

Задача 8. экстремум 1

Условный экстремум $U = 3 - 8x + 6y$, если $x^2 + y^2 = 36$
 $L(x, y, \lambda) = 3 - 8x + 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 36)$

$$\begin{cases} L'_x = -8 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 6 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{2\lambda} = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{6}{2\lambda} = -\frac{3}{\lambda} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{25}{\lambda^2} = 36 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{25}{36} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{\lambda} \\ y = -\frac{3}{\lambda} \\ \lambda = \pm \frac{5}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{5} \\ y = -\frac{18}{5} \\ \lambda = \pm \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6} \right) \cup \left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6} \right)$$

$$\begin{cases} L''_{xx} = 2\lambda = 0 \\ L''_{yy} = 2\lambda = 0 \\ L''_{\lambda\lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L''_{xy} = L''_{yx} = 0 \\ L''_{x\lambda} = L''_{\lambda x} = 2x \\ L''_{y\lambda} = L''_{\lambda y} = 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{\lambda\lambda} \\ L''_{xy} & L''_{yy} & L''_{\lambda\lambda} \\ L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 0 \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} - 2x \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{vmatrix} + 2y \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2x) \cdot 4x\lambda + 2y \cdot (-4y\lambda) = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$\Delta = -8\lambda \cdot 36 = -288\lambda$$

$$\text{если } \lambda = \frac{5}{6}, \text{ то } \Delta < 0 \Rightarrow \left(\frac{24}{5}, -\frac{18}{5}, \frac{5}{6} \right) \text{ г. мин.}$$

$$\text{если } \lambda = -\frac{5}{6}, \text{ то } \Delta > 0 \Rightarrow \left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}, -\frac{5}{6} \right) \text{ г. макс.}$$