 a_k^2 + \frac{b_k^2}{\lambda^2} \geq 2a_k b_k$ 所以 $\lambda^2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{\lambda^2} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$

即：$\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$

(4).$|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 + 2i \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|| = \sqrt{(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^2 + 4(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{(a_k^2 - b_k^2)^2 + 4(|a_k b_k|^2)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(a_k^2 + b_k^2)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

由 $|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$,即:$\sqrt{(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^2 + 4(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

两边平方得：$(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^2 + 4(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2 \leq (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)^2 + (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^2 + 2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

即:$(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)^2 + (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^2 - 2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 + 4(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|)^2 \leq (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)^2 + (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^2 + 2 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

整理即得。

7. 用向前-向后数学归纳法证明：$0 < x_i \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, ..., n$, 则

$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^n} \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)}{[\sum\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)]^n}$

证：

原不等式等价于：$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^n}{[\sum\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)]^n}$

当 n=1 时，不等式明显成立。当 n=2 时, 不等式等价于：

$\iff x_1x_2(1-x_1+1-x_2)^2 \leq (x_1+x_2)^2(1-x_1)(1-x_2)$

$\iff x_1x_2(4+x_1^2+x_2^2-4x_1-4x_2+2x_1x_2) \leq (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)(1-x_1-x_2+x_1x$

$\iff 4x_1x_2+x_1^3x_2+x_1x_2^3-4x_1^2x_2-4x_1x_2^2+2x_1^2x_2^2$

$\leq x_1^2-x_1^3-x_1^2x_2+x_1^3x_2+2x_1x_2-2x_1^2x_2-2x_1x_2^2+2x_1^2x_2^2+x_2^2-x_1x_2^2-x_2^3+x_1x_2^3$

$= x_1^2+x_2^2-x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2+x_1^3x_2+x_1x_2^3+2x_1x_2+2x_1^2x_2^2$

$\iff 2x_1x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2 \leq x_1^2+x_2^2-x_1^3-x_2^3$

$\iff x_1^2+x_2^2-x_1^3-x_2^3-2x_1x_2+x_1^2x_2+x_1x_2^2 \geq 0$

$\iff (x_1-x_2)^2-(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+x_1x_2(x_1+x_2) \geq 0$

$\iff (x_1-x_2)^2-(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2 \geq 0$

$\iff (x_1-x_2)^2(1-x_1-x_2) \geq 0$

由于 $x_i \leq \frac{1}{2}$ 所以 $1-x_1-x_2 \geq 0$, 所以当 n=2 时不等式成立:

$\frac{x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \leq \frac{(x_1+x_2)^2}{[(1+x_1)+(1+x_2)]^2} ---------(1)$

假设当 $n=2^m$ 时不等式成立，即:

$\frac{\prod\limits_{i=1}^{2^m} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{2^m}(1-x_i)} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{2^m} x_i)^{2^m}}{[\sum\limits_{i=1}^{2^m}(1-x_i)]^{2^m}}$

又对任意的 n 有 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}}{1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}}$

则当 $n=2^{m+1}$ 时, 记 $A_m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^m} x_i}{2^m}, B_m = \frac{\sum\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i}{2^m}$:

$\frac{\prod\limits_{i=1}^{2^{m+1}} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{2^{m+1}}(1-x_i)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{2^m} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{2^m}(1-x_i)\cdot} \frac{\prod\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i}{\prod\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}}(1-x_i)} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{2^m} x_i)^{2^m}}{[\sum\limits_{i=1}^{2^m}(1-x_i)]^{2^m}} \cdot \frac{(\sum\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i)^{2^m}}{[\sum\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}}(1-x_i)]^{2^m}}$

$= (\frac{A_m}{1-A_m} \cdot \frac{B_m}{1-B_m})^{2^m} = (\frac{A_mB_m}{(1-A_m)(1-B_m)})^{2^m}$

$\leq \{[\frac{(1-A_m)(1-B_m)}{1-A_m+1-B_m}]^2\}^{2^m} = [\frac{A_m+B_m}{2-A_m-B_m}]^{2^{m+1}}$(根据 (1) 式)

$= \{\frac{\sum\limits_{i=1}^{2^m} x_i + \sum\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i}{2^{m+1}-(\sum\limits_{i=1}^{2^m} x_i + \sum\limits_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i)}\}^{2^{m+1}}$

$= (\frac{\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{2^{m+1}}(1-x_i)})^{2^{m+1}}$

即不等式当 $n=2^{m+1}$ 时成立。

证向后部分：

假设当 n=k 时不等式成立: $\frac{\prod\limits_{i=1}^{k} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{k}(1-x_i)} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i)^k}{[\sum\limits_{i=1}^{k}(1-x_i)]^k}$

记 $A = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i}{k-1}$ 则 $\frac{A}{1-A} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)}$

当 n=k-1 时：

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)} \cdot \frac{A}{1-A} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i A)^k}{[\sum\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)+(1-A)]^k}$$

$$= \frac{(k\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i)^k}{[(k-1)^2-(k-1)\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i+(k-1)-\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i]^k}$$

$$= \frac{(k\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i)^k}{[k(k-1)-k\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i]^k}$$

$$= \frac{(\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i)^k}{[(k-1)-\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i]^k}$$

$$= \frac{(\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i)^k}{[\sum\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)]^k}$$

所以：

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{k-1} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i)^k}{[\sum\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)]^k} \cdot \frac{1-A}{A} = \frac{(\sum\limits_{i=1}^{k-1} x_i)^{k-1}}{[\sum\limits_{i=1}^{k-1}(1-x_i)]^{k-1}}$$

即不等式对于 n=k-1 成立，据以上所知，不等式对一切 n 都成立。

8. 设 a,c,g,t 均为非负数，a+c+g+t=1, 证明：$a^2+c^2+g^2+t^2 \geq \frac{1}{4}$，且其中的等号成立的充分必要条件是 $a=c=g=t=\frac{1}{4}$.

证：

由均值不等式得：

$\sqrt{\frac{a^2+c^2+g^2+t^2}{4}} \geq \frac{a+c+g+t}{4} = \frac{1}{4}$，整理即得。