**Topologie des espaces métriques**

**Pr Toussaint SOHOU**

**14 Décembre 2021**

# Chapitre I. Espaces métriques

## 1.1. Distances

**1.1.1. Définition :** Soit $E$ un ensemble non vide. On appelle *distance* sur $E$, toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $\forall (x, y) \in E \times E$, $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ii) $\forall (x, y) \in E \times E$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)

iii) $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

**1.1.2. Définition :** On appelle *espace métrique*, tout ensemble $E$ muni d'une distance $d$.

**Exemples :**

1) Sur $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$), l'application $d$ définie par $d(x, y) = |x - y|$ est une distance appelée la distance usuelle de $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$).

2) Soit $E$ un ensemble non vide. On pose $\forall (x, y) \in E \times E$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

Alors $d$ est une distance sur $E$. Cette distance est appelée *la distance discrète.*

**1.1.3. Proposition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique.

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \ \ |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

**Preuve :**

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Longrightarrow d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$

$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \Longrightarrow d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x)$. Or $d(x, y) = d(y, x)$.

Alors $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

### 1.1.4. Distances équivalentes

**Définition :** Deux distances $d_1$ et $d_2$ sur un ensemble $E$ sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall (x, y) \in E \times E$

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

**Remarque :** De l'inégalité précédente on déduit que $\forall (x,y) \in E \times E$

$$\frac{1}{\beta} d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x,y).$$

**1.1.5. Sous-espaces métriques**

**Définition :** Soit $F$ une partie non vide d'un espace métrique $(E,d)$. La restriction $d_F = d_{|F\times F}$ de la distance $d$ à $F \times F$ est une distance sur $F$ et $(F, d_F)$ est un espace métrique appelé *sous-espace métrique* de $(E,d)$.

**Exemples :** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sont des sous-espaces métriques de $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle.

**1.1.6. Espaces métriques produits**

**Proposition et définition :** Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques. Soit $E = E_1 \times ... \times E_n$. Soient $\delta_\infty, \delta_1$ et $\delta_2$ définies par $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in E$, $\forall y = (y_1, ..., y_n) \in E$

$$\begin{aligned}
\delta_\infty(x,y) &= \sup_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i) \\
\delta_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \\
\delta_2(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Alors $\delta_\infty, \delta_1$ et $\delta_2$ sont des distances sur $E$ et elles sont équivalentes.
$E$ muni de l'une de ces trois distances est appelé *espace métrique produit* de $(E_1, d_1), ...,$ $(E_n, d_n)$.

**Remarque :** Pour l'équivalence des trois distances, on a par exemple

$$\delta_\infty \leq \delta_1 \leq \sqrt{n}\delta_2 \leq n\delta_\infty$$

**Exemple :** $\mathbb{R}^n$ (*ou* $\mathbb{C}^n$) est un espace métrique produit, les distances $\delta_\infty, \delta_1$ et $\delta_2$ étant définies par $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ (*ou* $\mathbb{C}^n$), $\forall y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ (*ou* $\mathbb{C}^n$)

$$\begin{aligned}
\delta_\infty(x,y) &= \sup_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \\
\delta_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
\delta_2(x,y) &= \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

**1.2. Normes**

**1.2.1. Définition :** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *norme* sur $E$ toute application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes :

($i$) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(*ii*) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
(*iii*) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

**1.2.2. Définition :** On appelle *espace vectoriel normé*, tout espace vectoriel muni d'une norme.

**1.2.3. Proposition :** Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall x, y \in E, \ \ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Preuve :
$x = (x - y) + y$. Alors $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$. Donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
De même $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Et comme $\|x - y\| = \|y - x\|$, on conclut que
$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

**1.2.4. Définition :** Soit $E$ un espace vectoriel. Deux normes $N_1$ et $N_2$ sur $E$ sont dites *équivalentes* s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall x \in E$

$$\alpha N_2 (x) \leq N_1 (x) \leq \beta N_2 (x).$$

**1.2.5. Exemples**

1) Sur $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application $x \in E \longmapsto |x| \in \mathbb{R}^+$ est une norme appelée la norme usuelle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $E$. Soient $\nu_\infty, \nu_1$ et $\nu_2$ définies sur $E$ par $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ , où $x_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} \nu_\infty (x) &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ \nu_1 (x) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \nu_2 (x) &= \left[ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Alors $\nu_\infty, \nu_1$ et $\nu_2$ sont trois normes équivalentes sur $E$.

**1.2.6. Proposition et définition :** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On définit une distance $d$ sur $E$ en posant

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ d (x, y) = \|x - y\|.$$

Cette distance $d$ est appelée la *distance associée à la norme* $\|.\|$ (ou *distance induite par la norme* $\|.\|$).

On déduit de cette proposition les remarques suivantes :

**1.2.7. Remarques** :

1) Tout espace vectoriel normé est un espace métrique. Mais une distance n'induit pas nécessairement une norme.

2) Deux normes sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont équivalentes.

### 1.2.8. Espace vectoriel normé produit

**1.2.8.1. Proposition et définition :** Soient $(E_1, \|.\|_1), ..., (E_n, \|.\|_n)$ des espaces vectoriels normés. Soient $N_\infty, N_1$ et $N_2$ définies sur l'espace vectoriel produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ par $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in E$

$$\begin{aligned} N_\infty(x) &= \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i \\ N_1(x) &= \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i \\ N_2(x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_i^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Alors $N_\infty, N_1$ et $N_2$ sont trois normes sur $E$ et elles sont équivalentes.

L'espace vectoriel produit $E$ muni de l'une de ces trois normes est appelé *espace vectoriel normé produit* de $(E_1, \|.\|_1), ..., (E_n, \|.\|_n)$.

**1.2.8.2. Exemple :** La structure usuelle d'espace vectoriel normé de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est obtenue en prenant l'une des trois normes usuelles équivalentes définies par $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} N_\infty(x) &= \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ N_1(x) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ N_2(x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

## 1.3. Topologie des espaces métriques

### 1.3.1. Boules dans un espace métrique

**1.3.1.1. Définition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique. Soit $a \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}^+$.

On appelle *boule ouverte* de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E \ / \ d(a, x) < r\}.$$

On appelle *boule fermée* de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{x \in E \ / \ d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle *sphère* de centre $a$ et de rayon $r$ l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E \ / \ d(a, x) = r\}.$$

**1.3.1.2. Remarque :** Si $r = 0$, alors $B(a,r) = \emptyset$ , $B_f(a,r) = \{a\}$ , $S(a,r) = \{a\}$ .

**1.3.1.3. Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle,

$$\begin{array}{lcl} B(a,r) & = & ]a-r, a+r[ \\ B_f(a,r) & = & [a-r, a+r] \\ S(a,r) & = & \{a-r, a+r\} \end{array}$$

### 1.3.2. Diamètre d'une partie

**1.3.2.1. Définition :** Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(E,d)$ .
On appelle *diamètre* de $A$, et on note $\delta(A)$, l'élément de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \ / \ (x,y) \in A \times A\} .$$

On dit que $A$ est *bornée* si $\delta(A)$ est fini.

**1.3.2.2. Remarque :** Si $A = \emptyset$ on pose $\delta(A) = 0$.

**1.3.2.3. Proposition :** Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(E,d)$ .
$A$ est bornée si et seulement si $A$ est contenue dans une boule (ouverte ou fermée) de $(E,d)$ .

**Preuve :**
**CN :** Supposons $A$ bornée. Alors $\delta(A) \in \mathbb{R}^+$. Soit $a \in A$. Alors, pour tout $x \in A$, $d(a,x) \leq \delta(A)$ .
Donc $A \subset B_f(a, \delta(A))$ .

**CS :** Supposons $A \subset B(a,r)$ . Alors $\forall (x,y) \in A \times A$, $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < 2r$.
Donc l'ensemble $\{d(x,y) \ / \ (x,y) \in A \times A\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors il admet une borne supérieure $M$ dans $\mathbb{R}$.
Et comme $\forall (x,y) \in A \times A$, $0 \leq d(x,y) \leq M$, alors $M \in \mathbb{R}^+$. Donc $\delta(A) = M \in \mathbb{R}^+$. Par conséquent $A$ est bornée.

**1.3.2.4. Définition :** Soit $X$ un ensemble. Soit $(E,d)$ un espace métrique. Soit $f : X \to E$ une application. On dit que $f$ est une *application bornée* si $f(X)$ est une partie bornée de $(E,d)$. On dit que $f$ est bornée sur une partie $A$ de $X$ si $f(A)$ est une partie bornée de $(E,d)$.

**1.3.2.5. Proposition et définition :** Soit $X$ un ensemble. Soit $(E,d)$ un espace métrique. Soit $\mathcal{F}_b(X,E)$ l'espace des applications bornées de $X$ dans $E$.
On pose $\forall f, g \in \mathcal{F}_b(X,E)$,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Alors $d_\infty$ est une distance sur $\mathcal{F}_b(X,E)$ appelée la *distance de la convergence uniforme*.

**Preuve :** Soient $f, g \in \mathcal{F}_b(X,E)$. Alors
$\exists r_1 > 0$ et $\exists y_1 \in E$ tels que $\forall x \in X,\ d(y_1, f(x)) < r_1$ et
$\exists r_2 > 0$ et $\exists y_2 \in E$ tels que $\forall x \in X,\ d(y_2, g(x)) < r_2$. Donc

$$\forall x \in X,\ d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, g(x)) < r_1 + r_2 + d(y_1, y_2).$$

Alors

$$\sup_{x\in X} d(f(x),g(x)) \leq r_1 + r_2 + d(y_1,y_2).$$

Donc $\forall f,g \in \mathcal{F}_b(X,E)$, $d_\infty(f,g) \in \mathbb{R}^+$.

Montrer les autres conditions pour avoir une distance.

### 1.3.3. Ouverts, fermés d'un espace métrique

**1.3.3.1. Définition :** Soit $(E,d)$ un espace métrique. On dit qu'une partie $O$ de $E$ est *un ouvert* de $(E,d)$ si pour tout $a \in O$, il existe une boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r > 0$ contenue dans $O$.

On dit qu'une partie $F$ de $E$ est *un fermé* de $(E,d)$ si son complémentaire dans $E$ est un ouvert de $(E,d)$.

Un ouvert est aussi appelé *une partie ouverte.* Un fermé est aussi appelé *une partie fermée.*

**1.3.3.2. Proposition :** Soit $(E,d)$ un espace métrique. Alors $E$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $(E,d)$.

**Preuve :** - $\forall a \in E$, $B(a,1) \subset E$. Donc $E$ est un ouvert.
(On remarque que $\forall r > 0, B(a,r) \subset E$).
- La proposition : "$\forall a \in \emptyset$, $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \emptyset$" est vraie car sa négation est fausse. Donc $\emptyset$ est un ouvert.

**1.3.3.3. Corollaire :** Soit $(E,d)$ un espace métrique. Alors $E$ et $\emptyset$ sont des fermés de $(E,d)$.

**1.3.3.4. Proposition :** Toute boule ouverte d'un espace métrique $(E,d)$ est un ouvert de $(E,d)$.

**Preuve :** Soit $B(a,r)$ une boule ouverte de $(E,d)$.
- Si $r = 0$ alors $B(a,r) = \emptyset$ donc c'est un ouvert.
- Si $r > 0$, soit $x \in B(a,r)$. Posons $\epsilon = r - d(a,x)$. Alors $B(x,\epsilon) \subset B(a,r)$.
En effet, $\forall y \in B(x,\epsilon)$, $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \epsilon = r$.
Donc $y \in B(a,r)$. Par conséquent $B(a,r)$ est un ouvert.

**1.3.3.5. Proposition :** Toute boule fermée d'un espace métrique $(E,d)$ est un fermé de $(E,d)$.

**Preuve :** Soit $B_f(a,r)$ une boule fermée de $(E,d)$.
- Si $r = 0$ alors $B_f(a,r) = \{a\}$. Soit $x \in C_E^{\{a\}}$. Posons $\epsilon = \frac{1}{3} d(a,x)$. Alors $a \notin B(x,\epsilon)$.
Donc $B(x,\epsilon) \subset C_E^{\{a\}}$. Par conséquent $C_E^{\{a\}}$ est ouvert. Donc $\{a\}$ est un fermé.

- Si $r > 0$, soit $x \in C_E^{B_f(a,r)}$. Alors $d(a,x) > r$. Posons $\epsilon = d(a,x) - r$.
$\forall y \in B(x,\epsilon)$, $d(x,y) < \epsilon = d(a,x) - r$.
Alors $r < d(a,x) - d(x,y) = |d(a,x) - d(x,y)| \leq d(a,y)$. Donc $y \in C_E^{B_f(a,r)}$.

Par conséquent $B(x,\epsilon) \subset C_E^{B_f(a,r)}$. Alors $C_E^{B_f(a,r)}$ est ouvert. Donc $B_f(a,r)$ est un fermé.

**1.3.3.6. Remarque :** Nous venons de montrer que tout singleton $\{a\}$ d'un espace métrique $(E,d)$ est un fermé de $(E,d)$.

**1.3.3.7. Proposition :** Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle,
$(i)$ tout intervalle ouvert est un ouvert
$(ii)$ tout intervalle fermé est un fermé.

**Preuve :** $(i)$ Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- Si $I = ]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, alors $I = B(c,r)$ où $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$.
Donc $I$ est un ouvert.
- Si $I = ]a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, pour tout $c \in I$ posons $r = \frac{1}{2}d(a,c)$. Alors $B(c,r) \subset I$.
En effet, $\forall x \in B(c,r)$, $d(c,x) < r < d(a,c)$ *i.e.* $|x-c| < |c-a| = c-a$. Alors $a-c < x-c < c-a$. Donc $a < x$ et ainsi $x \in I$. Alors $B(c,r) \subset I$. Donc $I$ est un ouvert.
- Si $I = ]-\infty,a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, de façon analogue au cas précédent, on montre que $I$ est un ouvert.
- Si $I = ]-\infty,+\infty[$ alors $I = \mathbb{R}$ qui est un ouvert.

$(ii)$ Soit $J$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
- Si $J = [a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, alors $J = B_f(c,r)$ où $c = \frac{a+b}{2}$ et $r = \frac{b-a}{2}$.
Donc $J$ est un fermé.
- Si $J = [a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $C_{\mathbb{R}}^J = ]-\infty,a[$ qui est un ouvert, donc $J$ est un fermé.
- De même si $J = ]-\infty,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $J$ est un fermé.

**1.3.3.8. Remarque :** La négation de "$A$ est un ouvert" n'est pas "$A$ est un fermé" !
- Il existe des parties qui ne sont ni ouvertes, ni fermées.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, $A = [0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.
$A$ n'est pas un ouvert car $\forall r > 0$, $B(0,r) \not\subset A$.
$C_{\mathbb{R}}^A = ]-\infty,0[ \cup [1,+\infty[$ n'est pas un ouvert car $\forall r > 0$, $B(1,r) \not\subset C_{\mathbb{R}}^A$. Donc $A$ n'est pas un fermé.

- Il existe des parties qui sont à la fois ouvertes et fermées.

**Exemple :** Dans un espace métrique $(E,d)$, $E$ et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

### 1.3.4. Propriétés des ouverts et des fermés

**1.3.4.1. Proposition :** La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.

**Preuve :** Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts d'un espace métrique $(E,d)$.
Posons $O = \bigcup_{i\in I} O_i$. Si $O = \emptyset$ alors c'est un ouvert.
Si $O \neq \emptyset$, soit $x \in O$. Alors $\exists i \in I$ tel que $x \in O_i$. Comme $O_i$ est un ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_i$.
Alors $B(x,r) \subset O$. Donc $O$ est un ouvert.

**1.3.4.2. Corollaire :** Dans un espace métrique $(E,d)$, la sphère $S(a,r)$ est un fermé.

**Preuve :** $C_E^{S(a,r)} = B(a,r) \cup C_E^{B_f(a,r)}$ qui est un ouvert car réunion d'ouverts.
Donc $S(a,r)$ est un fermé.

**1.3.4.3. Proposition :** L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

**Preuve :** Soient $O_1, ..., O_n$ un nombre fini d'ouverts d'un espace métrique $(E, d)$.
Posons $O = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i$. Si $O = \emptyset$ alors c'est un ouvert.

Si $O \neq \emptyset$, soit $x \in O$. Alors $x \in O_i$, $\forall i = 1, ..., n$. Comme $O_i$ est ouvert, $\exists r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$.

Posons $r = \min\limits_{1 \le i \le n} r_i$. Alors $r > 0$ et $B(x,r) \subset O_i$, $\forall i = 1, ..., n$. Donc $B(x,r) \subset O$. Par conséquent $O$ est un ouvert.

**1.3.4.4. Remarque :** Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

Par exemple dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, soit $I_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{0\}$.

En effet, soit $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$. Alors $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc en passant à la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on obtient $0 \le x \le 0$. Alors $x = 0$.

$\{0\}$ n'est pas un ouvert car $\forall\ r > 0$, $B(0,r) = ]-r, r[ \nsubseteq \{0\}$.

En passant aux complémentaires et en utilisant les résultats :

$$C_E^{\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)} = \bigcup_{i \in I} C_E^{A_i} \quad \text{et} \quad C_E^{\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right)} = \bigcap_{i \in I} C_E^{A_i}$$

on obtient :

**1.3.4.5. Proposition :**
$(i)$ L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.

$(ii)$ La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

**1.3.4.6. Remarque :** Nous avons vu les trois propriétés fondamentales suivantes des ouverts d'un espace métrique $(E, d)$ :

1) $E$ et $\emptyset$ sont des ouverts.
2) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
3) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Pour ces trois propriétés, on dit que l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts d'un espace métrique $(E, d)$ définit une *topologie* sur $E$ ou que $(E, \mathcal{O})$ est un *espace topologique.*

De façon générale, on a la définition suivante :

**1.3.4.7. Définition :** Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{T}$ une famille de parties de $E$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $E$ et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{T}$.

2) Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

3) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

On dit que $\mathcal{T}$ définit une *topologie* sur $E$ ou que $(E, \mathcal{T})$ est un *espace topologique.*

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les *ouverts* de $(E, \mathcal{T})$.

**1.3.4.8. Exemples :** 1) Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de $E$, alors $(E, \mathcal{P}(E))$ est un espace topologique. La topologie obtenue est appelée la *topologie discrète* de $E$.

2) Si $\mathcal{T} = \{E, \emptyset\}$ la topologie obtenue est appelée la *topologie grossière* de $E$.

**1.3.5. Voisinages d'un point**

**1.3.5.1. Définition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $a \in E$. On dit qu'une partie $V$ de $E$ est un *voisinage* de $a$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$.

**Exemples :** 1) $\forall \rho > 0$, $B(a, \rho)$ est un voisinage de $a$.

2) Tout ouvert contenant $a$ est un voisinage de $a$.

**1.3.5.2. Proposition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $a \in E$. Soit $V$ une partie de $E$.

$V$ est un voisinage de $a$ si et seulement si il existe un ouvert $O$ de $E$ tel que $a \in O \subset V$.

**Preuve :**

**CN :** Si $V$ est un voisinage de $a$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. Comme $B(a, r)$ est un ouvert, alors en prenant $O = B(a, r)$, on a bien $a \in O \subset V$.

**CS :** S'il existe un ouvert $O$ de $E$ tel que $a \in O \subset V$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset O$. Donc $B(a, r) \subset V$. Par conséquent $V$ est un voisinage de $a$.

**1.3.5.3. Propriétés :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $a \in E$.

$(i)$ Tout voisinage de $a$ contient $a$.

$(ii)$ Si $V$ est un voisinage de $a$ et si $V \subset W$, alors $W$ est un voisinage de $a$.

$(iii)$ Une intersection finie de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.

$(iv)$ Si $a$ et $b$ sont deux points distincts de l'espace métrique $(E, d)$, alors il existe un voisinage $V$ de $a$ et un voisinage $W$ de $b$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

Pour cette propriété $(iv)$, on dit qu'un espace métrique est un *espace séparé.*

**Preuve :**

$(i)$ Vraie par définition d'un voisinage.

$(ii)$ Si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. Si $V \subset W$, alors $B(a, r) \subset W$. Donc $W$ est un voisinage de $a$.

$(iii)$ Soient $V_1, ..., V_n$ un nombre fini de voisinages de $a$.

Alors il existe $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset V_i$, $\forall i = 1, ..., n$.

Posons $r = \min\limits_{1 \leq i \leq n} r_i$. Alors $r > 0$ et $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset V_i$, $\forall i = 1, ..., n$.

Donc $B(a,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Par conséquent $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de $a$.
$(iv)$ Soient $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Alors $d(a,b) > 0$. Posons $r = \frac{1}{3} d(a,b)$.
Alors $B(a,r)$ est un voisinage de $a$ et $B(b,r)$ est un voisinage de $b$.
Supposons qu'il existe $x \in B(a,r) \cap B(b,r)$.
Alors $3r = d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < 2r$. Contradiction.
Par conséquent $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$.

**1.3.5.4. Proposition :** Soit $O$ une partie d'un espace métrique $(E,d)$.
$O$ est un ouvert si et seulement si $O$ est un voisinage de chacun de ses points.

**Preuve :**
**CN :** Si $O$ est un ouvert, alors $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Donc $O$ est un voisinage de $x$, $\forall x \in O$.

**CS :** Si $O$ est un voisinage de chacun de ses points, alors $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Donc $O$ est un ouvert.

## 1.4. Intérieur, adhérence d'une partie

### 1.4.1. Intérieur d'une partie

**1.4.1.1. Définition :** Soit $(E,d)$ un espace métrique et soit $A$ une partie de $E$.
On dit qu'un point $x$ de $E$ est *intérieur* à $A$ si $A$ est un voisinage de $x$.

On appelle *intérieur de* $A$, et on note $\overset{\circ}{A}$ , l'ensemble des points de $E$ qui sont intérieurs à A.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A = [a,b[$ alors $\overset{\circ}{A} = ]a,b[$.

**Remarque :** $\overset{\circ}{A} \subset A$.

**1.4.1.2. Propriété :** Soit $(E,d)$ un espace métrique et soit $A$ une partie de $E$. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert de $E$ contenu dans $A$.

**Preuve :**
- $\forall x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. $\forall y \in B(x,r)$, on a $y \in B(x,r) \subset A$. Alors $A$ est un voisinage de chacun des points de $B(x,r)$. Donc $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.
- $\overset{\circ}{A} \subset A$.
- Soit $O$ un ouvert de $E$ contenu dans $A$. $\forall x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$. Alors $B(x,r) \subset A$. Donc $A$ est un voisinage de $x$. Alors $x \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $O \subset \overset{\circ}{A}$.

**1.4.1.3. Corollaire :** $A$ est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

**Preuve :**
- Si $A$ est un ouvert alors dans ce cas le plus grand ouvert de $E$ contenu dans $A$ est $A$. Donc $\overset{\circ}{A} = A$.

- Si $\overset{\circ}{A} = A$, alors $A$ est un ouvert car $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne $\delta_2$ si $D(a,r)$ est un disque ouvert, alors $\overset{\circ}{D} = D$.

**1.4.2. Adhérence d'une partie**

**1.4.2.1. Définition :** Soit $(E,d)$ un espace métrique et soit $A$ une partie de $E$.
On dit qu'un point $x$ de $E$ est *adhérent* à $A$ si pour tout réel $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.
On appelle *adhérence de* $A$, et on note $\overline{A}$ , l'ensemble des points de $E$ qui sont adhérents à $A$.

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A = ]a,b]$ alors $\overline{A} = [a,b]$.

**Remarque :** $A \subset \overline{A}$.

**1.4.2.2. Proposition :** Soient $(E,d)$ un espace métrique, $A$ une partie de $E$ et $x \in E$.
$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ pour tout voisinage $V$ de $x$, $V \cap A \neq \emptyset$.

**Preuve :**
**CN :** Supposons que $x \in \overline{A}$. Soit $V$ un voisinage de $x$. Alors $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$. Comme $x \in \overline{A}$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Donc $V \cap A \neq \emptyset$.

**CS :** Supposons que pour tout voisinage $V$ de $x$, $V \cap A \neq \emptyset$. Alors $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ car $B(x,r)$ est un voisinage de $x$. Par conséquent, $x \in \overline{A}$.

**1.4.2.3. Proposition :** Soit $(E,d)$ un espace métrique et soit $A$ une partie de $E$. Alors

$$\complement_E^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E^A}}$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} x \in \complement_E^{\overline{A}} &\Longleftrightarrow \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \cap A = \emptyset \\ &\Longleftrightarrow \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset \complement_E^A \\ &\Longleftrightarrow \complement_E^A \text{ est un voisinage de } x \\ &\Longleftrightarrow x \in \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E^A}} \end{aligned}$$

**1.4.2.4. Proposition :** Soit $(E,d)$ un espace métrique et soit $A$ une partie de $E$. Alors $\bar{A}$ est un fermé et c'est le plus petit fermé de $(E$,d) qui contient A.

**Preuve :** * On a : $\complement_E^{\bar{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E^A}}$ . Donc $\complement_E^{\bar{A}}$ est un ouvert. Par conséquent $\bar{A}$ est un fermé.
* $A \subset \overline{A}$ .

* Soit $F$ un fermé de $(E,d)$ tel que $A \subset F$. Alors $\complement_E^F \subset \complement_E^A$. Donc $\overset{\circ}{\overbrace{\complement_E^F}} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E^A}}$.

Or $\complement_E^F$ est un ouvert et $\complement_E^{\bar{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E^A}}$. Alors $\complement_E^F \subset \complement_E^{\bar{A}}$. Donc $\overline{A} \subset F$.

Par conséquent $\bar{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$.

**1.4.2.5. Corollaire :** $A$ est un fermé ssi $\bar{A} = A$.

**Preuve :**

CN : Si $A$ est un fermé, alors le plus petit fermé de $E$ contenant $A$ est lui même; donc $\bar{A} = A$.
CS : Si $\bar{A} = A$ alors A est fermé car $\bar{A}$ est fermé.

**1.4.2.6. Définition :** Soit ($E$,d) un espace métrique.
Une partie A de E est dite *partout dense* dans E si $\bar{A} = E$.

**1.4.2.7. Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$.

**1.4.3. Frontière d'une partie**

**1.4.3.1. Définition :**

Soit ($E$,d) un espace métrique et $A \subset E$.
On appelle *frontière* de A l'ensemble $F_r(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement_E^A}$.

**1.4.3.2. Exemple :**

Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si A$= [1,5[$ alors $F_r(A) = [1,5] \cap (]-\infty,1] \cup [5,+\infty[)$
$F_r(A) = \{1,5\}$.

**1.4.4. Points isolés-Points d'accumulation**

**1.4.4.1. Définition :**

Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$.
On dit qu'un point $x \in A$ est un *point isolé* de $A$ s'il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $V \cap A = \{x\}$.
On dit qu'un point $x \in E$ est un *point d'accumulation* de $A$ si tout voisinage de $x$ contient une infinité de points de $A$.

**1.4.3.2. Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, si $A = ]-3,2[ \cup \{7\}$ alors
7 est un point isolé de $A$, car $]6,8[$ est un voisinage de 7 tel que $A \cap ]6,8[ = \{7\}$ ;
-3 est un point d'accumulation de A, car $\forall r > 0, ]-3-r, -3+r[ \cap A$ est infini.

## 1.5. Topologie induite - Topologie produit

### 1.5.1. Topologie induite

**1.5.1.1. Définition :**

Soient $(E,d)$ un espace métrique, $A$ une partie non vide de $E$ et $d_A = d_{|A\times A}$.
La topologie du sous-espace métrique $(A, d_A)$ est appelée la *topologie induite* sur $A$.

**1.5.1.2. Proposition :** Soient $(E,d)$ un espace métrique, $A$ une partie non vide de $E$ et $d_A = d_{|A\times A}$.

Soient $a \in A$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Posons $B_A(a,r) = \{x \in A \ / \ d_A(a,x) < r\}$. Alors

i) $B_A(a,r) = A \cap B(a,r)$

ii) une partie $\omega$ de $A$ est un ouvert de $(A, d_A)$ si et seulement si il existe un ouvert $\Omega$ de $(E,d)$ tel que $\omega = A \cap \Omega$.

**Preuve :**

i) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in B_A(a,r) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } d_A(a,x) < r \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } d(a,x) < r \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B(a,r) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B(a,r) \end{aligned}$$

ii) **CN :** Soit $\omega$ est un ouvert de $(A, d_A)$.
Si $\omega = \emptyset$ alors $\Omega = \emptyset$ convient.
Si $\omega \neq \emptyset$, $\forall x \in \omega$, $\exists r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subset \omega$. Alors

$$\omega = \bigcup_{x\in\omega} B_A(x,r_x) = \bigcup_{x\in\omega} (A \cap B(x,r_x)) = A \cap \left( \bigcup_{x\in\omega} B(x,r_x) \right).$$

On pose $\Omega = \bigcup\limits_{x\in\omega} B(x,r_x)$ qui est un ouvert de $(E,d)$.

**CS :** Soit $\Omega$ un ouvert de $(E,d)$. Posons $\omega = A \cap \Omega$.
Si $\omega = \emptyset$, alors c'est un ouvert de $(A, d_A)$.
Si $\omega \neq \emptyset$, soit $x \in \omega$. Alors $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$.
Donc $\exists r > 0$ tel que $A \cap B(x,r) \subset A \cap \Omega$.
Ainsi $\exists r > 0$ tel que $B_A(x,r) \subset \omega$. Par conséquent, $\omega$ est un ouvert de $(A, d_A)$.

**1.5.2. Topologie produit**

**1.5.2.1. Définition :**

Soient $(E_1, d_1), ..., (E_n, d_n)$ des espaces métriques. La topologie de l'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ muni de l'une de ses trois distances usuelles équivalentes $\delta_\infty, \delta_1$ou $\delta_2$ (définies au **1.6**) est appelée *topologie produit.*

**1.5.2.2. Proposition :** Sous les hypothèses de la définition précédente, soient $r > 0$ et $a = (a_1, ..., a_n) \in E = E_1 \times ... \times E_n$ et considérons sur $E$ la distance $\delta_\infty = \sup\limits_{1\leq i\leq n} d_i$. Alors

$$B^{\delta_\infty}(a,r) = \prod_{i=1}^{n} B_{E_i}(a_i, r)$$

où $B_{E_i}(a_i, r)$ est la boule ouverte de centre $a_i$ et de rayon $r$ dans $(E_i, d_i)$.

**Preuve :** Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in E$.

$$\begin{aligned} x \in B^{\delta_\infty}(a,r) &\Leftrightarrow \sup_{1\leq i\leq n} d_i(a_i,x_i) < r \\ &\Leftrightarrow d_i(a_i,x_i) < r,\ \forall i = 1,...,n \\ &\Leftrightarrow x_i \in B_{E_i}(a_i,r),\ \forall i = 1,...,n \\ &\Leftrightarrow x \in \prod_{i=1}^{n} B_{E_i}(a_i,r) \end{aligned}$$

**1.5.2.3. Définition :** Pour l'égalité $B^{\delta_\infty}(a,r) = \prod_{i=1}^{n} B_{E_i}(a_i,r)$, on dit que $B^{\delta_\infty}(a,r)$ est un ouvert élémentaire pour la topologie produit.

Plus généralement, on appelle *ouvert élémentaire* de $E = E_1 \times ... \times E_n$ tout ouvert $\Omega$ de $E$ de la forme

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n} \omega_i$$

où $\omega_i$ est un ouvert de $(E_i, d_i)$, $\forall i = 1, ..., n$.

**1.5.2.4. Remarque :** Tout ouvert de $E$ n'est pas nécessairement un ouvert élémentaire de $E$.

**1.5.2.5. Proposition :** Tout ouvert de $E$ est une réunion d'ouverts élémentaires de $E$.

**Preuve :** Soit $O$ un ouvert de $E = E_1 \times ... \times E_n$. Alors $\forall x \in O, \exists r_x > 0$ tel que $B^{\delta_\infty}(x, r_x) \subset O$. Donc

$$O = \bigcup_{x \in O} B^{\delta_\infty}(x, r_x) = \bigcup_{x \in O} \left( \prod_{i=1}^{n} B_{E_i}(x_i, r_x) \right).$$

## Chapitre 2 : Limites - Continuité

### 2.1. Limites

**2.1.1. Définition :** Soient $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ deux espaces métriques.
Soient $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application, $x_0 \in E$, et $l \in F$.
On dit que $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$, si pour tout voisinage $V$ de $l$, il existe un voisinage $U$ de $x_0$ tel que $f(U) \subset V$.

Ce qui est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, x \in B(x_0, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(l, \epsilon)$$

et donc à

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), l) < \epsilon$$

car $B(l, \epsilon)$ est un voisinage de $l$ et tout voisinage de $x_0$ contient une boule ouverte centrée en $x_0$.

**2.1.2. Proposition :** Soient $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application, $x_0 \in E$ *et* $l \in F$.
Si $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$, alors $l$ est unique.

On dit que $l$ est la *limite de $f$ au point* $x_0$ et on note

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

**Preuve :** Supposons que $f(x)$ tend vers $l$ et $l'$ lorsque $x$ tend vers $x_0$, avec $l \neq l'$.
Comme$(F, d_F)$ est séparé et $l \neq l', \exists V \in \mathcal{V}(l), \exists V' \in \mathcal{V}(l')$ tels que $V \cap V' = \emptyset$ .
Comme $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ et que $V \in \mathcal{V}(l)$,
$\exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U) \subset V$.
De même, $\exists U' \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f(U') \subset V'$.
Alors $U \cap U' \in \mathcal{V}(x_0)$ et donc $x_0 \in U \cap U'$.
Par conséquent $f(x_0) \in V \cap V'$. Contradiction car $V \cap V' = \emptyset$.

**2.1.3. Extension de la notion de limite**

Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $A \subset \mathcal{D}_f$. Soit $x_0 \in \overline{A}$. Soit $l \in F$. Soit $f_A = f_{|A}$ la restriction de $f$ à $A$.
On dit que $f_A(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } \forall x \in U \cap A, f(x) \in V.$$

Dans ce cas, on dit que $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ sur $A$.
Ce point $l$ est unique et on note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = l.$$

Si $A = U_0 \backslash \{x_0\}$ où $U_0$ est un voisinage de $x_0$, on note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l.$$

**Exemple :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{sinx}{x} = 1.$$

**Remarque :** Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$. Mais la réciproque est fausse.

**Cas particuliers :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, s'il existe $\epsilon > 0$ tel que :
$A = ]x_0, x_0 + \epsilon[ \cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ;
$A = [x_0, x_0 + \epsilon[ \cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x)$ ;
$A = ]x_0 - \epsilon, x_0[ \cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ;
$A = ]x_0 - \epsilon, x_0] \cap \mathcal{D}_f$, la limite s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x)$.

**2.2. Continuité**

**2.2.1. Définition :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application. Soit $x_0 \in E$.
On dit que $f$ est *continue au point* $x_0$ si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\, d_E(x, x_0) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Si $f$ est continue en chaque point $x_0 \in E$, on dit que $f$ est *continue sur* $E$.

**Cas particulier :**
Une application $f : (\mathbb{R}, | \,.\, |) \to (\mathbb{R}, | \,.\, |)$ est continue en un point $x_0$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

**Exemple :** La $i^{ème}$ projection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{llcl} p_{r_i} : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $i = 1, ..., n$.

**Prolongement par continuité :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soit $x_0 \notin \mathcal{D}_f$.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l \in F$, on peut prolonger $f$ par continuité en $x_0$.
Le prolongement par continuité est la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $g(x_0) = l$.

**2.2.2. Proposition :**
Soient $E, F, G$ trois espaces métriques, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications et $x_0 \in E$.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et si $\lim\limits_{y \to l_1} g(y) = l_2$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l_2$.

Si $f$ est continue en $x_0$ et si $g$ est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en $x_0$.

Si $f$ est continue sur $E$ et si $g$ est continue sur $F$ , alors $g \circ f$ est continue sur $E$.

**2.2.3. Proposition :**
Soit $(E, d)$ un espace métrique. Soit $(F, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.
Soient $f, g : E \to F$ deux applications. Soit $a \in E$.
Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est continue en $a$.

**2.2.4. Proposition :**
Soit $(E, d)$ un espace métrique. Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ deux applications. Soit $a \in E$.

1. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, alors $fg$ est continue en $a$.
2. Si $g$ est continue en $a$ et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est continue en $a$.
3. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$ et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en $a$.

4. Toute fonction polynôme de $n$ variables réelles est continue sur $\mathbb{R}^n$.

   Toute fonction rationnelle de $n$ variables réelles est continue en chaque point de son ensemble de définition.

**2.2.5. Proposition :** Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application.
$f$ est continue en $a \in E$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}\left[f\left(a\right)\right], \, f^{-1}\left(V\right) \in \mathcal{V}\left(a\right).$$

**Preuve :**
**- CN :**
Si $f$ est continue en $a$, alors $\forall V \in \mathcal{V}\left[f\left(a\right)\right], \exists U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U) \subset V$. Or

$$\begin{aligned} f(U) \subset V \quad & \Rightarrow \quad f^{-1}\left[f\left(U\right)\right] \subset f^{-1}\left(V\right) \\ & \Rightarrow \quad U \subset f^{-1}\left[f\left(U\right)\right] \subset f^{-1}\left(V\right). \end{aligned}$$

Comme $U \in \mathcal{V}(a)$ et $U \subset f^{-1}\left(V\right)$, alors $f^{-1}\left(V\right) \in \mathcal{V}(a)$.

**- CS :**
Si $\forall V \in \mathcal{V}\left[f\left(a\right)\right]$, $f^{-1}\left(V\right) \in \mathcal{V}\left(a\right)$, en posant $U = f^{-1}\left(V\right)$, on a
$f(U) = f\left[f^{-1}\left(V\right)\right] \subset V$ et $U \in \mathcal{V}\left(a\right)$. Donc $f$ est continue en $a$.

**2.2.6. Proposition :** Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application.
$f$ est continue sur $E$ si et seulement si pour tout ouvert $\Omega$ de $F$, $f^{-1}\left(\Omega\right)$ est un ouvert de $E$.

**Preuve :**
**- CN :** Soit $\Omega$ un ouvert de $F$.
Si $f^{-1}\left(\Omega\right) = \emptyset$ alors c'est un ouvert de $E$.
Si $f^{-1}\left(\Omega\right) \neq \emptyset$, soit $x \in f^{-1}\left(\Omega\right)$. Alors $f\left(x\right) \in \Omega$, donc $\Omega \in \mathcal{V}\left[f\left(x\right)\right]$. Comme $f$ est continue en $x$, $f^{-1}\left(\Omega\right) \in \mathcal{V}\left(x\right)$. Par conséquent $f^{-1}\left(\Omega\right)$ est un ouvert car voisinage de chacun de ses points.

**- CS :** Soit $a \in E$.
Pour tout $V \in \mathcal{V}\left[f\left(a\right)\right]$, il existe un ouvert $\Omega$ de $F$ tel que $f\left(a\right) \in \Omega \subset V$. Alors $a \in f^{-1}\left(\Omega\right) \subset f^{-1}\left(V\right)$ et $f^{-1}\left(\Omega\right)$ est ouvert par hypothèse, donc $f^{-1}\left(V\right) \in \mathcal{V}\left(a\right)$. Par conséquent, $f$ est continue en $a$.

**2.2.7. Corollaire :** Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application.
$f$ est continue sur $E$ si et seulement si pour tout fermé $W$ de $F$, $f^{-1}\left(W\right)$ est un fermé de $E$.

**2.2.8. Proposition :** Soient $E$, $F$ et $G$ trois espaces métriques. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Soit $a \in E$.

Si $f$ est continue en $a$ et si $g$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.

Par conséquent si $f$ est continue sur $E$ et si $g$ est continue sur $F$, alors $g \circ f$ est continue sur $E$.

**Preuve :** Soit $V \in \mathcal{V}[(g \circ f)(a)] = \mathcal{V}[g(f(a))]$. Comme $g$ est continue en $f(a)$, alors $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(a)$.

Comme $f$ est continue en $a$, alors $f^{-1}[g^{-1}(V)] = (g \circ f)^{-1}(V)$ est un voisinage de $a$. Donc $g \circ f$ est continue en $a$.

**2.2.9. Homéomorphismes**

**2.2.9.1. Définition :** Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que $f$ est un *homéomorphisme* de $E$ sur $F$ si $f$ est une bijection et si $f$ et $f^{-1}$ sont continues.

On dit que $E$ et $F$ sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de $E$ sur $F$.

**2.2.9.2. Définition :** On dit que deux distances $d$ et $\delta$ sur un ensemble $E$ sont *topologiquement équivalentes* si l'application $id_E : (E, d) \to (E, \delta)$ est un homéomorphisme.

**2.2.10. Proposition :** Soit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ un espace métrique produit. Alors $\forall i = 1, ..., n$, la $i^{ème}$ projection canonique :

$$\begin{array}{llll} p_i : & E & \to & E_i \\ & x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} & \mapsto & x_i \end{array}$$

est continue.

**Preuve :** Considérons sur $E$ la distance $\delta_\infty$.
Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in E$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in E$. Alors $\forall i = 1, ..., n$,

$$d_i(p_i(x), p_i(a)) = d_i(x_i, a_i) \leq \delta_\infty(x, a).$$

Donc

$$\exists \eta = \epsilon > 0 \text{ tel que } \delta_\infty(x, a) < \eta \Rightarrow d_i(p_i(x), p_i(a)) < \epsilon.$$

Par conséquent $p_i$ est continue au point $a$. Comme $a$ est quelconque dans $E$, $p_i$ est continue sur $E$.

**2.2.11. Proposition :** Soit $E$ un espace métrique et soit $\prod_{i=1}^{n} F_i$ un espace métrique produit. Soit

$$\begin{array}{llll} f : & E & \to & \prod_{i=1}^{n} F_i \\ & x & \mapsto & f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \end{array}$$

une application. Alors

$f$ est continue si et seulement si chaque application composante $f_i$ de $f$ est continue.

**Preuve :**

- CN : Supposons $f$ continue. Alors $\forall i = 1, ..., n,\ f_i = p_i \circ f$ est continue.

- CS : Soient $d$ la distance sur $E$ et $d_i$ la distance sur $F_i$. Soit $a \in E$. Supposons chaque application composante $f_i$ continue en $a$.
Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\exists \eta_i > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ d(x, a) < \eta_i \Rightarrow d_i(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon.$$

Posons $\eta = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \eta_i$. Alors

$$d(x, a) < \eta \Rightarrow d_i(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon,\ \forall i = 1, ..., n.$$

Donc

$$d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta_\infty(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Par conséquent $f$ est continue au point $a$. Comme $a$ est quelconque dans $E$, $f$ est continue sur $E$.

**2.2.12. Proposition :** Soit $E = \prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ un espace métrique produit. Soit $F$ un espace métrique.

Si $f : E = \prod\limits_{i=1}^{n} E_i \to F$ est une application continue en $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in E$, alors $\forall i = 1, ..., n$, sa $i^{\text{ème}}$ *application partielle en a* :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i : & E_i & \to & F \\ & x_i & \mapsto & f\left(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n\right) \end{array}$$

est continue en $a_i$.

**Preuve :** Supposons $f$ continue en $a$. $\forall i = 1, ..., n$, soit

$$\begin{array}{rccl} \psi_i : & E_i & \to & E \\ & x_i & \mapsto & \left(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n\right) \end{array}$$

Alors $\psi_i$ est continue car chacune de ses composantes est continue. Comme $\varphi_i = f \circ \psi_i$ alors $\varphi_i$ est continue en $a_i$.

**Remarque :** La réciproque est fausse. Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Les applications partielles de $f$ en $(0, 0)$ sont continues car $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$. Mais $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x, x) = \frac{1}{2}$.

### 2.3. Applications uniformément continues

**2.3.1. Définition :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application.
On dit que $f$ est *uniformément continue* sur E, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall (x, y) \in E^2,\ d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

**2.3.2. Proposition :** Toute application uniformément continue est continue.

**Remarque :** La réciproque est fausse.

**Exemple :** L'application

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**2.3.3. Définition :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application.
On dit que $f$ est *lipschitzienne* s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

On dit alors que $f$ **est lipschitzienne de rapport** $k$ ou $f$ est $k$**-lipschitzienne**.

**2.3.4. Proposition :** Toute application lipschitzienne de rapport $k$ est uniformément continue.

**Preuve :** $\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \frac{\epsilon}{k} > 0$ tel que $\forall x, y \in E,\ d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$.
Donc $f$ est uniformément continue.

**2.3.5. Définition :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application.
On dit que $f$ est une *isométrie* si

$$\forall x, y \in E,\ d_F(f(x), f(y)) = d_E(x, y).$$

**Remarque :** Toute isométrie est une application lipschitzienne.

## Chapitre III. Suites de points d'un espace métrique

### 3.1. Convergence

**3.1.1 Définition :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique ($E$,d).
On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in E$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \ \Rightarrow x_n \ \in V.$$

Ce qui est équivalent à $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, \epsilon)$.
(Car $B(x, \epsilon) \in \mathcal{V}(x)$).

C'est-à-dire $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) < \epsilon$.

Ce qui revient à dire que la suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\alpha_n = d(x, x_n)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$.

**3.1.2 Proposition :**

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points d'un espace métrique $(E,d)$ converge vers un point $x\in E$, alors $x$ est unique.
On l'appelle la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

**Proof.** Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$ et $x'$ avec $x\neq x'$. Comme $(E,d)$ est séparé, il existe $V\in\mathcal{V}(x)$ et $V'\in\mathcal{V}(x')$ tels que $V\cap V'=\emptyset$.
Alors $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N,\ x_n\in V$.
De même, $\exists N'\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq N',\ x_n\in V'$.
Donc $\forall n\geq \max\{N,N'\},\quad x_n\in V\cap V'$. Contradiction. ■

**3.1.3. Proposition :** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique produit $E=\prod_{i=1}^{k} E_i$ avec $x_n=(x_n^1,x_n^2,\cdots,x_n^k)$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l=(l_1,l_2,\cdots,l_k)$ dans $E$ ssi la suite $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_i$ dans $(E_i,d_i)$, $\forall i=1,...,k$.

**Proof.**

**CN :** Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l=(l_1,l_2,\cdots,l_k)$ dans $E$. Considérons sur $E$ la distance $\delta_\infty=\sup\limits_{1\leq i\leq k} d_i$. Alors

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq N,\ \delta_\infty(x_n,l)<\epsilon.$$

Donc $\forall n\geq N,\ d_i(x_n^i,l_i)<\epsilon,\ \forall i=1,...,k$. Par conséquent, la suite $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_i$ dans $(E_i,d_i)$, $\forall i=1,...,k$.

**CS :** Supposons que la suite $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_i$ dans $(E_i,d_i)$, $\forall i=1,...,k$. Alors

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N_i\in\mathbb{N}\ :\ \forall n\geq N_i,\ d_i(x_n^i,l_i)<\epsilon,\ \forall i=1,...,k.$$

Posons $N=\max\limits_{1\leq i\leq k} N_i$. Alors $\forall n\geq N,\ d_i(x_n^i,l_i)<\epsilon,\ \forall i=1,...,k$. Donc $\delta_\infty(x_n,l)<\epsilon$, où $l=(l_1,...,l_k)$. Ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l=(l_1,l_2,\cdots,l_k)$ dans $E$. ■

**3.1.4 Proposition :**

Soit $(E$,d) un espace métrique et $A\subset E$ tel que $A\neq\emptyset$. Soit $x\in E$.
$x\in\bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers $x$.

**Preuve :**
**CN :**

$$\begin{aligned}
x\in\bar{A}\Rightarrow\quad & \forall V\in\ \mathcal{V}(x), V\cap A\neq\emptyset.\\
\Rightarrow\quad & \forall r>0, B(x,r)\cap A\neq\emptyset \text{ car } B(x,r)\in\mathcal{V}(x).\\
\Rightarrow\quad & \forall n\in\mathbb{N}^*, B(x,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset.\\
\Rightarrow\quad & \forall n\in\mathbb{N}^*, \exists a_n\in A \text{ tel que } a_n\in B(x,\frac{1}{n}).\\
\Rightarrow\quad & \exists \text{ une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ de points de } A \text{ telle que}
\end{aligned}$$

$0\leq d(a_n,x)<\frac{1}{n}.\ Or\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$

Alors $\lim_{n\to+\infty} d(a_n, x) = 0$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge *vers* $x$.

**CS :** Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$ qui converge vers $x$.
Alors $\forall\ V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow a_n \in V$.
Donc $\forall\ V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$. Alors $x \in \bar{A}$.

### 3.2. Continuité séquentielle

**Théorème :** Soient $(E, d_E)$ et $(F, d_F)$ deux espaces métriques. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $x \in E$.
L'application $f$ est continue au point $x$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $E$ qui converge vers $x$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

**Proof.**

**CN :** Supposons $f$ continue au point $x$. Alors $\forall V \in \mathcal{V}[f(x)],\ \exists U \in \mathcal{V}(x) :\ f(U) \subset V$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E$ qui converge vers $x$. Comme $U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists N \in \mathbb{N}$ : $n > N \Rightarrow x_n \in U$. Alors $f(x_n) \in f(U)$.
Ainsi

$$\forall V \in \mathcal{V}[f(x)],\ \exists N \in \mathbb{N} :\ n > N \Rightarrow f(x_n) \in V.$$

Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

**CS :** Par contraposée. Supposons $f$ non continue au point $x$. Alors
$\exists V \in \mathcal{V}[f(x)]\ :\ \forall U \in \mathcal{V}(x),\ f(U) \not\subset V$.
Prenons $U = B(x, \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\exists V \in \mathcal{V}[f(x)]\ :\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) :\ f(x_n) \notin V.$$

Donc on obtient une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $x$ car $0 \leq d_E(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Mais la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers $f(x)$. ■

### 3.3. Valeurs d'adhérence

#### 3.3.1. Définition :

Soit $(E, d)$ un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E$.
On dit qu'un point $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi pour tout voisinage $V$ de $a$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\ /\ x_n \in V\}$ est infini.
Ou ssi $\forall V \in \mathcal{V}(a), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq\ N\ tel\ que\ x_n \in V$.
Ou encore ssi $\forall \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N$ tel que $d(x_n, a) < \epsilon$.

**3.3.2. Proposition :** Dans un espace métrique ($E$,d) si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $E$ converge, alors elle possède une seule valeur d'adhérence qui est sa limite.

**Preuve :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E$ qui converge vers $a$. Alors $a$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une autre valeur d'adhérence $b \neq a$.

Alors il existe un voisinage $V$ de $a$ et un voisinage $V'$ de $b$ tels que $V \cap V' = \emptyset$ car $(E,d)$ est séparé. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et $V \in \mathcal{V}(a)$,
$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow x_n \in V$.
Comme $b$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V' \in \mathcal{V}(b)$, et de plus $N_1 \in \mathbb{N}$ alors il existe $n_1 \geq N_1$ tel que $x_{n_1} \in V'$.
Comme $n_1 \geq N_1$ alors $x_{n_1} \in V \cap V'$. Contradiction car $V \cap V' = \emptyset$.

**3.3.3. Proposition :**
Si $x$ est une valeur d'adhérence d'une suite de points de $A$ alors $x \in \bar{A}$.

**Preuve :**
Supposons que $x$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $A$. Alors $\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tel que $a_n \in V$.
Comme $a_n \in A$ et $a_n \in V$, alors $V \cap A \neq \emptyset$ .
Donc $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$. Par conséquent $x \in \bar{A}$.

**3.3.4. Théorème :**
Soient $(E,d)$ un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E$ et $x \in E$.
$x$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi il existe une sous-suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x$.

**Preuve :**
**CN :** Supposons que $x$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour :

- $V = B(x,1) \in \mathcal{V}(x)$ et $N = 1$, $\exists n_1 \geq 1 > 0$ tel que $d(x, x_{n_1}) < 1$.
- $V = B(x, \frac{1}{2}) \in \mathcal{V}(x)$ et $N = n_1 + 1$, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tel que $d(x, x_{n_2}) < \frac{1}{2}$.
- $V = B(x, \frac{1}{3})$ et $N = n_2 + 1$, $\exists n_3 \geq n_2 + 1 > n_2$ tel que $d(x, x_{n_3}) < \frac{1}{3}$.
- $\cdots$
  $\exists n_k \geq n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ tel que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$.

Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$.
Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$.
Donc $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $x$.

**CS :** S'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x$, alors $x$ est une valeur d'adhérence de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et donc de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**3.3.5. Exemple :**
Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $x_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.
Or $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{2p} &= 1 \\ x_{2p+1} &= -1. \end{aligned}$$

Alors $-1$ et $1$ sont des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les sous-suites $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $1$ et $-1$.

**3.3.6. Théorème :** Soient $(E, d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E$. Notons $Adh(x_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \{x_p : p \geq n\}$. Alors

$$Adh(x_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}.$$

**Preuve :**

$$\begin{aligned} x \in Adh(x_n) &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : x_n \in V \\ &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, V \cap X_N \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, x \in \overline{X_N} \\ &\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{X_N} \end{aligned}$$

**3.3.7. Corollaire :** $Adh(x_n)$ est fermé dans $(E, d)$.

**3.4. Suites de Cauchy**

**3.4.1 Définition :**
Soit $(E$,d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $E$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q > N \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

**3.4.2 Proposition :**
Toute suite convergente de points d'un espace métrique est de Cauchy.

**Preuve :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $(E$,d) qui converge vers $x \in E$.
Alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$.
Si $p, q > N$, alors $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \epsilon$.
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

**3.4.3. Remarque :**
La réciproque est fausse.

**3.4.4. Proposition :**
Toute suite de Cauchy est bornée.

**Preuve :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, alors pour $\epsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n, p > N \Rightarrow d(x_n, x_p) < 1$$

Posons $p = N + 1$, alors $n > N \Rightarrow d(x_p, x_n) < 1$.

Donc $\forall n > N,\ x_n \in B(x_p, 1)$.
Posons $r = 1 + \max\limits_{0 \le n \le N} d(x_p, x_n)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, d(x_p, x_n) < r$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x_p, r)$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

**3.4.5. Corollaire :**
Toute suite convergente de points d'un espace métrique est bornée.

**3.4.6. Proposition :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique $(E, d)$.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et si elle admet une valeur d'adhérence $x$, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence $x$.

**Preuve :** Soit $\epsilon > 0$.
Comme $x$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\exists q \ge N \text{ tel que } d(x_q, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, alors :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, n \ge N_1, d(x_p, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour $N = N_1, \exists q_1 \ge N_1$ tel que $d(x_{q_1}, x) < \frac{\epsilon}{2}$, et $\forall n \ge N_1, d(x_{q_1}, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$.
Donc $\forall n \ge N_1, d(x_n, x) \le d(x_n, x_{q_1}) + d(x_{q_1}, x) < \epsilon$.
Alors $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \ge N_1, d(x_n, x) < \epsilon$.
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x$.

### 3.5. Espaces métriques complets

**3.5.1. Définition :**
On dit qu'un espace métrique $(E, d)$ est complet si toute suite de Cauchy de $(E, d)$ converge dans $(E, d)$.

**Rappel :**

**3.5.2. Théorème :** [Théorème de Bolzano-Weirstrass] De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

**3.5.3 Corollaire :**
$\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet.

**Preuve :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |\ |)$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence $a$.
Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence $a$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$.

**3.5.4 Théorème :**
Soient $(E_1, d_1), \cdots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques complets. Alors l'espace métrique produit $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ est complet.

**Preuve :**
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.
Posons : $x_n = (x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^k)$ et prenons sur $E$ la distance $\delta_\infty$.
Alors $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q > N, \delta_\infty(x_p, x_q) < \epsilon$.
Donc $\sup\limits_{1\leq i\leq k} d_i(x_p^i, x_q^i) < \epsilon$.
Alors $d_i(x_p^i, x_q^i) \leq \sup\limits_{1\leq i\leq k} d_i(x_p^i, x_q^i) < \epsilon$.
Donc $d_i(x_p^i, x_q^i) < \epsilon \ \forall i \in \{1, \cdots, k\}$.
Alors $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E_i, d_i)$. Comme $(E_i, d_i)$ est complet, alors $(x_n^i)$ converge vers $l_i \in E_i$.
Posons $l = (l_1, \cdots, l_k)$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$.

**3.5.5. Corollaire :**
$\mathbb{R}^n$ muni de l'une des trois distances usuelles $\delta_1, \delta_2, \delta_\infty$ est complet.

**3.5.6. Théorème :** Soit $X$ un ensemble. Soit $(E, d)$ un espace métrique complet. Alors $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace des applications bornées de $X$ dans $E$ muni de la distance de la convergence uniforme $d_\infty$ est complet.

**Preuve :** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$. Alors
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N, \sup_{x\in X} d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$.
Donc $d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$, $\forall x \in X$.
Alors, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E, d)$.
Comme $(E, d)$ est complet, elle converge vers $y \in E$. On définit ainsi une application $f : X \to E$ qui à $x \in X$ associe $y$.
Montrons que $f$ est bornée.
Pour $\epsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N_1, d(f_p(x), f_q(x)) < 1$. Fixons $q = N_1$. Alors
$\forall p \geq N_1, d(f_p(x), f_{N_1}(x)) < 1, \forall x \in X$.
Soit $y_0 \in E$ fixé et soit $g : X \to E$ définie par $g(x) = y_0, \forall x \in X$. Alors

$$d(g(x), f_p(x)) \leq d(g(x), f_{N_1}(x)) + d(f_{N_1}(x), f_p(x)).$$

Donc

$$d(g(x), f_p(x)) < d(g(x), f_{N_1}(x)) + 1 \leq d_\infty(g, f_{N_1}) + 1.$$

Lorsque $p \to +\infty$, on a : $d(g(x), f(x)) \leq d_\infty(g, f_{N_1}) + 1$. Donc $\forall x \in X$,

$$d(y_0, f(x)) \leq d_\infty(g, f_{N_1}) + 1.$$

Par conséquent $f \in \mathcal{F}_b(X, E)$.
Comme $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geq N, d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$, $\forall x \in X$,
lorsque $q \to +\infty$, on obtient

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geq N,\ d(f_p(x), f(x)) \leq \epsilon,\ \forall x \in X.$$

Donc
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \geq N, \ d_\infty(f_p, f) \leq \epsilon.$$
Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f$ dans $(\mathcal{F}_b(X,E), d_\infty)$. Donc $(\mathcal{F}_b(X,E), d_\infty)$ est complet.

**3.5.7. Proposition :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $F = C^0([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Soit $d_\infty$ la distance de la convergence uniforme sur $F$.
Alors $(F, d_\infty)$ est complet.

### 3.6. Applications contractantes et théorème du point fixe

**3.6.1. Définition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique.
On dit qu'une application $f : E \to E$ est une *contraction* ou une *application contractante* s'il existe un nombre réel $0 < k < 1$ tel que
$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Le nombre réel $k$ est appelé le *rapport de la contraction $f$*.
On dit qu'un point $a \in E$ est un *point fixe* de $f$ si $f(a) = a$.

**3.6.2. Théorème :** Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $f$ une contraction de $E$. Alors $f$ admet un point fixe et ce point fixe est unique.

**Preuve :**

**Existence :** Soit $x_0 \in E$.
Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy.
Soit $k$ le rapport de la contraction $f$.
$\forall m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \geq n$,
$$d(x_n, x_m) = d[f(x_{n-1}), f(x_{m-1})] \leq kd(x_{n-1}, x_{m-1}).$$

Après $n$ applications de ce processus, on a
$$d(x_n, x_m) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}).$$

D'après l'inégalié triangulaire,
$$d(x_0, x_{m-n}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}).$$
Or $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)$. Alors
$$d(x_0, x_{m-n}) \leq d(x_0, x_1)(1 + k + k^2 + ... + k^{m-n-1}).$$
Donc
$$d(x_n, x_m) \leq k^n d(x_0, x_{m-n}) \leq k^n d(x_0, x_1) \sum_{p=0}^{+\infty} k^p = k^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-k}.$$

Par conséquent
$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$
Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$ car $0 < k < 1$.
Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $(E, d)$ est complet, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$.
De plus $f$ est continue, alors
$$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x.$$
Donc $x$ est un point fixe de $f$.

**Unicité :** Supposons que $f$ possède un autre point fixe $y \neq x$.
Alors
$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < d(x, y).$$
Contradiction.

## Chapitre IV : Espaces métriques compacts

### 4.1. Définitions

**4.1.1. Définition :** Soit ($E$,d) un espace métrique et $A \subset E$.
On appelle *recouvrement* de $A$ toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de $E$ telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

On dit que le recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est fini si $I$ est fini.

On appelle *recouvrement ouvert* de $A$, tout recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de $A$ tel que $O_i$ est un ouvert de $(E, d)$ $\forall i \in I$.

**4.1.2. Définition :** On dit qu'un espace métrique $(E, d)$ est *compact* si de tout recouvrement ouvert de $E$, on peut extraire un recouvrement fini de $E$.

**4.1.3. Définition :** Soit ($E$,d) un espace métrique et $A \subset E$.
On dit que $A$ est compact si le sous-espace métrique $(A, d_A)$ est compact.
Ce qui est équivalent à : de tout recouvrement ouvert de $A$ par des ouverts de $E$, on peut extraire un recouvrement fini de $A$.

**4.1.4. Exemple :** Toute partie finie $A$ d'un espace métrique ($E$,d) est compacte.
Si $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, et $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$
alors $\forall j = 1, \cdots, n, \exists i_j \in I$ tel que $a_j \in O_{i_j}$. Alors $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j}$ donc A est compacte.

### 4.2. Propriétés

**4.2.1. Proposition :** Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.

**Preuve :** Soit K une partie compacte de ($E$,d), on a :
$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, 1)$.

Comme K est compacte, $\exists x_1, \cdots, x_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$.

$\forall x \in K,\ \exists j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $x \in B(x_j, 1)$.

Alors

$$d(x, x_1) \leq d(x, x_j) + d(x_j, x_1) < 1 + d(x_j, x_1).$$

Donc $d(x, x_1) < 1 + \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(x_1, x_i)$.

Posons $r = 1 + \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(x_1, x_i)$, alors $\forall x \in K, d(x, x_1) < r$ avec $r > 0$.

Donc $K \subset B(x_1, r)$. Par conséquent $K$ est bornée.

**4.2.2. Corollaire :**
$(\mathbb{R}, |\ |)$ n'est pas compact car non bornée.

$(\mathbb{R}^n, \delta_\infty)$ *ou* $(\mathbb{R}^n, \delta_1)$ *ou* $(\mathbb{R}^n, \delta_2)$ n'est pas compact car non bornée.

**4.2.3. Proposition :** Toute partie compacte d'un espace métrique ($E$,d) est fermée.

**Preuve :** Soit $K \subset E$ tel que $K$ est compact.
- Montrons que $\complement_E^K$ est ouvert.
Soit $a \in \complement_E^K$. $\forall x \in K$, $x \neq a$. Alors $d(a, x) > 0$.

Posons $r_x = \frac{1}{3} d(a, x)$. Alors $r_x > 0$. On a $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, r_x)$.

Comme $K$ est compact, $\exists x_1, \cdots, x_n \in K$ tel que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_f(x_i, r_{x_i})$$

qui est un fermé.

Alors $\complement_E^{\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_f(x_i, r_{x_i})} \subset \complement_E^K$. Or $\forall i = 1, \cdots, n$, $d(a, x_i) = 3 r_{x_i} > r_{x_i}$.

Alors $a \notin B_f(x_i, r_{x_i})$, $\forall i = 1, \cdots, n$.
Donc

$$a \in \complement_E^{\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_f(x_i, r_{x_i})} \subset \complement_E^K$$

alors $\complement_E^K \in \mathcal{V}(a), \forall a \in \complement_E^K$.

Donc $\complement_E^K$ est un ouvert, par conséquent $K$ est un fermé.

**4.2.4. Proposition :** Si $E$ est compact alors toute partie fermée $F$ de $E$ est compacte.

**Preuve :** Supposons que $F \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$ où $O_i$ est un ouvert de $E$, $\forall i \in I$. Alors

$$E = \complement_E^F \cup F \subset \left[\complement_E^F \cup (\bigcup_{i\in I} O_i)\right]$$

qui est un recouvrement ouvert de $E$ car $F$ est fermée.

Comme E est un compact,$\exists J\ finie \subset I$ tel que $E \subset \complement_E^F \cup (\bigcup\limits_{i\in J} O_i)$.
Comme $F \subset E$ et $F \cap \complement_E^F = \emptyset$ , alors $F \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$.
Donc $F$ est compacte.

**4.3. Parties compacts de $\mathbb{R}^n$**

**4.3.1. Théorème de Borel-Lebesgue :** Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact pour la distance usuelle de $\mathbb{R}$.

**Preuve :** Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$.
Posons $A = \{x \in [a, b]$ tel que $[a, x]$ est recouvert par un nombre fini de $O_i\}$.

$a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$ et $A \subset [a, b] \Rightarrow A$ est majorée

$$\Rightarrow A \text{ admet une borne supérieure } M \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ alors } M \in \bar{A} \subset [a, b].$$

Donc $\exists j \in I$ *tel que* $M \in O_j$. $O_j$, est un ouvert contenant $M$,
alors $\exists h_1 > 0$ *tel que* $]M - h_1, M + h_1[\subset O_j$.
$M = \sup A \Rightarrow \exists x \in A\cap]M - h_1, M]$, alors $\exists J$ fini $\subset I$
tel que $[a, x] \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$.

Donc $[a, M + \frac{h_1}{2}] \subset \left(\bigcup\limits_{i\in J} O_i\right) \cup O_j$.
Par conséquent $M \in A$.
Supposons que $M < b$.
Alors $\exists h_2 > 0$ tel que $[M, M + h_2] \subset [a, b]$.
Posons $h = \min(\frac{h_1}{2}, h_2)$.
On a: $[a, M + h] \subset \left(\bigcup\limits_{i\in J} O_i\right) \cup O_j$ *et* $M + h \in A$.
Contradiction car $M = \sup A$.
Alors $M = b$. Donc $b \in A$.
Par conséquent $[a, b]$ est compact.

**4.3.2. Corollaire :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, les parties compactes sont les parties fermées et bornées c'est-à-dire une partie K de $\mathbb{R}$ est compacte ssi K est fermée et bornée.

**Preuve :**
CN : Si K est compacte, alors K est fermée et bornée.

CS : Soit K une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Alors $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tels que $K \subset [a, b]$.
Or $[a, b]$ est compact et $K$ est fermée donc $K$ est compacte.

**Exemple :**
$[-1, 1] \cup [3, 4]$ est compact dans $\mathbb{R}$ car fermé et borné dans $\mathbb{R}$.

**4.3.3. Théorème :** Soient $(E_1, d_1), \cdots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques compacts, alors l'espace métrique produit $E = E_1 \times \cdots \times E_k$ est compact.

**Preuve :** Dans le cas de deux espaces métriques compacts $(E_1, d_1)$ *et* $(E_2, d_2)$.
*Sur* $E = E_1 \times E_2$ *prenons la distance* $\delta_\infty = \max(d_1, d_2)$.
*Soit* $a = (a_1, a_2) \in E$ *et* $r > 0$, *alors* $B(a, r) = B(a_1, r) \times B(a_2, r)$.
*Considérons un recouvrement ouvert de E par des boules ouvertes* : $\left(B_i^1, B_{ij}^2\right)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$.
*Alors* $(B_i^1)_{i\in I}$ *est un recouvement ouvert de* $E_1$.
*Comme* $E_1$ *est compact,* $\exists I_1$ *fini tel que* $I_1 \subset \bigcup\limits_{i\in I_1} B_i^1$.
$\forall i \in I_1$, $\left(B_{ij}^2\right)_{j\in J}$ *est un recouvrement ouvert de* $E_2$.
*Comme* $E_2$ *est compact,* $\exists J_2$ *fini* $\subset J$ *tel que* $E_2 \subset \bigcup\limits_{j\in J_2} B_{ij}^2$.

$$Alors (E_1 \times E_2) \subset \bigcup_{i\in I_1}\left(\bigcup_{j\in J_2} B_i^1 \times B_{ij}^2\right).$$

*Donc* $E_1 \times E_2$ *est compact.*

**4.3.4. Corollaire :** Dans $\mathbb{R}^n$ muni de l'une des distances $\delta_\infty, \delta_1, \delta_2$, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.
C'est-à-dire une partie K de $\mathbb{R}^n$ est compacte ssi K est fermée et bornée.

**Preuve :**
CN : Si $K$ est compact, alors $K$ est fermée et bornée.
CS : Supposons $K$ fermée et bornée.
Comme $K$ est bornée, $K \subset B_f(\alpha, r)$.
En prenant sur $\mathbb{R}^n$ la distance $\delta_\infty$, $B_f(\alpha, r) = \prod\limits_{i=1}^{n} B_f(\alpha_i, r) = \prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.
Comme $K$ est fermée et $\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ est compact, alors $K$ est compacte.

### 4.4. Caractérisation de la compacité par les fermés

**4.4.1. Proposition :** Soient $(E, d)$ un espace métrique.
$E$ est compacte si et seulement si pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de $E$ telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$.

**Preuve :**
- Supposons $(E, d)$ compact. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $(E, d)$ telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$.
Alors $E = \complement_E^{\bigcap_{i\in I} F_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \complement_E^{F_i}$ qui est un recouvrement ouvert de $E$. Comme $E$ est compact, il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que $E = \bigcup\limits_{i\in J} \complement_E^{F_i} = \complement_E^{\bigcap_{i\in J} F_i}$. Donc $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$.

- Réciproquement : Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E$. Alors $E = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.
Donc $\emptyset = \complement_E^{\bigcup\limits_{i\in I} O_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \complement_E^{O_i}$.
Par conséquent, il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que $\emptyset = \bigcap\limits_{i\in J} \complement_E^{O_i} = \complement_E^{\bigcup\limits_{i\in J} O_i}$.
Alors $E = \bigcup\limits_{i\in J} O_i$. Donc $E$ est compact.

**4.4.2. Corollaire :** Dans un espace métrique compact $(E, d)$, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de $E$, (*i.e.* $F_{n+1} \subset F_n$, et $F_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$), alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

**Preuve :** Supposons que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. L'espace métrique $(E, d)$ étant compact, il existe une partie finie $J$ de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcap\limits_{n\in J} F_n = \emptyset$.
Soit $m = \max J$. Alors $\bigcap\limits_{n\in J} F_n = F_m$. Donc $F_m = \emptyset$. Contradiction.

**4.5. Caractérisation de la compacité par les suites**

**4.5.1. Théorème :** Dans un espace métrique compact $(E, d)$, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $E$ admet au-moins une valeur d'adhérence dans $E$.

**Preuve :** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $E$. Alors

$$Adh(x_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n},$$

où $X_n = \{x_p : p \geq n\}$. On a $X_0 \supset X_1 \supset ... \supset X_n \supset ...$ Donc $\overline{X_0} \supset \overline{X_1} \supset ... \supset \overline{X_n} \supset ...$
Comme $X_n \neq \emptyset$ et $X_n \subset \overline{X_n}$, alors $\overline{X_n} \neq \emptyset$.
D'après la proposition précédente, $Adh(x_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n} \neq \emptyset$.

**4.5.2. Corollaire 1 :** Dans un espace métrique compact $(E, d)$, de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points, on peut extraire une sous-suite convergente dans $E$.

**4.5.3. Corollaire 2 :** [Théorème de Bolzano-Weirstrass] De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

**Preuve :** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Comme $[a, b]$ est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une sous-suite convergente d'après le théorème précédent.

**4.5.4. Corollaire 3 :** Tout espace métrique compact est complet.

**Preuve :** Soient $(E, d)$ un espace métrique compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de $E$.
Alors d'après le théorème précédent, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au-moins une valeur d'adhérence $x \in E$.
On en déduit qu'elle converge vers $x$. Donc $(E, d)$ est complet.

**4.5.5. Lemme 1 :** Soient $(E, d)$ un espace métrique et $K$ une partie de $E$. Supposons que toute suite de points de $K$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $K$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement de $K$ par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\epsilon$.

**Preuve :** Soit $\epsilon > 0$ et soit $x_1 \in K$ (si $K = \emptyset$ le résultat est immédiat).
Si $K \subset B(x_1, \epsilon)$ alors la preuve est achevée.
Si non, il existe $x_2 \in K$ tel que $x_2 \notin B(x_1, \epsilon)$.
Si $K \subset B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$ alors la preuve est achevée.
Supposons que $K$ ne soit pas recouverte par la réunion d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\epsilon$ ainsi construites.
Alors il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de points de $K$ telle que $d(x_p, x_q) \geq \epsilon$ pour tous $p, q \in N^*$ tels que $p \neq q$.
Mais une telle suite ne possède aucune sous-suite convergente donc aucune valeur d'adhérence. Contradiction.

**4.5.6. Lemme 2 :** Soient $(E, d)$ un espace métrique et $K$ une partie de $E$. Supposons que toute suite de points de $K$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $K$. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $K$.
Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O_i$.

**Preuve :** Supposons la propriété fausse. Alors
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_k \in K$ tel que $B(x_k, \frac{1}{k})$ ne soit contenue dans aucun des $O_i$.
Soit $x$ une valeur d'adhérence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ dans $K$. Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in O_i$. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_i$.
Or il existe une sous-suite $(y_k)$ de $(x_k)$ qui converge vers $x$. Donc à partir d'un certain rang $m$, $y_m \in B(x, \frac{r}{2})$.
Alors $\forall y \in B(y_m, \frac{1}{m})$, $d(y, x) \leq d(y, y_m) + d(y_m, x) < \frac{1}{m} + \frac{r}{2} < r$ dès que $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$.
Et donc $B(y_m, \frac{1}{m}) \subset B(x, r) \subset O_i$. Contradiction.

**4.5.7. Théorème :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $K$ une partie de $E$. $K$ est compacte si et seulement si toute suite de points de $K$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $K$.

**Preuve :**
**CN :** Déjà vue.
**CS :** Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $K$.
D'après le lemme 2, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $k \in I$ tel que $B(x, \epsilon) \subset O_k$.
D'après le lemme 1, $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$ où $x_j \in K$ pour tout $j = 1, ..., n$.
Alors pour tout $j = 1, ..., n$, il existe $k_j \in I$ tel que $B(x_j, \epsilon) \in O_{k_j}$.
Donc $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_{k_j}$. Par conséquent $K$ est compact.

### 4.6. Compacité et continuité

**4.6.1. Rappel :**

Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application. On dit que $f$ est bornée si $f(E)$ est une partie bornée de $F$. On dit que $f$ est bornée sur une partie $A$ de $E$ si $f(A)$ est une partie bornée de $F$.

**4.6.2. Théorème :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application. Soit $A$ une partie de $E$. Si $f$ est continue sur $A$ et si $A$ est compacte dans $E$, alors $f(A)$ est compacte dans $F$.
En particulier, si $f$ est continue sur $E$ et si $E$ est compact, alors $f(E)$ est compacte dans $F$.

**Preuve :** Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$ dans $F$.
Alors $f(A) \subset \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$. Donc $\forall a \in A,\ \exists i \in I$ tel que $f(a) \in \Omega_i$.
$f$ étant continue en $a$, il existe $O_i$ un ouvert de $E$ tel que $a \in O_i$ et $f(O_i) \subset \Omega_i$.
Alors il existe $I_1 \subset I$ tel que $A \subset \bigcup\limits_{i\in I_1} O_i$ et $f(O_i) \subset \Omega_i$ pour tout $i \in I_1$.
$A$ étant compacte, il existe une partie finie $J$ de $I_1$ telle que $A \subset \bigcup\limits_{i\in J} O_i$.
Alors

$$f(A) \subset \bigcup_{i\in J} f(O_i) \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i.$$

Donc $f(A)$ est compacte.

**4.6.3. Corollaire :** Soit $f : (E, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ une application.
Si $K$ est une partie compacte de $E$, et si $f$ est continue sur $K$, alors $f$ est bornée sur $K$ et atteint ses bornes.

**Preuve :**
$K$ étant compacte et $f$ continue sur $K$, alors $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$. Donc $f(K)$ est une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}$. Alors $\sup f(K)$ et $\inf f(K)$ existent et $\sup f(K)$, $\inf f(K) \in \overline{f(K)} = f(K)$ car $f(K)$ fermée.
Donc $\exists \alpha \in K$ tel que $f(\alpha) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$ et $\exists \beta \in K$ tel que $f(\beta) = \sup\limits_{x\in K} f(x)$.

**Remarque** : Si $A$ est une partie de $\mathbb{R}$, alors $M = \sup A$ ssi $\forall x \in A$, $x \le M$ et $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in A$ tel que $M - \epsilon < x_0 \le M$. Alors $\forall \epsilon > 0$, $A \cap B(M, \epsilon) \neq \emptyset$. Donc $M \in \overline{A}$.

**4.6.4. Théorème de Heine :** Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application.
Si $f$ est continue sur une partie compacte $K$ de $E$, alors $f$ est uniformément continue sur $K$.

**Preuve :** Soit $\epsilon > 0$. $f$ étant continue en tout point de $K$,

$$\forall a \in K,\ \exists \eta_a > 0 : d_E(x, a) < \eta_a \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors $K \subset \bigcup\limits_{a\in K} B(a, \frac{\eta_a}{2})$.
Et comme $K$ est compacte, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{\eta_{a_i}}{2})$.
Posons

$$\eta = \min_{1\le i\le n} \{\frac{\eta_{a_i}}{2}\}.$$

Soient $x, y \in K$ tels que $d_E(x, y) < \eta$. Alors

$x \in K \Rightarrow \exists i$ tel que $d_E(a_i, x) < \frac{\eta_{a_i}}{2}$ (1)
et, $d_E(a_i, y) \leq d_E(a_i, x) + d_E(x, y) < \frac{\eta_{a_i}}{2} + \eta \leq \eta_{a_i}$. (2)
D'après (1), $d_F(f(a_i), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$.
D'après (2), $d_F(f(a_i), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$.
Alors

$$d_F(f(x), f(y)) \leq d_F(f(x), f(a_i)) + d_F(f(a_i), f(y)) < \epsilon.$$

Donc $f$ est uniformément continue sur $K$.

## Chapitre V. Espaces métriques connexes

### 5.1. Définition-Propriétés

**5.1.1. Définition :** Un espace métrique $(E, d)$ est dit *connexe* s'il n'existe aucune partition de $E$ en deux ouverts non vides.

**5.1.2. Proposition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ $E$ est connexe.
$(ii)$ Les seules parties de $E$ à la fois ouvertes et fermées sont $E$ et $\emptyset$.
$(iii)$ Il n'existe aucune partition de $E$ en deux fermés non vides.

**Preuve :** $E$ non connexe
$\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ ouverts tels que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.
$\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ tel que $A$ et $\complement_E^A$ sont fermés.
$\Leftrightarrow$ Il existe une partition de $E$ en deux fermés non vides.

**5.1.3. Proposition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique. Considérons la paire $\{0, 1\}$ munie de la distance discrète.
$E$ est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0, 1\}$ est constante.

**Preuve :**
- Par contraposée : supposons qu'il existe une application continue $f : E \to \{0, 1\}$ non constante. Alors $U = f^{-1}(0)$ et $V = f^{-1}(1)$ sont des ouverts non vides qui forment une partition de $E$. Donc $E$ n'est pas connexe.

- Par contraposée : supposons que $E$ n'est pas connexe. Alors il existe $U$ et $V$ deux ouverts non vides qui forment une partition de $E$. Considérons l'application $f : E \to \{0, 1\}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ si $x \in V$. Alors $f$ est continue et non constante.

### 5.2. Parties connexes

**5.2.1. Définition :** On dit qu'une partie $A$ d'un espace métrique $(E, d)$ est une *partie connexe* si le sous-espace métrique $(A, d_A)$ est un espace métrique connexe.

**5.2.2. Exemple de partie non connexe :** Dans $\mathbb{R}$ munie de la distance usuelle, $\mathbb{Q} = \left(\left]-\infty, \sqrt{2}\right[ \cap \mathbb{Q}\right) \cup \left(\left]\sqrt{2}, +\infty\right[ \cap \mathbb{Q}\right)$. Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

**5.2.3. Proposition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de $E$.

Si pour tous $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.

**Preuve :** Soit $f : \bigcup\limits_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $f$ est continue sur chaque $A_i$. Comme $A_i$ est connexe, il existe une constante $c_i \in \{0,1\}$ telle que $f(A_i) = \{c_i\}$.

$\forall i, j \in I$, comme $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $\exists t_{ij} \in A_i \cap A_j$. Alors $\forall i, j \in I$, $c_i = f(t_{ij}) = c_j$.

Donc $f$ est constante. Par conséquent $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.

**5.2.4. Corollaire :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de $E$.

Si $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.

**5.2.5. Proposition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soit $A$ une partie de $E$.
Si $A$ est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$ alors $B$ est connexe.
En particulier si $A$ est connexe alors $\overline{A}$ est connexe.

**Preuve :** Soit $f : B \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $f$ est continue sur $A$. Comme $A$ est connexe, $f$ est constante sur $A$. Alors $\exists c \in \{0,1\}$ tel que $\forall a \in A,\ f(a) = c$. Soit $x \in B$. Alors $x \in \overline{A}$. Donc il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $A$ qui converge vers $x$. Alors $f(x) = f(lim x_n) = lim f(x_n)$ car $f$ est continue. Donc $f(x) = c$. Ainsi $f$ est constante. Par conséquent $B$ est connexe.

**5.2.6. Proposition :** Une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si $A$ est un intervalle. En particulier $\mathbb{R}$ est connexe.

**Preuve :** Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, soit $A$ une partie connexe.
- Si $A$ n'est pas un intervalle, alors il existe $a, b \in A$ et $c \notin A$ tels que $a < c < b$.

Alors $A = (]-\infty, c[ \cap A) \cup (]c, +\infty[ \cap A)$ qui est une partition de $A$ en deux ouverts non vides. Contradiction.
- Soit $A$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $A$ est vide ou réduit à un point alors $A$ est connexe.

Si $A$ contient au moins deux points distincts $a$ et $b$, soit $f : A \to \{0,1\}$ une application continue. Montrons que $f(a) = f(b)$. On peut supposer que $a < b$.

L'ensemble $\{f(a)\}$ est ouvert et fermé pour la topologie discrète sur $\{0,1\}$.

Posons $B = [a, b] \cap f^{-1}(f(a))$. Alors $B \neq \emptyset$ $(a \in B)$, majoré et fermé. Donc $c = \sup B$ existe et $c \in B$.

Alors $f^{-1}(f(a))$ est un ouvert qui contient $c$.

Par conséquent $\exists \epsilon > 0$ tel que $]c - \epsilon, c + \epsilon[ \subset f^{-1}(f(a))$.

Supposons $c < b$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in ]c, b[ \cap ]c, c + \epsilon[$.

Donc $f(x) = f(a)$ et $x \in B$. Or $c < x$ et $c = \sup B$. Contradiction.

Par conséquent $c = b$ et alors $f(a) = f(c) = f(b)$.

Donc $f$ est constante et alors $A$ est connexe.

### 5.3. Connexité et continuité

**5.3.1. Proposition :** Soit $E$ et $F$ deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application.

Si $E$ est connexe et si $f$ est continue, alors $f(E)$ est connexe.

**Preuve :** Soit $\varphi : f(E) \to \{0,1\}$ une application continue. Alors $\varphi \circ f : E \to \{0,1\}$ est continue. Comme $E$ est connexe, $\varphi \circ f$ est constante. Donc $\varphi$ est constante sur $f(E)$.

Par conséquent $f(E)$ est connexe.

### 5.4. Produits d'espaces connexes

**Théorème :** L'espace métrique produit d'une famille finie d'espaces métriques est connexe si et seulement si chacun de ces espaces est connexe.

**Preuve :** Soient $E_1$ et $E_2$ deux espaces métriques.

- CN : Supposons $E_1 \times E_2$ connexe. Soit $p_i : E_1 \times E_2 \to E_i$ la $i^{ème}$ projection canonique, $i = 1, 2$. Elle est continue et surjective et $E_1 \times E_2$ est connexe. Alors $p_i(E_1 \times E_2) = E_i$ est connexe.

- CS : Supposons $E_1$ et $E_2$ connexes. Soit $f : E_1 \times E_2 \to \{0,1\}$ une application continue.

Soit $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$.

$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $f$ est continue sur $\{x_1\} \times E_2$. Or l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_2 : & E_2 & \to & \{x_1\} \times E_2 \\ & y & \mapsto & (x_1, y) \end{array}$$

est continue, surjective et $E_2$ connexe. Alors $\{x_1\} \times E_2$ est connexe.

Par conséquent $f$ est constante sur $\{x_1\} \times E_2$. Donc $f(x_1, x_2) = f(x_1, a_2)$.

Par un raisonnement analogue au précédent, $E_1 \times \{a_2\}$ est connexe et $f$ constante sur $E_1 \times \{a_2\}$. Donc $f(x_1, a_2) = f(a_1, a_2)$.

Par conséquent $f(x_1, x_2) = f(x_1, a_2) = f(a_1, a_2)$. Alors $f$ est constante, donc $E_1 \times E_2$ est connexe.

### 5.5. Connexité par arcs

**5.5.1. Définition :** Soit $(E, d)$ un espace métrique et soient $a, b \in E$.

On appelle *chemin* joignant $a$ et $b$, toute application continue $f : [\alpha, \beta] \to E$, (où $[\alpha, \beta]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$), telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$.

On appelle *arc* d'extrémités $a$ et $b$, l'ensemble $f([\alpha, \beta])$.

**5.5.2. Définition :** On dit qu'un espace métrique $(E, d)$ est *connexe par arcs* si pour tous $a, b \in E$, il existe un chemin joignant $a$ et $b$.

**5.5.3. Exemple :** $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs (pour la distance induite par l'une de ses trois normes usuelles équivalentes).

En effet, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & [0,1] & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & (1-t)\,a + tb \end{array}$$

est un chemin joignant $a$ et $b$.

**5.5.4. Théorème :** Tout espace métrique $(E, d)$ connexe par arcs est connexe.

**Preuve :** Soit $x_0 \in E$. $\forall x \in E$, soit $f_x : [\alpha_x, \beta_x] \to E$ un chemin joignant $x_0$ à $x$.
Comme $[\alpha_x, \beta_x]$ est connexe et $f_x$ continue, alors l'arc $A_x = f_x\left([\alpha_x, \beta_x]\right)$ est une partie connexe de $E$. Or

$$E = \bigcup_{x \in E} A_x \text{ et } x_0 \in \bigcap_{x \in E} A_x.$$

Donc $E$ est connexe.

**5.5.5. Exemple :** $\mathbb{R}^n$ est connexe car connexe par arcs.

## Chapitre VI. Espaces vectoriels normés

### 6.1. Généralités

**6.1.1. Rappels : Définitions et premiers exemples voir 1.2.**

**6.1.2. Proposition :** Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'application $\| \,.\, \| : x \in E \mapsto \| x \| \in \mathbb{R}$ est uniformément continue.

**Preuve :** $\forall x, y \in E$, $| \, \| x \| - \| y \| \, | \leq \| x - y \|$. Alors l'application $\| \,.\, \|$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue.

**6.1.3. Proposition :** Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Les applications $s \; : (x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ et $p \; : (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ sont continues.

**Preuve :**

**Continuité de s :**
Pour tous $(x, y)$, $(x', y') \in E \times E$, on a :

$$\| s(x', y') - s(x, y) \| = \| x' + y' - (x + y) \| \leq \| x' - x \| + \| y' - y \| = N_1((x', y') - (x, y)).$$

Alors $s$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue et par conséquent continue.

**Continuité de p :**
Soit $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$. Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a :

$$\| p(\lambda, x) - p(\lambda_0, x_0 \| = \| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| = \| \lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - \lambda_0 x_0 \| \leq |\lambda - \lambda_0| \, \| x \| + |\lambda_0| \, \| x - x_0 \| \,.$$

Or $x = x - x_0 + x_0$. Donc $\| x \| \leq \| x - x_0 \| + \| x_0 \|$. Alors

$$\| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| \leq |\lambda - \lambda_0| \, \| x - x_0 \| + |\lambda - \lambda_0| \, \| x_0 \| + |\lambda_0| \, \| x - x_0 \|$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que

$$sup(|\lambda - \lambda_0|, \| x - x_0 \|) < \eta \Rightarrow \| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| < \epsilon.$$

Or d'après le calcul précédent,
$sup(|\lambda - \lambda_0|, \| x - x_0 \|) < \eta \Rightarrow \| \lambda x - \lambda_0 x_0 \| < \eta^2 + (\| x_0 \| + |\lambda_0|)\eta$.
Il suffit alors que $\eta^2 + (\| x_0 \| + |\lambda_0|)\eta < \epsilon$. C'est-à-dire $\eta^2 + (\| x_0 \| + |\lambda_0|)\eta - \epsilon < 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (\| x_0 \| + |\lambda_0|)^2 + 4\epsilon > 0$. Donc $\eta$ existe.
Ainsi $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,

$$N_\infty((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) < \eta \Rightarrow \| p(\lambda, x) - p(\lambda_0, x_0 \| < \epsilon.$$

Donc $p$ est continue au point $(\lambda_0, x_0)$.

### 6.2. Norme de la convergence uniforme

**6.2.1. Définition :** Soit $X$ un ensemble. Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sur $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'espace des applications bornées de $X$ dans $E$, on définit la *norme de la convergence uniforme* en posant $\forall f \in \mathcal{F}_b(X, E)$,

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} \| f(x) \| .$$

**6.2.2. Théorème :** Soit $X$ un ensemble. Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $(E, \| \,.\, \|)$ est complet, alors $(\mathcal{F}_b(X, E), \| \,.\, \|_\infty)$ est complet.

**Preuve :** La distance associée à la norme $\| \,.\, \|_\infty$ est la distance de la convergence uniforme $d_\infty$. Soit $d$ la distance associée à la norme $\| \,.\, \|$.
Si $(E, \| \,.\, \|)$ est complet, alors $(E, d)$ est un espace métrique complet. Alors $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$ est complet. Par conséquent $(\mathcal{F}_b(X, E), \| \,.\, \|_\infty)$ est complet.

### 6.3. Application linéaires continues

**6.3.1. Définition :** Soient $(E, \| \, \|_E)$ *et* $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Une application $f$ de $E$ dans $F$ est dite *linéaire continue* si $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ et si $f$ est continue de $(E, d_E)$ dans $(F, d_F)$ où $d_E$ est la distance associée à $\| \, \|_E$ et $d_F$ la distance associée à $\| \, \|_F$.

**Notation** : L'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ sera noté : $\mathcal{L}(E, F)$.

**6.3.2. Théorème :** Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $f$ est continue sur $E$.

ii) $f$ est continue en $0_E$.

iii) Il existe une constante $k > 0$ telle que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

**Proof.**

i)$\Rightarrow$ii) Si $f$ est continue sur $E$, alors $f$ est continue en $0_E$.

ii) $\Rightarrow$iii) Si $f$ est continue en $0_E$, *en prenant* $\epsilon = 1, \exists \eta > 0$ *tel que* $\forall x \in E$

$$\|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1 \text{ } car \text{ } f(0_E) = 0_F.$$

Soit $x \neq 0_E$. *Posons* $y = \frac{\eta}{2}\frac{x}{\|x\|_E}$. Alors $\|y\|_E = \frac{\eta}{2} < \eta$.
Donc $\|f(y)\|_F \leq 1$. Alors $\|f(\frac{\eta}{2}\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \frac{2}{\eta}\|x\|_E$, car $f$ est linéaire.
Si $x = 0_E$, l'inégalité obtenue est aussi vraie. Donc $k = \frac{2}{\eta}$ convient.

iii)$\Rightarrow$i). Supposons qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
Alors $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$.
Alors $f$ est $k$-lipschitzienne. Donc $f$ est uniformément continue, par conséquent continue. ∎

**6.3.3. Proposition :** Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Sur $\mathcal{L}(E, F)$, on définit une norme en posant $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\| f \| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\| f(x) \|_F}{\| x \|_E}.$$

Et on a $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\| f \| = \sup_{\|x\|=1} \| f(x) \|_F .$$

**6.3.4. Corollaire 1 :** $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall x \in E$,

$$\| f(x) \|_F \leq \| f \| . \| x \|_E .$$

**6.3.5. Corollaire 2 :** Soient $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \| \|_G)$ trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\forall g \in \mathcal{L}(F, G)$, $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$, et

$$\|g \circ f\| \leq \|g\|.\|f\|$$

**6.4. Normes sur un espace vectoriel de dimension finie** Voir 1.2.5.

**6.4.1. Normes usuelles équivalentes** Voir 1.2.5.

**6.4.2. Proposition :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $E$.
Alors la boule fermée $B_f(0_E, 1)$ de $E$ pour l'une des trois normes usuelles est compacte.

**Proof.** Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ définie par $\forall \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda) = x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors $f$ est linéaire.
En considérant sur $\mathbb{R}^n$ et $E$ la même norme usuelle, par exemple la norme $\| \|_2$, on a

$$\|f(\lambda)\|_2 = \|x\|_2 = \|\lambda\|_2.$$

Alors $f$ est continue. Et
$$f(B_f(0_{\mathbb{R}^n},1)) = B_f(0_E,1).$$
Or $B_f(0_{\mathbb{R}^n},1)$ est compacte. Donc $B_f(0_E,1)$ est compacte. ■

**6.4.3. Théorème :** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors

i) Toutes les normes sur $E$ sont équivalentes.

ii) Pour toute norme sur $E$, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

iii) Toute application linéaire $f$ de $E$ dans un espace vectoriel normé $(F, \| \|_F)$ sur $\mathbb{K}$ est continue.

**Proof.** iii) Supposons que $\dim E = n$. Soit $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$.
$\forall x \in E$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors
$$\|f(x)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|_F.$$
Posons $k = \max\limits_{1\leq i\leq n} \|f(e_i)\|_F$. Alors $\|f(x)\|_F \leq k \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.
En considérant sur $E$ la norme $N_1$, définie par $N_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ on a :
$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k N_1(x)$.
Soit $\| \|_E$ la norme sur $E$. Elle est équivalente à la norme $N_1$. Alors il existe $M>0$ tel que $N_1 \leq M \| \|_E$. Donc $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq kM\|x\|_E$.
Par conséquent, $f$ est continue. ■

**6.4.4. Corollaire :** Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue.

### 6.5. Applications multilinéaires continues

**6.5.1. Définition :** Soient $(E_1, \| \|_{E_1}), ..., (E_n, \| \|_{E_n})$ et $(F, \| \|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$ une application.
On dit que $f$ est *multilinéaire* si $f$ est linéaire par rapport à chacune des ses $n$ variables, les autres étant fixées, c'est-à- dire que pour tout $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, chaque application partielle
$$x_i \in E_i \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in F$$
est linéaire, $\forall i = 1, ..., n$.

Si $n=2$, on dit que $f$ est *bilinéaire.* Si $n=3$, on dit que $f$ est *trilinéaire.*

On dit que $f$ est *multilinéaire continue* si $f$ est multilinéaire et continue pour la structure d'espace vectoriel normé produit de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ et d'espace vectoriel normé de $(F, \| \|_F)$.

**6.5.2. Proposition :** Soient $(E_1, \| \|_{E_1}), (E_2, \| \|_{E_2})$ et $(F, \| \|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire.
Sont équivalentes :

i) $f$ est continue sur $E_1 \times E_2$.

ii) $f$ est continue en $0_{E_1 \times E_2}$.

iii) Il existe une constante $k > 0$ telle que : $\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$,

$$\|f(x_1, x_2)\|_F \leq k\|x_1\|_{E_1} \times \|x_2\|_{E_2}.$$

**6.5.3. Proposition :** Soient $(E_1, \| \ \|_{E_1}), ..., (E_n, \| \ \|_{E_n})$ et $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E_1 \times ... \times E_n \to F$ une application multilinéaire.
Sont équivalentes :

i) $f$ est continue sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

ii) $f$ est continue en $0_{E_1 \times E_2 \times ... \times E_n}$.

iii) Il existe une constante $k > 0$ telle que : $\forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$,

$$\|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leq k\|x_1\|_{E_1} \times \|x_2\|_{E_2} \times ... \times \|x_n\|_{E_n}.$$

**Proof.**
*i) $\Rightarrow$ ii)* : Immédiat.
*ii) $\Rightarrow$ iii)* : Supposons $f$ est continue en $0_{E_1 \times E_2 \times ... \times E_n}$. Considérons sur $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ la norme $\| \ \|_\infty$ définie par $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$,

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i}$$

En prenant $\epsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$.
Soit $x \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ tel que $x_i \neq 0 \ \forall i = 1, ..., n$. Posons

$$y = \frac{\eta}{2}(\frac{x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, ..., \frac{x_n}{\|x_n\|_{E_n}}).$$

Alors $\|y\|_\infty = \frac{\eta}{2} < \eta$. Donc $\|f(y)\|_F \leq 1$. Par conséquent

$$\frac{\eta}{2} \frac{1}{\|x_1\|_{E_1} \times ... \times \|x_n\|_{E_n}} \|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leq 1$$

car $f$ est multilinéaire. Donc

$$\|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leq \frac{2}{\eta}\|x_1\|_{E_1} \times ... \times \|x_n\|_{E_n}.$$

S'il existe $i$ tel que $x_i = 0$, alors cette inégalité est aussi vraie.
Ainsi $\exists M = \frac{2}{\eta} > 0$ tel que $\forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$,

$$\|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1} \times ... \times \|x_n\|_{E_n}.$$

$iii) \Rightarrow i)$ : Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$,

$$\|f(x_1, ..., x_n)\|_F \leq K \|x_1\|_{E_1} \times ... \times \|x_n\|_{E_n}.$$

Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Montrons que $f$ est continue en $a$.
On a $f(x) - f(a) = f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n)$. Alors

$f(x) - f(a) = f(x_1 - a_1, x_2, ..., x_n) + f(a_1, x_2 - a_2, x_3, ..., x_n) + f(a_1, a_2, x_3 - a_3, x_4, ..., x_n) + ...$
$+ f(a_1, ..., a_{n-1}, x_n - a_n)$. Donc

$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f(x_1 - a_1, x_2, ..., x_n)\|_F + \|f(a_1, x_2 - a_2, x_3, ..., x_n)\|_F + ...$
$+ \|f(a_1, ..., a_{n-1}, x_n - a_n)\|_F$.

On en déduit d'après l'hypothèse que

$\|f(x) - f(a)\|_F \leq K\|x_1 - a_1\|\|x_2\|...\|x_n\| + K\|a_1\|\|x_2 - a_2\|\|x_3\|...\|x_n\| + ...$
$+ K\|a_1\|...\|a_{n-1}\|\|x_n - a_n\|$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} \|f(x) - f(a)\|_F = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Par conséquent $f$ est continue en $a$. ■

### 6.6. Espaces de Banach

**6.6.1. Définition :** On appelle *espace de Banach* sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tout espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ qui est complet.
Un espace de Banach réel est un espace de Banach sur $\mathbb{R}$.
Un espace de Banach complexe est un espace de Banach sur $\mathbb{C}$.

**6.6.2. Proposition :** Tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace de Banach.

**6.6.3. Proposition :** Soit $X$ un ensemble. Soit $(E, \| \ \|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $(E, \| \ \|_E)$ est espace de Banach, alors $(\mathcal{F}_b(X, E), \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach, où $\| \ \|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme.

**Preuve :** Déjà faite au 6.2.2.

**6.6.4. Théorème :** Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $(F, \| \ \|_F)$ est espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est espace de Banach, où $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\| f \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\| f(x) \|_F}{\| x \|_E}.$$

**6.6.5. Définition :** Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit qu'une application $f : (E, \| \|_E) \to (F, \| \|_F)$ est un *isomorphisme d'espaces vectoriels normés* si

i) $f$ est linéaire

ii) $f$ est bijective

iii) $f$ est continue

iv) sa réciproque $f^{-1}$ est continue.

**Remarque :** Si $f$ est linéaire, sa réciproque $f^{-1}$ est linéaire.

**Notation :** On note $Isom(E, F)$ l'espace des isomorphismes d'espaces vectoriels normés de $(E, \| \|_E)$ sur $(F, \| \|_F)$.

**6.6.6. Théorème de Banach :** Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ sont des espaces de Banach, alors toute application linéaire continue et bijective $f : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés.

**6.6.7. Théorème et définition :** Soit $(E, \| \|_E)$ un espace de Banach. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$.
Alors la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$$

converge normalement, (où $f^0 = Id_E$ et $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$, $n$-fois).
On note $exp(f)$ sa somme. Donc

$$exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n$$

**Proof.** On a $\|f^n\| \leq \|f\|^n$ et la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|f\|^n$ converge de somme

$$exp(\|f\|) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \|f\|^n.$$

Donc la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$$

converge normalement. ∎

**6.6.8. Théorème :** Soit $(E, \| \|_E)$ un espace de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E)$ tel que $\|u\| < 1$.
Alors $Id_E - u$ est inversible dans $\mathcal{L}(E, E)$.

**Proof.** La série $\sum\limits_{n\geq 0} u^n$ converge normalement car $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} \|u\|^n$ converge car $\|u\| < 1$.
Soit $v = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$ la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u^n$. Alors

$$u \circ v = v \circ u = \sum_{n=1}^{+\infty} u^n = v - Id_E.$$

Donc $v \circ (Id_E - u) = (Id_E - u) \circ v = Id_E$.
Par conséquent, $Id_E - u$ est inversible d'inverse $v$. ■

**6.6.9. Théorème :** Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces de Banach. Alors

i) $Isom(E, F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

ii) L'application : $u \in Isom(E, F) \mapsto u^{-1} \in Isom(F, E)$ est continue.

**Proof.**
i) Soit $u_0 \in Isom(E, F)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Posons

$$v = Id_E - (u_0^{-1}) \circ u = (u_0^{-1}) \circ (u_0 - u).$$

Alors $\|v\| \leq \|u_0^{-1}\|.\|u - u_0\|$. (1)

Donc si $\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $\|v\| < 1$. Donc $Id_E - v$ est inversible.
Dans ce cas, $(u_0^{-1}) \circ u = Id_E - v$ est inversible. Alors $(u_0^{-1}) \circ u \in Isom(E, E)$. Donc $u \in Isom(E, F)$. Ainsi

$$B(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}) \subset Isom(E, F).$$

Donc $Isom(E, F)$ est un ouvert.

ii) Avec les notations du i) si $\|u - u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $u = u_0 \circ (Id_E - v)$.
Donc $u^{-1} = (Id_E - v)^{-1} \circ u_0^{-1}$. Par conséquent

$$u^{-1} - u_0^{-1} = [(Id_E - v)^{-1} - Id_E] \circ u_0^{-1}.$$

Comme $\|v\| < 1$, d'après le théorème précédent,

$$(Id_E - v)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v^n \Longrightarrow (Id_E - v)^{-1} - Id_E = \sum_{n=1}^{+\infty} v^n.$$

Donc

$$\|(Id_E - v)^{-1} - Id_E\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}.$$

Alors $\|u^{-1} - u_0^{-1}\| \leq \|u_0^{-1}\| \frac{\|v\|}{1-\|v\|}$.

Lorsque $u \to u_0$, $\|v\| \to 0$ d'après (1) dans i). Donc $u^{-1} \to u_0^{-1}$. ■

**6.7. Espaces de Hilbert réels**

**6.7.1. Définition :** Soit $H$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On appelle *produit scalaire* sur $H$, toute forme bilinéaire symétrique définie positive $< .,. > : H \times H \to \mathbb{R}$.
On appelle *espace préhilbertien réel*, tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.

**6.7.2. Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz :** Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel. Pour tous $x, y \in H$,

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}.$$

**Proof.** Soient $x, y \in H$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $< x + \lambda y, x + \lambda y > \geq 0$.
Alors $< x, x > +2\lambda < x, y > +\lambda^2 < y, y > \geq 0$. Ce polynôme du second degré en $\lambda$ étant de signe fixe, son discriminant (réduit) $\Delta' = (< x, y >)^2 - < x, x >< y, y > \leq 0$.
Donc $(< x, y >)^2 \leq < x, x >< y, y >$.
Finalement, $| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >}$. ■

**6.7.3. Corollaire :** Soit $(H, < .,. >)$ un espace préhilbertien réel.
On obtient une norme sur $H$ en posant pour tout $x \in H$,

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Cette norme est appelée la *norme associée au produit scalaire.*
L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors : pour tous $x, y \in H$,

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|.$$

**Proof.** Pour tous $x \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{< x, x >} \geq 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
Pour tous $x, y \in H$, $\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= \|x\|^2 + 2 < x, y > +\|y\|^2$.
Alors

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Donc $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Ainsi on a bien une norme sur $H$. ■

**6.7.4. Définition :** On appelle *espace de Hilbert réel*, tout espace préhilbertien réel $(H, < .,. >)$ qui est complet pour la norme associée au produit scalaire.

Un espace de Hilbert réel est donc un espace de Banach réel dont la norme est une norme associée à un produit scalaire.

**6.7.5. Exemple :** Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est défini par $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

La norme associée est définie par $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2.$$

Donc $(\mathbb{R}^n, < .,. >)$ est un espace de Hilbert réel car $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ est complet.