UFHB ACTUARIAT : Licence 2 Année universitaire : 2023-2024

Examen d'Intégrales généralisées ($1^{\text{ère}}$ session)

Documents non autorisés

Durée : 1h

Exercice 1 (4 points)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0;+\infty[$. On suppose que f est intégrable sur $[0;+\infty[$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt=0$.

Exercice 2 (16 points)

On considère les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}\ ;\ J=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}dx\ ;\ K=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}dx.$$

1) a) Etudier la nature de l'intégrale I.

b) Calculer I.

2) a) Démontrer que $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}=o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\right)$ quand $x\to 0$.

b) Etudier la nature de l'intégrale $J_1=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

c) Etudier la nature de l'intégrale $J_2=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

d) En déduire la nature de J.

3) On suppose que l'intégrale K converge.

a) Calculer les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x}$.

b) Démontrer que $K=\frac{1}{2}J+I$.

c) En déduire la valeur de K.

UNISAT : Licence 2 Année universitaire : 2023-2024

Examen de Séries ($1^{\text{ère}}$ session)
Documents non autorisés
Durée : 2h

Exercice 1 (8 points)

1) On considère pour $n > 0$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x^2 \sin \frac{1}{nx}) + 1$ si $x \neq 0$ et $f_n(x) = 1$ sinon.

   a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une limite f que l'on déterminera.

   b) Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné $[a, b]$.

2) a) Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{1}{2+x}$ au voisinage de $x = 0$.

   b) Montrer que si $p \in \mathbb{N}$ alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{2+x} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n(n+p+1)}$.

   c) En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$.

Exercice 2 (6 points)

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0; 1], \quad u_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}]$.

1) Démontrer que S est dérivable sur $[0; 1]$.
2) Calculer $S'(1)$.

Exercice 3 (6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique définie par :

$$f(x) = |\cos(x)|.$$

1) Montrer que $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $\forall n \geq 1, b_n = 0$, $a_1 = 0$ et $\forall n > 1, a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right)$.

2) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 - 1}$.