Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$): например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

   Докажите:

   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
   (d) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
   (f) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$

2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:

   (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
   (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (f) $\neg A, B \vdash A \to B$
   (g) $\neg A, \neg B \vdash A \to B$
   (h) $\vdash A \,\&\, (B \,\&\, B) \to A \,\&\, B$
   (i) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
   (j) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(закон контрапозиции)*
   (k) $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ *(правило де Моргана)*
   (l) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$ *(правило де Моргана)*
   (m) $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \to (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ *(дистрибутивность 1)*
   (n) $\vdash A \vee (B \,\&\, C) \to (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$ *(дистрибутивность 2)*

3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β:

   (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ *(правило исключённого третьего)*
   (b) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ *(закон Пирса)*
   (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ и $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \to \alpha$.
   (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha$ и $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

4. Докажите следующие «странные» формулы:

   (a) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

(b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geqslant 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$

5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β, у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например, A и $B \,\&\, B$ — равные высказывания, ведь высказывания E и $E \,\&\, E$ имеют одну и ту же таблицу истинности:

E	$E \,\&\, E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания A и $A \rightarrow A$ не равны.

Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

1. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.
   (a) Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если $\vdash \alpha$ и в доказательстве высказывание δ_n получено с помощью Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\models \delta_n$.
   (b) Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.
   (c) Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.

2. Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие выскзывания:
   (a) $A \vee \neg A$ (на лекции приводился пример в $\mathbb{R}$; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в $\mathbb{R}^2$)
   (b) $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$
   (c) $\neg\neg A \rightarrow A$
   (d) $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
   (e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
   (f) $\bigvee_{i=1,n} \left((A_i \rightarrow A_{(i \mod n)+1}) \,\&\, (A_{(i \mod n)+1} \rightarrow A_i)\right)$

3. Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?
   (a) $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$
   (b) $\neg A \vee \neg\neg A \vee \neg\neg\neg A$
   (c) $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$
   (d) $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \,\&\, B$
   (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
   (f) $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

4. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
   (a) конъюнкцию?
   (b) дизъюнкцию?
   (c) импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α, если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

   (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

   (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

   (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$

   (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств S из $\mathbb{R}$ (формально: $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества $\mathbb{V}$, при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть S — некоторое множество. Рассмотрим $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$, определим связки так:

$$\begin{array}{rcc} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \to \beta]\!] & = & S \setminus [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] & = & S \setminus [\![\alpha]\!] \end{array}$$

   Также, будем считать, что $\models \alpha$, если $[\![\alpha]\!] = S$.

   Покажите, что получившееся:

   (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схем аксиом 5,9,10 и правила Modus Ponens.

   (b) полная модель классического исчисления высказываний.