

## 2.1.2 思考题

1. 数列收敛有很多等价的定义, 比如:

(1). 数列  $a_n$  收敛于  $a \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n \geq N$ , 成立  $|a_n - a| < \epsilon$ ;

(2). 数列  $a_n$  收敛于  $a \iff \forall m \in N_+, \exists N \in N_+, \forall n > N$ , 成立  $|a_n - a| < \frac{1}{m}$ ;

(3). 数列  $a_n$  收敛于  $a \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N$ , 成立  $|a_n - a| < K\epsilon$ ,  $K$  是一个与  $\epsilon$  和  $n$  无关的常数;

解: (1). 先证充分性:

根据数列收敛的定义有:

$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in N_+, \forall n > N_1, |a_n - a| < \epsilon$ , 取  $N = N_1 + 1$ ,

则  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$

再证必要性:

由于  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n \geq N, |a_n - a| < \epsilon$  对  $n \geq N$  成立,

所以明显对于  $n > N$  的情况也成立, 即:

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

(2). 先证充分性:

对任意的  $m \in N_+$ , 取  $\epsilon = \frac{1}{m}$  易得。

再证必要性:

对任意的  $\epsilon > 0$ , 总存在  $m \in N_+$ , 使得  $\epsilon \geq \frac{1}{m}$ , 所以  $|a_n - a| < \frac{1}{m} \leq \epsilon$

(3). 先证充分性:

根据数列收敛有:  $\forall \epsilon_1 > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon_1$

对任意的  $\epsilon > 0$ , 总存在  $\epsilon_1 = K\epsilon$ . 带入上式得证。

再证必要性:

$\forall \epsilon_1 > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < K\epsilon_1$

对任意的  $\epsilon > 0$ , 总存在  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{K}$ . 带入上式得证。

2. 问: 在数列收敛的定义中,  $N$  是否  $\epsilon$  的函数?

答: 否。  $N$  和  $\epsilon$  可能有关, 但不是函数关系

比如当  $n > N(\epsilon), |a_n - a| < \epsilon$ , 此时  $N$  可以取  $N(\epsilon) + 1, N(\epsilon) + 2, \dots$ , 不一定非要取  $N(\epsilon)$ 。

3. 判断正确与否: 若  $a_n$  收敛, 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$  和  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon, |a_{n+1} - a| < \epsilon$

则  $|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a - a_n + a| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 2\epsilon$

根据上题的第三小题知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$  成立。

若  $a_n$  有可能为 0, 则  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  没有意义。

当  $a_n \neq 0$  时, 不成立, 比如  $a_{2n} = \frac{1}{n}, a_{2n+1} = \frac{1}{n^2}$ .

4. 设收敛数列的每一项都是整数, 问: 该数列有什么特殊性质?

答: 根据上一题结论,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$  取  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , 知  $\exists N \in N_+, |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2}$

又  $a_{n+1}, a_n$  均为整数, 所以  $|a_{n+1} - a_n|$  也是整数, 所以  $|a_{n+1} - a_n|$  只能为 0, 所以该数列从某项后只能是常数数列。

5. 问: 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

答：两个问题答案均为否。比如取  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ，数列收敛于 0，但是不单调。

6. 问：一个很小很小的量，例如取一米为单位长度时几个纳米大小的量，是否为无穷小量？如何刻画一个无穷小量的大小？

答：一个很小很小的量不是无穷小量。无穷小量是一个极限为 0 的数列，不是有限数的量。用无穷小量的阶可以刻画无穷小量的大小。

7. 问：正无穷大数列是否一定单调增加？无界数列是否一定是无穷大量？

答：正无穷大数列不一定单调增加，比如：

$$a_n = \begin{cases} n & n = 2k \\ \frac{n}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

无界数列不一定是无穷大量。比如：

$$a_n = \begin{cases} n & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$$

8. 判断正确与否：非负数列的极限是非负数，正数的极限是正数。

答：非负数列的极限一定是非负数。

反证法：假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < 0$ ，由于  $a_n \geq 0$  所以  $|a_n - a| = a_n + |a| \geq |a|$

根据极限定义取  $\epsilon = |a|$  则不存在  $N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

矛盾，所以  $a \geq 0$

正数的极限不一定是正数，比如：

$a_n = \frac{1}{n}$  的极限为 0.

### 2.1.5 练习题

1. 按极限定义证明：

(1).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2-4} = 3$

(2).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 1$

(3).  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = 1$

(4).  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 (a > 0)$

解：(1).  $|\frac{3n^2}{n^2-4} - 3| = |\frac{3n^2 - (3n^2-12)}{n^2-4}| = |\frac{12}{(n-2)(n+2)}|$

当  $n > 2$  时， $(n-2)(n+2) > n$ ，所以  $|\frac{12}{(n-2)(n+2)}| < \frac{12}{n}$ ，所以对于给定  $\epsilon$  取  $\epsilon > \frac{12}{n}$  得  $n > \frac{12}{\epsilon}$

取  $N = \max\{2, [\frac{12}{\epsilon}] + 1\}$  即可。

(2).  $|\frac{\sin n}{n} - 1| = |\frac{\sin n - 1}{n}| \leq |\frac{\sin n - 1}{n}|$  (因为  $-2 \leq 1 - \sin n \leq 0$ )

对于给定的  $\epsilon > 0$  取  $N = [\frac{2}{\epsilon}] + 1$  即可。

(3). 令  $y_n = (1+n)^{\frac{1}{n}} - 1 > -1$ ，由  $(n-1) \geq \frac{n+1}{2}$

得  $1+n = (1+y_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} y_n^2 \geq \frac{n(n+1)}{4} y_n^2$

得  $y_n \leq \sqrt{\frac{4}{n}}$

对于给定的  $\epsilon > 0$ ，取  $N = [\sqrt{\frac{4}{\epsilon}}] + 1$  即可。

(4).

当  $a \leq 1$  时， $|\frac{a^n}{n!}| \leq |\frac{1}{n!}| \leq |\frac{1}{n}|$ ，所以对给定的  $\epsilon$ ，取  $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$  即可。

当  $a > 1$  时，记  $N_1 = [a] + 1$ ，则  $a < N_1$

当  $n > N_1$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \dots \times \frac{a}{N_1} \dots \times \frac{a}{n} < \frac{a^{N_1}}{N_1!} \frac{a}{n}$$

所以取  $N = \max\{N_1 + 1, [\frac{a^{N_1+1}}{N_1! \epsilon}] + 1\}$

2. 设  $a_n \geq 0, n \in N_+$ , 数列  $a_n$  收敛于  $a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ .

证:

当  $a=0$  时, 对任意的  $\epsilon > 0, \epsilon^2 > 0, \exists N_1, \forall n > N_1, |a_n - a| = |a_n - 0| = |a_n| < \epsilon^2$

所以  $\sqrt{a_n} < \epsilon$

当  $a>0$  时, 对任意的  $\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

由  $|a_n - a| < \epsilon$ , 即  $|(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})| < \epsilon$

所以  $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| < \frac{\epsilon}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \epsilon$

$\frac{1}{\sqrt{a}}$  为常数, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

3. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ . 反之如何?

解: 因为  $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

则  $|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \epsilon$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ .

反之不成立, 比如:  $a_n = (-1)^n$

4. 下面一组题在本章中的许多极限计算中有用 (并与第五章中的连续性概念有关):

(1). 设  $P(x)$  是  $x$  的多项式。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n) = P(a)$ ;

(2). 设  $b>0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = b^a$ ;

(3). 设  $b>0, \{a_n\}$  为正数列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b a_n = \log_b a$ ;

(4). 设  $b$  为实数,  $\{a_n\}$  为正数列,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^b = a^b$ ;

(5). 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n = \sin a$ ;

解:

(1).  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  即:  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n > N, |a_n - a| < \epsilon$

且  $a_n$  有界,  $|a_n| \leq M$

记  $P(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0$

$|b_i a_n^i - b_i a^i| = |b_i (a_n - a)(a_n^{i-1} + a_n^{i-2} a + \dots + a_n a^{i-2} + a^{i-1})|$

$\leq |b_i| |a_n - a| (|a_n^{i-1}| + |a_n^{i-2} a| + \dots + |a_n a^{i-2}| + |a^{i-1}|)$

$\leq |a_n - a| |b_i| (|M^{i-1}| + |M^{i-2} a| + \dots + |M^{i-2}| + |a^{i-1}|)$

记  $c_i = |b_i| (|M^{i-1}| + |M^{i-2} a| + \dots + |M^{i-2}| + |a^{i-1}|) \geq 0$ , 则:

$|P(a_n) - P(a)| = |b_k (a_n^k - a^k) + b_{k-1} (a_n^{k-1} - a^{k-1}) + \dots + b_1 (a_n - a)|$

$\leq |a_n - a| (c_k + c_{k-1} + \dots + c_1) < (c_k + c_{k-1} + \dots + c_1) \epsilon$

由于  $(c_k + c_{k-1} + \dots + c_1)$  是常数, 所以根据定义有  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n) = P(a)$

(2).

当  $b=1$  时显然成立。

当  $b>1$  时:

对于任意的  $0 < \epsilon < b^a$ , 则:

$(\frac{\epsilon}{b^a} + 1) > 1, \log_b (\frac{\epsilon}{b^a} + 1) > 0, (1 - \frac{\epsilon}{b^a}) < 1, \log_b (1 - \frac{\epsilon}{b^a}) < 0$

则一定存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $\log_b (1 - \frac{\epsilon}{b^a}) < (a_n - a) < \log_b (\frac{\epsilon}{b^a} + 1)$ , 所以有:

$1 - \frac{\epsilon}{b^a} < b^{a_n - a} < b^{\log_b (1 + \frac{\epsilon}{b^a})} = \frac{\epsilon}{b^a} + 1$ , 即:  $|b^{a_n - a} - 1| < \frac{\epsilon}{b^a}$

所以有:  $|b^{a_n} - b^a| = |b^a (b^{a_n - a} - 1)| < b^a |\frac{\epsilon}{b^a}| = \epsilon$

即对于  $b>1$  成立  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = b^a$

当  $b < 1$  时:

对于任意的  $0 < \epsilon < b^a$ , 则:

$$(\frac{\epsilon}{b^a} + 1) > 1, \log_b(\frac{\epsilon}{b^a} + 1) < 0, (1 - \frac{\epsilon}{b^a}) < 1, \log_b(1 - \frac{\epsilon}{b^a}) > 0$$

则一定存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $\log_b(1 + \frac{\epsilon}{b^a}) < (a_n - a) < \log_b(1 - \frac{\epsilon}{b^a})$ , 所以有:

$$1 + \frac{\epsilon}{b^a} > b^{a_n - a} > b^{\log_b(1 - \frac{\epsilon}{b^a})} = 1 - \frac{\epsilon}{b^a}, \text{ 即: } |b^{a_n - a} - 1| < \frac{\epsilon}{b^a}$$

$$\text{所以有: } |b^{a_n} - b^a| = |b^a(b^{a_n - a} - 1)| < b^a \frac{\epsilon}{b^a} = \epsilon$$

即对于  $b < 1$  成立  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{a_n} = b^a$

(3).

对任意的  $\epsilon > 0$

当  $b > 1$  时, 存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时,  $b^\epsilon - 1 > 0, |a_n - a| < a(b^\epsilon - 1)$ , 得  $a_n < ab^\epsilon$

$$|\log_b a_n - \log_b a| = |\log_b \frac{a_n}{a}| = \epsilon$$

当  $b < 1$  时, 存在  $N_2$ , 当  $n > N_2$  时,  $1 - b^\epsilon > 0, |a_n - a| < a(1 - b^\epsilon)$ , 得  $a_n > ab^\epsilon$

$$|\log_b a_n - \log_b a| = |\log_b \frac{a_n}{a}| = \epsilon$$

(4).

对任意的  $\epsilon > 0, (a^b + \epsilon)^{\frac{1}{b}} - a > 0, (a^b - \epsilon)^{\frac{1}{b}} - a < 0$ , 存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时

$$(a^b - \epsilon)^{\frac{1}{b}} - a < a_n - a < (a^b + \epsilon)^{\frac{1}{b}} - a, \text{ 得 } (a^b - \epsilon)^{\frac{1}{b}} < a_n < (a^b + \epsilon)^{\frac{1}{b}}$$

所以  $a^b - \epsilon < a_n^b < a^b + \epsilon$ , 即  $|a_n^b - a^b| < \epsilon$

或者  $a_n^b = e^{b \ln a_n}$ , 由 (2), (3) 结果知结论成立。

(5).

对任意的  $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,  $|a_n - a| < \epsilon$ , 则:

$$|\sin a_n - \sin a| = |2 \cos \frac{a_n + a}{2} \sin \frac{a_n - a}{2}| \leq 2 |\sin \frac{a_n - a}{2}| < 2 |\frac{a_n - a}{2}| = \epsilon (0 < x < \frac{\pi}{2}, \sin x < x)$$

5. 设  $a > 0$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$

$$\text{证: } \frac{\log_a n}{n} = \frac{1}{n} \log_a n = \log_a \sqrt[n]{n}$$

根据上一题的结论,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \log_a 1 = 0. (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1).$