Intégrales généralisées et séries

Prof Adama COULIBALY
UFR de Mathématiques et Informatique,
Université Félix Houphouët-Boigny

4 avril 2016

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales Généralisées

L'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ a été déjà définie. Nous allons étendre cette notion au cas où l'intervalle est non fermé ou non borné. C'est-à-dire que nous allons nous intéresser aux intégrales du type $\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction définie et continue sur $[a, b[$, b pouvant être fini ou non. Cette nouvelle intégrale est appelée intégrale généralisée ou intégrale impropre et b est dit borne impropre de l'intégrale. Cette intégrale est aussi dite intégrale généralisée en b. On étudiera aussi les cas où f est une fonction définie et continue sur $]a, b]$, a pouvant être fini ou non, dans ce cas on parle d'intégrale généralisée en a et le cas où la fonction f est définie et continue sur $]a, b[$, a et b pouvant être finis ou non, alors les bornes impropres sont a et b et on parle d'intégrale plusieurs fois généralisée.

1.1 Convergence, divergence d'une intégrale généralisée

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (i.e b pouvant être fini ou non). Si la fonction F définie sur $[a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers b on dit que l'intégrale généralisée en b, $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale est divergente.

Si F admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en b, la divergence est de première espèce.

Si F n'admet pas de limite dans $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, la divergence est de deuxième espèce.

La borne b est appelée borne impropre.

On définit de façon analogue les intégrales généralisées du type $\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction f définie et continue sur $]a, b]$, a pouvant être fini ou non.

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction numérique continue sur $]a, b]$, a pouvant être fini ou non. Si la fonction F définie sur $]a, b]$ par $F(x) = \int_x^b f(t)dt$ admet une limite quand x tend vers a on dit que l'intégrale généralisée en a, $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt$$

Dans le cas contraire on dit que la l'intégrale est divergente.
Si F admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite en b, la divergence est de première espèce.
Si F n'admet pas de limite dans $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, la divergence est de deuxième espèce.
La borne a est appelée borne impropre.

On montre que

Proposition 1.1.1 *Si f est continue sur $[a, b[$, on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-b}^{-a} f(-t)dt.$$

Sans perdre de généralités, on peut limiter l'étude à $\int_a^b f(t)dt$ avec f définie et continue sur $[a, b[$ et $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Proposition 1.1.2 (Intégrale faussement généralisée)
Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b[$, $b \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite dans $\mathbb{R}$ en b, alors l'intégrale généralisée en b $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt,$$

où $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f sur $[a, b]$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est une fausse intégrale généralisée.

Preuve : Puisque $\widetilde{f}$ est continue en b, elle est bornée au voisinage de b. Il existe donc $b_0 \in [a, b[$ et $M > 0$ tels que pour tout $t \in [b_0, b]$, $|\widetilde{f}(t)| \leq M$.
On a alors, pour tout $x \in [b_0, b[$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^b \widetilde{f}(t)dt \right| &= \left| \int_a^x \widetilde{f}(t)dt - \int_a^b \widetilde{f}(t)dt \right| \\ &= \left| \int_x^b \widetilde{f}(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^b |\widetilde{f}(t)|dt \leq M(b-x) \end{aligned}$$

Comme $M(b - x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers b, ceci montre que

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

d'où le résultat. □

Définition 1.1.3 *Deux intégrales généralisées sont dites de même nature au voisinage d'une borne impropre, si elles sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.*

On peut montrer sans trop de peine la proposition suivante.

Proposition 1.1.3 *Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, b pouvant être fini ou non. Étant donné $c \in [a, b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_c^b f(t)dt$ est convergente et dans ce cas,*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

On dit alors que la nature de $\int_a^b f(t)dt$ n'est déterminée que par le comportement de f au voisinage de b. C'est donc une propriété asymptotique.

1.1.2 Exemples

1) **Intégrale de Riemann au voisinage de l'infini :** Etude de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) supposons que $\alpha = 1$.
On a $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente.

ii) A présent supposons que $\alpha \neq 1$.
On a :

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}.$$

Si $\alpha < 1$, on a $-\alpha + 1 > 0$; donc $x^{-\alpha+1} \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente.
Si $\alpha > 1$, on a $-\alpha + 1 < 0$; donc $x^{-\alpha+1} \to 0$. Par conséquent $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ est convergente.

On peut donc résumer :

Proposition 1.1.4 *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

2) **Intégrale de Riemann au voisinage de zéro :** Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha \neq 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - x^{1-\alpha}\right].$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{dx}{t} = -\ln x$$

Ce qui montre que

Proposition 1.1.5 *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

On en déduit

Proposition 1.1.6 *L'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

3) Etude de $\int_0^1 \ln t dt$

Le calcul s'effectue sur les fonctions primitives. On a :

$$\int_x^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_x^1 = -1 + x - x \ln x$$

qui tend vers -1 lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. On a donc $\int_0^1 \ln t dt = -1$.

4) Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ définie sur $[0, 1[$. On a f qui est continue sur $[0, 1[$.

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^x = \arcsin(x).$$

Or $\lim_{x \to 1} \arcsin(x) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
Alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.

5) Etude de $\int_0^{+\infty} \sin t dt$

On a $\int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$, qui n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. L'intégrale est donc divergente.
Il en est de même de $\int_0^{+\infty} \cos t dt$.

6) Etude de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt$
Pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-x};$$

et lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t} dt$ tend vers 1. L'intégrale est donc convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt = 1.$$

7) Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$
On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge.
8) Etude de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$
La borne impropre est 0.
On a $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Donc l'intégrale converge (c'est une fausse intégrale généralisée).

1.1.3 Intégrales plusieurs fois généralisées

On a la propriété suivante :

Proposition 1.1.7 *Si f est une fonction continue un intervalle $]a, b[$ et s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent, alors pour tout $d \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^d f(t)dt$ et $\int_d^b f(t)dt$ convergent et de plus $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt$.*

On définit la notion d'intégrale plusieurs fois généralisée.

Définition 1.1.4 *Étant donné une fonction f continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$, a pouvant être égal à $-\infty$, b à $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. On pose alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

D'après la proposition précédente cette définition est indépendante du point c choisi.
Exemple : Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$
On a $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ qui diverge, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ diverge.
On montre que :

Proposition 1.1.8 *Soit f une fonction continue un intervalle $]a, b[$ borné ou non. pour que l'intégrale de f sur cet intervalle soit convergente, il faut et il suffit que la fonction*

$$\Phi : (x, y) \to \int_x^y f(t)dt \quad (a < x < y < b)$$

ait une limiote lorsque le point (x, y) tend vers le point (a, b) dans $\mathbb{R}^2$; et cette limite est l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. On a donc

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\substack{(x,y) \to (a,b) \\ a < x < y < b}} \int_x^y f(t)dt.$$

Exemple : Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.
Posons $\varphi(x, y) = \int_x^y \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ pour $0 < x < y < 1$.
En faisant le changement de variable $\theta = \arcsin \sqrt{t}$, on a

$$\varphi(x, y) = \int_{\arcsin \sqrt{x}}^{\arcsin \sqrt{y}} 2d\theta$$

et donc

$$\lim_{(x,y) \to (0,1)} \varphi(x, y) = \pi.$$

En conclusion l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge.

On peut facilement étendre cette définition à une intégrale généralisée en un nombre fini de points.

Définition 1.1.5 *Soit a, b dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $c_1, \cdots c_n$ dans $]a, b[$ avec $c_i < c_{i+1}$.*

Si f est continue sur $]a, c_1[$, $]c_1, c_2[, \cdots,]c_n, b[$, l'intégrale $\int_a^b f$ est dite convergente si et seulement si $\int_a^{c_1} f, \int_{c_1}^{c_2} f, \cdots, \int_{c_n}^b f$ sont toutes convergentes. On pose alors

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \int_{c_n}^b f.$$

1.1.4 Propriétés

1) Relation de Chasles

Proposition 1.1.9 *Étant donné une fonction f continue sur un intervalle ouvert $]a, b[$, a pouvant être égal à $-\infty$, b à $+\infty$, si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors quel que soit $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.*

2) Linéarité

Soit f, g des fonctions continues sur $]a, b[$.

Proposition 1.1.10 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)dt$ sont de même nature.*

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.

Proposition 1.1.11 *Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors*

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

Proposition 1.1.12 *Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b g(t)dt$ diverge alors $\int_a^b (f+g)(t)dt$ diverge.*

Remarque 1.1.1 *1) On prendra garde de ne pas écrire $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ avant d'avoir établi la convergence des intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$. On risque, sans cela de décomposer la valeur d'une intégrale généralisée convergente en somme de valeurs de deux intégrales généralisées divergentes, valeurs qui n'existent pas.*

Par exemple, l'écriture $\int_0^\infty (1 + (-1)) = \int_0^\infty 1 + \int_0^\infty (-1)$ est illicite, car les deux dernières valeurs n'existent pas.

2) Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent, on ne peut pas conclure que $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge.

3) Propriété relative à l'ordre

Proposition 1.1.13 *Si $\int_a^b f(t)dt$ converge et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.*

Preuve :

Pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t)dt \geq 0$, d'où en passant à la limite lorsque x tend vers b^- : $\int_a^b f(t)dt \geq 0$. $\square$

Corollaire 1.1.1 *Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent et si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.*

On montre que

Proposition 1.1.14 *f étant continue sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, si $\int_a^b f(t)dt$ converge, $f \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.*

1.2 Calcul pratique des intégrales généralisées

1.2.1 Utilisation d'une primitive

Si la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, elle admet donc sur $]a,b[$ une primitive F, la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence des deux limites finies $F(a+0)$ et $F(b-0)$; et si ces limites existent, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b-0) - F(a+0).$$

C'est cette méthode qui a été utiliseé jusqu'à présent.

1.2.2 Changement de variables

La nature d'une intégrale généralisée est invariante par changement de variables.

Définition 1.2.1 *Soit $[a,b[$ et $[\alpha,\beta[$ des intervalles de $\mathbb{R}$ (b ou β pouvant être infinis).*

φ est un changement de variable bijectif de $[a,b[$ sur $[\alpha,\beta[$ si φ est une bijection continûment derivable de $[a,b[$ sur $[\alpha,\beta[$ telle que $\varphi(a)=\alpha$ et $\varphi(x)$ tend vers β lorsque x tend vers b.

Théorème 1.2.1 *Soit f une fonction continue sur $[\alpha,\beta[$. Avec les notations de la définition ci-dessus, les intégrales $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ et $\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales.*

Preuve :

Pour tout $x \in [a,b[$, $\int_a^x (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$. En observant que $\lim_{x\to b}\varphi(x) = \beta$, on conclut que la convergence de $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ implique celle de $\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$.

Inversement, on note que φ est un homéomorphisme de $[a,b[$ sur $[\alpha,\beta[$.

Pour tout $y \in [\alpha,\beta[$, $\int_\alpha^y f(t)dt = \int_a^{\varphi^{-1}(y)} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$.

En observant que $\lim_{y\to\beta}\varphi^{-1}(y) = b$, on conclut que la convergence de $\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$ implique celle de $\int_\alpha^\beta f(t)dt$. $\square$

Corollaire 1.2.1 *Étant donné des intervalles $]a,b[$ et $]\alpha,\beta[$ avec a, b, α, β dans $\bar{\mathbb{R}}$, soit φ une bijection continûment derivable de $]a,b[$ sur $]\alpha,\beta[$ avec $\lim_{x\to a}\varphi(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to b}\varphi(x) = \beta$.*

Si f est continue sur $]\alpha,\beta[$, les intégrales $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ et $\int_a^b (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales.

Exemple

Pour étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cosh t}{\cosh 2t}dt$, on peut faire le changement de variable $x = \sinh t$. On obtient alors que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\cosh t}{\cosh 2t}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x^2}$ sont de même nature. Mais comme on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan\sqrt{2}x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et donc il y a convergence et par suite égalité, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh t}{\cosh 2t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Remarque 1.2.1 *Par un changement de variable on peut transformer une intégrale généralisée en une intégrale non généralisée et inversement. Dans ce cas l'intégrale généralisée converge.*

Considérons les exemples suivants :
Exemples
1) Étudier l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt$.
Effectuons le changement de variable $x = \mathrm{e}^{-t}$, on obtient $I = \int_0^1 dx$.
Donc l'intégrale converge et vaut 1.
2) Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.
Effectuons le changement de variable : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{3+t^2}$.
On a :

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Donc cette intégrale est convergente et vaut 1.

1.2.3 Intégration par parties

La formule d'intégration par parties s'étend aux intégrales généralisées.

Théorème 1.2.2 *Soit f, g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, b pouvant être infini.*
Si $f(x)g(x)$ admet une limite réelle en b, alors les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ sont de même nature.
ii) et si une d'elles converge, $\int_a^b f(t)g'(t) = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Preuve :
Pour tout $x \in [a, b[$, $\int_a^x f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)dt$.
Compte tenu du fait que $f(x)g(x)$ admet une limite réelle en b, il suffit de passer à la limite en b pour établir les deux résultats. □

Corollaire 1.2.2 *Soit f, g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$, a et b pouvant être infini.*
Si fg admet des limites réelles en a et en b, alors les intégrales $\int_a^b fg'$ et $\int_a^b f'g$ sont de même nature et si une d'elles converge, $\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Exemple
Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.
Il est immédiat que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente, de valeur $\frac{\pi}{2}$.
Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Avec $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, il vient la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{4}.$$

Par ailleurs on a :

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$ sont convergentes, on en déduit la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

En outre on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt.$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

1.3 Critères de convergence

1.3.1 Cas général : Critère de Cauchy

On a la propriété suivante.

Proposition 1.3.1 (Critère de Cauchy d'existence de limite)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b[$, b fini ou non.

f admet une limite réelle en b si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a, b[: \forall (x, y) \in [c, b[^2, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que :

Proposition 1.3.2 (critère de Cauchy pour la convergence d'intégrale)
Étant donné un intervalle $[a, b[$, b fini ou non et une fonction f continue sur $[a, b[$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists c \in [a, b[: \forall (x, y) \in [c, b[^2,\ x < y, \quad |\int_x^y f(t)dt| \leq \varepsilon$.

Exemple

Etudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

Pour tout $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, on a

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos y}{y} - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2}dt.$$

En supposant $x \leq y$, il vient alors

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}dt\right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \int_x^y \frac{1}{t^2}dt = \frac{2}{x}.$$

On conclut alors que l'intégrale converge en vertu du critère de Cauchy.

En général ce critère est utilisé dans les cas théoriques.

1.3.2 Cas des fonctions positives

Proposition 1.3.3 *Étant donné une fonction f positive et continue sur $[a, b[$, b fini ou non, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge,

ii) La fonction F définie sur $[a, b[$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, est majorée i.e. il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b[$, on ait $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Preuve : Comme f est positive, la fonction F est croissante car sa dérivée f est positive. Donc F admet une limite à gauche en b si et seulement si F est majorée. □

Remarque 1.3.1 *- Le résultat reste vraie avec f de signe constant au voisinage à gauche de b.*

- Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers b.

Théorème 1.3.1 (Théorème fondamental)
Soit f et g deux fonctions réelles continues sur un intervalle $[a, b[$, b étant fini ou non telles que $0 \leq f \leq g$.

i) Si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.

ii) Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge .

Preuve : En effet on a

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Donc F est majorée, ce qui montre le i). La partie ii) n'est autre que la contraposée de i). □

Remarque 1.3.2 *Ce théorème reste vrai si on suppose seulement que l'inégalité $0 \leq f \leq g$ a lieu pour t assez voisin de b.*

Exemples

1) Pour tout $t \geq 1$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$. La convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt$ entraîne celle de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}dt$.

2) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{1}{\sin t} > \frac{1}{t} > 0.$$

La divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}$ entraîne donc celle de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sin t}$.

1.4 Convergence absolue

Définition 1.4.1 *Soient f une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert I de $\mathbb{R}$ d'extrémités a, et b.*

On dit que l'intégrale de f sur I est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Théorème 1.4.1 *Soient I un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a, b, et $f :\to \mathbb{R}$ continue. Pour que l'intégrale de f sur I soit absolument convergente, il suffit qu'il existe une fonction numérique positive φ continue sur I, telle que pour tout $t \in I$, on ait $|f(t)| \leq \varphi(t)$ et telle que l'intégrale $\int_a^b \varphi(t)dt$ soit convergente.*

Preuve : On peut se limiter sans perdre de généralités au cas où I est un intervalle semi-ouvert $[a, b[$. Il suffit alors d'appliquer le théorème fondamental. □

Proposition 1.4.1 *Toute intégrale absolument convergente est convergente.*

Preuve :
Supposons que $\int_a^b |f(t)|$ converge. Comme $0 \leq |f| - f \leq 2|f|$, le théorème de majoration montre alors que $\int_a^b (|f| - f)(t)dt$ converge. Puisque $f = |f| - (|f| - f)$, on conclut que $\int_a^b f(t)dt$ converge. □

Ce résultat peut être montré en utilisant le théorème (1.4.1) ci-dessus.

Proposition 1.4.2 *Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Preuve :
On a déjà montré que si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
Comme $-|f| \leq f \leq |f|$ et que les trois intégrales généralisées convergent, on a

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b |f(t)|dt;$$

c'est-à-dire $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$. □

Du thérème (1.4.1) on déduit facilement de nombreuses règles de convergence. Nous donnons ici les plus utiles.
On définit d'abord :

Définition 1.4.2 *Soit f et g deux fonctions définies sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à D.*

f est équivalente à g au voisinage de a suivant D, et on note $f \sim_a g$ ou encore $f \sim g,\ (t \to a,\ t \in D)$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall t \in V \cap D, |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon |g(t)|.$$

$\mathcal{V}(a)$ étant l'ensemble des voisinages du point a.

Théorème 1.4.2 (Règle des équivalents)
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, (b fini ou non) équivalentes au voisinage de b avec g positive au voisinage de b.

Alors f est également positive au voisinage de b et les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Preuve :

D'après la définition des fonctions équivalentes, il existe un nombre X tel que, pour $t > X$, on ait :

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{1}{2}|g(t)|$$

,

d'où $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq 2g(t)$. Et le résultat découle. □

Remarque 1.4.1 *Cette règle est en défaut avec des fonctions qui ne sont de signe constant au voisinage de b.*

Exemples

1) Les fonctions

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\tan t}} \quad (t > 0)$$

sont équivalentes au voisinage de l'origine. La convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ entraîne celle de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\tan t}}$

2) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}\cos(\frac{1}{t})$ est positive pour $t > \frac{2}{\pi}$: et, au voisinage de $+\infty$, elle est équivalente à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$. La divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ entraîne celle de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\cos(\frac{1}{t})dt$.

3) Étudions la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2tdt}{\sqrt{t^5+t+1}}$.
Il est évident que sur $[1, +\infty[$, $f(t) = \frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}}$ est positive et continue.
Posons $g(t) = \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$. On a alors

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{2dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ est convergente car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$. Donc l'intégrale proposée est convergente.

Remarque 1.4.2 *La règle des équivalents permet d'utiliser la théorie des développements limités pour étudier la convergence de l'intégrale d'une fonction positive : on peut en effet, remplacer la fonction à intégrer par sa partie principale relative à une échelle quelconque.*

Proposition 1.4.3 *Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a, b[$ avec g strictement positive sur $[a, b[$ telles que*

$$\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = k \in \mathbb{R}.$$

a) Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.
b) Si $k \neq 0$ et si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, il en est de même de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$.

Preuve :

a) Pour t assez voisin de b, on a $|f(t)| \leq (1 + |k|)g(t)$: la première assertion résulte donc immédiatement du thérème (1.4.1).

b) On a $\lim_{t\to b}\frac{f(t)}{g(t)} = k$ avec $k \neq 0$, la fonction f est donc du signe de k au voisinage de b. Puisque

$$\lim_{t\to b}\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{1}{k}$$

le résultat en découle. □

On a les corollaires suivants en prenant pour fonction de comparaison g la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1.4.1 (Règle de Riemann au voisinage d'un point)
Soit une fonction continue sur $]a, b]$ *telle que la limite*

$$\lim_{t\to a}(t-a)^\gamma f(t) = k \in \mathbb{R}.$$

Si $\gamma < 1$ *alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente au point* a.
Si $\gamma \geq 1$ *et* $k \neq 0$ $\int_a^b f(t)dt$ *est divergente au point* a.

Application : Intégrales de Bertrand : Étudier $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ avec $0 < b < 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ est continue et positive sur $]0, b]$.

1) Cas où $\alpha < 1$ **:**
pour $\gamma \in]\alpha, 1[$, nous avons $\lim_{t\to 0} t^\gamma f(t) = 0$. Ainsi $\int_0^b f(t)dt$ converge.

2) Cas où $\alpha > 1$ **:** Nous avons $\lim_{t\to 0} tf(t) = +\infty$. Il s'ensuit que $\int_0^b f(t)dt$ diverge.

3) Cas où $\alpha = 1$ **:**
Le changement de variable défini par $t \mapsto |\ln t|$ montre que : $\int_X^b \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta} = \int_{\ln\frac{1}{b}}^{\ln\frac{1}{X}} \frac{du}{u^\beta}$.
Ainsi $\int_0^b f(t)dt$ est de même nature que $\int_{\ln\frac{1}{b}}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$: elle converge si et seulement si $\beta > 1$.

En conclusion
$\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et β quelconque ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Corollaire 1.4.2 (Règle de Riemann au voisinage de l'infini)

Soit une fonction numérique continue sur $[a, +\infty[$ $a > 0$ *telle que la limite*

$$\lim_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = k \in \mathbb{R}$$

.

Si $\gamma > 1$ *alors l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est absolument convergente.*
Si $\gamma \leq 1$ *et* $k \neq 0$, *l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est divergente.*

Application : Intégrales de Bertrand : Étudier $\int_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ avec $a > 1$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue et positive sur $[a, +\infty[$.

1) Cas où $\alpha > 1$ **:**

Soit γ vérifiant $1 < \gamma < \alpha$, on a alors $\lim_{t\to+\infty} t^\gamma f(t) = 0$. Donc l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ est convergente.

2) Cas où $\alpha < 1$ **:**
Dans ce cas on a $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$. Par suite l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ est divergente.

3) Cas où $\alpha = 1$ **:**
Le changement de variable défini par $t \mapsto \ln t$ montre que $\int_a^X \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \int_{\ln a}^{\ln X} \frac{du}{u^\beta}$.
Ainsi $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est de même nature que $\int_{\ln a}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$, elle converge donc si et seulement si $\beta > 1$.

En conclusion
$\int_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge pour $\alpha > 1$ et β quelconque ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Théorème 1.4.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales généralisées) *Soit f et g des fonctions continues sur $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\int_a^b f^2(t)dt$ et $\int_a^b g^2(t)dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ converge absolument (donc converge), et :*

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

Preuve :
En développant $(|f| - |g|)^2 \ge 0$, on obtient $0 \le |fg| \le \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$. Ce qui montre que $\int_a^b |f(t)g(t)dt|$ converge.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, on a

$$\forall x \in [a, b[,\ \left(\int_a^X f(t)g(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^X f^2(t)dt\right)\left(\int_a^X g^2(t)dt\right).$$

On obtient l'inégalité voulue sur les valeurs des intégrales généralisées en passant à la limite lorsque X tend vers b^-. □

1.5 Intégrales semi-convergentes, Règle d'Abel

Définition 1.5.1 *Soient f une fonction numérique continue sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert I de $\mathbb{R}$ d'extrémités a, et b. On dit que l'intégrale de f sur I est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Il existe des intégrales convergentes non absolument convergentes comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple : Etudions la nature de $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.
A l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall x \in [1, \infty[,\ \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Puisque

$$\forall x \in [1, \infty[,\ \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

et que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge, $\int_1^\infty |\frac{\cos t}{t^2}|dt$ converge et donc $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}dt$ converge.

On conclut que $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ converge, et de plus

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}dt.$$

En outre on a

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}.$$

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}dx$ converge (même méthode que pour $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ ci-dessus) et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ diverge. Il s'ensuit que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ diverge, et donc, $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|dx$ diverge.

Donc l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ est semi-convergente.

Proposition 1.5.1 (Règle d'Abel)
Étant donné des fonctions f et g continues sur $[a, +\infty[$, pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente il suffit que :

i) f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$,

ii) f soit décroissante de limite 0 lorsque t tend vers $+\infty$,

iii) il existe A un réel tel que, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $\left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq A$.

Exemple : Soit $a > 0$ et $\lambda > 0$. Alors les intégrales $\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\lambda}dt$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\lambda}dt$ convergent.

En effet on pose $g(t) = \sin t$ (resp. $\cos t$) et $f(t) = \frac{1}{t^\lambda}$. On a :

$$\left|\int_a^x \sin t dt\right| = |\cos a - \cos x| \leq 2,$$

et

$$\left|\int_a^x \cos t dt\right| = |\sin a - \sin x| \leq 2.$$

La fonction $f(t) = \frac{1}{t^\lambda}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, décroît et tend vers 0, et les hypothèses du critère d'Abel sont donc vérifiées d'où la convergence.

1.6 Méthodes par éclatement

Pour étudier certaines intégrales généralisées on peut utiliser les développements limitées.

Définition 1.6.1 *Soit f et g deux fonctions définies sur une partie D non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.*

f est négligeable devant g au voisinage de a suivant D, et on note $f = o_a(g)$ ou encore $f = o(g)$, $(t \to a,\ t \in D$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall t \in V \cap D, |f(t)| \leq \varepsilon |g(t)|.$$

Proposition 1.6.1 *Soit f et g deux fonctions réelles continues sur $[a, b[$ (b fini ou non), positives au voisinage de b.*

i) Si $f = o_b(g)$ et si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

ii) Si $g = o_b(f)$ et si $\int_a^b g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Corollaire 1.6.1 (Règle de Riemann au voisinage de ∞)
Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ positive au voisinage de $+\infty$.

i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^\alpha})$, alors $\int_a^\infty f(t)dt$ converge.

ii) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\frac{1}{t^\alpha} = o_{+\infty}(f(t))$, alors $\int_a^\infty f(t)dt$ diverge.

Corollaire 1.6.2 (Règle de Riemann au voisinage de 0)
Soit f une fonction continue sur $]0, a]$, $a > 0$, positive au voisinage de 0.

i) S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = o_0(\frac{1}{t^\alpha})$, alors $\int_0^a f(t)dt$ converge.

ii) S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\frac{1}{t^\alpha} = o_0(f(t))$, alors $\int_0^a f(t)dt$ diverge.

Exemple : Etude de $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$

On a :

$$f(t) = \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{2t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right).$$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Posons

$$g(t) = -\frac{\sin^2 t}{2t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right).$$

On a $g(t) \sim_{+\infty} -\frac{\sin^2 t}{2t}$ on en déduit que g est de signe constant au voisinage de $+\infty$, et d'après la règle des équivalents $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$.

On a

$$\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}$$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ converge, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ qui diverge.

Donc en conclusion $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$ diverge.

Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Généralités

On rappelle qu'une suite numérique est une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur une partie de l'ensemble des entiers naturels.

Définition 2.1.1 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels ou complexes. On appelle suite des sommes partielles de $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite $(U_n)_{n\geq 0}$, avec*

$$U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Définition 2.1.2 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle série de terme général u_n, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles de $(u_n)_{n\geq 0}$.*

On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge. Dans ce cas on appelle somme de la série sa limite que l'on note :

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\in \mathbb{N}} u_n.$$

On fera l'abus de langage de dire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge .

On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge si la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ diverge.

On fera l'abus de langage de dire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge .

Étudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite des sommes partielles (U_n).

Étudier la nature d'une série, c'est montrer qu'elle converge ou qu'elle diverge, sans se préoccuper de sa somme.

Remarque 2.1.1 *Par abus de langage on parle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, même si cette série diverge.*

La série de terme général u_n diverge si la suite (U_n) n'a pas de limite ou bien tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Définition 2.1.3 *Lorsque la série de terme général u_n converge vers S, on appelle reste de rang n ou d'indice n, le nombre R_n tel que $S = U_n + R_n$.*

On a alors $R_n = \sum_{k\geq n+1} u_k$.

Remarque 2.1.2 *Dans de nombreux exemples il peut se faire que u_n ne soit définie que pour $n \geq k$, la somme de la série a pour premier terme u_k. On pose alors $U_n = u_k + \ldots + u_n$.*

Et lorsque la série converge vers U on pose : $U = \sum_{n \geq k} u_n$.

Exemple 2.1.1 *Les séries de terme généraux $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n(n-1)}$ ne sont définies que si $n \geq 1$, $n \geq 2$ respectivement.*

Un changement d'indice pourra nous ramener immédiatement au cas où le terme général est défini pour $n \geq 0$.

Définition 2.1.4 *La série de terme général u_n est dite de Cauchy si sa suite des sommes partielles est de Cauchy. C'est-à-dire que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Proposition 2.1.1 (Critère de Cauchy) *une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série converge est que cette série soit une série de cauchy.*

Cette proposition est la seule condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série.

Dans la suite les propositions montrant la convergence d'une série seront suffisantes mais nullement nécessaires.

Proposition 2.1.2 *une condition nécessaire pour qu'une série converge est que son terme général tende vers 0.*

Preuve :

De la relation $u_n = U_n - U_{n-1}$ on en déduit que si la série de terme général u_n converge alors U_n et U_{n-1} tendent vers S, donc $u_n = U_n - U_{n-1}$ tend vers 0. □

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est donc divergente. On dit qu'elle est trivialement divergente.

L'exemple qui suit montre que cette condition n'est pas suffisante.

Considérons la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. Il est clair que la suite $(\frac{1}{n})$ tend vers 0. On a :

$$U_{2n} - U_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Chaque terme de la somme est supérieur à $\frac{1}{2n}$ d'où :

$$U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}.$$

Si U_n avait pour limite S alors U_{2n} aussi. Donc $U_{2n} - U_n$ tendrait vers 0. Contradiction. Il en résulte que cette série diverge. Cette série est appelée série Harmonique.

La nature d'une série est une propriété asymptotique.

Proposition 2.1.3 *On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.*

Preuve : Considérons deux séries de terme général u_n et v_n telles que $v_n = u_n$ pour $n \geq k$
Pour $n \geq k$ on a

$$U_n = u_0 + \ldots + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n$$

et

$$V_n = v_0 + \ldots + v_k + v_{k+1} + \ldots + v_n$$

D'où

$$U_n - V_n = (u_0 - v_0) + \ldots + (u_k - v_k).$$

Cette relation montre que (U_n) et (V_n) convergent ou divergent en même temps. □

Ainsi pour étudier la nature d'une série dont le terme général est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang on pourra supposer qu'il est toujours positif (resp. négatif).

Donnons quelques exemples de séries convergentes.

Exemple 2.1.2 (Série géométrique)

Définition 2.1.5 *On appelle série géométrique une série dont le terme général est de la forme $u_n = az^n$, z étant un nombre complexe et a un nombre complexe non nul.*

On a l'identité

$$(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$$

D'où le théorème :

Théorème 2.1.1 *Si z un nombre réel ou complexe, alors :*
- *Si $|z| \geq 1$, la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ est divergente.*
- *Si $|z| < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ est convergente et admet pour somme $S = \frac{1}{1-z}$.*

Preuve :
- Si $|z| \geq 1$, on a $|z^n| \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$; donc $u_n = z^n$ ne tend pas vers 0 d'où la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ est divergente.
- Supposons $z < 1$. Alors on a :

$$(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z) = 1 - z^{n+1}.$$

Donc

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Or $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (1 + z + z^2 + \cdots + z^n) = \frac{1}{1 - z}$$

□

En particulier pour $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i \sin\theta) = \frac{1}{1-re^{i\theta}} &= \frac{1-re^{-i\theta}}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} \\ &= \frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{r^2-2r\cos\theta+1}. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}, \quad \text{pour } 0 \leq r < 1$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}, \quad \text{pour } 0 \leq r < 1.$$

Exemple 2.1.3 *Considérons la série de terme général :*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

On obtient immédiatement :

$$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'où (U_n) *tend vers* 1*. Donc la série converge et l'on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2.2 Propriétés élémentaires

Théorème 2.2.1 *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries numériques convergentes de sommes respectives* U *et* V*. Alors :*

1) la série $\sum(u_n + v_n) = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots$ *appelée série somme des séries données est convergente de somme* $U + V$

2) si $\lambda \in \mathbb{C}$*, la série* $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ *est convergente de somme* λU

Autrement dit l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ *(sous espace des suites à valeurs complexes).*

Preuve : Posons $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Alors on a : $\lim_{x\to+\infty} U_n = U$, $\lim_{n\to+\infty} V_n = V$ et donc $(u_0 + v_0) + \cdots + (u_n + v_n) = U_n + V_n$.

Lorsque $n \to +\infty$, $U_n + V_n \to U + V$. D'où 1).

Par ailleurs $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n = \lambda U_n \to \lambda U$ lorsque $n \to +\infty$, □

Proposition 2.2.1 *Si la série de terme général* u_n *converge et la série de terme général* v_n *diverge alors leur somme* $(u_n + v_n)$ *diverge.*

Preuve : On a $v_n = (u_n + v_n) - u_n$ Si la série somme convergeait lors il en serait de même pour la série de terme général v_n. Contradiction. □

Remarque 2.2.1 *En général on ne peut rien dire sur la nature de la somme de deux séries divergentes.*

Prenons par exemple les séries de terme général $u_n = n$ et $v_n = -n$ qui sont deux séries divergentes alors que $u_n + v_n = 0$ est le terme général d'une série convergente et $u_n - v_n = 2n$ est le terme général d'une série divergente.

Par contre, on montre que :

Proposition 2.2.2 *La somme de deux séries à termes positifs (resp. négatifs) est convergente si, et seulement si chacune des deux séries l'est.*

2.3 Groupement des termes d'une série

Donnons un exemple avant d'aborder la situation générale.

Considérons une série de terme général u_n, convergente ou non. Groupons par exemple, les termes deux par deux de la manière suivante :

$$(u_0 + u_1) + \cdots + (u_{2n} + u_{2n+1}) + \cdots$$

On est donc conduit à lui associer la série de terme général $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Posons $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Alors on a :

$$V_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n} = U_{2n}$$

Donc si la série initiale converge, alors la série obtenue par groupement des termes 2 à 2 l'est aussi et les limites sont les mêmes.

Calculons U_n en fonction de V_n.

Si n est pair, $n = 2p$, on a $U_{2p} = V_p$.

Si n est impair, $n = 2p + 1$, on a $U_{2p+1} = V_p + u_{2p+1}$.

Il en résulte que si u_n tend vers 0, alors (V_n) converge vers V si, et seulement si (U_n) converge aussi vers V. Les series sont donc de même nature et convergent vers la même limite.

De façon générale on montre que :

Proposition 2.3.1 *Étant donné une série dont le terme général u_n tend vers 0 et une fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ soit borné, la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général :*

$$v_n = u_{\varphi(n)} + \cdots + u_{\varphi(n+1)-1}.$$

Exemple 2.3.1 *1) Soit la série de terme général :*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}, \quad n \geq 2.$$

Elle est de même nature que $\sum v_n$ avec

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)}.$$

2) La série de terme général

$$u_n = \frac{\cos 2n\frac{\pi}{3}}{n}$$

est de même nature que $\sum v_n$ *avec*

$$\begin{aligned} v_n = u_{3n+1} + u_{3n+2} + u_{3n+3} &= \tfrac{-1}{2(3n+1)} - \tfrac{1}{2(3n+2)} + \tfrac{1}{(3n+3)} \\ &= \tfrac{-9n-5}{2(3n+1)(3n+2)(3n+3)}. \end{aligned}$$

2.4 Séries à termes complexes

Théorème 2.4.1 *Soit* $w_n = u_n + iv_n$ *le terme général d'une série complexe avec* $u_n \in \mathbb{R}$ *et* $v_n \in \mathbb{R}$. *Pour que la série de terme général* w_n *soit convergente, il faut et il suffit que les séries de terme général* u_n *et* v_n *soient convergentes. Si* W, U *et* V *désignent les sommes respectives de ces trois séries alors on a :* $W = U + iV$.

Preuve :

$W_n = w_1+w_2+\ldots+w_n$, $U_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$, $V_n = v_1+v_2+\ldots+v_n$ et $w_n = u_n+iv_n$. Pour que $W_n \to W$, il faut et il suffit que $W_n \to U + iV$. □

Remarque 2.4.1 *On pourrait donc se borner à n'étudier que les séries numériques à termes réels, mais l'exemple de la série de terme général* $r^n \cos n\theta$ *montre qu'il peut être utile d'utiliser des séries à termes complexes.*

2.5 Séries absolument convergentes

Définition 2.5.1 *On dit qu'une série de terme général* u_n *est absolument convergente si la série de terme général* $|u_n|$ *est convergente.*

Définition 2.5.2 *Une série qui est convergente sans être absolument convergente est dite semi-convergente.*

Proposition 2.5.1 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve :

Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ soit absolument convergente ; alors d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour entier $n > N$ et pour tout entier naturel p on a :

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Or

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| \geq |u_n + \ldots + u_{n+p}| :$$

donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy et est donc convergente. □

Remarque 2.5.1 *Pour qu'une série à termes réels ou complexes soit convergente, il suffit qu'elle soit absolument convergente.*

Théorème 2.5.1 (Multiplication des séries)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes, et U et V leurs sommes respectives.

Posons : $w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 = \sum_{i+j=n} u_i v_j$. Alors la série de terme général w_n (appelée série produit des séries données) est absolument convergente et sa somme est $W = UV$.

Définition 2.5.3 *On dit que qu'une série de terme général u_n est commutativement convergente si pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ la série de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ est convergente.*

Théorème 2.5.2 *Toute série absolument convergente est commutativement convergente et sa somme ne change pas quand on change l'ordre de ses termes.*

Autrement dit si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série absolument convergente et si $\sigma : n \to \sigma(n)$, est une bijection de l'ensemble $\mathbb{N}$ alors la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$. convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0} u_n.$$

Remarque 2.5.2 *Ce théorème est inexact une série convergente.*

2.6 Séries à termes positifs

Puisque la nature d'une série est une propriété asymptotique, il en résulte que si le terme général u_n d'une série est positif (resp négatif) à partir d'un certain rang, on peut supposer que cette propriété est vraie pour tout n.

Les séries de termes général u_n et $-u_n$ étant de même nature, on peut donc supposer la série à termes positifs.

Les résultats qui suivent d'appliquent donc aux séries dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.

Proposition 2.6.1 *Pour qu'une série à termes positifs soit convergente, il faut et suffit que la suite des sommes partielles $U_n = u_0 + u_1 \cdots + u_n$ soit majorée.*

Preuve :
Puisque $u_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est croissante et donc elle admet une limite finie si et seulement si elle est majorée. □

On en déduit

Corollaire 2.6.1 (Critère de comparaison)
Étant donné deux séries de termes généraux u_n et v_n vérifiant $0 \leq u_n \leq v_n$,

1) Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

2) Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

Corollaire 2.6.2 *Étant donné deux séries à termes positifs u_n et v_n, s'il existe deux nombres réels a et b, $0 < a < b$ tels que $av_n \leq u_n \leq bv_n$, alors les deux séries sont de même nature.*

Proposition 2.6.2 *Étant donné deux séries à termes positifs u_n et v_n, telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = a \in \mathbb{R},$$

alors :

1) Si $a \neq 0$ les deux séries sont de même nature.

2) Si $a = 0$, la convergence de la série de terme général v_n implique la convergence de la série de terme général u_n. La divergence de la série de terme général u_n implique la divergence de la série de terme général v_n.

Preuve : • Si $a \neq 0$, en prenant $\varepsilon = \frac{a}{2}$ à partir d'un certain rang on a

$$\frac{a}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3a}{2}$$

D'où le résultat.

• Si $a = 0$, à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$.

D'où le résultat. □

Exemple 2.6.1 *Soit la série de terme général $u_n = \frac{2^n+5}{3^n-11}$. Nous avons $u_n \geq 0$ dès que $n \geq 3$. Par ailleurs*

$$u_n = \frac{2^n(1 + 5 \times 2^{-n})}{3^n(1 - 11 \times 3^{-n})}.$$

En posant

$$v_n = (\frac{2}{3})^n,$$

on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 5 \times 2^{-n}}{1 - 11 \times 3^{-\infty}} = 1.$$

Or la série géométrique

$$\sum_{n\geq 3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

est convergente, on voit alors que la série proposée $\sum u_n$ est convergente.

Corollaire 2.6.3 *Étant donné deux séries à termes positifs u_n et v_n, u_n et v_n tendant vers 0, si u_n et v_n sont équivalents alors les deux séries sont de même nature.*

Remarque 2.6.1 *Ce résultat est en défaut lorsque les deux séries ne sont pas de signe constant.*

De ce résultat on va déduire la

Proposition 2.6.3 *Étant donné deux séries à termes strictement positifs u_n et v_n vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors*

1) Si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge.

2) Si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.

Preuve :

Considérons les $n+1$ inégalités :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

En les multipliant membre à membre on obtient :

$$\frac{u_{k+1}}{u_0} \leq \frac{v_{k+1}}{v_0}$$

d'où le résultat. □

En application de cette proposition on va étudier un exemple important de séries appelées séries de Riemann .

Définition 2.6.1 *On appelle série de Riemann une série dont le terme général est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$,$n \geq 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Proposition 2.6.4 *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve : Il est clair que si $\alpha \leq 0$, la série diverge trivialement (le terme général ne tend pas vers 0).

Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a : $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Donc la série diverge.

Supposons $\alpha > 1$.

Considérons la série de terme général v_n définie par :

$$v_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

On obtient facilement

$$v_1 + \cdots + v_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Puisque $\alpha > 1$, la série de terme général v_n converge vers 1. Or

$$v_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} - 1 \right]$$

Donc v_n est équivalente à

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} \frac{\alpha-1}{n} = \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$$

d'où le résultat. □

2.7 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Proposition 2.7.1 *Étant donné une fonction numérique f, continue, décroissante et positive sur $[0, +\infty[$ alors la série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.*

Preuve :

Soit p un entier. Dans l'intervalle $[p, p+1[$, on a

$$u_{p+1} = f(p+1) \leq f(x) \leq f(p) = u_p$$

Donc

$$\int_p^{p+1} u_{p+1} dx \leq \int_p^{p+1} f(x)dx \leq \int_p^{p+1} u_p dx.$$

C'est-à-dire :

$$u_{p+1} \leq \int_p^{p+1} f(x)dx \leq u_p. \tag{2.1}$$

Il suffit alors d'additionner membre à membre les inégalités (2.1) pour $p = 0, \dots, n-1$. On obtient

$$U_n - u_0 \leq \int_0^n f(x)dx \leq U_{n-1}.$$

Remarquons que la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est croissante : alors ou bien cette fonction a une limite lorsque x tend vers $+\infty$, ou bien elle tend vers $+\infty$ avec x.

Si la série converge alors l'intégrale est majorée donc converge. Si l'intégrale converge, alors (U_n) est majorée donc la série converge. □

Exemple 2.7.1 *La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ $\beta \in \mathbb{R}$ définie sur $[a, +\infty[$ où $a = \sup(2, \mathrm{e}^{-\beta})$ est continue positive et décroissante. Ainsi la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty \frac{dt}{x(\ln x)^\beta}$ qui est de même nature que $\int_{\ln a}^\infty \frac{dt}{t^\beta}$ (changement de variable $t = \ln x$).*

Proposition 2.7.2 *La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.*

On peut aussi utiliser le résultat de la proposition (2.7.1) pour étudier la série de Riemann. En effet la fonction $x \to f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 1$, divergente pour $\alpha \leq 1$, il en est de même pour la série de Riemann.

2.8 Règles de convergence pour les séries à termes positifs

Dans cette partie les séries sont à termes positifs.

Puisque deux séries dont les termes généraux sont équivalents, sont de même nature, alors pour étudier une série on peut la comparer à une série connue. On utilise comme série de comparaison soit la série géométrique soit la série de Riemann .

2.8.1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 2.8.1 *Étant donné une série de terme général $u_n \geq 0$, si à partir d'un certain rang il existe un nombre réel $a < 1$, tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq a$, alors la série converge.*

S'il existe une infinité d'entiers n tels que $\sqrt[n]{u_n} > 1$, alors la série diverge trivialement.

Preuve :

En effet on a $u_n \leq a^n$. Puisque $a < 1$ la série géométrique de terme général a^n converge. D'où le résultat.

Dans le second cas $u_n \geq 1$ pour une infinité d'entiers n, u_n ne peut tendre vers zero.□

Corollaire 2.8.1 (Règle de Cauchy)

Étant donné une série de terme général u_n positif, tel que $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers une limite a, alors :

1) Si $a < 1$ la série converge

2) Si $a > 1$ la série diverge trivialement

3) Si $a = 1$ on ne peut conclure.

Preuve :

En effet si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $a < 1$, prenons $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 1$ à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \leq a + \varepsilon < 1$ c'est-à-dire que $u_n \leq (a + \varepsilon)^n$ avec $a + \varepsilon < 1$. Donc la série géométrique de terme général $a + \varepsilon$ converge et par suite la série aussi.

Si $a > 1$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 1$ et la série diverge trivialement.

Donnons un contre exemple pour montrer que dans le cas où $a = 1$ on ne peut pas conclure.

Prenons par exemple la série de Riemann de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}; \quad \alpha > 0$.

On a $\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \mathrm{e}^{-\alpha \frac{\ln n}{n}}$ qui tend vers 1 quel que soit α. Or on a vu que si $\alpha > 1$ la série converge et diverge si $\alpha \leq 1$. □

Exemple 2.8.1 *Soit $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$, $n \geq 2$. On a $u_n \geq 0$ et $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1$ lorsque $n \to +\infty$. Donc la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est convergente.*

Proposition 2.8.2 *Étant donné une série de terme général u_n strictement positif telle qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \gamma < 1$, alors la série converge.*

Si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la série diverge trivialement.

Preuve :

Considérons la série de terme général $v_n = \gamma^n$ qui converge pour $\gamma < 1$.

On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \gamma$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \gamma = \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Par suite la série de terme général u_n converge.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, u_n ne peut tendre vers 0, car $u_{n+1} \geq u_n$. □

Corollaire 2.8.2 (Règle de D'Alembert)
Étant donné une série de terme général u_n strictement positif, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers une limite a, alors :

1) Si $a < 1$ la série converge

2) Si $a > 1$ la série diverge trivialement

3) Si $a = 1$ on ne peut conclure

Preuve :

Dans le premier cas, il existe ε tel qu'à partir d'un certain rang on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a + \varepsilon < 1$$

Donc la série converge d'après la proposition ci-dessus.

Dans le deuxième cas, à partir d'un certain rang on a $u_{n+1} \geq u_n$ donc u_n ne peut tendre vers zéro.

Pour le troisième cas, prenons encore la série de Riemann, dans ce cas on a
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$ qui tend toujours vers 1 quel que soit α. □

Exemple 2.8.2 $u_n = \frac{3^n}{n!}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$ *lorsque* $n \to +\infty$*. Donc* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

Remarque 2.8.1 *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, pour une infinité de valeurs de n alors u_n ne peut tendre vers 0. La série diverge trivialement.*

Le cas douteux (lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite) est donc celui où $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs inférieures, autrement dit on a :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \alpha_n$*,* $\alpha_n > 0$ *et* (α_n) *tend vers* 0*.*

Des décisions sur (α_n) nous permettrons de conclure dans certains cas (voir règle de Duhamel).

On montre la proposition suivante

Proposition 2.8.3 *Étant donné une suite strictement positive (u_n) tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers une limite a, alors $\sqrt[n]{u_n}$ tend aussi vers a.*

Cette proposition permet d'étudier certaines limites.

Exemple 2.8.3 *Étudier la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ où u_n est défini par :*

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+12)^2}{(2n+2)(2n+3)}$ *qui tend vers* $\frac{1}{4}$*. Donc* $\sqrt[n]{u_n}$ *tend vers* $\frac{1}{4}$*.*

Remarque 2.8.2 *Il peut se faire que $\sqrt[n]{u_n}$ ait une limite sans que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en ait une.*

Prenons par exemple $0 < a < b$ et la série de terme général définie par :

$$u_{2n} = (ab)^n \text{ et } u_{2n+1} = a(ab)^n$$

$$\frac{u_{2n+1}}{u_n} = a \text{ et } \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = b$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite.
Par contre

$$\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{ab},$$

et

$$\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{a^{n+1}}\,\sqrt[2n+1]{b^{n+1}}$$

tend vers $\sqrt{ab}$ donc $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{ab}$.

Remarque 2.8.3 *Si la règle de Cauchy ne permet pas de conclure il est inutile d'appliquer la règle de D'Alembert.*

2.8.2 Comparaison à une série de Riemann

La série de comparaison est ici la série de Riemann. On obtient immédiatement la

Proposition 2.8.4 (Règle de Riemann)
Étant donné une série de terme général u_n, $u_n > 0$,

1) S'il existe un nombre réel α tel que $n^\alpha u_n$ tende vers une limite finie et non nulle alors les séries de termes général u_n et $\frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

2) S'il existe un nombre réel $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers une limite nulle alors la série de terme général u_n converge.

3) S'il existe un nombre réel $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers $+\infty$ alors la série de terme général u_n diverge.

Preuve :

1) Désignons par a cette limite. Alors u_n et $\frac{a}{n^\alpha}$ sont équivalentes, donc ces deux séries sont de même nature.

2) Lorsque la limite est nulle alors pour n assez grand, $n^\alpha u_n \leq 1$, donc $u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de terme général u_n converge (car $\alpha > 1$).

3) Lorsque la limite est ∞ alors pour n assez grand, $n^\alpha u_n \geq 1$, donc $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de terme général u_n diverge (car $\alpha \leq 1$). □

Exemple 2.8.4 *Considérons la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.*

- *Le cas $\alpha = 1$ a été déjà étudié.*
- *Supposons $\alpha > 1$.*

Soit γ tel que $1 < \gamma < \alpha$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = 0.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge.*

• *Supposons* $\alpha < 1$.

On a

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty.$$

Donc la série diverge.

En plus des résultats de la proposition (2.7.2) on peut résumer :

Proposition 2.8.5 $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* ($\alpha > 1$) *ou* ($\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$)

Par application de cette règle, on peut démontrer la formule de Stirling.

Lorsque n est assez grand, la formule de Stirling permet d'avoir une approximation de $n!$.

Posons

$$f(n) = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}.$$

Un calcul simple montre que :

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

D'où en posant :

$$u_n = \ln(f(n+1)) - \ln(f(n)) = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})$$

et en utilisant un développement limité de la fonction définie par $\ln(1+x)$, on a :

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{\varepsilon(n)}{3n^3}$$

d'où

$$1 - (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) = -\frac{1}{12n^2} + \frac{\varepsilon'(n)}{n^2}.$$

Ce qui montre que la série de terme général u_n est convergente, puisque u_n est équivalente à la série de terme général : $-\frac{1}{n^2}$.

On en déduit que :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \ln(f(n+1)) - \ln(f(1))$$

ce qui montre que la suite $(\ln(f(n+1)))$ a une limite. Donc la suite $(f(n))$ a une limite $a \neq 0$, et que l'on a

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n a\sqrt{n}.$$

Pour calculer cette limite a on peut utiliser les formules de Wallis.

Considérons la suite (I_n), $n \geq 0$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Pour $n \geq 2$ en intégrant par parties, on obtient :

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

et

$$I_{2n} = \frac{3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n)}\frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2.4.\cdots.(2n-1)}{3.5.\cdots.(2n)}.$$

Puisque $0 \leq \sin x \leq 1$, la suite (I_n) est décroissante, donc

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n+2)}\frac{\pi}{2} \leq \frac{2.4.\cdots.(2n-1)}{3.5.\cdots.(2n)} \leq \frac{3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.(2n)}\frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \left[\frac{2.4.\cdots.(2n)}{3.5.\cdots.(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n}\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ce qui montre que la suite définie par $\left[\frac{2.4.\cdots.(2n)}{3.5.\cdots.(2n-1)}\right]^2 \frac{1}{2n}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ et en prenant la racine carrée on en déduit que :

$$\text{la suite } \left[\frac{2.4.\cdots.(2n)}{3.5.\cdots.(2n-1)}\right]\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{converge vers} \quad \sqrt{\pi}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{(f(n))^2}{f(2n)} &= \frac{(n!)^2}{n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}n} \cdot \frac{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{n}} \end{aligned}$$

or

$$2.4.\cdots.(2n) = 2^n(n!)$$

et

$$3.5.\cdots.(2n-1) = \frac{(2n)!}{2.4\cdots 2n} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}.$$

D'où

$$\frac{2.4.\cdots.(2n)}{3.5.\cdots.(2n-1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$

ce qui montre que

$$\frac{(f(n))^2}{f(2n)} = \frac{2.4.\cdots.(2n)}{3.5.\cdots.(2n+1)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

En passant à la limite il vient, puisque $a \neq 0$:

$$a = \sqrt{2\pi}.$$

Finalement on obtient la formule de Stirling

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

2.9 Autres critères de convergence

2.9.1 Règle de Duhamel

Proposition 2.9.1 (Règle de Duhamel)
Étant donné la série d terme général u_n, $u_n > 0$ telle que $n(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1) \to -\beta$, c'est-à-dire que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad (\beta = cte)$ alors :
1) Si $\beta > 1$ la série converge
2) Si $\beta < 1$ la série diverge
3) Si $\beta = 1$ on ne peut conclure

Preuve :
Soit $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$. D'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = (1 + \frac{1}{n})^\alpha$. Donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

avec la suite (ε_n) qui tend vers 0.
On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

avec la suite (ε'_n) qui tend vers 0. Donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + \frac{\varepsilon''_n}{n}$$

avec la suite (ε''_n) qui tend vers 0.
- Si $\beta > 1$, on peut prendre $\alpha > 1$ tel que $\beta - \alpha \geq 0$, d'où :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Puisque la série de Riemann converge, la série de terme général u_n converge.
- Si $\beta < 1$, il existe α tel que $\beta < \alpha < 1$, donc $\beta - \alpha < 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

La série de terme général u_n est donc divergente.
- Si $\beta = 1$, on ne peut pas conclure. □

Exemple 2.9.1 *1) soit*

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a $\beta = \frac{1}{2} < 1$, donc la série de terme général u_n est divergente.
2) Soit

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n(2n+2)}.$$

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ici on a $\beta = \frac{3}{2} > 1$. Donc la série de terme général u_n est convergente.

2.9.2 Règle d'Abel

Soit (ε_n) une suite réelle et (v_n) une suite numérique.

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, v_n = A_n - A_{n-1}$. Donc on a :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall\, p \in \mathbb{N} \quad \textstyle\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k v_k &= \textstyle\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) \\ &= \textstyle\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1} A_k \\ &= -\varepsilon_n A_{n-1} + \textstyle\sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_{n+p} A_{n+p}. \end{aligned}$$

Définition 2.9.1 *Etant donné (ε_n) une suite réelle et (v_n) une suite numérique, effectuer la transformation d'Abel sur la somme $\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k v_k$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}$, consiste à l'écrire sous la forme :*

$$\sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k v_k = -\varepsilon_n A_{n-1} + \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_{n+p} A_{n+p}$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Théorème 2.9.1 (Règle d'Abel)

Soit (ε_n) réelle et (v_n) une suite numérique telles que :

1) $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et tend vers 0

2) La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ est bornée.

Alors la série de terme général $u_n = \varepsilon_n v_n$ est convergente.

Preuve : Il résulte de 1) que $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \geq 0$ et $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \geq 0$.

D'après 2), Il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $n \in \mathbb{N}$, $|A_n| \leq M$.

En effectuant la transformation d'Abel sur la somme $\sum_{k=n}^{n+p} u_k = \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k v_k$, on obtient :

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon_n |A_{n-1}| + \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) |A_k| + \varepsilon_{n+p} |A_{n+p}|.$$

D'où

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq M \left(\varepsilon_n + \sum_{k=n}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) + \varepsilon_{n+p}\right) = 2M\varepsilon_n.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, cette majoration montre que la série de terme général u_n vérifie le critère de Cauchy, elle est donc convergente. $\square$

Corollaire 2.9.1 *Étant donné une série de terme général $u_n = (-1)^n \varepsilon_n$ $n \in \mathbb{N}$, si la suite (ε_n) tend vers 0 en décroissant, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*

Preuve :

En posant $v_n = (-1)^n$, on vérifie facilement que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ est bornée (elle prend deux valeurs 0 et 1).

Comme la suite ε_n tend vers 0 en décroissant, le théorème ci-dessus achève la démonstration.
□

Exemple 2.9.2 *Etude des séries* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$.

Posons $a_n = \cos n\theta$ *et* $\sin n\theta$. *On a alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\theta} = \frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{i\frac{n-1}{2}\theta}\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

et donc

$$A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{\cos\frac{n-1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k = \frac{\sin\frac{n-1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |A_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}, \quad |B_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}.$$

La convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ *résulte alors de la règle d'Abel.*

2.10 Séries alternées

Définition 2.10.1 *Une série réelle de terme général* u_n *est dite alternée si et seulement si la suite* $((-1)^n u_n)$ *est de signe constant.*

On a alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n|u_n|$ *ou* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$.

Proposition 2.10.1 (critère des séries alternées)
Si $\sum u_n$ *est une série alternée, et si la suite* $(|u_n|)$ *décroît avec* $lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *alors la série converge.*

Preuve :

Considérons U_n la suite des sommes partielles de la série.
On a $|U_{2n+1} - U_{2n}| = |u_{2n+1}|$ donc $\lim_{n\to\infty}(U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$.
Si on suppose que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n|u_n|$, on a
$U_{2n+1} - U_{2n} = -|u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \le 0$ et donc (U_{2n}) décroît
$U_{2n+3} - U_{2n+1} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \ge 0$ et donc (U_{2n+1}) croit
(dans l'autre cs les résultats sont inversés).

Donc les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes par suite elles sont convergentes et ont même limite. Il s'ensuit que la suite U_n converge. □

Remarque 2.10.1 *On pouvait utiliser le corollaire (2.9.1) pour déduire immédiatement ce résultat.*

Exemple 2.10.1 *La série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ *est convergente d'après le critère des séries alternées.*

Proposition 2.10.2 *Soit $\sum u_n$ une série alternée convergente et U sa somme. Alors :*
1) U est comprise entre deux sommes partielles consécutives quelconques,
2) U est du signe de u_0 et $|U| \leq |u_0|$,
3) Si R_n désigne le reste de rang n, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Preuve :
1) résulte de ce que les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont adjacentes.
2) Dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n|u_n|$, on a $U_1 \leq U \leq U_0$, d'où $0 \leq u_0 + u_1 \leq U \leq u_0$ et on a la conclusion.
Dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$, on a $U_0 \leq U \leq U_1$, d'où $u_0 \leq U \leq u_0 + u_1 \leq 0$ et la conclusion.
3) On applique 2) à la série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ (de somme R_n) □

2.11 Utilisation des développements limités

Pour étudier la nature d'une série de terme général u_n, on commence par vérifier que son terme général tend vers 0. En posant $x = \frac{1}{n}$, on peut utiliser un développement limité au voisinage de l'origine de la fonction ainsi obtenue.

Exemple 2.11.1 *1) Étudier la série de terme général :*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \quad \alpha > 0.$$

Il est clair que (u_n) tend vers 0.
En posant $x = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ le terme général peut s'écrire $\frac{x}{1+x}$. Au voisinage de l'origine, on a :

$$\frac{x}{1+x} = x - x^2(1 + \varepsilon(x))$$

d'où :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}}(1 + \varepsilon_n).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée convergente.
D'autre part $\frac{1}{n^{2\alpha}}(1+\varepsilon_n)$ est équivalent à $\frac{1}{n^{2\alpha}}$. donc la série de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}(1+\varepsilon_n)$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. Finalement on a :
Si $\alpha > \frac{1}{2}$ la série converge.
Si $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la série diverge.
2) Étudier la série de terme général :

$$u_n = \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Au voisinage de $+\infty$

$$\sin\left(\frac{\sin n}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{\sin n}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sin^3 n}{6n} + \frac{\sin^5 n}{n^{\frac{5}{3}}}(1 + \varepsilon_n).$$

Or $\sin^3 n = \frac{3}{4}\sin n - \frac{1}{4}\sin 3n$, *donc :*

$$u_n = \frac{\sin n}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sin n}{8n} + \frac{\sin 3n}{24n} + v_n$$

avec $v_n = \frac{\sin^5 n}{n^{\frac{5}{3}}}(1+\varepsilon_n)$. *La série* $\sum v_n$ *est absolument convergente (règle de Riemann) et les trois séries* $\sum \frac{\sin n}{n^{\frac{1}{3}}}$, $\sum \frac{\sin n}{8n}$ *et* $\sum \frac{\sin 3n}{24n}$ *sont convergentes d'après la règle d'Abel, donc* $\sum u_n$ *converge.*

2.12 Calcul approché de la somme d'une série

Étant donné une série convergente de terme général u_n, on approche sa somme U par

$$U_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

On néglige ainsi le reste R_n puisque $|U - U_n| = |R_n|$.

il faut trouver une majoration de $|R_n|$ et dans le cas réel étudier si possible le signe de R_n.

1) Si la convergence a été obtenue par la règle de Cauchy, à partir d'un certain rang N, on a pour tout $n \geq N$:

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq a < 1.$$

D'où $|u_n| \leq a^n$.

On a alors :

$$|R_n| \leq a^{n+1} + \cdots + a^{n+k} + \cdots$$

C'est-à-dire :

$$|R_n| \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

2) Si la convergence a été obtenue par la règle de d'Alembert, il existe un nombre réel a et un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq a < 1$$

D'où $|u_{n+1}| \leq a|u_n|$, et par récurrence

$$|u_{n+p}| \leq a^p|u_n|.$$

Donc

$$|R_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} + \cdots| \leq |u_{n+1}|(1 + a + \cdots + a^{p-1} + \cdots).$$

Par suite

$$|R_n| \leq \frac{1}{1-a}|u_{n+1}| \leq \frac{a}{1-a}|u_n|.$$

Exemple 2.12.1 *Calcul approché de :*

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$$

et pour $p \geq 1$:

$$\frac{u_{n+p}}{u_{n+1}} \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^p$$

soit

$$u_{n+p} \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^p u_n$$

donc :

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}.$$

Par suite

$$R_n \leq \frac{1}{n!n}$$

En prenant $n = 10$, on trouve :

$$\frac{1}{10!10} \leq 3.10^{-8}$$

Finalement on a : $2.71828182 \leq \mathrm{e} \leq 2.71828185$.

3) Si la convergence a été obtenue par une intégrale généralisée, en particulier celle qui s'applique à la règle de Riemann, on a vu que si :

$$u_n = f(n)$$

la fonction étant décroissante alors on a :

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n \leq \int_{n-1}^{n+1} f(x)dx$$

d'où

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx. \tag{2.2}$$

Posons

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx$$

d'où

$$U'_n = U - R_n + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx$$

on en déduit

$$U - U'_n = R_n - \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx - \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Finalement

$$0 \leq U - U'_n \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n. \tag{2.3}$$

Remarque 2.12.1 *Si f est positive pour avoir une approximation de la somme de la série à ε près, il suffit de considérer la relation (2.2) et imposer la condition $\int_n^{+\infty} f(x)dx \leq \varepsilon$.*

Exemple 2.12.2 *Calcul de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ à 10^{-3} près.*

D'après ce qui précède on a $R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$. On aura donc $R_n \leq 10^{-3}$ pour $\frac{1}{n^3} \leq 10^{-3}$, soit $n \geq 7$.

Pour $n = 7$, on a $U \approx U_7 \approx 1.0815$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Les résultats exposés dans ce chapitre sont aussi valables pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

3.1 Suites de fonctions

3.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Définition 3.1.1 *On dit qu'une suite (f_n) d'application d'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ converge simplement vers l'application f de X dans $\mathbb{R}$ si pour chaque $x \in X$, la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.*

Autrement dit, la suite (f_n) converge simplement vers f sur X si

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N : \forall n \geq N, \quad \textit{on a } \|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Le nombre N dépend en général de ε et de x.

En exigeant que N soit indépendant de x, on obtient le mode de convergence appelé convergence uniforme.

Définition 3.1.2 *On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N ne dépendant que de ε, tel que pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$, on a*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 3.1.3 *Si la suite (f_n) converge simplement (respectivement uniformément) vers f sur X, on dit que f est une limite simple (respectivement limite uniforme) de la suite (f_n).*

Exemple 3.1.1 *Soit (f_n) la suite de fonction réelle définie sur $X = [0, 1]$ par*

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}.$$

On a $f_n(0) = 0 \;\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Si $x \neq 0$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. *Donc la limite simple de* (f_n) *sur* $[0,1]$ *est la fonction* $f \equiv 0$.

Cette convergence est-elle uniforme ?

Nous avons l'inégalité

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \times \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \ \forall x \in [0,1]$$

(car pour tout $x \in [0,1]$, *on a* $(nx-1)^2 = n^2x^2 - 2nx + 1 \geq 0$ *c'est-à-dire* $n^2x^2 + 1 \geq 2nx$ *et donc* $\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq 1$*).*

Alors la suite (f_n) *converge uniformément vers* $f \equiv 0$ *sur* $[0,1]$.

En effet, il suffit de prendre $N = E(\frac{1}{2\varepsilon})$ *et aussitôt pour tout* $n > N$, *on aura* $0 \leq f_n(x) < \varepsilon \ \forall x \in [0,1]$.

Remarque 3.1.1 *Il est évident que la convergence uniforme de* (f_n) *vers* f *implique la convergence simple de* (f_n) *vers* f *; mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 3.1.2 *Considérons la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \ , \ x \in X = [0,1].$$

On a $f_n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Pour $x \in]0,1]$, *on a :* $0 < f_n(x) \leq \frac{1}{nx}$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \ \forall x \in]0,1]$.

Il en résulte que (f_n) *converge simplement vers* $f \equiv 0$ *sur* $[0,1]$.

Cette convergence est-elle uniforme ?

Non ! En effet, en donnant à n des valeurs aussi grandes que possible, on trouvera pour la fonction $x \mapsto f_n(x)$ *définie sur* $[0,1]$ *une valeur de* $x = \frac{1}{n}$ *dans* $[0,1]$ *telle que* $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. *Ainsi en augmentant* n, *il est impossible de réaliser l'inégalité* $f_n(x) < \frac{1}{2} \ \forall x \in [0,1]$ *simultanément. Donc pour* $\varepsilon = \frac{1}{2}$, *il n'existe pas de numéro* N *convenable.*

Remarque 3.1.2 *Dire que la suite* (f_n) *converge simplement (respectivement uniformément) vers* f *sur* x, *équivaut à dire que la suite* $(f_n - f)$ *converge simplement (respectivement uniformément) vers* 0 *sur* X.

3.1.2 Critères de convergence uniforme

De la définition de la convergence uniforme résulte immédiatement le critère suivant.

Proposition 3.1.1 *Soit* (f_n) *une suite d'applications de* X *dans* $\mathbb{R}$ *et* f *une application de* X *dans* $\mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \|f_n - f\| = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Pour que la suite (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* X, *il faut et il suffit que la suite* (α_n) *tende vers* 0.

Preuve :

La condition $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ équivaut à $\alpha_n \leq \varepsilon$ d'où le résultat. $\square$

Exemple 3.1.3 $X = \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = xe^{-nx}$ *avec* $x \geq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Cela implique que (f_n) *converge simplement vers* $f \equiv 0$ *sur* $\mathbb{R}^+$.

L'Étude de la dérivée $f_n'(x) = (1-nx)e^{-nx}$ *montre que la fonction* (f_n) *positive, atteint sa borne supérieure au point* $x = \frac{1}{n}$.

Cette borne étant le nombre

$$\alpha_n = \|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$$

Étant donné que la suite $\alpha_n \mapsto 0$, *il en résulte que la suite* (f_n) *converge uniformément vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}^+$.

Proposition 3.1.2 *Soit* (f_n) *une suite de fonction définie sur* X *à valeur dans* $\mathbb{R}$.

a) Pour que la suite (f_n) *converge uniformément vers 0 sur* X, *il suffit qu'il existe une suite* (ε_n) *de nombres réels convergent vers 0 telle que pour tout* $x \in X$, *on ait :*

$$\alpha_n = \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq \varepsilon_n. \tag{3.1}$$

b) Pour que la suite (f_n) *ne converge pas uniformément vers 0 sur* X, *il suffit qu'il existe une suite* (x_n) *de points de* X *telle que la suite* $(f_n(x_n))$ *ne tende pas vers* 0.

Preuve :

Si la condition énoncée dans a) est vraie alors la suite (α_n) $(0 < \alpha_n < \varepsilon_n)$ tend vers 0 et par conséquent la suite (f_n) converge uniformément vers 0.

Si la condition b) est vraie, on a : $\alpha_n \geq |f_n(x_n)|$. Ce qui prouve que que la suite (α_n) ne tend pas vers 0. Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers 0. $\square$

Exemple 3.1.4 *1)* $f_n(x) = e^{-nx}\sin x\ x \geq 0)$.

La suite (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}^+$.

Cette convergence est-elle uniforme ? Oui ! En effet, nous avons

$$|f_n(x)| = e^{-nx}|\sin x| \leq xe^{-nx} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+.$$

Or on a vu précédemment que

$$\sup_{x>0}(xe^{-nx}) = \frac{1}{ne}.$$

Donc on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{ne} \ \Rightarrow\ \|f_n\| = \alpha_n \leq \frac{1}{ne} = \varepsilon_n.$$

Ce qui prouve que la suite (f_n) *converge uniformément vers* 0 *sur* $\mathbb{R}^+$.

2) $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ $x \in X = \mathbb{R}$. *La suite* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}$. *Cette convergence est-elle ? Non ! En effet, au point* $x_n = \frac{1}{n}$, *on a :* $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{2n}{e}$. *Donc la convergence de la suite* (f_n) *vers 0 n'est pas uniforme.*

Jusqu'à présent nous n'avons étudié que la cas d'une suite (f_n) convergente vers une fonction connue$f$. Lorsque la limite f de la suite (f_n) n'est pas connue, on utilise le critère suivant appelé critère de Cauchy.

Proposition 3.1.3 (Critère de Cauchy pour la la convergence uniforme)
Soit (f_n) *une suite d'application d'un ensemble* X *à valeurs réels. Pour la suite* (f_n) *soit uniformément convergente, il faut et il suffit qu'à chaque nombre* $\varepsilon > 0$, *on puisse associer un entier* N *tel que les inégalités* $n \geq N$ *et* $p \geq N$ *entraînent*

$$\forall X \in X,\ |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Preuve :
a) Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X, alors pour tout $\varepsilon > 0$donné, il existe une entier N tel que les inégalités $n \geq N$ et $p \geq N$ entraînent
donc

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq |f_n(x) - f_(x)| + |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \in X.$$

C'est-à-dire que (3.2) est vérifiée.
b) Inversement, supposons la condition (3.2) vérifiée. Alors pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet ; donc la suite $(f_n(x))$ est convergente.
Posons $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et choisissons N tel que les inégalités $n \geq N$ et $p \geq N$ entraînent (3.2).
En faisant tendre $p \mapsto \infty$ dans (3.2) et en utilisant la continuité de la valeur absolue (distance dans $\mathbb{R}$), on obtient pour chaque $x \in X$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{p\to\infty} |f_n(x) - f(x)|$$

d'où $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ quel que soit $n \geq N$ et $x \in X$. La convergence uniforme de la suite (f_n) vers f est aussi démontrée. □

3.1.3 Limite uniforme de fonctions continues

Théorème 3.1.1 *Soit* (f_n) *une suite d'applications de* X *dans* $\mathbb{R}$ *uniformément convergente sur* X. *Supposons que pour tout* n, f_n *soit continue à droite (respectivement à gauche) en un point* x_0 *de* X, *alors* f *est continue à droite (respectivement à gauche) en* x_0.

Preuve : Nous faisons la démonstration pour la continuité à droite. Pour cela écrivons :

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)$$

d'où

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On peut alors toujours choisir l'entier n suffisamment grand de telle sorte que $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. L'entier n étant ainsi fixé, la continuité de f_n à droite de x_0 entraîne l'existence d'un nombre $\sigma > 0$ tel que pour tout $x \in X$ vérifiant $0 < x - x_0 < \sigma$ on a

$$|f_n(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On obtient pour tout $x \in X$ vérifiant $0 < x - x_0 < \sigma$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Nous avons ainsi démontré la continuité de f à droite de x_0 □

Corollaire 3.1.1 *Étant donné une suite d'applications convergeant uniformément vers f sur une partie X de $\mathbb{R}$, supposons que pour tout n, f_n soit continue en un point x_0 de X, alors f est continue en x_0.*

Corollaire 3.1.2 *Soit (f_n) une suite uniformément convergente d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$. alors la fonction $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est continue sur X.*

Remarque 3.1.3 *Le résultat subsiste si la suite de fonctions continues converge uniformément sur tout segment contenu dans X.*

Corollaire 3.1.3 *Étant donné une suite d'applications convergeant uniformément vers f sur une partie X de $\mathbb{R}$, supposons que pour tout n, f_n ait une limite l_n (resp. à droite, resp. à gauche) en x_0, alors f a une limite (resp. à droite, resp. à gauche) en x_0 et l'on a :*

1) la suite (l_n) converge vers l,

2) f a une limite (resp. à droite, resp. à gauche) en x_0 qui vaut l.

En effet, il suffit de prolonger f_n par continuité (resp. à droite, resp. à gauche) en x_0.

Remarque 3.1.4 *Ce corollaire signifie que l'on peut permuter les limites*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right).$$

L'importance du théorème ci-dessus vient de ce que beaucoup de fonctions sont définies comme limites uniformes de fonctions continues. Par ailleurs, ce théorème permet parfois de montrer, sans calcul que la convergence n'est pas uniforme.

Exemple 3.1.5 *1) La suite (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x > 0$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x > 0. \end{cases}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et leur limite f ne l'est pas. La convergence de la suite (f_n) vers f ne peut donc être uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

2) De la même manière, on établit que la suite (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0,1]$ n'est pas uniformément convergente car sa limite est discontinue au point $x = 1$.

3.1.4 Limites des fonctions dérivables

La limite d'une suite uniformément convergente de fonctions dérivables, n'est pas nécessairement dérivable. C'est le cas de l'exemple suivant :

Soit la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette suite converge simplement vers la fonction $x \to |x|$. Les fonctions (f_n) sont dérivables sur $\mathbb{R}$.Par ailleurs, on a les inégalités suivantes : $|x| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n}$ par conséquent $|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{n}$. Il en résulte que $f_n(x)$ converge uniformément vers $|x|$ sur $\mathbb{R}$. Cependant la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable à l'origine.

Théorème 3.1.2 *Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications dérivables de X dans $\mathbb{R}$, converge simplement vers l'application f. Pour que f soit dérivable sur X, il suffit que la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur X. Alors pour tout $t \in X$, on aura :*

$$f'(t) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(t)$$

ou encore

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$

Preuve :

Le point $t_0 \in X$ étant fixé arbitrairement, on considère les fonctions suivantes

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t)-f_n(t_0)}{t-t_0} & \text{si } t \neq t_0 \\ f'_n(t_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} & \text{si } t \neq t_0 \\ \lim_{n\to+\infty} f'_n(t_0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions φ_n sont continues au point t_0 et la suite (φ_n) converge simplement vers φ sur X.

Pour démontrer que la fonction f admet la quantité $\varphi(t_0) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(t)$ pour dérivée au point t_0, il suffit de montrer que la fonction limite φ est elle aussi continue au point t_0. Pour prouver la continuité de φ en t_0, il suffit de montrer la convergence uniforme de la suite (φ_n) vers φ sur X.

Par hypothèse la suite (f'_n) converge uniformément sur X, elle est donc uniformément de Cauchy ; donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que les inégalités $n \geq N$ et $p \geq N$ entraînent :

$$\forall t \in X, \ |f'_n(t) - f'_p(t)| \leq \varepsilon.$$

En appliquant à la fonction $(f_n - f_p)$ la formule des accroissements finis, on a pour $t \in X$,

$$|f_n(t) - f_p(t) - (f_n(t_0) - f_p(t_0))| \leq \varepsilon|t - t_0|. \tag{3.3}$$

En divisant par $(t - t_0)$ avec $(t \neq t_0)$, on obtient

$$|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)| \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

L'inégalité (3.4) vraie pour $t \neq t_0$ reste vraie au point t_0 par passage à la limite car les fonctions sont continues au point t_0.

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans la relation (3.4), on obtient à la limite,

$$\forall n \geq N, \forall t \in X; |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de φ_n vers φ sur X. □

3.1.5 Limite de fonctions intégrables

Dans ce paragraphe nous supposons que X est un ensemble fermé et borné (compact). Nous considérons seulement des fonctions qui sont continues par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$:ces fonctions ont un nombre fini de discontinuité sur $[a, b]$ et en chaque point ont une limite à droite et une limite à gauche.

Proposition 3.1.4 *Soit(f_n) une suite d'applications continues par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers f alors la suite définie par $\int_a^b f_n(t)dt$ a une limite qui vaut $\int_a^b f(t)dt$*

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$$

Preuve :

D'après le paragraphe précédent, toute limite uniforme de suites de fonctions continues par morceaux est une fonction continue par morceaux.

Désignons par (f_n) une telle suite et f sa limite.

Pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la relation $(n \geq N)$ implique :

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Or si $n \geq N$:

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

d'où

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \varepsilon |b - a|$$

ce qui montre que $\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt$ tend vers 0 ce qui peut encore s'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt.$$

□

Remarque 3.1.5 *Ce résultat n'est plus vrai si l'intervalle d'intégration n'est pas borné (ou si l'intégrale est généralisée en un point de $[a, b]$) ;*

Exemple 3.1.6 *Considérons par exemple la suite de fonction (f_n) définie par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{pour } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

On a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ donc la suite converge uniformément vers $f = 0$.

Or

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 1$$

et

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

Remarque 3.1.6 *La proposition (3.1.4) est vraie avec des hypothèses moins restrictives.*

On montre que :

Proposition 3.1.5 *Si (f_n) est une suite d'applications intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f alors est f integrable sur $[a, b]$ et on peut permuter l'intégration et la limite.*

3.2 Séries de fonctions

3.2.1 Convergence simple et uniforme

Par définition, la convergence de la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ équivaut à celle de la suite définie par $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Définition 3.2.1 *Soit X un ensemble quelconque et (f_n) une suite d'application de X dans $\mathbb{R}$; pour chaque $n \in N$, soit f_n l'application de X dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Le couple $(f_n \quad F_n)$ d'applications de X dans $\mathbb{R}$ est appelé une série de fonctions dont f_n est le terme général et F_n la somme partielle de rang n (on dira, en abrégé la série de fonctions f_n.

Définition 3.2.2 *La série de fonctions f_n converge simplement (respectivement uniformément) si la suite de fonctions (F_n) converge simplement (respectivement uniformément) sur X. La somme de la série est*

$$F(x) = \lim_n F_n(x).$$

On note alors

$$R_n(x) = F(x) - F_n(x).$$

Cela étant, les propositions relatives aux suites de fonctions vont se traduire par des propositions relatives aux séries de fonctions.

Théorème 3.2.1 (Propriété de continuité)
Soit (f_n) une suite d'application de Xde $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la série de fonctions (F_n) est uniformément convergente sur X et si chacune des fonctions (f_n) est continue au point $x_0 \in X$ (respectivement continue sur X), alors la fonction

$$F : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

est continue au point x_0 (respectivement sur X).

Cela résulte du théorème (3.1.1)

Proposition 3.2.1 (Dérivation terme à terme d'une série)
Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications dérivables de X dans $\mathbb{R}$, telle que la série $\sum f_n$ soit simplement convergente . Si la série $\sum f'_n$ formée avec leurs dérivées est uniformément convergente sur X alors la fonction : $F : t \mapsto \sum_{n=0} f_n(t)$ est dérivable sur X et on a : $F'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t)$.

Autrement dit :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{n=0}^{\infty} bf_n(t)\right] = \sum_{n=0}^{i} nfty\frac{d}{dt}[f_n(t)].$$

La démonstration résulte immédiatement de (3.1.2).

Proposition 3.2.2 (Intégration terme à terme d'une série)
Soit $X = [a, b]$, un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$ telle que la série $\sum f_n$ soit uniformément convergente sur X. Soit $F(x)$ la somme de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ alors

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{3.5}$$

Preuve :

Posons $F(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \varphi_n(x)$. En raison de la continuité des fonctions f_n et F, l'existence de leurs intégrales est évidente. On a :

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

Pour démontrer (3.5), il suffit d'établir que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)dx = 0. \tag{3.6}$$

La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ étant uniformément convergente sur $X = [a, b]$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n > N$ on ait : $|\varphi_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$. Par conséquent on a :

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < \varepsilon(b - a).$$

La relation (3.6) est ainsi démontrée. □

3.2.2 Critères de convergence uniforme pour les séries

Proposition 3.2.3 *Soit (f_n) une suite d'application d'un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{R}$. pour que la série $\sum f_n$ soit uniformément convergente sur X, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $x \in X$ et pour tous n, p vérifiant $p \geq n \geq N$, on ait $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_p(x)| \leq \varepsilon$.*

Preuve :
La condition énoncée revient à dire que la suite (F_n) définie par $F_n = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$ est uniformément de Cauchy. □

Remarque 3.2.1 *Il est aisé de vérifier que la somme de deux séries uniformément convergente est est une série uniformément convergente. De même si λ est un nombre réel fixé, la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ implique celle de la série $\sum \lambda f_n$.*

Définition 3.2.3 (Convergence Normale)
Soit (f_n) une suite d'application d'un ensemble à valeurs réels. la série $\sum f_n$ est dite normalement convergente sur X s'il existe une série numérique convergente ; soit $\sum v_n$ telle que pour tout $n \in N$ et $x \in X$, on ait : $|f_n(x) \leq v_n$.

Précisons que dans cette définition v_n est un nombre et non une fonction de x.

Théorème 3.2.2 *Pour qu'une série de fonction numérique, soit uniformément convergente, il suffit qu'elle soit normalement convergente.*

Preuve :
1) Soit (f_n) une suite d'application de X dans $\mathbb{R}$, telle que $\sum f_n$ soit normalement convergente. Alors il existe une suite v_n de nombres positifs telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty \text{ et } \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq v_n.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, la convergence de $\sum v_n$ entraîne l'existence d'un entier N tel que les inégalités $p > n \geq N$ impliquent : $v_{n+1} + v_{n+2} + \cdots + v_p < \varepsilon$; par conséquent

$$\|f_{n+1} + \cdots + f_p\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_p(x)| \leq v_{n+1} + \cdots + v_p$$

donc

$$\|f_{n+1} + \cdots + f_p\|_\infty < \varepsilon.$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, la convergence uniforme de $\sum f_n$ en résulte. □

Exemple 3.2.1 *1) On considère la série de fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:*

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \quad n \geq 1.$$

Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in N^*$, $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$. La série majorante $\sum \frac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente, la série proposée $\sum f_n(x)$ est normalement convergente.

2) $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. *On a* $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in N^*$, *ce qui montre que la série* $\sum f_n$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$.

On démontre de manière analogue que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

est normalement convergente donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

3.2.3 Critère d'Abel de convergence uniforme

Le critère fournit par le théorème (3.2.2) ne s'applique qu'à des séries de fonctions absolument Convergentes en chaque point. Donc pour l'étude des séries semi-convergentes, on a recourt au critère d'Abel en utilisant des majorations uniformes.

Proposition 3.2.4 *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonction réelle ou complexe définie sur un ensemble* X, *telle que* f_n *soit de la forme suivante :*

$$f_n(x) = \varepsilon_n(x) \times g_n(x) \ \text{avec} \ \varepsilon_n(x) > 0 \ \forall n, \ \forall x \in X.$$

Pour que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *soit uniformément convergente sur* X, *il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

a) Pour chaque $x \in X$, *la suite* $\varepsilon_n(x)$ *est décroissante.*

b) La suite $\varepsilon_n(x)$ *tend uniformément vers 0 lorsque* $n \to +\infty$.

c) Il existe un nombre réel A *tel que l'on ait :*

$$\left| \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \right| \leq A, \ \forall x \in X, \ \forall n \in N.$$

Chapitre 4

Séries Entières

4.1 Généralités

Définition 4.1.1 *Une série entière de la variable complexe z est une série dont le terme général est de la forme $u_n(z) = a_n(z - z^\star)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ où (a_n) désigne une suite de nombres complexes et $z^\star \in \mathbb{C}$ fixé. Les nombres a_n sont appelés les coefficients de la série ; plus précisément le nombre a_n est le coefficient d'ordre n. Le premier terme a_0 est souvent appelé terme constant.*

Remarque 4.1.1 *En posant $Z = z - z^\star$, on se ramène à l'étude d'une série entière de terme général $a_n Z^n$.*

Dans la suite, sauf mention express du contraire on supposera $z^\star = 0$.

Lorsque cette série converge, elle définit une fonction f de la variable complexe z et à valeurs complexes.

Une série entière converge toujours pour $z = 0$.

Considérons les exemples suivants :

Exemple 4.1.1 *1) Un polynôme peut toujours être considéré comme une série entière (qui converge quel que soit z).*

2) $a_n = \frac{1}{n!}$
On applique la règle de d'Alembert, en posant $u_n = \frac{z^n}{n!}$ on obtient pour $z \neq 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{z^n}\frac{n!}{z^n}$$

et

$$\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}\frac{n!}{|z^n|} = \frac{|z|}{n+1}$$

qui tend vers 0. Cette série converge donc quel que soit z.

3) $a_n = n!$
De la même manière on obtient :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n+1)|z|$$

qui tend vers $+\infty$ *pour* $z \neq 0$. *Donc cette série diverge pour tout* $z \neq 0$.

4) $a_n = 1$
On obtient une série géométrique et l'on a vu que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ pour } |z| < 1.$$

4.2 Rayon et disque de convergence

Lemme 4.2.1 (Lemme d'Abel) *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n(z_0)^n)$ *soit bornée (ce qui est réalisée en particulier si la série* $\sum a_n(z_0)^n$ *est convergente).*

Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$, *la série* $\sum_a^n z^n$ *est absolument convergente et cette série est normalement convergente dans le disque fermé* $\bar{D}(0, k|z_0|)$ *de centre* 0 *et de rayon* $k|z_0|$, *quel que soit* k *vérifiant* $0 \leq k < 1$.

Preuve :
Tout d'abord remarquons que la convergence de la série $\sum a_n(z_0)^n$ exige que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(z_0)^n = 0$$

et qu'une suite convergente vers 0 est bornée. L'hypothèse du Lemme d'Abel est par conséquent bien réalisé si la série $\sum a_n(z_0)^n$ est convergente.

Supposons que la suite $(a_n(z_0)^n)$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que

$$|a_n(z_0)^n| \leq A \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

• Si $z_0 \neq 0$, alors on a : $|a_n z^n| \leq A\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$; par comparaison avec une série géométrique, on en déduit que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| \leq |z_0|$ et normalement convergente pour $|z| \leq k|z_0| \quad \forall k$ avec $0 \leq k < 1$. En effet dans ce dernier cas, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n(z_0)^n \times \frac{z^n}{(z_0)^n}| \leq A \times k^n$$

et la série $\sum Ak^n$ est convergente.
• Si $z_0 = 0$, le résultat énoncé est immédiat. □

Définition 4.2.1 *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est la borne supérieure dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *de l'ensemble* I *des réels positifs noté* r *tels que la suite* $(a_n r^n)$ *soit bornée.*

L'existence de cette borne résulte du fait que l'ensemble I est non vide puisqu'il contient la valeur $r = 0$.

Théorème 4.2.1 *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $(0 \leq R \leq +\infty)$.*

• *Si $R = 0$, cette série ne converge que pour $z = 0$.*

• *Si $R = +\infty$, cette série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, cette convergence étant normale, donc uniforme sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$.*

• *Si R est un nombre fini non nul, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < R$ et divergente pour $|z| > R$; de plus cette série converge normalement, donc uniformément dans le disque fermé $\bar{D}(0, r)$ quel que soit $r < R$.*

Preuve :

Soit I l'ensemble des nombres $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

a) Pour que la série $\sum a_n z^n$ soit convergente, il est nécessaire que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée, donc que $|z| \in I$, ce qui exige $|z| \leq R$.

Pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est donc divergente.

b) Supposons $R > 0$ et $|z| < R$ $(R \leq +\infty)$. Par définition de la borne supérieure, il existe un nombre $r \in I$ tel que $r > |z|$; et le Lemme d'Abel montre que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

c) Supposons $R > 0$ et soit r donné tel que $0 < r < R$. Alors il existe un nombre $\rho \in I$ vérifiant $\rho > r$.

La suite $(a_n \rho^n)$ étant bornée, le Lemme d'Abel montre que la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans tout disque fermé $\bar{D}(0, k\rho)$ avec $k < 1$. En prenant $k = \frac{r}{\rho}$, on voit que la série $\sum a_n z^n$ converge normalement dans le disque fermé $\bar{D}(0, r)$. □

Définition 4.2.2 *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Si $R \neq 0$, le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de cette série.

Si l'on n'étudie la série que pour x réel, on parlera d'intervalle de convergence qui est l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

Remarque 4.2.1 *Si R est fini, on ne sait pas si la série $\sum a_n z^n$ converge sur le cercle de convergence défini par $|z| = R$.*

Exemple 4.2.1 *1) la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, son rayon de convergence est $R = +\infty$. Alors $\forall z \in \mathbb{C}$, la série converge absolument.*

2) La règle de d'Alembert montre que la série $\sum n! z^n$, diverge pour tout $z \neq 0$, on rayon de convergence est $R = 0$.

3) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge pour $|z| < 1$. En effet, en posant $u_n = \frac{z^n}{n}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{n+1} \frac{n}{z^n} = \frac{n}{n+1} z \Rightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} |z| \to |z|$$

et donc $R = 1$.

Pour $z = 1$, la série diverge (série harmonique).

Pour $z = -1$, la série converge. Le cercle de convergence contient donc des points de convergence et des points de divergence.

4) Les séries $\sum z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont pour rayon de convergence $R = 1$, mais la première série diverge en tout point du cercle de convergence par contre le second converge en tout point de ce cercle.

Proposition 4.2.1 *S'il existe un nombre complexe z_0 tel que la série est semi-convergente en z_0, alors $R = |z_0|$.*

Preuve :

On a $R \geq |z_0|$ d'après le Lemme d'Abel. Si elle convergeait absolument pour $|z| > |z_0|$, elle serait absolument convergente en z_0. □

Règles pratiques pour déterminer le rayon de convergence

Appliquons la règle de Cauchy à la série $\sum a_n z^n$.

Si on pose $L = \limsup |a_n|^{1/n} (0 \leq L \leq +\infty)$ alors on a :

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = \limsup(|z||a_n|^{1/n}) = L|z|$$

et on a les résultats suivants :

a) Si $L = +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ diverge $\forall z \neq 0$.

b) SI $L = 0$, la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

c) Si $0 < L < +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| < \frac{1}{L}$ et diverge pour $|z| > \frac{1}{L}$.

Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est donc $R = \frac{1}{L}$.

Proposition 4.2.2 (Formule de Hadamard)

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le nombre R défini par

$$\frac{1}{R} = L = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

On pose $R = +\infty$ si $L = 0$, et $R = 0$ si $L = +\infty$.

Remarque 4.2.2 *Le rayon de convergence d'une série entière ne dépend que des modules de ces coefficients. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.*

La règle de Hadamard donne l'expression de R au moyen de la suite (a_n). Cependant dans certains exemples, la règle de d'Alembert est souvent plus pratique que la règle de Cauchy.

On a la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 *1) Si la suite $\left(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right)$ tend vers L $(0 \leq L \leq +\infty)$ lorsque $n \to +\infty$, le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{L}$.*

2) Si la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ tend vers L $(0 \leq L \leq +\infty)$ lorsque $n \to +\infty$, le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{L}$.

Exemple 4.2.2 *Quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\frac{P(n+1)}{P(n)}$ qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Donc le rayon de convergence de la série $\sum P(n) z^n$ est $R = 1$.*

4.3 Opérations algébriques sur les séries entières

Soient $A = \sum a_n z^n$ et $B = \sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement $R(A)$ et $R(B)$.

Définition 4.3.1 (Somme de deux séries)
Etant donné les séries entières A et B, Leur somme A+B est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$

Théorème 4.3.1 *1) Si $R(A) \neq R(B)$, $R(A+B) = \min(R(A), R(B))$.*
2) Si $R(A) = R(B) = R$, on a $R(A+B) \geq R$.

Preuve :
Supposons $R(A) < R(B)$. Pour $|z| < R(A)$, chacune des deus séries converge donc la somme converge.

Pour $R(A) < |z| < R(B)$, la série $\sum a_n z^n$ diverge et $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0, par contre $(b_n z^n)$ tend vers 0 puisque la série $\sum b_n z^n$ converge. Il en résulte que la série $(a_n + b_n) z^n$ ne tend pas vers 0 donc la série somme diverge et $R(A+B) = R(A)$.

Pour montrer le 2) on vient de voir que si $|z| < R(A)$ alors la série somme converge donc $R(A+B) \geq R(A)$. □

Remarque 4.3.1 *Ce résultat ne peut pas être amélioré en général ; prenons par exemple : $A = B$ dans ce cas $A + B = 2A$ et $R(A+B) = R(A)$. Puis prenons $B = -A$ alors $A + B = 0$ et $R(A+B) = +\infty$.*

Définition 4.3.2 (Produit par un scalaire)
Etant donné la série entière A et α un scalaire, le produit de la série par le scalaire α, est la série $\alpha A = \sum (\alpha a_n) z^n$.

Proposition 4.3.1 *Les séries $A = \sum a_n z^n$ et $\alpha A = \sum (\alpha a_n) z^n$ $(\alpha \neq 0)$ ont le même rayon de convergence.*

Définition 4.3.3 (Produit de Cauchy de deux séries)
Le produit de Cauchy des séries A et B est la série $A \times B$ de terme général c_n, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Théorème 4.3.2 *La série entière $A \times B$ admet un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R(A), R(B))$ et pour $|z| < \min(R(A), R(B))$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)$$

avec $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Preuve :
Pour $|z| < \min(R(A), R(B))$, les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ sont absolument convergentes, il en est de même de la série produit $A \times B$, de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum (a_k b_{n-k}) z^n = c_n z^n$$

car le produit de séries absolument convergentes est absolument convergent. Ce qui montre que le rayon de convergence de la série $A \times B$ est au moins égale à $\min(R(A), R(B))$. □

Exemple 4.3.1 *1) Considérons les deux séries entières :*

$$A = \sum_0^{\infty} z^n$$

de rayon de convergence $R = 1$ et

$$B = 1 - z$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

On a $A \times B = 1$ et donc de rayon de convergence $R = +\infty$.

Cela montre que le rayon de convergence de la série produit peut être supérieur au plus petit des deux rayons de convergence.

2) En faisant le produit de la série entière $\sum z^n$ par elle-même, on obtient pour $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

Par une nouvelle multiplication, on obtient

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n.$$

Et par récurrence, en utilisant les relations du triangle de Pascal, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^{n-1} z^p.$$

On retrouve ainsi les formules obtenues par dérivation de $\frac{1}{1-z}$.

4.4 Fonctions définies par une série entière

On appelle ouvert dans $\mathbb{C}$, toute réunion de disques ouverts. Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on appelle voisinage de z, tout sous ensemble contenant un disque ouvert contenant z.

Les fonctions $x \mapsto a_n z^n$ étant continues sur $\mathbb{C}$, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 4.4.1 (Continuité)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence R est non nul. Alors la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une fonction continue de z sur son disque de convergence.

Preuve :
Pour $r \in]0, R[$, la série $\sum a_n z^n$ est uniformément convergente dans le disque fermé $\bar{D}(0, r)$. La restriction de f à un tel disque est donc continue. Soit alors z un point du disque de convergence c'est-à-dire tel que $|z| < R$. Si on choisit r tel que $|z| < r < R$ alors le disque fermé $\bar{D}(0, r)$ est un voisinage de z ; et la continuité de f sur ce voisinage entraîne la continuité de f au point z. □

En ce qui concerne la dérivation, pour ne pas se limiter aux valeurs réelles de la variable z, nous poserons la définition suivante :

Définition 4.4.1 (fonction holomorphe)
Soit U un ouvert du plan complexe et $z \mapsto f(z)$ une application de U dans $\mathbb{C}$. on dit que f est dérivable (ou mieux $\mathbb{C}$ dérivable) en un point z_0 de U si le rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite lorsque z tend vers z_0. Cette limite notée $f'(z_0)$ ou $\frac{df}{dz}(z_0)$ est appelée la dérivée de la fonction f au point z_0. Si f est dérivable en tout point z_0 de U, on dit que f est holomorphe dans U.

Nous allons énoncer la proposition suivante dont la démonstration est la même que pour les fonctions d'une variable réelle.

Proposition 4.4.2 (Dérivabilité)
a) Soit f et g deux fonctions complexes définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et dérivables en un point z de U. Alors leur somme et leur produit sont dérivables au point z et on a :

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (fg)'(z) = f'(z)(z) + f(z)g'(z).$$

b) Si de plus, on a $g(z) \neq 0$, alors leur quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable au point z et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}.$$

c) Soient f et g deux fonctions complexes définies sur deux ouverts U et V de $\mathbb{C}$ tels que $f(U) \subset V$. Si f est dérivable au point $z \in U$ et g dérivable au point $f(z)$, alors leur composée $h = f \circ g$ est dérivable et on a :

$$h'(z) = g'[f(z)] \times f'(z).$$

A présent nous allons montrer que la somme d'une série entière est une fonction *holomorphe* dans son disque de convergence. Pour cela nous remarquerons tout d'abord que chacune des fonctions $z \mapsto z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est *holomorphe* dans tout $\mathbb{C}$.

En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\frac{z^n - (z_0)^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + (z_0)^p z^{n-p-1} + \cdots + (z_0)^{n-1}$$

d'où

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - (z_0)^n}{z - z_0} = n \times z_0^{n-1}.$$

Proposition 4.4.3 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*

Preuve :
Elle résulte directement de la règle de Hadamard.

Si on désigne respectivement par R, R' les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$, on a :

$$\frac{1}{R'} = \limsup |na_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

puisque la suite $(n^{1/n})$ tend vers 1 lorsque $n \mapsto +\infty$ (on a en effet $\ln(n)^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$). $\square$

Théorème 4.4.1 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence R est non nul alors sa somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une fonction holomorphe de z sur son disque de convergence. Dans ce disque, on a :*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \tag{4.1}$$

En particulier sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$, l'application $x \mapsto f(x)$ est dérivable au sens usuel et sa dérivée est donnée par la formule (4.1).

Preuve :
Pour $|z_0| < R$, $|z| < R$ et $z \neq z_0$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(z),$$

avec

$$V_n(z) = a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + (z_0)^{n-1}) = a_n(\sum_{k=1}^{n} z^{n-k}(z_0)^{k-1}).$$

Le point z_0 étant fixé, nous allons faire tendre $z \to z_0$ en utilisant le fait que les fonctions polynômes V_n sont définies et continues au point z_0 et vérifient :

$$V_n(z_0) = n a_n (z_0)^{n-1}.$$

Le point z_0 vérifiant $|z_0| < R$, choisissons r tel que $|z_0| < r < R$, pour $|z| \leq r$, on a :

$$|V_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=1}^{n} r^{n-k} r^{r-k} = n|a_n| r^{n-1}$$

D'après la proposition précédente (4.4.3), la série numérique $\sum n|a_n|r^{n-1}$ est convergente. Par conséquent la série $\sum V_n(z)$ est normalement convergente dans le disque fermé $\bar{D}(0, r)$ et sa somme $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(z)$ est une fonction continue de z sur ce disque. Pour $z \neq z_0$, posons :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \varphi(z).$$

Le point z_0 étant intérieur au disque $\bar{D}(0, r)$, on en déduit que la rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tend vers $\varphi(z_0)$ lorsque $z \to z_0$. Autrement dit la dérivée $f'(z_0)$ existe et on a :

$$f'(z_0) = \varphi(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

et cela pour tout z_0 du disque de convergence. □

Exemple 4.4.1 *La fonction $f : z \mapsto \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et la proposition (4.4.2) montre que sa dérivée admet la même expression que pour les valeurs réelles de z, soit $f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$. Pour $|z| < 1$, on a donc $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$*

Théorème 4.4.2 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle dont le rayon de convergence R est non nul. Pour tout x tel que $0 < |x| < R$, on a*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

C'est une conséquence immédiate de la convergence normale donc uniforme de la série proposée sur $[0, x]$.

Théorème 4.4.3 *Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, qui est déduite de $\sum a_n x^n$ par intégration terme à terme a le même rayon de convergence R.*

Remarque 4.4.1 *Les deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence, mais elles peuvent avoir des comportements différents au bord de cet intervalle.*

Par exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ diverge pour $x = 1$ mais $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$.

Par récurrence, le théorème (4.4.1) ci-dessus entraîne immédiatement la proposition suivante.

Proposition 4.4.4 *La somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable (ou e classe C^∞) sur son disque de convergence et si on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on a pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout point z du disque de convergence*

$$f^p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}. \tag{4.2}$$

Preuve :

Elle s'effectue sans difficulté par récurrence sur l'entier p. □

Exemple 4.4.2 *Soit $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.*

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série

$$f^p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)z^{n-p}$$

admet un rayon de convergence égal à 1. Pour $|z| < 1$, on a donc :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{p!} f^p(z) = \sum_{n=p}^{\infty} C_n^p z^{n-p}.$$

4.5 Fonctions développables en série entière

4.5.1 Généralités

Définition 4.5.1 *Soit U un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ et f une fonction complexe définie sur U. On dit que cette fonction est développable en série entière dans U s'il existe une suite (a_n) de nombres complexes telle que pour tout $z \in U$, on ait*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Nous allons voir qu'une telle suite (a_n) est nécessairement unique.

Théorème 4.5.1 *Soit f une fonction complexe, développable en série entière dans le voisinage de l'origine alors les coefficients de cette série sont les nombres $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ et sont donc entièrement déterminés par la donnée de f.*

Le développement en série entière de f est donc unique et s'identifie avec la série de Taylor de f c'est-à-dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n.$$

Preuve :

Supposons que pour tout $z \in U$, on ait : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est évidemment non nul. Si D désigne le disque de convergence de cette série, le théorème (4.4.1) montre que f est indéfiniment dérivable sur $D \cap U$, ses dérivées étant données (4.2). En particulier pour $z = 0$,

$$f^p(0) = p! a_p \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

□

Remarque 4.5.1 *Les nombres $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ sont entièrement déterminés par la donnée de f sur un intervalle de centre 0, si petit soit-il : si donc deux fonctions f, g dévelopables en série entière dans le disque $D(0, r)$ coïncident sur un intervalle $]-r, r[$ de l'axe réel, elles coïncident dans tout le disque $D(0, r)$.*

Théorème 4.5.2 *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ deux séries entières d'une variable réelle de rayons de convergence respectifs R et R' non nuls. Supposons $0 < R < R'$*

S'il existe r, $0 < r < R$ tel que :

$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

4.5.2 cas des séries entières réelles

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant l'origine et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie sur I. Nous dirons que f est developable en série entière sur I s'il existe une suite (a_n) de nombres réels telle que pour tout $x \in I$, on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est évidemment non nul et on obtient encore ici les relations

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

qui montre que le développement en série entière de f est unique.

Remarque 4.5.2 *Une fonction réelle de classe C^∞ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement developable en série entière sur cet intervalle comme le montre l'exemple ci-dessous.*

Exemple 4.5.1 *La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{cases} 0 & si\ x \leq 0. \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x > 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et a toutes ses dérivées nulles à l'origine. La série de Taylor à l'origine est donc nulle ; et si la fonction était developable en série entière, elle devrait se réduire à la fonction nulle sur un voisinage de l'origine. Ce qui n'est pas le cas.

Supposons que f soit de classe C^∞ sur I avec l'origine $0 \in I$ et considérons la série entière

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0), \tag{4.3}$$

que l'on appelle développement en série de Taylor de f.

Désignons par J l'intervalle de convergence de cette série entière. Sa somme est-elle égale à $f(x)$ dans $I \cap J$?

Pour répondre à cette question, appliquons la formule de Mac-Laurin à la fonction f, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k]}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Si l'on désigne par $S_n(x)$ la somme partielle de rang n de la série (4.3), on a donc :

$$f(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x);$$

que l'on nomme reste de Mac-Laurin de rang n et que l'on note $r_n(x)$. Pour que la série (4.3) converge vers $f(x_0)$ pour $x_0 \in I$, il faut et il suffit que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x_0) \right| = 0$$

soit $r_n(x_0) \to 0$ lorsque n tend vers 0.

Supposons qu'il existe $x_0 \in I\backslash\{0\}$ ayant cette propriété. Nous pourrons alors affirmer que la série entière (4.3) admet un rayon de convergence $R \geq |x_0|$.

Supposons plus largement que la série (4.3) converge pour tout $x \in I$ et que sa somme soit égale $f(x)$. Dans ces conditions l'intervalle de convergence $J =]-R, R[$ contient alors I.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.5.3 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ avec $0 \in I$ et f une fonction de classe C^∞ sur I. Pour que la somme de la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ soit égale à $f(x)$ sur I, il faut et il suffit que son reste de Mac-Laurin tende vers 0 pour tout $x \in I$.*

Supposons que la suite $(f^{(n)}(x))n \in \mathbb{N}$ des dérivées de f soit bornée sur I. Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f^{(n)}(x)| \leq M < +\infty.$$

Nous avons alors :

$$|r_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leq M\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Or nous savons que la série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Son terme général tend donc vers 0 et par suite pour tout $x \in I$,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0.$$

Par conséquent la série (4.3) converge et admet pour somme $f(x)$ sur I. Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 4.5.4 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ avec $0 \in I$ et f une fonction de classe c^∞ sur I. Supposons que la suite $(f^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée sur I. Alors la série entière*

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

admet pour somme $f(x)$ sur I.

4.5.3 Opérations sur les fonctions développables en série entière

On a les résultats suivants :

Théorème 4.5.5 *Si deux fonctions complexes f et g sont développables en série entière dans un même disque ouvert de centre l'origine 0, il en est de même pour leur somme et leur produit.*

Théorème 4.5.6 *Si f et g sont deux fonctions complexes définies sur un voisinage de l'origine 0 développables en série entière et telles que $f(0) = 0$, alors la fonction composée $h = g \circ f$ est développables en série entière dans un voisinahe de l'origine, et on a $h'(0) = g'(0)f'(0)$.*

Théorème 4.5.7 *Si f est une fonction complexe définie et développable en série entière sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$, et telle que $f(0) \neq 0$, alors il existe un voisinage voisinage de l'origine sur lequel la fonction $\frac{1}{f}$ est définie et développable en série entière.*

En particulier on montre que :

Proposition 4.5.1 *Toute fraction rationnelle qui n'admet pas $z = 0$ pour pôle est développable en série au voisinage de 0 : et le rayon de convergence de cette série est égal à la distance de l'origine à l'ensemble des pôles.*

Pour chercher le développement en série entière d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ et $Q(0) \neq 0$, on n'a pas intérêt à utiliser le produit du polynôme P par $\frac{1}{Q}$; on considère plutôt la décomposition en éléments imples de $\frac{P}{Q}$.

4.5.4 Exemles de développement en série entière

1) Développement de $\cos x$ et $\sin x$

La fonction $f(x) = \cos x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}).$$

La suite $(f^{(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. On peut donc appliquer le théorème (4.5.4) ci-dessus. On a $f^{(n)}(0) = \cos(\frac{n\pi}{2})$ donc $f^{(2p+1)}(0) = 0$ et $f^{(2p)}(0) = (-1)^p$. Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \cdots$$

donc le rayon de convergence est $R = +\infty$. De manière analogue, la fonction $f(x) = \sin x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. La suite $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée par 1 et en remarquant que

$$f^{(n)}(0) = \sin(\frac{n\pi}{2}),\ \ f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p,\ \ f^{(2p)}(0) = 0$$

et en appliquant le théorème (4.5.4) on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \cdots$$

donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

2) Développement de e^x, $\cosh x$, $\sinh x$

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, d'où $|f^{(n)}(x)| = \mathrm{e}^R$ pour $|x| \leq R$, avec R quelconque. On obtient par le théorème (4.5.4) ci-dessus :

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

le rayon de convergence est $R = +\infty$. On a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots \text{ avec } R = +\infty.$$

Par addition et soustraction, on obtient deux nouvelles séries entières dont leur rayon de convergence est $+\infty$.

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots ,$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Dans certains cas, il sera plus commode de déterminer le développement en série entière de la dérivée de f (ou d'une primitive). On déduira le développement de f en intégrant (ou en intégrant) terme à terme le développement trouvé. Appliquons cette méthode à ce qui suit.

3) Développement de $\ln(1-x)$**,** $\ln(1+x)$**,** $Argthx$

On sait que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ de raison x et de premier terme 1 admet pour rayon de convergence $R = 1$ et pour somme $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Comme, pour $|x| < 1$, on a :

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln(1-x),$$

on obtient par intégration :

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots \text{ avec } R = 1.$$

On en déduit en remplaçant x par $-x$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots \text{ avec } R = 1.$$

Par addition des deux séries obtenues, on obtient :

$$\frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{1-x}) = Argthx = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \text{ avec } R = 1.$$

4) Développement en série entière de $\arctan x$

Partons de la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$ avec

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

dont le rayon de convergence est $R = 1$. En remarquant que $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$, on obtient par intégration de la série précédente :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

5) Développement de $(1+x)^\alpha$

Soit α un nombre réel donné quelconque. La fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ est définie dans $]-1, +\infty[$ et elle est de classe C^∞. On a :

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f"(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Considérons la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, développement en série de Taylor de f :

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1}{n!}x^n+\cdots \quad (S)$$

Posons $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1}{n!}.$$

On remarque : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|$ admet pour limite 1 lorsque $n \to +\infty$. Donc le rayon de convergence de la série entière (S) est $R = 1$. Il n'est pas commode d'appliquer le théorème (4.5.4) à cette fonction f pour pouvoir affirmer que la série (S) admet pour somme $(1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$. Pour démontrer cette propriété, remarquons que pour $x > -1$, $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$. Soit alors $g(x)$ la somme de la série (S) sur $]-1,1[$:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots.$$

Appliquons le théorème (4.4.1) sur la dérivation des séries entières sur $]-1,1[$ alors on a :

$$g'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n.$$

D'après le théorème sur les produits des séries absolument convergentes, on a alors :

$$(1+x)g'(x) = a_1 + (2a_2+a_1)x + \cdots + [(n+1)a_{n+1} + na_n]x + \cdots$$

or pour $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}a_n$, soit :

$$(n+1)a_{n+1} + na_n = \alpha a_n, \text{ et par suite}$$

$$(1+x)g'(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n + \cdots, \text{ c'est-à-dire } (1+x)g'(x) = \alpha g(x).$$

Si g ne s'annule pas sur $]-1,1[$, on peut écrire $\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{1+x}$ et il existe une constante réelle $c \in \mathbb{R}^*$, du signe de g tel que

$$\ln\frac{g(x)}{c} = \alpha\ln(1+x) \text{ d'où } g(x) = c(1+x)^\alpha.$$

La fonction ne s'annule pas sur $]-1,1[$. Puisque $g(0) = 1$, on en déduit $c = 1$, on en déduit $g(x) = f(x)$ $\forall x \in]-1,1[$. Le développement en série de Taylor de f admet donc pour somme f dans l'intervalle $]-1,1[$.

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

Le rayon de convergence est $R = 1$. Cette série entière est encore appelée la série du binôme.

6) Développement de $\arcsin x$ et $Argshx$

Nous allons appliquer la série du binôme au cas où $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ et en changeant x en $-x$. On obtient alors les développements suivants :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots - \frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2.4.6.\cdots.2n}x^n + \cdots .$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}x^n + \cdots .$$

Le rayon de convergence des deux développements est $R = 1$. Ces deux développements sont plus faciles à retenir que ceux de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{1+x}$ et permettent de les retrouver.

On en déduit pour $|x| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}x^{2n} + \cdots$$

et de même

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}x^{2n} + \cdots$$

Le rayon de convergence des deux développements est $R = 1$. Remarquons que pour $|x| < 1$,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x \text{ et } \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = Argshx.$$

On obtient par intégration les deux nouveaux développements en série entière.

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}.\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

$$Argshx = x - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}.\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

Le rayon de convergence de ces deux séries est $R = 1$.

Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Généralités

Rappelons qu'une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, admet le nombre T pour période si pour tout x appartenant au domaine de définition de f on a :

$$f(x+T) = f(x).$$

Si l'ensemble des périodes strictement positives admet un plus petit élément T, on dit que T est la période de f.

La fonction constante est périodique.

Si f est une fonction admettant T pour période et intégrable sur un intervalle $[\alpha, \alpha+T]$ alors elle est intégrable sur $[\alpha, T]$ et l'on a :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{T} f(t)dt + \int_{T}^{\alpha+T} f(t)dt.$$

Le changement de variable : $t = T + x$ dans la dernière intégrale nous donne :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{\alpha}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{\alpha} f(x+T)dx.$$

C'est-à-dire :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt.$$

Ce qui montre que si f est intégrable sur $[0, T]$ elle l'est sur tout intervalle de longueur T et l'intégrale de f sur un intervalle de longueur T ne dépend pas des extrémités de cet intervalle.

Par définition on pose :

$$\int_{[T]} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt.$$

Pour calculer cette intégrale on choisit un nombre α adapté à f. Par exemple, si f est paire ou impaire on prend $\alpha = -\frac{T}{2}$.

5.2 Séries trigonométriques

Définition 5.2.1 *On appelle série trigonométrique, toute série dont le terme général est de la forme :*

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} \quad et \quad \forall n \geq 1, \quad u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

où (a_n) *et* (b_n) *désignent deux suites de nombres réels ou complexes.*

On précise que $b_0 = 0$; nous adopterons cette convention.

La relation (5.1) équivaut à :

$$u_n(x) = \alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Cette expression du terme général est utilisée de préférence lorsque les coefficients a_n et b_n sont complexes.

Dans ce cas, on décrit souvent la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sous la forme d'une série double entrée, soit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

en posant

$$c_0 = \tfrac{a_0}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{pour } n > 0, \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$

Pour ne pas modifier la notion de convergence d'une série, nous conviendrons de dire que la série à double entrée $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty}(c_n + c_{-n})$ converge.

Proposition 5.2.1 *Si les séries* $\sum |a_n|$ *et* $\sum |b_n|$ *sont convergentes alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$. *Elle est donc uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *et sa somme est une fonction continue de* x *sur* $\mathbb{R}$.

C'est le cas des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}, \ \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}, \ \sum_{n\geq 0} \frac{e^{inx}}{n!}.$$

Proposition 5.2.2 *Soient* a_n *et* b_n *deux suites de nombres positifs qui tendent vers* 0 *en décroissant. Alors la série trigonométrique* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *est convergente pour tout* $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, *et sa convergence est uniforme, sur chaque intervalle de la forme*

$$[2k\pi + \alpha, \ 2(k+1)\pi - \alpha] \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad et \quad \alpha > 0.$$

Sa somme est donc une fonction continue de x *sur* $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

Plaçons nous dans l'hypothèse où la série trigonométrique est uniformément convergente dans un intervalle de longueur supérieur à 2π. Alors la somme

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

est périodique de période 2π et continue sur $\mathbb{R}$. On peut alors intégrer terme à terme

$$\int_0^{2\pi} S(x)\cos pxdx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos pxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\cos pxdx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\cos pxdx\right],$$

$$\int_0^{2\pi} S(x)\sin pxdx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin pxdx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\sin pxdx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\sin pxdx\right].$$

Pour calculer les intégrales figurants au second membre de deux égalités, nous pouvons procéder par linéarisation en utilisant :

$$2\cos nx\cos px = \cos(n-p)x + \cos(n+p)x$$

où à partir des relations :

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{ipx}dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = -p \\ 0 & \text{si } n \neq -p \end{cases}$$

Par de calculs faciles, on obtient pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}\sin nx\cos pxdx = \int_0^{2\pi}\cos nx\sin pxdx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos pxdx = \int_0^{2\pi}\sin nx\sin pxdx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi & \text{si } n = p \neq 0. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\int_0^{2\pi} S(x)\cos pxdx = \begin{cases} \pi a_0 & \text{si } p = 0 \\ \pi a_p & \text{si } p > 0 \end{cases};$$

$$\int_0^{2\pi} S(x)\sin pxdx = \pi b_p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos nxdx \text{ et } b_n = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\sin nxdx.$$

Remarque 5.2.1 *La formule trouvée pour a_n convient pour a_0, c'est pourquoi le premier terme de la série a été noté $\frac{a_0}{2}$.*

5.3 Série de Fourier d'une fonction périodique

Définition 5.3.1 *Soit f une fonction numérique périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle fermé borné (compact). Les coefficients de Fourier de f sont les nombres a_n et b_n ($n \in \mathbb{N}$) définis par les relations :*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \tag{5.2}$$

et la série de Fourier de f est la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Le problème fondamental qui se pose à propos de cette série est le suivant :
- Cette série est-elle convergente ?
- Dans l'affirmative, sa somme est-elle égale à $f(x)$?

Proposition 5.3.1 *On a pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\sin nx dx \tag{5.3}$$

Preuve :
Les fonctions

$$x \mapsto f(x)\cos nx \text{ et } x \mapsto f(x)\sin nx,$$

sont 2π-périodique et intégrables sur sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Alors les intégrales de ces fonctions sur un intervalle de longueur 2π ne dépend pas des extrémités de cet intervalle. D'où le résultat. □

En particulier on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{5.4}$$

Les relations (5.4) sont particulièrement intéressantes lorsque f est une fonction paire ou impaire.

Proposition 5.3.2 • *Si f est paire (c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad \text{et} \quad b_n = 0 \tag{5.5}$$

• *Si f est impaire (c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0, \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \tag{5.6}$$

C'est une conséquence directe des relations (5.4).

Remarque 5.3.1 *1) Pour définir une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, il suffit de donner ses valeurs sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π, soit $[\alpha, \alpha + 2\pi[$; $]\alpha, \alpha + 2\pi]$.*

2) Les coefficients de Fourier d'une fonction ne sont pas modifiés si on modifie les valeurs de la fonction en nombre fini de points.

Définition 5.3.2 (Forme complexe de la série de Fourier)
Soit f une fonction numérique de période 2π sur $\mathbb{R}$, intégrable sur tout intervalle fermé borné (compact). Les coefficients de Fourier de f sous forme complexe sont les nombres définis par les relations :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{5.7}$$

La série de Fourier de f de type complexe est la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

Remarque 5.3.2 *On a les relations suivantes :*

$$c_0 = \tfrac{a_0}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{pour } n > 0, \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$

Remarque 5.3.3 *La définition (5.3.1) s'étend sans difficulté aux cas d'une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ admettant sur $[0, 2\pi]$ une intégrale généralisée absolument convergente. En effet, la convergence absolue de $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ entraîne la convergence des intégrales*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \ \text{ et } \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

5.4 Règles de convergence

Pour étudier la convergence des séries de Fourier, il est nécessaire d'abord de s'assurer que le terme général tend vers 0. A l'aide de la proposition suivante, on va prouver que cette condition est satisfaite pour une fonction localement intégrable.

Lemme 5.4.1 (Lemme de Lesbesgue)
Soit f une fonction numérique, intégrable sur l'intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors l'intégrale $I(\lambda) = \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx$ tend vers 0 lorsque le nombre réel $\lambda \to \infty$.

Preuve :
La démonstration comporte deux parties.
a) Cas où f est en escalier. Dans ce cas, il existe une subdivision $(x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f garde une valeur constante f_k sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ avec $k = 1, \cdots, n$. Alors on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx = \frac{1}{i\lambda}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{i\lambda x_k} - \mathrm{e}^{i\lambda x_{k-1}})$$

d'où la majoration

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{n}|f_k|,$$

Cette majoration montre bien que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = 0.$$

b) Supposons f intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné. Alors il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on alors

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx - \int_a^b \varphi(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - \varphi(x))\,\mathrm{e}^{i\lambda x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs la fonction en escalier φ étant fixée, la partie a) de la démonstration montre qu'il existe un nombre L tel que l'inégalité $|\lambda| > L$ entraîne $\left|\int_a^b \varphi(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\lambda| > L$, on a donc $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}dx\right| < \varepsilon$. Cela prouve que $I(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers l'infini. □

Corollaire 5.4.1 *Si f est une fonction localement intégrable, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ alors les suites (a_n) et b_n constituées des coefficients de Fourier tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.*

On a la proposition suivante :

Proposition 5.4.1 *On a :*

$$c(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} ku = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \quad (u \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}) \tag{5.8}$$

Preuve :

Si $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{iu} \neq 1$ et donc :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{iku} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)u} - \mathrm{e}^{iu}}{\mathrm{e}^{iu} - 1} = \frac{2\mathrm{e}^{i(n+1)u} - \mathrm{e}^{iu} - 1}{2(\mathrm{e}^{iu} - 1)},$$

multiplions le numérateur de la fraction ci-dessus par $\mathrm{e}^{-i\frac{u}{2}}$,on obtient :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{iku} = \frac{2\mathrm{e}^{i(n+\frac{1}{2})u} - 2\cos\frac{u}{2}}{4i\sin\frac{u}{2}}.$$

Enfin en prenant la partie réelle de l'expression ci-dessus, on obtient la formule (5.8). □

Théorème 5.4.1 (Règle de Dirichlet)

Soit f une fonction numérique de période 2π sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur tout intervalle compact et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent.

Si le rapport

$$\frac{1}{u}[f(x+u) + f(x-u) - f(x+0) - f(x-0)]$$

reste borné au voisinage de 0 $(u \in \mathbb{R}^*)$, *alors la série de Fourier de f converge au point x vers*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

Preuve :

Reprenons les notations de la définition (5.3.1) et désignons par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

la série de Fourier de f.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Par définition des coefficients de Fourier de f, on a :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}\sum(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right] \times f(t)dt$$

Soit

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi} + \sum \cos k(x-t)\right] \times f(t)dt$$

et par application de (5.8),

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}f(x+u)du.$$

Les fonctions $u \mapsto f(x+u)$ et $u \mapsto \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}$ admettant 2π pour période, on a :

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \times \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du \tag{5.9}$$

$$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)] \times \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

La formule (5.9) est appelée formule de Dirichlet. En particulier lorsque la fonction se réduit à la constante 1, on a : $a_0 = 2$ et $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, d'où $S_n = 1$ quel que soit n et

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du = \pi. \tag{5.10}$$

Pour tout $y \in \mathbb{C}$, on a donc

$$S_n(x) - y = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2y]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

Si nous choisissons $y = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, il résulte des hypothèses que la fonction

$$\varphi : u \mapsto \frac{f(x+u)+f(x-u)-2y}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{f(x+u)+f(x-u)-2y}{u}\frac{u}{\sin\frac{u}{2}}$$

est bornée au voisinage de 0 (puisque le rapport $\frac{u}{\sin\frac{u}{2}}$ tend vers 2 à l'origine) ; or cette fonction φ est intégrable sur tout intervalle $[\varepsilon, \pi]$ avec $\varepsilon > 0$ (puisque c'est un produit de fonctions intégrables). Elle est donc intégrable sur $[0, \pi]$ et par application du lemme de Lebesgue (5.4.1) on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\varphi(u)\sin(n+\frac{1}{2})udu = 0.$$

Ceci montre que la suite $(S_n(x))$ tend vers $y = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$. □

Remarque 5.4.1 *Cette condition est une condition suffisante de convergence ponctuelle.*

Remarque 5.4.2 *Les hypothèses du théorème (5.4.1) sont réalisées en particulier si les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et si chacun des rapports*

$$\frac{1}{u}[f(x+u)-f(x+0)],\ \frac{1}{u}[f(x-u)+f(x-0)]$$

admet une limite lorsque u tend vers 0 par valeurs positives.

Par extension, les limites de ces rapports sont appelées dérivée à droite et dérivée à gauche de f au point x.

On a :

Proposition 5.4.2 *Soit f une fonction numérique de période 2π et intégrable sur tout intervalle borné et soit x un point tel que les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent. Si de plus f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche, sa série de Fourier au point x converge vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.*

En particulier la série de Fourier de f converge vers $f(x)$ en tout point x où f est continue et dérivable.

Définition 5.4.1 *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Nous dirons que f est continue par morceaux (respectivement dérivable par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une subdivision $(x_0=a, x_1, \dots, x_n=b)$ de $[a,b]$ tel que la restriction de f à chacun des intervalles ouverts $]x_{k-1}, x_k[$ $(1 \leq k \leq n)$ coïncide avec la restriction d'une fonction continue (respectivement dérivable) sur l'intervalle fermé $[x_{k-1}, x_k]$.*

Une fonction continue par morceaux (respectivement dérivable par morceaux) est évidemment intégrable sur $[a,b]$ et on voit immédiatement que toute fonction numérique de période 2π sur $\mathbb{R}$ et dérivable par morceaux, vérifie les hypothèses de la proposition (5.4.2) en tout point x. Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 5.4.3 *Si f est une fonction numérique de période 2π sur $\mathbb{R}$ et dérivable par morceaux, sa série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point x ou f est continue et vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en ces points de discontinuités.*

Définition 5.4.2 *Soit f une fonction numérique, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et localement intégrable. On dit que f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ si sa série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ et en chaque point $x \in \mathbb{R}$, elle a pour somme $f(x)$.*

Exemple 5.4.1 *1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, paire et définie par : $t \mapsto f(t) = t$ avec $t \in [0,\pi]$. f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, admettant en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. D'après la proposition (5.4.3), elle est développable en série de Fourier. On a alors :*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t dt = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t \cos nt dt = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}, \qquad et \quad b_n = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Donc

$$a_{2p} = 0 \quad et \quad a_{2p+1} = -\frac{4}{\pi(2p+1)^2}$$

et la série de Fourier de f s'écrit :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

Cette somme vaut $f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x = 0$, $f(x) = 0$. Par conséquent

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

On peut déduire la somme S de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

En effet, on peut écrire :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

D'où

$$S = \frac{\pi^2}{6}.$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire et définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ si \ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \\ \alpha \ si \ \frac{\pi}{2} < t < \pi \ (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

et prenant des valeurs quelconques aux point de $\frac{\pi}{2}$ et π.

En tout point de $\mathbb{R}$, f admet une limite à droite et à gauche.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin nt dt + \frac{2\alpha}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin nt dt$$

donc

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\times\sin\frac{n\pi}{2}\right] + \frac{2\alpha}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right].$$

- *Si $n = 2p-1$, $(p \geq 1)$, on a*

$$b_{2p-1} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)^2} + \frac{2\alpha}{(2p-1)\pi}$$

- *Si $n = 2p$, $(p \geq 1)$, on a*

$$b_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}}{2p} + \frac{\alpha}{p\pi}\left[(-1)^p - 1\right].$$

En appliquant la proposition (5.4.2), on obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$ *on a :*

$$f(x+0) = \alpha, \quad f(x-0) = \frac{\pi}{2}, \quad \textit{et} \quad b_{2p-1}(-1)^{p-1} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(2p-1)^2} + \frac{\alpha(-1)^{p-1}}{2p-1}\right].$$

Par suite

$$\frac{\pi}{4}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2p-1)^2} + \frac{\alpha(-1)^{p-1}}{2p-1}\right]$$

or, on sait que

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit pour $x \neq 0$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}.$$

Le développement en série entière de $x \mapsto \arctan x$ *donné au chapitre précédent est donc valable pour* $x = 1$.

3) Soit a *un réel non entier et soit* f *une fonction de période* 2π *sur* $\mathbb{R}$ *égale à* $\cos ax$ *pour* $|x| \leq \pi$. *La fonction* f *est donc paire ; donc* $b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax dx = \frac{2\sin a\pi}{a\pi}$$

donc

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax \cos nx dx$$

donc

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(a+n)x + \cos(a-n)x\right]dx = \frac{2a(-1)^n}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi}.$$

La fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et admet à chaque point une dérivée à gauche et à droite. En appliquant la proposition (5.4.2)*

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2} \qquad \textit{pour } |x| \leq \pi. \tag{5.11}$$

En faisant $x = \pi$ *dans la relation ci-dessus et en remplaçant a par* z, *on a :*

$$\pi cotg(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2} \quad (z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}) \tag{5.12}$$

En prenant $x = 0$ *dans la relation (5.11), on obtient :*

$$\frac{\pi}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{z^2} + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}. \tag{5.13}$$

En dérivant terme à terme le second membre de (5.12) par rapport à z et en changeant les signes, on a :

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{5.14}$$

Cette dérivation est justifiée par le fait que la série figurant au second membre de la formule (5.14) est, normalement convergente sur tout compact ne rencontrant pas $\mathbb{Z}$.

En effet soit $z \in [n_0, n_0+1]$ tel que pour tout $z \in [n_0+\delta, n_0+1-\delta]$ avec $\delta > 0$ (assez petit), on ait $|z| \leq M < +\infty$. On a :

$$\left|\frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2}\right| = \frac{z^2+n^2}{(n^2-z^2)^2} \leq \frac{M^2+n^2}{(n^2-z^2)^2} \approx \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2}$ est donc normalement convergente sur le compact $[n_0+\delta, n_0+1-\delta]$ d'où la dérivabilité au point z terme à terme de la série.

Nous avons ainsi obtenues développements en séries de fonctions rationnelles des fonctions :

$$\pi cotg \pi z; \quad \frac{\pi}{\sin \pi z}; \quad \frac{\pi}{(\sin \pi z)^2}.$$

5.5 Calcul des coefficients dans le cas d'une période quelconque

Supposons que la fonction f soit donnée dans un intervalle $[-T, +T]$, $T > 0$ et qu'elle soit périodique de période $2T$. Alors les coefficients de Fourier de f sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \cos\frac{n\pi x}{T} dx \quad n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x) \sin\frac{n\pi x}{T} dx \quad n \geq 1. \tag{5.15}$$

La série de Fourier s'écrit alors :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos\frac{n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{n\pi x}{T}) \tag{5.16}$$

Les critères de convergence étudiés précédemment dans le cas d'une période égale à 2π s'applique dans le cas d'une période quelconque.

5.6 Un problème d'approximation

Définition 5.6.1 *Un polynôme trigonométrique est une fonction $P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ de la forme :*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5.17}$$

où les a_k et b_k ($k = 0, \ldots, n$) désignent les nombres réels ou complexes et n désigne un entier quelconque.

Si l'un des coefficients a_n et b_n est non nul, le polynôme trigonométrique P est d'ordre n.

Dans le cas général, P est d'ordre au plus égal n.

Remarque 5.6.1 *Un polynôme d'ordre au plus égal à n peut aussi s'écrire sous la forme complexe :*

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx},$$

où les c_k désignent des nombres complexes.

Définition 5.6.2 *On appelle polynôme de Fourier d'indice n de f le polynôme trigonométrique :*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(où les a_k et b_k désignent les coefficients de Fourier de type réel).

Il en résulte le théorème d'approximation suivant :

Théorème 5.6.1 *Le polynôme de Fourier d'indice n d'une fonction f est le polynôme trigonométrique P d'ordre au plus égal à n, qui réalise le minimum de l'écart quadratique moyen défini par :*

$$\|P - f\| = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P(x) - f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 5.6.1 (Inégalité de Bessel)
Si f est une fonction numérique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et 2π périodique, ses coefficients de Fourier de type complexe (c_n) vérifient pour tout $\mathbb{N}$, l'inégalité dite de Bessel :

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \tag{5.18}$$

En conséquence la série à double entrée $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ est convergente et vérifie l'inégalité :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \tag{5.19}$$

Remarquons que l'inégalité (5.18) équivaut à

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \tag{5.20}$$

où a_n et b_n désignent les coefficients de Fourier de f. En effet, on a :

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \text{ et } |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{1}{4}(|a_n - ib_n|^2 + |a_n + ib_n| = \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

L'inégalité de Bessel permet de montrer qu'il existe des séries trigonométriques partout convergentes qui ne sont les séries de Fourier d'aucune fonction intégrable, par exemple la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$. Si cette série trigonométrique était la série de Fourier d'une fonction intégrable, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$ serait convergente, ce qui n'est pas. En effet $\frac{(\ln n)^2}{n} \to 0$, ce qui implique que $(\ln n)^2 < n$ à partir d'un certain rang N_1. Donc pour $n > N_1$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{(\ln n)^2}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum \frac{1}{(\ln n)^2}$ diverge.

Théorème 5.6.2 (de Parseval)
Si f est une fonction numérique périodique de période π et intégrable sur $[-\pi, \pi]$ alors ses coefficients Fourier réels a_n, b_n et ses coefficients de Fourier de type complexe c_n vérifient la relation :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \pi \left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right).$$

Exemple 5.6.1 (Application du théorème de Parseval)
1) Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x$ pour $|x| \leq \pi$. Nous avons déjà vu que sa série de Fourier s'écrit

$$f_F(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

D'après le théorème de Parseval, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3} = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

On retrouve la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2) Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = |x|$ pour $|x| \leq \pi$. On a déjà vu que sa série de Fourier s'écrit

$$f_F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

D'après Parseval, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{2\pi^3}{3} = \pi \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2p+1)^4} \right]$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

On peut en déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

3) Soit la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ égale à x^2 sur $|x| < \pi$. Sa série de Fourier s'écrit :

$$f_F(x) = \frac{\pi}{4} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

par conséquent

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} = \pi \left(\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right)$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$