

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$): например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 - (b) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
 - (c) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (d) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
 - (e) $A \& \neg A \vdash B$
 - (f) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
 - (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
 - (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
 - (f) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
 - (g) $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
 - (h) $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
 - (i) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 - (j) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (закон контрапозиции)
 - (k) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (правило де Моргана)
 - (l) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$ (правило де Моргана)
 - (m) $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность 1)
 - (n) $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β :
- (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (правило исключённого третьего)
 - (b) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (закон Пирса)
 - (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ и $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
 - (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha$ и $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

- (b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geq 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β , у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например, A и $B \& B$ — равные высказывания, ведь высказывания E и $E \& E$ имеют одну и ту же таблицу истинности:

E	$E \& E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания A и $A \rightarrow A$ не равны.

Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg \alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

- Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.
 - Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если $\vdash \alpha$ и в доказательстве высказывание δ_n получено с помощью Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\vdash \delta_n$.
 - Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.
 - Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.
- Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:
 - $A \vee \neg A$ (на лекции приводился пример в \mathbb{R} ; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в \mathbb{R}^2)
 - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
 - $\neg \neg A \rightarrow A$
 - $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
 - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
 - $\bigvee_{i=1, n} ((A_i \rightarrow A_{(i \bmod n)+1}) \& (A_{(i \bmod n)+1} \rightarrow A_i))$
- Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?
 - $\neg \neg \neg \neg A \rightarrow \neg \neg A$
 - $\neg A \vee \neg \neg A \vee \neg \neg \neg A$
 - $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
 - $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \& B$
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
 - $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \& \neg \beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg \beta)$ и $\neg(\alpha \& \neg \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
 - конъюнкцию?
 - дизъюнкцию?
 - импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α , если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

- (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.
- (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
- (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
- (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств S из \mathbb{R} (формально: $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества \mathbb{V} , при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть S — некоторое множество. Рассмотрим $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$, определим связки так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg\alpha \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \end{aligned}$$

Также, будем считать, что $\models \alpha$, если $\llbracket \alpha \rrbracket = S$.

Покажите, что получившееся:

- (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схем аксиом 5,9,10 и правила Modus Ponens.
- (b) полная модель классического исчисления высказываний.

Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A . *Замыканием* множества \bar{A} назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A . Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V , что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V , что $V \subseteq A$. Точка $x \in A$ — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A , так и с его дополнением.
 - (a) Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$.
 - (b) Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\bar{A} = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$. Верно ли, что $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?
 - (c) Покажите, что внутренность и замыкание корректно определены (что существуют соответствующие наибольшее и наименьшее множества).
 - (d) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин V . Опишите множества V° и \bar{V} . Какие вершины будут являться граничными для V ?
 - (e) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B° , а также \bar{A} и \bar{B} ?
 - (f) Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?
 - (g) Покажите, что $\overline{(A^\circ)}^\circ = A^\circ$.

- (h) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?
2. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже покажите, в нём задано топологическое пространство и ответьте следующие вопросы: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы будут внутренность и замыкание для данного множества (определите это прямо); каковы замкнутые множества в данной топологии; является ли данная топология моделью для классической логики; связно ли данное пространство.
- (a) Топология Зарисского на \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ конечно}\}$, то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.
- (b) Топология стрелки на \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$, то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.
- (c) Множество всех бесконечных подмножеств \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ бесконечно}\}$
- (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий: $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $X \in \Omega$, если $X = \emptyset$ или $X = \bigcup_i A(a_i)$ (все $a_i > 0$). Будет ли это топологическим пространством, если мы будем рассматривать арифметические прогрессии в полной форме, в виде $a \cdot x + b$?
3. Связность.
- (a) Связны ли \mathbb{Q} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как топологические подпространства \mathbb{R} ?
- (b) Связно ли множество $\{0, 1\}$ в топологии стрелки и в топологии Зарисского?
- (c) Покажите, что дерево с отмеченным корнем (с рассмотренной на лекции топологией) связно.
- (d) Покажите, что если лес связан в топологическом смысле, то он состоит из одного дерева.
4. Натуральный вывод был описан на лекции, но примеров доказательств не приводилось. Приведём такой пример:

$$\frac{\frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \beta} \quad \frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \alpha}}{\alpha \& \beta \vdash \beta \& \alpha}$$

Постройте следующие доказательства в натуральном выводе:

- (a) $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$
- (b) $\neg \alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (c) $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$
- (d) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg \alpha \& \neg \beta)$
5. Чтобы избежать путаницы, обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как \vdash_{Γ} , а знак \vdash в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\mathbf{n}}$.

Напомним, что языки гильбертовского и натурального выводов отличаются (обозначим эти языки как \mathcal{L}_{Γ} и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ соответственно).

Определим функции, отображающие языки друг в друга: $|\cdot|_{\mathbf{n}} : \mathcal{L}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $|\cdot|_{\Gamma} : \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \rightarrow \mathcal{L}_{\Gamma}$. Они сохраняют почти все значения, кроме лжи (\perp) и отрицания (\neg):

$$|\sigma|_{\mathbf{n}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathbf{n}} \rightarrow \perp, & \sigma \equiv \neg \alpha \\ |\alpha|_{\mathbf{n}} \star |\beta|_{\mathbf{n}}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases} \quad |\sigma|_{\Gamma} = \begin{cases} A \& \neg A, & \sigma \equiv \perp \\ |\alpha|_{\Gamma} \star |\beta|_{\Gamma}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases}$$

Естественным образом расширим эти операции на контексты: $|\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n| = |\gamma_1|, |\gamma_2|, \dots, |\gamma_n|$.

- (a) Пусть $\Gamma \vdash_{\Gamma} \alpha$. Покажите, что $|\Gamma|_{\mathbf{n}} \vdash_{\mathbf{n}} |\alpha|_{\mathbf{n}}$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для трёх случаев базы (схема аксиом 2, схема аксиом 5, схема аксиом 9) и одного случая перехода индукции.
- (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\mathbf{n}} \alpha$. Покажите, что $|\Gamma|_{\Gamma} \vdash_{\Gamma} |\alpha|_{\Gamma}$ (постройте схему доказательства, и покажите один случай базы и три случая перехода индукции).
- (c) Покажите аналог теоремы о дедукции: $\Gamma \vdash_{\mathbf{n}} \alpha \rightarrow \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{n}} \beta$.

6. Покажите, что открытые множества топологического пространства с отношением порядка (\subseteq) образуют импликативную решётку с нулём.
7. Напомним, что линейным порядком называется такой порядок $\langle X, \leq \rangle$, что для любых $x, y \in X$ выполнено $x \leq y$ или $y \leq x$. Задаёт ли линейный порядок решётку? Дистрибутивна, импликативна ли она, есть ли в ней 0 и 1?
8. Рассмотрим \mathbb{N}_0 (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$, (\cdot) и (\rightarrow) в данной решётке, определены ли 0 или 1? Верно ли, что $2 \cdot 2 = 4$ или $2 + 2 = 4$? Приведите каких-нибудь три свойства традиционных определений $(+)$ и (\cdot) , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и три свойства, которые перестанут выполняться.
9. Постройте следующие примеры:
 - (а) непустого частично-упорядоченного множества, имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего (\cdot) для некоторых; имеющего операцию (\cdot) для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.
 - (б) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; импликативной решётки без 0.
 - (в) дистрибутивной, но не импликативной решётки (эта решётка не может быть конечной).
10. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$) также выполнено и $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.
11. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:
 - (а) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
 - (б) монотонность: пусть $a \leq b$ и $c \leq d$, тогда $a + c \leq b + d$ и $a \cdot c \leq b \cdot d$;
 - (в) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
 - (г) $a \leq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (д) из $a \leq b$ следует $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
 - (е) из $a \leq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \leq c$;
 - (ж) $b \leq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;
 - (з) $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (и) $a \leq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$;
 - (к) $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$;
 - (л) импликативная решётка дистрибутивна: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
12. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что ИИВ (вариант натурального вывода) корректно, если в качестве модели выбрать импликативную решётку с 0, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\
 \llbracket \perp \rrbracket &= 0
 \end{aligned}$$

Оценка турникета определяется через импликацию: $\llbracket \gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rrbracket = \llbracket \gamma_1 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha \rrbracket$.

Задание №4. Интуиционистская логика.

1. Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \leq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.
2. Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.
 - (а) $P \vee \neg P$;
 - (б) $\neg \neg P \rightarrow P$;
 - (в) $P \vee \neg P \vee \neg \neg P \vee \neg \neg \neg P$;
 - (г) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$;

- (e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$;
 - (f) $\neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$;
 - (g) $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
 - (h) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$;
 - (i) $\neg \perp$.
3. Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{M}, \leq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{W \subseteq \mathfrak{M} \mid \text{если } W_i \in W \text{ и } W_i \leq W_j, \text{ то } W_j \in W\}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{M} \mid W_i \Vdash \alpha\}$ (множество миров, где вынуждена формула α).
- (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.
 - (b) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$ через \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β и покажите, что они также открыты.
 - (c) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.
 - (d) Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров \mathcal{W}_α , где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α , что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).
4. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание $\neg\neg P \rightarrow P$. Постройте соответствующую ему табличную модель.
5. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров \mathfrak{M} упорядочено как дерево: (a) существует наименьший мир W_0 ; (b) для любого $W_i \neq W_0$ существует единственный предшествующий мир $W_k : W_k < W_i$.
- (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
 - (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
 - (c) Покажите, что для любого натурального n найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с n мирами.
6. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).
7. Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} , гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и согласованные оценки $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$ и $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$: $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$.
- (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \leq a_2$, то $\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$.
 - (b) Покажите, что если $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$.
8. Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} . Всегда ли можно построить гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$?
9. Пусть \mathcal{A} — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.
10. Пусть \mathcal{A} — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?

Задание №5. Исчисление предикатов

1. Докажем теоремы про подстановку и свободу для подстановки:
- (a) Рассмотрим замену $\alpha[x := y]$. Пусть в этой замене есть свобода для подстановки y вместо x в α и y не входит свободно в α . Необходимы ли оба условия — или какое-нибудь следует из другого?
 - (b) Если y свободен для подстановки вместо x в α , то $\llbracket \alpha[x := y] \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=y}$.
 - (c) Если θ свободна для подстановки вместо x в α , то $\llbracket \alpha[x := \theta] \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=\theta}$.

- (d) Если нет свободы для подстановки θ вместо x в α , то бывает, что $\llbracket \alpha[x := \theta] \rrbracket \neq \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=\theta}$.
- (e) Возможны ли случаи, когда нет свободы для подстановки θ вместо x в α , но $\llbracket \alpha[x := \theta] \rrbracket = \llbracket \alpha \rrbracket^{x:=\theta}$?
2. Покажите, что исчисление предикатов корректно:
- (a) если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$;
- (b) если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$
3. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:
- (a) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\forall y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ .
- (b) $(\exists x.\phi) \rightarrow (\exists y.\phi[x := y])$, если есть свобода для подстановки y вместо x в ϕ и y не входит свободно в ϕ .
- (c) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$
- (d) $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
- (e) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg \exists x.\neg \phi)$
- (f) $(\exists x.\phi) \rightarrow (\neg \forall x.\neg \phi)$
- (g) $(\forall x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \exists x.\phi)$
- (h) $(\exists x.\neg \phi) \rightarrow (\neg \forall x.\phi)$
4. Опровергните формулы $\phi \rightarrow \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
5. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метаварьи соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:
- (a) $\forall x.\forall y.\alpha, \forall y.\forall x.\alpha$
- (b) $\exists x.\exists y.\alpha, \exists y.\exists x.\alpha$
- (c) $\forall x.\forall y.\alpha, \forall x.\exists y.\alpha, \exists x.\forall y.\alpha, \exists x.\exists y.\alpha$
- (d) $\forall x.\exists y.\alpha, \exists y.\forall x.\alpha$
6. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:
- (a) Покажите, что если x не входит свободно в α , то
- $$\vdash (\alpha \& \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \& \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \& \alpha) \rightarrow (\forall x.\beta \& \alpha)$$
- (b) Покажите, что
- $$\vdash ((\forall x.\alpha) \& (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall x.\forall y.\alpha \& \beta$$
- где x не входит свободно в β , а y — в α .
7. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:
- (a) Покажите, что если x не входит свободно в α , то
- $$\vdash (\forall x.\alpha \& \beta) \rightarrow (\alpha \& \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \& \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \& \alpha)$$
- (b) Покажите, что если x не входит свободно в β , а y — в α , то
- $$\vdash (\forall x.\forall y.\alpha \& \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha) \& (\forall y.\beta)$$
8. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, тогда:
- (a) Докажите:
- $$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \& \alpha \rightarrow \psi \& \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$
- (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.
- (c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?
- (d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \rightarrow (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

Задание №6. Неразрешимость исчисления предикатов, аксиоматика Пеано и формальная арифметика

1. Постройте машины Тьюринга:

- (a) Превращающую строку из 0 и 1 в пустую (заменяет все символы на ε);
- (b) Прибавляющую 1 к двоичному числу на ленте;
- (c) Разрешающую язык четверичных чисел, делящихся на 3 (оставляющую на ленте букву «д» или «н», в зависимости от делимости);
- (d) Копирующую строку из 0 и 1, заканчивающуюся на *, на свободное место на ленте за звёздочкой. Например, 10100* станет 10100*10100.

2. Предложите способ закодировать машину Тьюринга в алфавите из конечного количества символов (количество не должно зависеть от машины).

3. Покажите в аксиоматике Пеано:

- (a) ассоциативность сложения;
- (b) коммутативность умножения;
- (c) дистрибутивность $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
- (d) ассоциативность умножения;

4. Рассмотрим аксиоматику Пеано. Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \leq a$ и $a' \leq b'$, если $a \leq b$. Покажите, что:

- (a) $x \leq x + y$;
- (b) $x \leq x \cdot y$ (укажите, когда это так — в остальных случаях приведите контрпримеры);
- (c) $a'' + b'' \leq (a'') \cdot (b'')$;
- (d) Если существует n , что $x + n = y$, то $x \leq y$.
- (e) Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q , что $a = b \cdot p + q$ и $0 \leq q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.

5. Обозначим за \bar{n} представление числа n в формальной арифметике, по сути это ноль с n штрихами:

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\bar{k})', & n = k + 1 \end{cases}$$

Докажите в формальной арифметике:

- (a) $\vdash \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{4}$ (теперь вы знаете правду);
- (b) $\vdash \forall p. (\exists q. q' = p) \vee p = 0$ (единственность нуля — нужна ли здесь аксиома A3?);
- (c) $\vdash p \cdot q = 0 \rightarrow p = 0 \vee q = 0$ (отсутствие делителей нуля);

6. Будем говорить, что k -местное отношение R выразимо в формальной арифметике, если существует формула формальной арифметики ρ со свободными переменными x_1, \dots, x_k , что:

- (a) для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in R$ выполнено $\vdash \rho[x_1 := \bar{a}_1] \dots [x_k := \bar{a}_k]$ (доказуема формула ρ с подставленными значениями a_1, \dots, a_k вместо свободных переменных x_1, \dots, x_k);
- (b) для всех $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \notin R$ выполнено $\vdash \neg \rho[x_1 := \bar{a}_1] \dots [x_k := \bar{a}_k]$.

Выразите в формальной арифметике (укажите формулу ρ и докажите требуемые свойства про неё):

- (a) «полное» отношение $R = \mathbb{N}^2$;
- (b) отношение $(=)$;
- (c) унарное отношение «быть чётным числом».

Задание №7. Выразимость и представимость. Теорема Гёделя о неполноте арифметики.

1. Докажите, что следующие функции примитивно-рекурсивны. Для каждой функции предложите программу; например, на языке C++ (с шаблонами), или на любом другом языке, где можно формально записать выражение для рекурсивной функции.

(a) ограниченное вычитание:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b, & a \geq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(b) умножение;

(c) возведение в степень;

(d) целочисленное деление;

(e) остаток от деления;

(f) проверка числа на простоту;

(g) поиск n -го простого числа;

(h) наибольший общий делитель двух чисел;

(i) частичный логарифм;

(j) пусть $l = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$, определите функцию «голова списка»;

(k) хвост списка;

(l) конкатенация списков.

2. Покажите, что функция Аккермана рекурсивна, для этого:

(a) реализуйте стек: функции добавления элемента в стек и изъятия элемента из стека;

(b) реализуйте функцию Аккермана.

3. Докажите (без пропусков частей доказательств), что следующие функции представимы в формальной арифметике:

(a) примитив Z ;

(b) примитив N ;

(c) декремент (ограниченное вычитание 1).

4. Найдите константы b и c бета-функции Гёделя для последовательности трёх чисел 10, 3, 7.

5. Определим характеристическую функцию для отношения R :

$$C_R(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Покажите, что $C_R(x_1, \dots, x_n)$ представимо в формальной арифметике тогда и только тогда, когда R выразимо в формальной арифметике.

6. Покажите, что в теории первого порядка доказуемы все формулы тогда и только тогда, когда доказуема формула $\bar{1} = 0$ (иными словами, когда теория противоречива).

7. Предложите непротиворечивую, но ω -противоречивую теорию первого порядка.

Задание 8. Теория множеств

1. Пусть заданы списки (в любом языке программирования) $L(\alpha)$, хранящие значения типа α . Реализуйте следующие функции, являющиеся аналогами конструктивных аксиом теории множеств:

(a) **empty** : $L(\alpha)$, строит пустой список, и **pair** : $(\alpha, \alpha) \rightarrow L(\alpha)$, формирует список из двух своих аргументов.

(b) **flatten** : $L(L(\alpha)) \rightarrow L(\alpha)$, соединяет все списки внутри списка в один.

(c) **powerset** : $L(\alpha) \rightarrow L(L(\alpha))$, делает из списка список всех возможных подсписков.

- (d) **filter** : $(\alpha \rightarrow \text{bool}) \rightarrow L(\alpha) \rightarrow L(\alpha)$, выделяет из списка все элементы, соответствующие условию.
2. На самом деле ординалы — это не списки, а деревья. Перепишите задачу 1 соответствующим образом, и напишите функцию **ordinal** : $\text{int} \rightarrow \text{set}$, строящую ординал, соответствующий заданному числу. Множество можно строить только через аналоги функций из 1 задания.
3. Определим упорядоченную пару $\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Покажите, что:
- (a) Упорядоченная пара — множество.
 - (b) $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.
4. Докажите, что следующие конструкции являются множествами:
- (a) пересечение всех элементов множества $(\bigcap a)$;
 - (b) $a \setminus b$ (разность множеств);
 - (c) $a \uplus b$ (дизъюнктное объединение множеств: $\{\langle x, 0 \rangle \mid x \in a\} \cup \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in b\}$);
 - (d) $a \times b$ (декартово произведение множеств: $\{\langle p, q \rangle \mid p \in a, q \in b\}$).
5. Определите формулу $\varphi(x)$ для свойства « x — конечный ординал». Укажите замкнутый вид для формулы ω .
6. Покажите, что если x — ординал, то x' — тоже ординал.
7. Верно ли, что если x' — ординал, то x — тоже ординал?
8. Покажите, что на множестве ω выполняется аксиоматика Пеано (полная формализация рассуждений не требуется, но из изложения должно быть понятно, как эту формализацию в рамках теории первого порядка получить):
- (a) $\forall x. x \in \omega \rightarrow \neg x' = \emptyset$
 - (b) $\forall x. \forall y. x \in \omega \ \& \ y \in \omega \rightarrow x' = y' \rightarrow x = y$
 - (c) (указание к следующему пункту) покажите, что если $\vdash \forall x. \neg \phi(x) \rightarrow A \ \& \ \neg A$, то $\vdash \forall x. \phi(x)$.
 - (d) Если $\phi(\emptyset)$ и $\forall x. x \in \omega \rightarrow \phi(x) \rightarrow \phi(x')$, то $\forall x. x \in \omega \rightarrow \phi(x)$.
9. Проверьте следующие равенства (докажите или опровергните):
- (a) $\omega \cdot \bar{2} = \bar{2} \cdot \omega$
 - (b) $\omega \cdot \bar{2} = \omega + \omega$
 - (c) $(\omega + \bar{1})^{\bar{2}} = \omega^{\bar{2}} + \bar{2} \cdot \omega + \bar{1}$
 - (d) $\omega^\omega = (\omega^{\bar{2}})^\omega$
 - (e) $\omega^{\omega + \bar{1}} = \omega^\omega + \bar{1}$
 - (f) Имеет ли место ассоциативность сложения и/или умножения?

Задание 9. Аксиома выбора. Мощность множеств

1. Верно ли, что $1^\omega = \omega$ и/или $\omega^1 = \omega$?
2. Зачёт за пункт ставится, если одновременно решены два подпункта: (i) Покажите, что множество ω^ω имеет счётную мощность. (ii) Определим $\uparrow k$ (башню из омег) так:

$$\uparrow k = \begin{cases} \omega, & k = 1 \\ \omega^{\uparrow n}, & k = n' \end{cases}$$

Скажем, $\uparrow 3 = \omega^{(\omega^\omega)}$. Будет ли счётным ординал $\sup\{\uparrow k \mid k \in \omega\}$?

3. Существует ли ординал, которому соответствует множество неотрицательных рациональных чисел и упорядоченность на нём? То есть, существует ли ординал σ , что существует биекция $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \sigma$, причём для всех $a, b \in \mathbb{Q}^+$ из $a \leq b$ следует $f(a) \leq f(b)$ (и обратно).
4. Верно ли, что для любого отношения полного порядка на счётном множестве существует соответствующий ему ординал, имеющий тот же порядок?

5. Покажите следующее (обозначим за $\mathcal{F}(p, q)$ множество функций из p в q):
- (а) $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \emptyset$;
 - (б) если $|a| \leq |b|$, то $|\mathcal{F}(g, a)| \leq |\mathcal{F}(g, b)|$;
 - (с) если $|a| \leq |b|$ и $\bar{0} < |g|$, то $|\mathcal{F}(a, g)| \leq |\mathcal{F}(b, g)|$;
 - (д) $|\mathcal{F}(\bar{0}, a)| = \bar{1}$, $|\mathcal{F}(\bar{1}, a)| = \bar{1}$; если $|a| > 0$, то $|\mathcal{F}(a, \bar{0})| = \bar{0}$;
 - (е) если $|a| \geq \aleph_0$ и $0 < |n| < \aleph_0$, то $|\mathcal{F}(a, n)| = a$
6. Покажите эквивалентность следующих определений конечного множества (задание (k) предполагает доказательство импликации $(k) \rightarrow (k')$; возможно, некоторые из переходов потребуют аксиому выбора):
- (а) a конечно, если каждое непустое семейство подмножеств a имеет максимальный по включению элемент. Например, при $a = \{0, 1, 2\}$ в семействе подмножеств $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ элементы $\{0, 1\}$ и $\{1, 2\}$ — максимальны.
 - (б) a конечно, если $\mathcal{P}(a)$ не равномощно своему собственному подмножеству (собственное подмножество — подмножество, не совпадающее с множеством).
 - (с) a конечно, если оно не равномощно своему собственному подмножеству.
 - (д) a конечно, если $|a| = \emptyset$ или $|a| \cdot \bar{2} > |a|$.
 - (е) a конечно, если $|a| = \emptyset$ или $|a| = \bar{1}$ или $|a|^2 > |a|$.
 - (ф) a конечно, если $|a| < \aleph_0$.
7. Покажите, что функция $f : a \rightarrow b$ биективна (т.е. инъективна и сюръективна) тогда и только тогда, когда $\forall y. \exists! x. \phi(x, y)$. Здесь за $\phi(x, y)$ мы обозначаем формулу, представляющую функцию f в теории множеств, по аналогии с формальной арифметикой.
8. Покажите, что если a и b — непустые множества, то существует функция из a в b (однако, функция не обязана быть инъективной или сюръективной).
9. Если существует функция $f : a \rightarrow b$ на вполне упорядоченных множествах a и b , сохраняющая порядок (если $x < y$, то $f(x) < f(y)$), то либо она — биекция, либо найдётся такой элемент $x \in b$, что $\{f(i) | i \in a\} = \{t \in b | t < x\}$.