Sprawozdanie P2.7

Kamil Tasarz, 322492

grudzień 2021 - styczeń 2022

1 Wstęp

Umiejętność całkowania dowolnych funkcji ma niewątpliwie wiele zastosowań w przeróżnych dziedzinach nauki. Jednakże znajdowanie dokładnej wartości całki z dowolnej funkcji jest zadaniem bardzo trudnym, a czasami wręcz niewykonalnym, dlatego w praktyce wykorzystuje sie różne metody znajdowania przybliżonych wartości całek. W poniższym sprawozdaniu zajmę się metodą Romberga, której rezultatem jest tablica coraz lepszych przybliżeń całki $\int_a^b f(x)dx$

2 Złożony wzór trapezów

Bazą metody Romberga jest złożony wzór trapezów. Nie będzie on omawiany szeroko w tym sprawozdaniu. Kluczową informacją jest, że dzieląc przedział $[a, b]$ na 2^n równych przedziałów otrzymujemy przybliżenie

$$T_n = h_n \sum_{i=0}^{2^n}{}'' f(a + ih_n), \quad \text{gdzie} \quad h_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Jednocześnie dla kolejnych wartości n są to pierwsze przybliżenie metody Romberga (znajdujące się w pierwszej kolumnie). Przyjmujemy, więc $R_{n,0} = T_n$ ze wzory powyżej. Aby uniknąć wielokrotnego wyliczenia wartości funkcji w tych samych punktach wyrażamy wyrazy $R_{n,0}$ rekurencyjnie.

$$R_{n,0} = \frac{1}{2} R_{n-1,0} + h_n \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f(a + (2i-1)h_n).$$

Dzieje się tak, ponieważ w porównaniu z poprzednim wyrazem chcę wziąć 2^{n-1} punktów, które są środkami przedziałów z poprzedniego kroku, a policzone już wcześniej wystarczy podzielić przez 2. Z kolei dla $n = 0$ wyrazenie jest równe $R_{0,0} = \frac{1}{2}[f(b) - f(a)]$

3 Poprawianie przybliżeń

3.1 Złożony wzór Simpsona

Oznaczmy $R_{n,0}$ jako wynik dla złożonego wzory trapezów. Błąd przybliżenia całki taką metodą wynosi:

$$I(f) - R_{n,0} = c_2 h_n^2 + c_4 h_n^4 + c_8 h_n^8 + \ldots,$$

gdzie c_i to pewne stałe niezależne od n zaś $h_n = \frac{b-a}{2^n}$. Rozważmy dwa kolejne przybliżenia.

$$I(f) - R_{n,0} = c_2 h_n^2 + c_4 h_n^4 + c_8 h_n^8 + \dots$$
$$I(f) - R_{n+1,0} = c_2 h_{n+1}^2 + c_4 h_{n+1}^4 + c_8 h_{n+1}^8 + \dots$$

Zuważmy, że $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$. Otrzymamy zatem:

$$I(f) - R_{n,0} = c_2 h_n^2 + c_4 h_n^4 + c_8 h_n^8 + \dots$$
$$I(f) - R_{n+1,0} = c_2 \frac{h_n^2}{4} + c_4 \frac{h_n^4}{16} + c_8 \frac{h_n^8}{64} + \dots$$

Po pomnożeniu drugiego równania przez 4 i odjęciu stronammi pierwszego równania od drugiego:

$$3I(f) - 4R_{n+1,0} + R_{n,0} = \frac{-3}{4} c_4 h_n^4 + \frac{-15}{16} c_8 h_n^8 + \dots$$

Co najważniejsze udało nam się pozbyć największego składnika reszty. Zatem porządkując powyższe równanie do postaci:

$$I(f) - \frac{4R_{n+1,0} - R_{n,0}}{3} = -c_4 \frac{h_n^4}{4} - c_8 \frac{5h_n^8}{16} - \dots,$$

łatwo zauważyć, że wyrażenie $\frac{4R_{n+1,0} - R_{n,0}}{3}$ jest lepszym przybliżeniem szukanej całki niż $R_{n,0}$ czy $R_{n+1,0}$. Oznaczmy tak uzyskany wynik jako:

$$\frac{4R_{n+1,0} - R_{n,0}}{3} = R_{n+1,1}.$$

Jest to złożony wzór Simpsona. Iterując po kolejnych n uzyskujemy w ten sposób drugą kolumnę macierzy Romberga.

3.2 Kolejne kolumny

Przeprowadźmy bardzo podobny zabieg dla dwóch kolejnych wyrazów z kolumny m. Mamy

$$I(f) - R_{n,m} = c_{2^{m+1}} h_n^{2^{m+1}} + c_{2^{m+2}} h_n^{2^{m+2}} + c_{2^{m+3}} h_n^{2^{m+3}} + \dots$$
$$I(f) - R_{n,m} = c_{2^{m+1}} h_{n+1}^{2^{m+1}} + c_{2^{m+2}} h_{n+1}^{2^{m+2}} + c_{2^{m+3}} h_{n+1}^{2^{m+3}} + \dots$$

Skoro $h_{n+1} = \frac{h_n}{2}$ to mozemy zapisać

$$I(f) - R_{n,m} = c_{2^{m+1}} h_n^{2^{m+1}} + c_{2^{m+2}} h_n^{2^{m+2}} + c_{2^{m+3}} h_n^{2^{m+3}} + \dots$$
$$I(f) - R_{n,m} = c_{2^{m+1}} \frac{h_n^{2^{m+1}}}{2^{2^{m+1}}} + c_{2^{m+2}} \frac{h_n^{2^{m+2}}}{2^{2^{m+2}}} + c_{2^{m+3}} \frac{h_n^{2^{m+3}}}{2^{2^{m+3}}} + \dots$$

Następnie mnożąc dolne równanie przez 4^{m+1} i odejmując górne równanie od dolnego:

$$(4^{m+1} - 1)I(f) - 4^{m+1} R_{n+1,m} + R_{n,m} = \frac{-3}{4} c_{2^{m+2}} h_n^{2^{m+2}} + \frac{-15}{16} c_{2^{m+3}} h_n^{2^{m+3}} + \dots$$

Otrzymaliśmy zatem wzór na lepsze przyblizenie całki pochodzący od dwóch wcześniej już obliczonych, a mianowicie $\frac{4^{m+1} R_{n+1,m} - R_{n,m}}{4^{m+1} - 1}$. Po zmniejszeniu indeksów o 1 oznaczę

$$R_{n,m} = \frac{1}{4^m - 1}(4^m R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1})$$

lub równważnie

$$R_{n,m} = R_{n,m-1} + \frac{1}{4^m - 1}(R_{n,m-1} - R_{n-1,m-1}).$$

Wyrażenia te dla $n > 0$ tworzą tablicę Romberga, w której dla coraz większych n i m otrzymujemy coraz lepsze przybliżenia całki z funkcji.

4 Program i wyniki

Do zaprogramowania metody Romberga użyłem języka Julia w wersji 1.6.3. Używałem standardowej precyzji arytmetyki do obliczeń. Sprawdziłem zachowanie metody dla 6 funkcji: wielomianowej, wykładniczej, Rungego, oraz trzech przykładowych z treści zadania. Dla każdej z funkcji wyznaczyłem ile wierszy tablicy Romberga jest niezbędnych dla spełnienia warunku z treści zadania. Wyniki zaprezentowane są w poniższej tabeli.

całka \ ϵ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
$\int_{-1}^{1} 2x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 0.17dx$	4	6	7	9	10	12	14	15
$\int_{-1}^{1} e^x dx$	1	4	5	7	9	10	12	14
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+25x^2}$	4	5	5	6	8	10	11	13
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4+x^2+0.9}$	2	4	5	7	9	10	12	14
$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^4}$	2	3	5	6	8	10	11	13
$\int_{0}^{1} \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}$	3	4	4	4	5	5	5	5

Wszystkie te funkcje wymagają podobnego nakładu pracy, aby uzyskać żądane przybliżenie z całki. Nieco zaskakujące mogą być wyniki dla pierwszej funkcji, czyli nieskomplikowanego wielomianu. Mimo, że przybliżona wartość całki już po kilku krokach jest bardzo dokłdna to warunek zadania nie jest spełniony.
Dodatkowo w programie zadbałem o możliwość wypisywanie całej tablicy Romberga lub błędów względnych wartości znajdujących się w niej.

5 Podsumowanie

Metoda Romberga jest efektywną metodą całkowania numerycznego. Bazując na dużo prostszych metodach (metoda trapezów, Simpsona) i wykorzystując podstawowe operacje arytmetyczne jest w stanie poprawić przybliżenie całki o rzędy wielkości.

Literatura

[1] David Kincaid, Ward Cheney, "Analiza numeryczna" link

[2] Wikipedia: Metoda Romberga - link

[3] Wikipedia: Romberg's method - link

[4] dr hab. Albert Kubzdela, Metody obliczeniowe - wykład nr 4 link