

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$): например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 - (b) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
 - (c) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (d) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
 - (e) $A \& \neg A \vdash B$
 - (f) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
 - (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
 - (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
 - (f) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
 - (g) $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
 - (h) $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
 - (i) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 - (j) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (закон контрапозиции)
 - (k) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (правило де Моргана)
 - (l) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$ (правило де Моргана)
 - (m) $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность 1)
 - (n) $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β :
- (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (правило исключённого третьего)
 - (b) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (закон Пирса)
 - (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ и $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
 - (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha$ и $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

- (b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geq 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β , у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например, A и $B \& B$ — равные высказывания, ведь высказывания E и $E \& E$ имеют одну и ту же таблицу истинности:

E	$E \& E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания A и $A \rightarrow A$ не равны.

Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg \alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

- Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.
 - Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если $\vdash \alpha$ и в доказательстве высказывание δ_n получено с помощью Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\models \delta_n$.
 - Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.
 - Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.
- Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:
 - $A \vee \neg A$ (на лекции приводился пример в \mathbb{R} ; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в \mathbb{R}^2)
 - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
 - $\neg \neg A \rightarrow A$
 - $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
 - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
 - $\bigvee_{i=1,n} ((A_i \rightarrow A_{(i \bmod n)+1}) \& (A_{(i \bmod n)+1} \rightarrow A_i))$
- Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?
 - $\neg \neg \neg \neg A \rightarrow \neg \neg A$
 - $\neg A \vee \neg \neg A \vee \neg \neg \neg A$
 - $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
 - $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \& B$
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
 - $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \& \neg \beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg \beta)$ и $\neg(\alpha \& \neg \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
 - конъюнкцию?
 - дизъюнкцию?
 - импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α , если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

- (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.
- (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
- (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
- (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств S из \mathbb{R} (формально: $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества \mathbb{V} , при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть S — некоторое множество. Рассмотрим $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$, определим связки так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg\alpha \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \end{aligned}$$

Также, будем считать, что $\models \alpha$, если $\llbracket \alpha \rrbracket = S$.

Покажите, что получившееся:

- (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схем аксиом 5,9,10 и правила Modus Ponens.
- (b) полная модель классического исчисления высказываний.

Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A . *Замыканием* множества \bar{A} назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A . Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V , что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V , что $V \subseteq A$. Точка $x \in A$ — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A , так и с его дополнением.
 - (a) Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$.
 - (b) Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\bar{A} = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$. Верно ли, что $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?
 - (c) Покажите, что внутренность и замыкание корректно определены (что существуют соответствующие наибольшее и наименьшее множества).
 - (d) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин V . Опишите множества V° и \bar{V} . Какие вершины будут являться граничными для V ?
 - (e) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B° , а также \bar{A} и \bar{B} ?
 - (f) Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?
 - (g) Покажите, что $\overline{(A^\circ)}^\circ = A^\circ$.

- (h) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?
2. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже покажите, в нём задано топологическое пространство и ответьте следующие вопросы: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы будут внутренность и замыкание для данного множества (определите это прямо); каковы замкнутые множества в данной топологии; является ли данная топология моделью для классической логики; связно ли данное пространство.
- (a) Топология Зарисского на \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ конечно}\}$, то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.
- (b) Топология стрелки на \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$, то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.
- (c) Множество всех бесконечных подмножеств \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ бесконечно}\}$
- (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий: $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $X \in \Omega$, если $X = \emptyset$ или $X = \bigcup_i A(a_i)$. Будет ли это топологическим пространством, если мы будем рассматривать арифметические прогрессии в полной форме, в виде $a \cdot x + b$?
3. Связность.
- (a) Связны ли \mathbb{Q} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как топологические подпространства \mathbb{R} ?
- (b) Связно ли множество $\{0, 1\}$ в топологии стрелки и в топологии Зарисского?
- (c) Покажите, что дерево с отмеченным корнем (с рассмотренной на лекции топологией) связно.
- (d) Покажите, что если лес связан в топологическом смысле, то он состоит из одного дерева.
4. Натуральный вывод был описан на лекции, но примеров доказательств не приводилось. Приведём такой пример:

$$\frac{\frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \alpha} \quad \frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \beta}}{\alpha \& \beta \vdash \beta \& \alpha}$$

Постройте следующие доказательства в натуральном выводе:

- (a) $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$
- (b) $\neg \alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (c) $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$
- (d) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg \alpha \& \neg \beta)$
5. Чтобы избежать путаницы, обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как \vdash_{Γ} , а знак \vdash в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\mathbf{n}}$.

Напомним, что языки гильбертовского и натурального выводов отличаются (обозначим эти языки как \mathcal{L}_{Γ} и $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ соответственно).

Определим функции, отображающие языки друг в друга: $|\cdot|_{\mathbf{n}} : \mathcal{L}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$ и $|\cdot|_{\Gamma} : \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \rightarrow \mathcal{L}_{\Gamma}$. Они сохраняют почти все значения, кроме лжи (\perp) и отрицания (\neg):

$$|\sigma|_{\mathbf{n}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathbf{n}} \rightarrow \perp, & \sigma \equiv \neg \alpha \\ |\alpha|_{\mathbf{n}} \star |\beta|_{\mathbf{n}}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases} \quad |\sigma|_{\Gamma} = \begin{cases} A \& \neg A, & \sigma \equiv \perp \\ |\alpha|_{\Gamma} \star |\beta|_{\Gamma}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases}$$

Естественным образом расширим эти операции на контексты: $|\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n| = |\gamma_1|, |\gamma_2|, \dots, |\gamma_n|$.

- (a) Пусть $\Gamma \vdash_{\Gamma} \alpha$. Покажите, что $|\Gamma|_{\mathbf{n}} \vdash_{\mathbf{n}} |\alpha|_{\mathbf{n}}$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для трёх случаев базы (схема аксиом 2, схема аксиом 5, схема аксиом 9) и одного случая перехода индукции.
- (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\mathbf{n}} \alpha$. Покажите, что $|\Gamma|_{\Gamma} \vdash_{\Gamma} |\alpha|_{\Gamma}$ (постройте схему доказательства, и покажите один случай базы и три случая перехода индукции).
- (c) Покажите аналог теоремы о дедукции: $\Gamma \vdash_{\mathbf{n}} \alpha \rightarrow \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{n}} \beta$.

6. Покажите, что открытые множества топологического пространства с отношением порядка (\subseteq) образуют импликативную решётку с нулём.
7. Напомним, что линейным порядком называется такой порядок $\langle X, \leq \rangle$, что для любых $x, y \in X$ выполнено $x \leq y$ или $y \leq x$. Задаёт ли линейный порядок решётку? Дистрибутивна, импликативна ли она, есть ли в ней 0 и 1?
8. Рассмотрим \mathbb{N}_0 (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$, (\cdot) и (\rightarrow) в данной решётке, определены ли 0 или 1? Верно ли, что $2 \cdot 2 = 4$ или $2 + 2 = 4$? Приведите каких-нибудь три свойства традиционных определений $(+)$ и (\cdot) , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и три свойства, которые перестанут выполняться.
9. Постройте следующие примеры:
- (а) непустого частично-упорядоченного множества, имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего (\cdot) для некоторых; имеющего операцию (\cdot) для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.
 - (б) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; импликативной решётки без 0.
 - (с) дистрибутивной, но не импликативной решётки (эта решётка не может быть конечной).
10. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$) также выполнено и $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.
11. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:
- (а) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
 - (б) монотонность: пусть $a \leq b$ и $c \leq d$, тогда $a + c \leq b + d$ и $a \cdot c \leq b \cdot d$;
 - (с) *Законы поглощения*: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
 - (д) $a \leq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (е) из $a \leq b$ следует $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
 - (ф) из $a \leq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \leq c$;
 - (г) $b \leq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;
 - (х) $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (и) $a \leq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$;
 - (й) $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$;
 - (к) импликативная решётка дистрибутивна: $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
12. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что ИИВ (вариант натурального вывода) корректно, если в качестве модели выбрать импликативную решётку с 0, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned}
\llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\
\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\
\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\
\llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\
\llbracket \perp \rrbracket &= 0
\end{aligned}$$

Оценка турникета определяется через импликацию: $\llbracket \gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rrbracket = \llbracket \gamma_1 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha \rrbracket$.