Теоретические домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$): например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

   Докажите:

   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
   (d) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
   (f) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$

2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть один вывод можно перестроить в другой вывод. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:

   (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
   (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (f) $\neg A, B \vdash A \to B$
   (g) $\neg A, \neg B \vdash A \to B$
   (h) $\vdash A \,\&\, (B \,\&\, B) \to A \,\&\, B$
   (i) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$
   (j) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(закон контрапозиции)*
   (k) $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ *(правило де Моргана)*
   (l) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$ *(правило де Моргана)*
   (m) $\vdash A \,\&\, (B \vee C) \to (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ *(дистрибутивность 1)*
   (n) $\vdash A \vee (B \,\&\, C) \to (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$ *(дистрибутивность 2)*

3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β:

   (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ *(правило исключённого третьего)*
   (b) $\vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ *(закон Пирса)*
   (c) без использования 10 схемы аксиом: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ (то есть, схему аксиом 10 можно заменить на закон Пирса);
   (d) без использования 10 схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ (то есть, схему аксиом 10 можно заменить на правило исключённого третьего);

4. Докажите следующие «странные» формулы:

   (a) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на A; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на A, то сегодня пасмурно».

(b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geqslant 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \to \alpha_2) \vee (\alpha_2 \to \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \to \alpha_n) \vee (\alpha_n \to \alpha_1)$

5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β, у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например, A и $B \,\&\, B$ — равные высказывания, ведь высказывания E и $E \,\&\, E$ имеют одну и ту же таблицу истинности:

E	$E \,\&\, E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания A и $A \to A$ не равны.

Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.