Урок 3, задание 4

Доказать сходимость последовательности (исп. критерий Коши):

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \ldots \frac{\sin n}{2^n} \Rightarrow$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{\sin 1}{2}, \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2}, \ldots, a_n, \ldots\right\}$$

$$|\sin n| \le 1$$

Ряд мажорируется $\frac{1}{2^n}$; $\varepsilon > 0$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \le$$

$$\le \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} + \ldots =$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

при всех $p \in N$ $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \ln 2 > -\ln \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

N принадлежит $A\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right) \Rightarrow$ при всех $n > N$ $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow$ при всех $n > N$ и при любом $p \in N$ $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

Последовательность сходится.