

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ**  
*Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года*

**Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.**

1. Будем говорить, что высказывание  $\alpha$  выводится из гипотез  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  (и записывать это как  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$ ), если существует такой вывод  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , что  $\alpha \equiv \delta_n$ , и каждый из  $\delta_i$  есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ( $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$ ): например,  $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$ ; здесь  $\Gamma$  обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - (b)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
  - (c)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
  - (d)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
  - (e)  $A \& \neg A \vdash B$
  - (f)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Теорема доказывается конструктивно, то есть один вывод можно перестроить в другой вывод. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
  - (b)  $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
  - (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
  - (d)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
  - (e)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
  - (f)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
  - (g)  $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
  - (h)  $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
  - (i)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
  - (j)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (закон контрапозиции)
  - (k)  $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$  (правило де Моргана)
  - (l)  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$  (правило де Моргана)
  - (m)  $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$  (дистрибутивность 1)
  - (n)  $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$  (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях  $\alpha$  и  $\beta$ :
- (a)  $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$  (правило исключённого третьего)
  - (b)  $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  (закон Пирса)
  - (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом:  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  и  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ . В этих условиях покажите  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .
  - (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом:  $\alpha \vee \neg\alpha$  и  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ . В этих условиях покажите  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ . В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

(b) Обобщение предыдущего пункта: при любом  $n \geq 1$  и любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  выполнено  $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$

(c) Из противоречия следует всё, что угодно:  $\alpha \ \& \ \neg\alpha \vdash \beta$

5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , имеющие разное количество связок.

Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\alpha \neq \beta$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\alpha \neq \gamma$  и  $\beta \neq \gamma$ .

6. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg\alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .