Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique Année 2023-2024

Licence 3 Mathématiques
TD : Topologie

Exercice 1
Soit E un ensemble non vide. On pose $\forall(x, y) \in E \times E$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

1) Montrer que d est une distance sur E. (Cette distance est appelée *la distance discrète*).

2) a) Quels sont les ouverts pour cette distance ? Quelle est la topologie obtenue ?

b) Quels sont les fermés pour cette distance ?

3) a) Quelles sont les suites de Cauchy pour cette distance ?

b) L'espace (E, d) est-il complet ?

Exercice 2
Soit E l'espace des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tous $f, g \in E$, on pose

$$d(f,g) = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|^2 dt}$$

1) Montrer que d est une distance sur E.
2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$f_n(x) = 0 \ si \ x \in [-1, 0]$$

$$f_n(x) = nx \ si \ x \in]0, \frac{1}{n}]$$

$$f_n(x) = 1 \ si \ x \in]\frac{1}{n}, 1]$$

a) Montrer que la suite $(f_n)_n \geq 1$ est une suite de Cauchy de (E, d).
b) L'espace métrique (E, d) est-il complet ?

Exercice 3
1) Montrer que si (E, d) est un espace métrique complet et si F est une partie fermée de (E, d), alors (F, d) est complet.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des applications $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui sont bornées. Soit D_∞ la distance de la convergence uniforme sur E.

(i) Donner en la justifiant, la définition de D_∞.

(ii) Soit $F = C^0([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que F est une partie fermée de (E, D_∞).

(iii) En déduire que (F, D_∞) est complet.

NB : Ce résultat pourra être utilisé.

Exercice 4

Soient A un nombre réel strictement positif et E l'espace des applications continues de $[0, A]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la distance de la convergence uniforme D.

Soit $T : E \to E$ l'application définie par $\forall x \in E$ et $\forall t \in [0, A]$

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds.$$

1) Donner en la justifiant, la définition de D.

2) Montrer que l'on a bien $T(x) \in E$, $\forall x \in E$.

3) Montrer que l'application T est lipschitzienne.

4) On suppose que $A < 1$.Montrer que T admet un point fixe et ce point fixe est unique.

5) Montrer que le point fixe de T est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$u'(t) - u(t) = 0, \ \forall t \in [0, A] \text{ et } u(0) = 1.$$

Exercice 5

Soit E l'espace des suites de nombres réels nulles à partir d'un certain rang.

1) Justifier qu'on peut considérer sur E la norme $\|.\|_\infty$.

2) Montrer que l'application $L : E \to E$ définie par

$$L((x_n)_{n \in N}) = (\frac{x_n}{n+1})_{n \in N}$$

est linéaire, bijective et continue.

3) Montrer que L^{-1} n'est pas continue.

Exercice 6

Soit (X, d) un espace métrique compact, et soit f une isométrie de X dans X.

1) Démontrer que f est un homéomorphisme de X sur X.

Indication :

Si $f(X) \neq X$, prendre un point $x_1 \in X \backslash f(X)$ et considérer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Prouver qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \neq q$, $d(x_p, x_q) \geq \alpha$.

2) En déduire qu'une isométrie f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui admet un point fixe est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A et B deux parties de E.

1) Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.

2) Montrer que si A est compacte et si B est fermée, alors $A + B$ est fermée.

3) Montrer que si A et B sont connexes, alors $A + B$ est connexe.

Exercice 8

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\forall x \in E$

$$\|x\| = |x(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)| .$$

1) Montrer qu'on définit ainsi une norme sur E.

2) Montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

3) On pose $\forall x \in E$

$$N(x) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)| .$$

a) Montrer que N est une norme sur E.

b) Montrer que les normes N et $\|.\|$ sont équivalentes sur E.

c) Que peut-on en déduire pour (E, N) ? Justifier votre réponse.

Exercice 9

Soit E l'espace de Banach réel des applications continues de $[-1,4]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Montrer que l'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall f \in E$,

$$L(f) = f(-1) - 4f(0) + 5f(1) - 3f(2) + 2f(3) - 8f(4)$$

est une forme linéaire continue sur E et calculer sa norme.