

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$): например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 - (b) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
 - (c) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (d) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
 - (e) $A \& \neg A \vdash B$
 - (f) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
 - (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
 - (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
 - (f) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
 - (g) $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
 - (h) $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
 - (i) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 - (j) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (закон контрапозиции)
 - (k) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (правило де Моргана)
 - (l) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$ (правило де Моргана)
 - (m) $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность 1)
 - (n) $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β :
- (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (правило исключённого третьего)
 - (b) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (закон Пирса)
 - (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ и $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
 - (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha$ и $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$. В этих условиях покажите $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

- (b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geq 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β , у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например, A и $B \& B$ — равные высказывания, ведь высказывания E и $E \& E$ имеют одну и ту же таблицу истинности:

E	$E \& E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания A и $A \rightarrow A$ не равны.

Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg \alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

- Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.
 - Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если $\vdash \alpha$ и в доказательстве высказывание δ_n получено с помощью Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$, то $\vdash \delta_n$.
 - Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.
 - Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.
- Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:
 - $A \vee \neg A$ (на лекции приводился пример в \mathbb{R} ; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в \mathbb{R}^2)
 - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
 - $\neg \neg A \rightarrow A$
 - $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
 - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
 - $\bigvee_{i=1,n} ((A_i \rightarrow A_{(i \bmod n)+1}) \& (A_{(i \bmod n)+1} \rightarrow A_i))$
- Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?
 - $\neg \neg \neg \neg A \rightarrow \neg \neg A$
 - $\neg A \vee \neg \neg A \vee \neg \neg \neg A$
 - $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
 - $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \& B$
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
 - $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \& \neg \beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg \beta)$ и $\neg(\alpha \& \neg \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
 - конъюнкцию?
 - дизъюнкцию?
 - импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α , если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

(a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

(b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

(c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$

(d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств S из \mathbb{R} (формально: $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества \mathbb{V} , при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть S — некоторое множество. Рассмотрим $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$, определим связки так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg\alpha \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \end{aligned}$$

Также, будем считать, что $\models \alpha$, если $\llbracket \alpha \rrbracket = S$.

Покажите, что получившееся:

- (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схемы аксиом 9 и правила Modus Ponens.
- (b) полная модель классического исчисления высказываний.