



DIRO
IFT 3205

TRAVAIL PRATIQUE

Débruitage - Compression

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift3205)

e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

1 Introduction

On a déjà vu quel était l'intérêt, en filtrage, de représenter un signal observé comme une superposition adéquate de fonctions élémentaires. Une fois en possession de ces "fonctions élémentaires", on peut essayer d'obtenir une bonne reconstitution du signal étudié en n'utilisant qu'un nombre limité de ces fonctions de base. Cela permet soit de **compresser le signal** en ne transmettant que les coefficients fréquentiels concernés) ou de reconstruire ce signal en éliminant le bruit qui l'a éventuellement dégradé et ainsi **débruiter ce signal** ou encore l'approximer. Si on se rappelle de plus que les coefficients fréquentiels $|c_n(f)|$ obtenus (issus par exemple d'une TF classique, d'une Transformée en Cosinus Discrète (TCD), ou d'une autre transformée) sont décroissant lorsque n tend vers ∞ (théorème de Riemann-Lebesgue ¹), alors deux stratégies co-existent pour obtenir une bonne restitution du signal original à des fins de compression ou de débruitage à partir de l'utilisation (i.e., la somme) d'un nombre limité de ces fonctions élémentaires.

1. La première stratégie consiste à éliminer (i.e., ne pas transmettre dans le cas de la compression ou annuler dans le cas du débruitage) tous les coefficients fréquentiels associés à une fréquence spatiale supérieure à une fréquence donnée. C'est le principe du filtrage passe-bas traditionnel.
2. La seconde stratégie, plus efficace, consiste à considérer (i.e., transmettre pour une stratégie de compression ou utiliser pour une reconstruction du signal à débruiter) seulement les coefficients fréquentiels les plus élevés en amplitude (i.e., en valeur absolue). C'est le principe du seuillage dur (*hard thresholding*) dans lequel tous les coefficients plus petits qu'un seuil donné sont considérés comme étant soit non informatif (pour une application de compression) ou soit essentiellement du bruit (pour une stratégie de débruitage du signal).

Pour augmenter l'efficacité de la compression ou du débruitage, on préfère découper l'image en petits blocs de taille 8×8 (en pixels) et utiliser la TCD (qui est la partie réelle de la TF). Le principal avantage de la TCD est de pouvoir concentrer au maximum l'information contenue dans un bloc au niveau des coefficients basses fréquences². De même, on préfère calculer cette TCD sur des blocs de petite taille (des expériences empiriques ont montrés que 8×8 était optimal) sur lesquels de grandes variations de l'image sont peu probables (plutôt que sur toute l'image) dans le but encore et toujours de maximiser l'information contenue dans un bloc au niveau des coefficients basses fréquences.

¹ Il existe même un théorème qui montre que si la fonction est de classe \mathcal{C}^k , ses coefficients spectraux sont négligeables devant $\frac{1}{n^k}$.

² En utilisant la transformée en cosinus discrète, on doit en fait considérer implicitement que cette image 8×8 se réplique avec une symétrie paire en ligne et en colonne. De ce fait, on minimise les transitions rapides qui se produiraient à la frontière de chaque duplication, donc les hautes fréquences associées aux discontinuités qui pourraient ainsi se créer lors de cette réplification, et par conséquent on maximise l'information contenue dans un bloc au niveau des coefficients basses fréquences.

2 Débruitage Par TCD Locale

1. Ajouter à l'image LENA.PGM un bruit additif Gaussien blanc (indépendant du signal) d'écart type $\sigma = 30$. Dans ce cas, le modèle de dégradation est le modèle linéaire de dégradation suivant :

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y),$$

dans lequel $f(x, y)$ représente l'image originale, $g(x, y)$ l'image bruitée (cf. Fig. 3), et $n(x, y)$ représente le bruit additif Gaussien.



FIG. 1 – (a) Image originale **Lena.pgm**. (b) Image dégradée par un bruit additif Gaussien blanc d'écart type $\sigma = 30$.

2. Réaliser un débruitage de cette image bruitée en utilisant la TCD sur l'ensemble des blocs (ne se chevauchant pas) qui composent cette image (bloc de taille 8×8 pixels) et en annulant les coefficients de la TCD qui se situent au delà du n -ième ($n < 64$) coefficient rangé en "zigzag" comme le montre la Fig. 2³. Trouver la valeur de n qui permet de trouver l'image débruitée optimale au sens du MSE (Minimal Square Error) ou des moindres carrés.

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_x \sum_y \left(\hat{f}(x, y) - f(x, y) \right)^2$$

où N est le nombre de pixels de l'image débruitée, \hat{f} est l'image débruitée (restorée) et f l'image originale non dégradée.

3. Réaliser un débruitage de cette image bruitée en utilisant la TCD sur l'ensemble des blocs 8×8 (sans chevauchement) qui composent cette image et en annulant les coefficients de la TCD qui sont moins élevés en amplitude qu'un seuil T (*hard thresholding*). Trouver la valeur du seuil T qui permet de trouver l'image débruitée optimale au sens du MSE.
4. Pour éviter l'effet "mosaïque" désagréable que l'on peut constater lorsqu'on débruite une image fortement bruitée (et qui demanderait donc une valeur de seuil élevé), on utilise des blocs (8×8) qui cette

³Pour l'implémentation de l'ordre en "zigzag", vous pouvez, si vous le souhaitez, vous inspirer du code situé à l'adresse http://rosettacode.org/wiki/Zig-zag_matrix

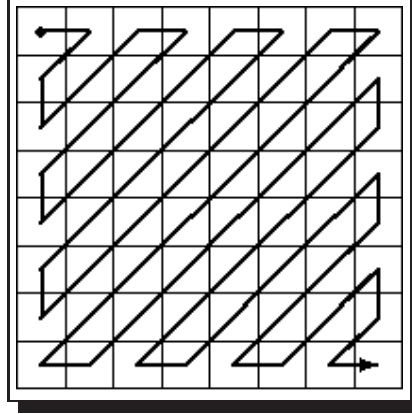


FIG. 2 – *Ordre ‘zigzag’ des coefficients de la TCD sur un bloc 8×8 pixels*

fois se chevauchent et sur lesquels on réalise l’opération de seuillage expliquée précédemment. De façon équivalente, cela équivaut à réaliser l’opération de la question précédente pour les $64 = 8 \times 8$ (8 horiz. and 8 vert.) décalages toroidales⁴ possibles de l’image de départ (cf. Algorithme 1).

Réaliser un débruitage de cette image bruitée en utilisant cette technique sur l’image et trouver la valeur du seuil T qui permet de trouver l’image débruitée optimale au sens du MSE.

Algorithm 1 Débruitage à base de DCT locale

Initialisation

$\hat{f} \leftarrow g$

Débruitage par DCT

for tous les décalage (8 horiz. and 8 vert.) de \hat{f} **do**

for tous les blocks $[8 \times 8]$ extraits de \hat{f} **do**

 1. Calcule la TCD

 2. Seuil les coefficients TCD c_n avec la règle

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |c_n| \leq T \\ c_n & \text{autrement} \end{cases}$$

 3. Calcule la TCD^{-1} de ces coef. seuillés

 ▷ Décalage inverse de l’image filtrée et stocke la

$\hat{f} \leftarrow$ Moyennage de ces 64 images débruitées

Cet algorithme provient de la référence :

M. Mignotte, J. Meunier, J.-P. Soucy.

DCT-based complexity regularization for EM tomographic reconstruction.

IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 55 (2) Part 1 :801-805, February 2008.

⁴Une image est considérée comme toroidale si elle se répète indefiniment verticalement et horizontalement comme si elle était enroulée sur elle-même, i.e., une image dont les extrémités verticales et horizontales finissent par se rejoindre. Par exemple, pour le vecteur 1D $[1 : 2 : 3 : 4]$, ces différent décalage toroidal sont $[4 : 1 : 2 : 3]$, $[3 : 4 : 1 : 2]$, $[2 : 3 : 4 : 1]$.



(a)



(b)

FIG. 3 – En haut image originale non dégradée (a) Image dégradée par un bruit additif Gaussien blanc d'écart type $\sigma = 30$. (b) Image débruitée avec la méthode de l'Algo. 1 et $T = 90$ ($\approx 3\sigma$), $MSE \approx 65$.

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barème* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numro du Tp>-IFT3205-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'exécuter sur Linux tel qu'indiqué dans le barème.