Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита $(\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi)$: например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

   Докажите:

   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
   (d) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
   (f) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$

2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:

   (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
   (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (f) $\neg A, B \vdash A \to B$
   (g) $\neg A, \neg B \vdash A \to B$
   (h) $\vdash A \,\&\, (B \,\&\, B) \to A \,\&\, B$
   (i) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
   (j) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(закон контрапозиции)*
   (k) $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ *(правило де Моргана)*
   (l) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$ *(правило де Моргана)*
   (m) $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \to (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ *(дистрибутивность 1)*
   (n) $\vdash A \vee (B \,\&\, C) \to (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$ *(дистрибутивность 2)*

3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β:

   (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ *(правило исключённого третьего)*
   (b) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ *(закон Пирса)*
   (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ и $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \to \alpha$.
   (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha$ и $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

4. Докажите следующие «странные» формулы:

   (a) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

(b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geqslant 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$

5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β, у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например, A и $B \,\&\, B$ — равные высказывания, ведь высказывания E и $E \,\&\, E$ имеют одну и ту же таблицу истинности:

E	$E \,\&\, E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания A и $A \rightarrow A$ не равны.

Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

1. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.

   (a) Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если $\vdash \alpha$ и в доказательстве высказывание δ_n получено с помощью Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\models \delta_n$.

   (b) Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.

   (c) Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.

2. Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:

   (a) $A \vee \neg A$ (на лекции приводился пример в $\mathbb{R}$; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в $\mathbb{R}^2$)

   (b) $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$

   (c) $\neg\neg A \rightarrow A$

   (d) $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$

   (e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

   (f) $\bigvee_{i=1,n} \big((A_i \rightarrow A_{(i \mod n)+1}) \,\&\, (A_{(i \mod n)+1} \rightarrow A_i)\big)$

3. Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?

   (a) $\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$

   (b) $\neg A \vee \neg\neg A \vee \neg\neg\neg A$

   (c) $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \,\&\, \neg B)$

   (d) $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \,\&\, B$

   (e) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$

   (f) $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

4. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:

   (a) конъюнкцию?

   (b) дизъюнкцию?

   (c) импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_к \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_и \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α, если $\vdash_к \alpha$, то $\vdash_и \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

   (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_и \neg\neg\alpha$.

   (b) $\vdash_и \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

   (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash_и \neg\neg\beta$

   (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_к \alpha$ влечёт $\vdash_и \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств S из $\mathbb{R}$ (формально: $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества $\mathbb{V}$, при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть S — некоторое множество. Рассмотрим $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$, определим связки так:

$$\begin{array}{rcl} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \to \beta]\!] & = & S \backslash [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] & = & S \backslash [\![\alpha]\!] \end{array}$$

   Также, будем считать, что $\models \alpha$, если $[\![\alpha]\!] = S$.

   Покажите, что получившееся:

   (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схем аксиом 5,9,10 и правила Modus Ponens.

   (b) полная модель классического исчисления высказываний.

Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A. *Замыканием* множества $\overline{A}$ назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V, что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V, что $V \subseteq A$. Точка $x \in A$ — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A, так и с его дополнением.

   (a) Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \,\&\, x$ — внутренняя точка$\}$.

   (b) Покажите, что A замкнуто тогда и только когда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\overline{A} = \{x | x \in A \,\&\, x$ — внутренняя или граничная точка$\}$. Верно ли, что $\overline{A} = X \ ((X \backslash A)^\circ)$?

   (c) Покажите, что внутренность и замыкание корректно определены (что существуют соответствующие наибольшее и наименьшее множества).

   (d) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин V. Опишите множества V° и $\overline{V}$. Какие вершины будут являться граничными для V?

   (e) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B°, а также $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

   (f) Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?

   (g) Покажите, что $\overline{\left(\overline{A^\circ}\right)^\circ} = \overline{A^\circ}$.

(h) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?

2. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже покажите, что в нём задано топологическое пространство, и ответьте на следующие вопросы: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы будут внутренность и замыкание для данного множества (определите это прямо); каковы замкнутые множества в данной топологии; является ли данная топология моделью для классической логики; связно ли данное пространство.

   (a) Топология Зарисского на $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R}\backslash X \text{ конечно}\}$, то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.

   (b) Топология стрелки на $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\}$, то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.

   (c) Множество всех бесконечных подмножеств $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ бесконечно}\}$

   (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий: $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $X \in \Omega$, если $X = \varnothing$ или $X = \bigcup_i A(a_i)$ (все $a_i > 0$). Будет ли это топологическим пространством, если мы будем рассматривать арифметические прогрессии в полной форме, в виде $a \cdot x + b$?

3. Связность.

   (a) Связны ли $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ как топологические подпространства $\mathbb{R}$?

   (b) Связно ли множество $\{0, 1\}$ в топологии стрелки и в топологии Зарисского?

   (c) Покажите, что дерево с отмеченным корнем (с рассмотренной на лекции топологией) связно.

   (d) Покажите, что если лес связен в топологическом смысле, то он состоит из одного дерева.

4. Натуральный вывод был описан на лекции, но примеров доказательств не приводилось. Приведём такой пример:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta}}{\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta} \qquad \dfrac{\overline{\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta}}{\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha}}{\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta \,\&\, \alpha}$$

   Постройте следующие доказательства в натуральном выводе:

   (a) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

   (b) $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$

   (c) $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

   (d) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$

5. Чтобы избежать путаницы, обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{\text{г}}$, а знак $\vdash$ в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\text{н}}$.

   Напомним, что языки гильбертовского и натурального выводов отличаются (обозначим эти языки как $\mathcal{L}_{\text{г}}$ и $\mathcal{L}_{\text{н}}$ соответственно.

   Определим функции, отображающие языки друг в друга: $|\cdot|_{\text{н}} : \mathcal{L}_{\text{г}} \to \mathcal{L}_{\text{н}}$ и $|\cdot|_{\text{г}} : \mathcal{L}_{\text{н}} \to \mathcal{L}_{\text{г}}$. Они сохраняют почти все значения, кроме лжи ($\perp$) и отрицания ($\neg$):

$$|\sigma|_{\text{н}} = \begin{cases} |\alpha|_{\text{н}} \to \perp, & \sigma \equiv \neg\alpha \\ |\alpha|_{\text{н}} \star |\beta|_{\text{н}}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases} \qquad\qquad |\sigma|_{\text{г}} = \begin{cases} A \,\&\, \neg A, & \sigma \equiv \perp \\ |\alpha|_{\text{г}} \star |\beta|_{\text{г}}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases}$$

   Естественным образом расширим эти операции на контексты: $|\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n| = |\gamma_1|, |\gamma_2|, \ldots, |\gamma_n|$.

   (a) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{г}} \alpha$. Покажите, что $|\Gamma|_{\text{н}} \vdash_{\text{н}} |\alpha|_{\text{н}}$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для трёх случаев базы (схема аксиом 2, схема аксиом 5, схема аксиом 9) и одного случая перехода индукции.

   (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{н}} \alpha$. Покажите, что $|\Gamma|_{\text{г}} \vdash_{\text{г}} |\alpha|_{\text{г}}$ (постройте схему доказательства, и покажите один случай базы и три случая перехода индукции).

   (c) Покажите аналог теоремы о дедукции: $\Gamma \vdash_{\text{н}} \alpha \to \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \alpha \vdash_{\text{н}} \beta$.

6. Покажите, что открытые множества топологического пространства с отношением порядка ($\subseteq$) образуют импликативную решётку с нулём.

7. Напомним, что линейным порядком называется такой порядок $\langle X, \preceq \rangle$, что для любых $x, y \in X$ выполнено $x \preceq y$ или $y \preceq x$. Задаёт ли линейный порядок решётку? Дистрибутивна, импликативна ли она, есть ли в ней 0 и 1?

8. Рассмотрим $\mathbb{N}_0$ (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$, $(\cdot)$ и $(\rightarrow)$ в данной решётке, определены ли 0 или 1? Верно ли, что $2 \cdot 2 = 4$ или $2 + 2 = 4$? Приведите какие-нибудь три свойства традиционных определений $(+)$ и $(\cdot)$, которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и три свойства, которые перестанут выполняться.

9. Постройте следующие примеры:

   (a) непустого частично-упорядоченного множества, имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего $(\cdot)$ для некоторых; имеющего операцию $(\cdot)$ для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.

   (b) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; импликативной решётки без 0.

   (c) дистрибутивной, но не импликативной решётки (эта решётка не может быть конечной).

10. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$) также выполнено и $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.

11. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

    (a) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

    (b) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;

    (c) *Законы поглощения:* $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

    (d) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;

    (e) из $a \preceq b$ следует $b \rightarrow c \preceq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \preceq c \rightarrow b$;

    (f) из $a \preceq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \preceq c$;

    (g) $b \preceq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;

    (h) $a \rightarrow b \preceq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;

    (i) $a \preceq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$

    (j) $a \rightarrow c \preceq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$

    (k) импликативная решётка дистрибутивна: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

12. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что ИИВ (вариант натурального вывода) корректно, если в качестве модели выбрать импликативную решётку с 0, а функции оценок определить так:

$$\begin{array}{rcl} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \rightarrow \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \rightarrow [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] & = & [\![\alpha]\!] \rightarrow 0 \\ [\![\perp]\!] & = & 0 \end{array}$$

    Оценка турникета определяется через импликацию: $[\![\gamma_1, \ldots, \gamma_n \vdash \alpha]\!] = [\![\gamma_1 \rightarrow \ldots \gamma_n \rightarrow \alpha]\!]$.

Задание №4. Интуиционистская логика.

1. Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.

2. Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.

   (a) $P \vee \neg P$;

   (b) $\neg\neg P \rightarrow P$;

   (c) $P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$;

   (d) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$;

(e) $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$;

(f) $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$;

(g) $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$;

(h) $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$;

(i) $\neg\bot$.

3. Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{\mathcal{W} \subseteq \mathfrak{W} \mid$ если $W_i \in \mathcal{W}$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \in \mathcal{W}\}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha\}$ (множество миров, где вынуждена формула α).

   (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.

   (b) Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$ через $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ и покажите, что они также открыты.

   (c) Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.

   (d) Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров $\mathcal{W}_\alpha$, где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α, что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).

4. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание $\neg\neg P \to P$. Постройте соответствующую ему табличную модель.

5. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров $\mathfrak{W}$ упорядочено как дерево: (a) существует наименьший мир W_0; (b) для любого $W_i \neq W_0$ существует единственный предшествующий мир $W_k : W_k \prec W_i$.

   (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.

   (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.

   (c) Покажите, что для любого натурального n найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с n мирами.

6. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).

7. Пусть заданы алгебры Гейтинга $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и согласованные оценки $[\![]\!]_\mathcal{A}$ и $[\![]\!]_\mathcal{B}$: $\varphi([\![\alpha]\!]_\mathcal{A}) = [\![\alpha]\!]_\mathcal{B}$.

   (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \leq a_2$, то $\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$.

   (b) Покажите, что если $[\![\alpha]\!]_\mathcal{A} = 1_\mathcal{A}$, то $[\![\alpha]\!]_\mathcal{B} = 1_\mathcal{B}$.

8. Пусть заданы алгебры Гейтинга $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Всегда ли можно построить гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$?

9. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.

10. Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?

Задание №5. Исчисление предикатов

1. Докажем теоремы про подстановку и свободу для подстановки:

   (a) Рассмотрим замену $\alpha[x := y]$. Пусть в этой замене есть свобода для подстановки y вместо x в α и y не входит свободно в α. Необходимы ли оба условия — или какое-нибудь следует из другого?

   (b) Если y свободен для подстановки вместо x в α, то $[\![\alpha[x := y]]\!] = [\![\alpha]\!]^{x:=y}$.

   (c) Если θ свободна для подстановки вместо x в α, то $[\![\alpha[x := \theta]]\!] = [\![\alpha]\!]^{x:=\theta}$.

(d) Если нет свободы для подстановки θ вместо x в α, то бывает, что $[\![\alpha[x := \theta]]\!] \neq [\![\alpha]\!]^{x:=\theta}$.

(e) Возможны ли случаи, когда нет свободы для подстановки θ вместо x в α, но $[\![\alpha[x := \theta]]\!] = [\![\alpha]\!]^{x:=\theta}$?

2. Покажите, что исчисление предикатов корректно:

   (a) если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$;

   (b) если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$

3. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

   (a) $(\forall x.\phi) \to (\forall y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ.

   (b) $(\exists x.\phi) \to (\exists y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ.

   (c) $(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$

   (d) $(\forall x.\forall x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

   (e) $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$

   (f) $(\exists x.\phi) \to (\neg\forall x.\neg\phi)$

   (g) $(\forall x.\neg\phi) \to (\neg\exists x.\phi)$

   (h) $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$

4. Опровергните формулы $\phi \to \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

5. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метапеременные соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:

   (a) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall y.\forall x.\alpha$

   (b) $\exists x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\exists x.\alpha$

   (c) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists x.\forall y.\alpha$, $\exists x.\exists y.\alpha$

   (d) $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\forall x.\alpha$

6. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

   (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \,\&\, \alpha) \to (\forall x.\beta \,\&\, \alpha)$$

   (b) Покажите, что

   $$\vdash ((\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)) \to \forall x.\forall y.\alpha \,\&\, \beta$$

   где x не входит свободно в β, а y — в α.

7. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:

   (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\forall x.\alpha \,\&\, \beta) \to (\alpha \,\&\, \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \,\&\, \alpha) \to ((\forall x.\beta) \,\&\, \alpha)$$

   (b) Покажите, что если x не входит свободно в β, а y — в α, то

   $$\vdash (\forall x.\forall y.\alpha \,\&\, \beta) \to (\forall x.\alpha) \,\&\, (\forall y.\beta)$$

8. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \to \beta$, тогда:

   (a) Докажите:

   $$\vdash \psi \vee \alpha \to \psi \vee \beta \qquad \vdash \psi \,\&\, \alpha \to \psi \,\&\, \beta \qquad \vdash (\psi \to \alpha) \to (\psi \to \beta) \qquad \vdash (\beta \to \psi) \to (\alpha \to \psi)$$

   (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.

   (c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \to (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

   (d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \to (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

Задание №6. Неразрешимость исчисления предикатов, аксиоматика Пеано и формальная арифметика

1. Постройте машины Тьюринга:
   (a) Превращающую строку из 0 и 1 в пустую (заменяет все символы на ε);
   (b) Прибавляющую 1 к двоичному числу на ленте;
   (c) Разрешающую язык четверичных чисел, делящихся на 3 (оставляющую на ленте букву «д» или «н», в зависимости от делимости);
   (d) Копирующую строку из 0 и 1, заканчивающуюся на *, на свободное место на ленте за звёздочкой. Например, `10100*` станет `10100*10100`.
2. Предложите способ закодировать машину Тьюринга в алфавите из конечного количества символов (количество не должно зависеть от машины).
3. Покажите в аксиоматике Пеано:
   (a) ассоциативность сложения;
   (b) коммутативность умножения;
   (c) дистрибутивность $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
   (d) ассоциативность умножения;
4. Рассмотрим аксиоматику Пеано. Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \leqslant a$ и $a' \leqslant b'$, если $a \leqslant b$. Покажите, что:
   (a) $x \leqslant x + y$;
   (b) $x \leqslant x \cdot y$ (укажите, когда это так — в остальных случаях приведите контрпримеры);
   (c) $a'' + b'' \leqslant (a'') \cdot (b'')$;
   (d) Если существует n, что $x + n = y$, то $x \leqslant y$.
   (e) Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q, что $a = b \cdot p + q$ и $0 \leqslant q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.
5. Обозначим за $\overline{n}$ представление числа n в формальной арифметике, по сути это ноль с n штрихами:

$$\overline{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\overline{k})', & n = k + 1 \end{cases}$$

   Докажите в формальной арифметике:
   (a) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$ (теперь вы знаете правду);
   (b) $\vdash \forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0$ (единственность нуля — нужна ли здесь аксиома А3?);
   (c) $\vdash p \cdot q = 0 \rightarrow p = 0 \vee q = 0$ (отсутствие делителей нуля);
6. Будем говорить, что k-местное отношение R выразимо в формальной арифметике, если существует формула формальной арифметики ρ со свободными переменными $x_1, \dots, x_k$, что:
   (a) для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in R$ выполнено $\vdash \rho[x_1 := \overline{a_1}] \dots [x_k := \overline{a_k}]$ (доказуема формула ρ с подставленными значениями $a_1, \dots, a_k$ вместо свободных переменных $x_1, \dots, x_k$);
   (b) для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \notin R$ выполнено $\vdash \neg\rho[x_1 := \overline{a_1}] \dots [x_k := \overline{a_k}]$.

   Выразите в формальной арифметике (укажите формулу ρ и докажите требуемые свойства про неё):
   (a) «полное» отношение $R = \mathbb{N}^2$;
   (b) отношение $(=)$;
   (c) унарное отношение «быть чётным числом».

Задание №7. Выразимость и представимость. Теорема Гёделя о неполноте арифметики.

1. Докажите, что следующие функции примитивно-рекурсивны. Для каждой функции предложите программу; например, на языке C++ (с шаблонами), или на любом другом языке, где можно формально записать выражение для рекурсивной функции.

   (a) ограниченное вычитание:
   $$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b, & a \geqslant b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   (b) умножение;

   (c) возведение в степень;

   (d) целочисленное деление;

   (e) остаток от деления;

   (f) проверка числа на простоту;

   (g) поиск n-го простого числа;

   (h) наибольший общий делитель двух чисел;

   (i) частичный логарифм;

   (j) пусть $l = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \dots \cdot {p_{n-1}}^{a_{n-1}}$, определите функцию «голова списка»;

   (k) хвост списка;

   (l) конкатенация списков.

2. Покажите, что функция Аккермана рекурсивна, для этого:

   (a) реализуйте стек: функции добавления элемента в стек и изъятия элемента из стека;

   (b) реализуйте функцию Аккермана.

3. Докажите (без пропусков частей доказательств), что следующие функции представимы в формальной арифметике:

   (a) примитив Z;

   (b) примитив N;

   (c) декремент (ограниченное вычитание 1).

4. Найдите константы b и c бета-функции Гёделя для последовательности трёх чисел $10, 3, 7$.

5. Определим характеристическую функцию для отношения R:
   $$C_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
   Покажите, что $C_R(x_1, \dots, x_n)$ представимо в формальной арифметике тогда и только тогда, когда R выразимо в формальной арифметике.

6. Покажите, что в теории первого порядка доказуемы все формулы тогда и только тогда, когда доказуема формула $\overline{1} = 0$ (иными словами, когда теория противоречива).

7. Предложите непротиворечивую, но ω-противоречивую теорию первого порядка.

Задание 8. Теория множеств

1. Пусть заданы списки (в любом языке программирования) $L(\alpha)$, хранящие значения типа α. Реализуйте следующие функции, являющиеся аналогами конструктивных аксиом теории множеств:

   (a) `empty` : $L(\alpha)$, строит пустой список, и `pair` : $(\alpha, \alpha) \to L(\alpha)$, формирует список из двух своих аргументов.

   (b) `flatten` : $L(L(\alpha)) \to L(\alpha)$, соединяет все списки внутри списка в один.

   (c) `powerset` : $L(\alpha) \to L(L(\alpha))$, делает из списка список всех возможных подсписков.

(d) `filter` : $(\alpha \to \texttt{bool}) \to L(\alpha) \to L(\alpha)$, выделяет из списка все элементы, соответствующие условию.

2. На самом деле ординалы — это не списки, а деревья. Перепишите задачу 1 соответствующим образом, и напишите функцию `ordinal` : `int` → `set`, строящую ординал, соответствующий заданному числу. Множество можно строить только через аналоги функций из 1 задания.

3. Определим упорядоченную пару $\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Покажите, что:

   (a) Упорядоченная пара — множество.

   (b) $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

4. Докажите, что следующие конструкции являются множествами:

   (a) пересечение всех элементов множества ($\bigcap a$);

   (b) $a \setminus b$ (разность множеств);

   (c) $a \uplus b$ (дизъюнктное объединение множеств: $\{\langle x, 0\rangle \mid x \in a\} \cup \{\langle x, 1\rangle \mid x \in b\}$);

   (d) $a \times b$ (декартово произведение множеств: $\{\langle p, q\rangle \mid p \in a, q \in b\}$).

5. Определите формулу $\varphi(x)$ для свойства «x — конечный ординал». Укажите замкнутый вид для формулы ω.

6. Покажите, что если x — ординал, то x' — тоже ординал.

7. Верно ли, что если x' — ординал, то x — тоже ординал?

8. Покажите, что на множестве ω выполняется аксиоматика Пеано (полная формализация рассуждений не требуется, но из изложения должно быть понятно, как эту формализацию в рамках теории первого порядка получить):

   (a) $\forall x. x \in \omega \to \neg x' = \varnothing$

   (b) $\forall x. \forall y. x \in \omega \,\&\, y \in \omega \to x' = y' \to x = y$

   (c) (*указание к следующему пункту*) покажите, что если $\vdash \forall x. \neg\phi(x) \to A \,\&\, \neg A$, то $\vdash \forall x. \phi(x)$.

   (d) Если $\phi(\varnothing)$ и $\forall x. x \in \omega \to \phi(x) \to \phi(x')$, то $\forall x. x \in \omega \to \phi(x)$.

9. Проверьте следующие равенства (докажите или опровергните):

   (a) $\omega \cdot \overline{2} = \overline{2} \cdot \omega$

   (b) $\omega \cdot \overline{2} = \omega + \omega$

   (c) $(\omega + \overline{1})^{\overline{2}} = \omega^{\overline{2}} + \overline{2} \cdot \omega + \overline{1}$

   (d) $\omega^\omega = (\omega^{\overline{2}})^\omega$

   (e) $\omega^{\omega + \overline{1}} = \omega^\omega + \overline{1}$

   (f) Имеет ли место ассоциативность сложения и/или умножения?

Задание 9. Аксиома выбора. Мощность множеств

1. Верно ли, что $1^\omega = \omega$ и/или $\omega^1 = \omega$?

2. Зачёт за пункт ставится, если одновременно решены два подпункта: (i) Покажите, что множество ω^ω имеет счётную мощность. (ii) Определим $\uparrow k$ (башню из омег) так:

$$\uparrow k = \begin{cases} \omega, & k = 1 \\ \omega^{\uparrow n}, & k = n' \end{cases}$$

   Скажем, $\uparrow 3 = \omega^{(\omega^\omega)}$. Будет ли счётным ординал $\sup\{\uparrow k \mid k \in \omega\}$?

3. Существует ли ординал, которому соответствует множество неотрицательных рациональных чисел и упорядоченность на нём? То есть, существует ли ординал σ, что существует биекция $f : \mathbb{Q}^+ \to \sigma$, причём для всех $a, b \in \mathbb{Q}^+$ из $a \leqslant b$ следует $f(a) \leqslant f(b)$ (и обратно).

4. Верно ли, что для любого отношения полного порядка на счётном множестве существует соответствующий ему ординал, имеющий тот же порядок?

5. Покажите следующее (обозначим за $\mathcal{F}(p, q)$ множество функций из p в q):

   (a) $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \varnothing$;

   (b) если $|a| \leqslant |b|$, то $|\mathcal{F}(g, a)| \leqslant |\mathcal{F}(g, b)|$;

   (c) если $|a| \leqslant |b|$ и $\overline{0} < |g|$, то $|\mathcal{F}(a, g)| \leqslant |\mathcal{F}(b, g)|$;

   (d) $|\mathcal{F}(\overline{0}, a)| = \overline{1}$, $|\mathcal{F}(\overline{1}, a)| = \overline{1}$; если $|a| > 0$, то $|\mathcal{F}(a, \overline{0})| = \overline{0}$;

   (e) если $|a| \geqslant \aleph_0$ и $0 < |n| < \aleph_0$, то $|\mathcal{F}(a, n)| = a$.

6. Покажите эквивалентность следующих определений конечного множества (задание (k) предполагает доказательство импликации $(k) \rightarrow (k')$; возможно, некоторые из переходов потребуют аксиому выбора):

   (a) a конечно, если каждое непустое семейство подмножеств a имеет максимальный по включению элемент. Например, при $a = \{0, 1, 2\}$ в семействе подмножеств $\{\varnothing, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ элементы $\{0, 1\}$ и $\{1, 2\}$ — максимальны.

   (b) a конечно, если $\mathcal{P}(a)$ не равномощно своему собственному подмножеству (собственное подмножество — подмножество, не совпадающее с множеством).

   (c) a конечно, если оно не равномощно своему собственному подмножеству.

   (d) a конечно, если $|a| = \varnothing$ или $|a| \cdot \overline{2} > |a|$.

   (e) a конечно, если $|a| = \varnothing$ или $|a| = \overline{1}$ или $|a|^2 > |a|$.

   (f) a конечно, если $|a| < \aleph_0$.

7. Покажите, что функция $f : a \rightarrow b$ биективна (т.е. инъективна и сюрьективна) тогда и только тогда, когда $\forall y.\exists! x.\phi(x, y)$. Здесь за $\phi(x, y)$ мы обозначаем формулу, представляющую функцию f в теории множеств, по аналогии с формальной арифметикой.

8. Покажите, что если a и b — непустые множества, то существует функция из a в b (однако, функция не обязана быть инъективной или сюрьективной).

9. Покажите, что если существует функция $f : a \rightarrow b$ на вполне упорядоченных множествах a и b, сохраняющая порядок (если $x < y$, то $f(x) < f(y)$), то либо она — биекция, либо найдётся такой элемент $x \in b$, что $\{f(i) | i \in a\} = \{t \in b | t < x\}$.