

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ
Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года

Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.

1. Будем говорить, что высказывание α выводится из гипотез $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$), если существует такой вывод $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, что $\alpha \equiv \delta_n$, и каждый из δ_i есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ($\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$): например, $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$; здесь Γ обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 - (b) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
 - (c) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
 - (d) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
 - (e) $A \& \neg A \vdash B$
 - (f) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Теорема доказывается конструктивно, то есть один вывод можно перестроить в другой вывод. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
 - (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
 - (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
 - (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
 - (f) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
 - (g) $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
 - (h) $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
 - (i) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 - (j) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (закон контрапозиции)
 - (k) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (правило де Моргана)
 - (l) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$ (правило де Моргана)
 - (m) $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность 1)
 - (n) $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях α и β :
- (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ (правило исключённого третьего)
 - (b) $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (закон Пирса)
 - (c) без использования 10 схемы аксиом: $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (то есть, схему аксиом 10 можно заменить на закон Пирса);
 - (d) без использования 10 схемы аксиом: $\alpha \vee \neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (то есть, схему аксиом 10 можно заменить на правило исключённого третьего);
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$. В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

(b) Обобщение предыдущего пункта: при любом $n \geq 1$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполнено $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$

(c) Из противоречия следует всё, что угодно: $\alpha \ \& \ \neg\alpha \vdash \beta$

5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания α и β , имеющие разное количество связок.

Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.