Теорема о корректности формальной арифметики

Два вида индукции

Определение

(Принцип математической индукции) Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.

Определение

(Принцип полной математической индукции) Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t.x < t \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ взяв $\varphi := \psi$, имеем выполненость $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x')$, значит, $\forall x.\psi(x)$.

Два вида индукции

Определение

(Принцип математической индукции) Какое бы ни было $\varphi(x)$, если $\varphi(0)$ и при всех x выполнено $\varphi(x) \to \varphi(x')$, то при всех x выполнено и само $\varphi(x)$.

Определение

(Принцип полной математической индукции) Какое бы ни было $\psi(x)$, если $\psi(0)$ и при всех x выполнено $(\forall t.x < t \to \psi(x)) \to \psi(x')$, то при всех x выполнено и само $\psi(x)$.

Теорема

Принципы математической индукции эквивалентны

Доказательство.

($\Rightarrow$) взяв $\varphi := \psi$, имеем выполненость $\varphi(x) \to \varphi(x')$, значит, $\forall x.\psi(x)$.
($\Leftarrow$) возьмём $\psi(x) := \forall t.t \le x \to \varphi(t)$ $\square$

Трансфинитная индукция

Теорема

Принцип трансфинитной индукции. Если для $\varphi(x)$ *— некоторого утверждения теории множеств — выполнено:*

1. $\varphi(\varnothing)$
2. *Если* $\forall u.u \in v \to \varphi(u)$, *то* $\varphi(v)$

то $\forall u.\varphi(u)$

Индукция для натуральных чисел

Лемма

Свойство индукции выполнено для натуральных чисел: если $\varphi(0)$ *и* $\forall x \in \mathbb{N}_0 . f(x) \to f(x')$, *то* $\forall x \in \mathbb{N}_0 . f(x)$.

Доказательство.

Пусть $\varphi(\varnothing)$ и $\forall u.(u \in \omega) \to \varphi(u) \to \varphi(u')$. Рассмотрим $\tau(n) = \forall u.u \in n \to \varphi(u)$. Очевидно, что если $m \in n$, то $\tau(n) \to \tau(m)$. Значит, выполнены условия принципа трансфинитной индукции для ω, отсюда $\tau(\omega)$, отсюда $\forall u.(u \in \omega) \to \varphi(u)$. $\square$

Исчисление S_∞

1. Язык: связки $\neg$, $\vee$, $\forall$; нелогические символы: $(+)$,$(\cdot)$,$(')$,0,$(=)$.
2. Аксиомы: все истинные формулы вида $\theta_1 = \theta_2$; все истинные отрицания формул вида $\neg\theta_1 = \theta_2$ (θ_i — термы без переменных).
3. Структурные (слабые) правила:

$$\frac{\zeta \vee \alpha \vee \beta \vee \delta}{\zeta \vee \beta \vee \alpha \vee \delta} \qquad \frac{\alpha \vee \alpha \vee \delta}{\alpha \vee \delta}$$

   сильные правила

$$\frac{\delta}{\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha \vee \delta \quad \neg\beta \vee \delta}{\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta} \quad \frac{\alpha \vee \delta}{\neg\neg\alpha \vee \delta} \quad \frac{\neg\alpha[x := \theta] \vee \delta}{(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

   и ещё два правила ...

Ещё правила S_∞

бесконечная индукция

$$\frac{\alpha[x := \overline{0}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{1}] \vee \delta \quad \alpha[x := \overline{2}] \vee \delta \quad \dots}{(\forall x.\alpha) \vee \delta}$$

сечение

$$\frac{\zeta \vee \alpha \qquad \neg\alpha \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Здесь:

α — секущая формула

Число связок в $\neg\alpha$ — степень сечения.

Дерево доказательства

1. Доказательства образуют деревья.
2. Каждой формуле в дереве сопоставим порядковое число (ординал).
3. Порядковое число заключения любого неструктурного правила строго больше порядкового числа его посылок (больше или равно в случае структурного правила).

$$\dfrac{\overline{0=0} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{0=0}}{\cdots}}{0'=0'} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{0=0}}{\cdots}}{0'=0'}}{\cdots}}{0''=0''} \quad \dots}{(\forall a.a=a)_\omega} \qquad \dfrac{\overline{0=0} \quad \overline{0'=0'} \quad \overline{0''=0''} \quad \dots}{(\forall a.a=a)_1}$$

4. Существует конечная максимальная степень сечения в дереве (назовём её степенью вывода).

Любая теорема Ф.А. — теорема S_∞

Теорема

Если $\vdash_{\text{фа}} \alpha$, *то* $\vdash_\infty |\alpha|_\infty$

Теорема

Если Ф.А. противоречива, то противоречива и S_∞

Пример

Обратное неверно:

$$\frac{\neg\omega(\overline{0},\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \qquad \neg\omega(\overline{1},\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \qquad \neg\omega(\overline{2},\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \qquad \dots}{\forall x.\neg\omega(x,\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})}$$

Обратимость правил

Теорема

Если формула α доказана и имеет вид, похожий на заключение правил де Моргана, отрицания и бесконечной индукции — то посылки соответствующих правил могут быть получены из самой формулы α доказательством, причём доказательством с не большей степенью и не большим порядком.

Доказательство.

Например, формула вида $\neg\neg\alpha \vee \delta$.

Обратимость правил

Теорема

Если формула α доказана и имеет вид, похожий на заключение правил де Моргана, отрицания и бесконечной индукции — то посылки соответствующих правил могут быть получены из самой формулы α доказательством, причём доказательством с не большей степенью и не большим порядком.

Доказательство.

Например, формула вида $\neg\neg\alpha \vee \delta$.
Проследим историю α; она получена:

1. ослаблением — заменим $\neg\neg\alpha$ на α в этом узле и последующих.
2. отрицанием — выбросим правило, заменим $\neg\neg\alpha$ на α в последующих

Изменённый вывод — доказательство требуемого. □

Устранение сечений

Теорема

Если α имеет вывод степени $m > 0$ порядка t, то можно найти вывод степени строго меньшей m с порядком 2^t.

Доказательство.

Трансфинитная индукция по порядку t.

1. База. Если $t = 0$, то неструктурных правил нет, отсюда $m = 0$.
2. Переход. Рассмотрим заключительное правило.
   2.1 Не сечение.
   2.2 Сечение, секущая формула — элементарная.
   2.3 Сечение, секущая формула — $\neg\alpha$.
   2.4 Сечение, секущая формула — $\alpha \vee \beta$.
   2.5 Сечение, секущая формула — $\forall x.\alpha$.

□

Случай 1. Не сечение

$$\frac{\pi_{t_0} \quad \pi_{t_1} \quad \pi_{t_2} \quad \dots}{\alpha}$$

Заменим доказательства посылок π_i по индукционному предположению.

1. Если $m'_i < m_i$, то $\max m'_i < \max m_i$
2. Если $t_i \leq t$, то $2^{t_i} \leq 2^t$.

Случай 2.4. Сечение с формулой вида $\forall x.\alpha$

$$\frac{\zeta \vee \forall x.\alpha \qquad \neg(\forall x.\alpha) \vee \delta}{\zeta \vee \delta}$$

Причём степень и порядок выводов компонент, соответственно, (m_1, t_1) и (m_2, t_2).

1. По индукции, вывод $\zeta \vee \forall x.\alpha$ можно упростить до $(m_1', 2^{t_1})$.
2. По обратимости, для постоянного θ можно построить вывод $\zeta \vee \alpha[x := \theta]$ за $(m_1', 2^{t_1})$.
3. В формуле $(\neg\forall x.\alpha) \vee \delta$ формула $\neg\forall x.\alpha$ получена либо ослаблением, либо квантификацией из $\neg\alpha[x := \theta_k] \vee \delta_k$.
   3.1 Каждое правило квантификации заменим на:
   $$\frac{\zeta \vee \alpha[x := \theta_k] \qquad (\neg\alpha[x := \theta_k]) \vee \delta_k}{\zeta \vee \delta_k}$$
   3.2 Остальные вхождения $\neg\forall x.\alpha$ заменим на ζ (в правилах ослабления).
4. В получившемся дереве меньше степень — так как в $\neg\alpha[x := \theta]$ меньше связок, чем в $\neg\forall x.\alpha$.
5. Нумерацию можно также перестроить.

Теорема об устранении сечений

Определение

Итерационная экспонента

$$(a\uparrow)^m(t) = \begin{cases} t, & m = 0 \\ a^{(a\uparrow)^{m-1}(t)}, & m > 0 \end{cases}$$

Теорема

Если $\vdash_\infty \sigma$ *степени* m *порядка* t, *то найдётся доказательство без сечений порядка* $(2\uparrow)^m(t)$

Доказательство.

В силу конечности m воспользуемся индукцией по m и теоремой об уменьшении степени. $\square$

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.
2. Отрицание?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.
2. Отрицание? Нет двойного отрицания $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.
2. Отрицание? Нет двойного отрицания $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$.
3. Бесконечная индукция или квантификация?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.
2. Отрицание? Нет двойного отрицания $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$.
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции $(\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta)$.
2. Отрицание? Нет двойного отрицания $(\neg\neg\alpha \vee \delta)$.
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление?

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции ($\alpha \vee \delta$).

Непротиворечивость формальной арифметики

Теорема

Система S_∞ непротиворечива

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\neg 0 = 0$. Если эта формула выводима в S_∞, то она выводима и в S_∞ без сечений. Тогда какое заключительное правило?

1. Правило Де-Моргана? Нет отрицаний дизъюнкции ($\neg(\alpha \vee \beta) \vee \delta$).
2. Отрицание? Нет двойного отрицания ($\neg\neg\alpha \vee \delta$).
3. Бесконечная индукция или квантификация? Нет квантора.
4. Ослабление? Нет дизъюнкции ($\alpha \vee \delta$).

То есть, неизбежно, $\neg 0 = 0$ — аксиома, что также неверно. $\square$