Sprawozdanie P1.4

Kamil Tasarz, 322492

październik-listopad 2021

1 Wstęp

Stała Eulera, zwana również stałą Eulera-Mascheroniego jest stałą matematyczną oznaczaną $\gamma = 0.577215664901532286\ldots$ Jest zdefiniowana za pomocą granicy

$$\gamma := \lim_{n->\infty} \gamma_n,$$

$$\text{gdzie } \gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Zakładając prawdziwość przybliżenia

$$\gamma_n - \gamma \approx cn^{-d}$$

dla dostatecznie dużych n, doświadczenie ma na celu wyznaczyć stałe $c, d > 0$. W tym sprawozdaniu omówię etapy i wyniki tego doświadczenia.

2 Nieco o regresji liniowej

Regresja liniowa jest metodą szacowania jednej zmiennej, gdy dysponujemy wartościami innej zmiennej przy założeniu, ze zmienne te są od siebie zależne liniowo. Weźmy równanie liniowe

$$y = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Chcemy dla pewnego zbioru danych, które mamy znaleźć współczynniki β_0, β_1. Dane są postaci (x_i, y_i). Zapiszmy to w postaci układu:

$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \epsilon_1 \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \epsilon_2 \\ \quad\vdots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_n + \epsilon_n, \end{cases}$$

gdzie ϵ_i to błąd, który należy zminimalizować dobierając odpowiednie β_0, β_1.
Niech:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Możemy teraz zapisac nasz układ w postaci macierzowej

$$Y = XB + E.$$

Chcielibyśmy zminimalizować $\sum_{i=1}^n \epsilon_i$. Mamy

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i)^2$$

czyli

$$0 = \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i)^2 - \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2.$$

Funckja ta osiąga swoje minimum w miejscu zerowania się pochodnych. Znajdźmy te punkty. Najpierw zróżniczkujmy po β_0 i β_1.

$$0 = \sum_{i=1}^n 2(\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n 2x_i(\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i)$$

Po rozdzieleniu sum i uporządkowaniu dostajemy układ:

$$\beta_0 \sum_{i=1}^n 1 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^n x_1 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

A po zapisaniu w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że dla wcześniej zdefiniowanych macierzy

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

zachodzą równości

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = XX^T$$

oraz

$$\begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T Y$$

Po wstawieniu do równania otrzymujemy:

$$X^T X B = X^T Y,$$

a po przekształceniu:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{1}$$

Jest to wzór na takie β_0, β_1, dla których suma ϵ_i będzie najmniejsza. Czyli są to współczynniki najlepiej oddające zależność liniową $y = \beta_0 + \beta_1 x$ dla danego zbioru zmiennych (x_i, y_i).

3 Powiązanie z zadaniem

Uznajmy za prawdziwe przybliżenie

$$\gamma_n - \gamma \approx cn^{-d}.$$

Po zlogarytmowaniu dostajemy

$$\ln(\gamma_n - \gamma) \approx -d\ln(n) + \ln(c).$$

Jeśli potraktujemy $\ln(\gamma_n - \gamma)$ jako zmienną y, $\ln(n)$ jako zmienną x, a szukane $\ln(c)$ oraz $-d$ kolejno jako współczynniki β_0 i β_1. Dostajemy równanie (właściwie przybliżenie) liniowe. Kolejno korzystając ze wzoru (1), gdzie $B = \begin{pmatrix} \ln(c) \\ -d \end{pmatrix}$, dla dostatecznie dużych n możemy wyznaczyć doświadczalnie przybliżenie stałych c i d.

4 Program i pierwsze wyniki

Program jest napisany w języku Julia w wersji 1.6.3. Do obliczeń będę używał precyzji 256-bitowej, która zapewnia wystarczającą dokładność do osiągnięcia celu. Weźmy kilka macierzy X, odpowiadajace im macierze Y i policzmy macierz B. Niech macierz X składa się z dziesięciu elementów x_i od 10^i do 10^{i+1}, czyli np. dla $i = 3$ będą to liczby: $1000, 2000, 3000, \ldots, 10000$.

i	$\ln(c)$	$e^{\ln(c)} = c$	d
1	$-0.7209\ldots$	$0.4862\ldots$	$-0.9939\ldots$
2	$-0.69728\ldots$	$0.49793\ldots$	$-0.99940\ldots$
3	$-0.693698\ldots$	$0.49972\ldots$	$-0.999940\ldots$
4	$-0.693216\ldots$	$0.499965\ldots$	$-0.9999940\ldots$
5	$-0.693155\ldots$	$0.49999587\ldots$	$-0.99999940\ldots$
6	$-0.6931481\ldots$	$0.499999506\ldots$	$-0.9999999387\ldots$
7	$-0.69314676\ldots$	$0.500000209\ldots$	$-1.0000000238\ldots$

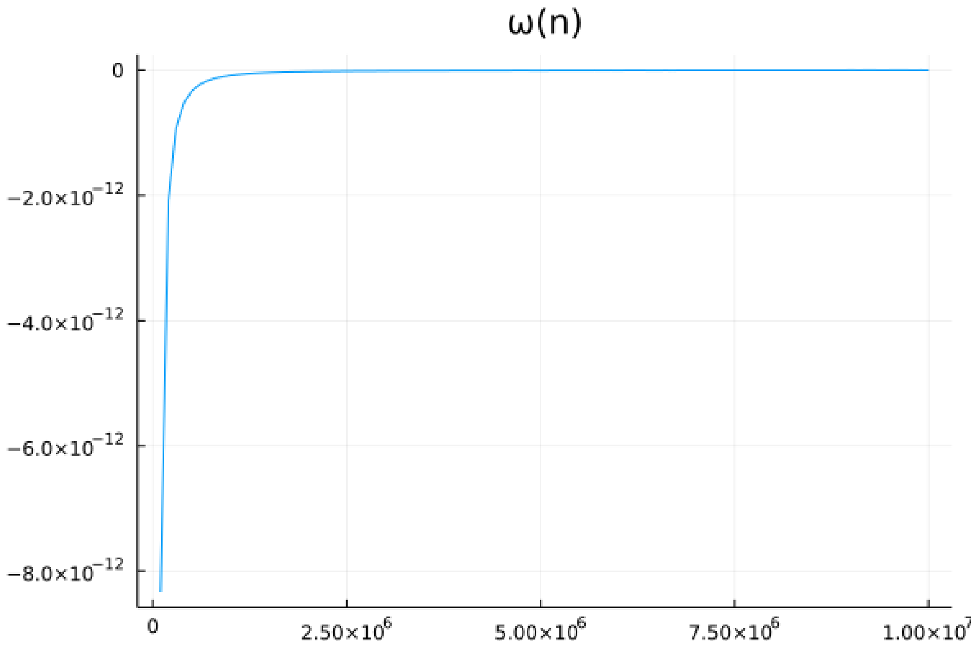
Już te kilka wyników pozwala nam przypuszczać, że szukane to $d = 1$ oraz $c = 0.5$.

5 Potwierdzenie oszacowania

Udało nam się oszacować stałe c oraz d. Załóżmy, że są one poprawne, to jest, zgodnie z treścią naszego zadania, dla dostatecznie dużych n, zachodzi

$$\gamma_n - \gamma \approx \frac{1}{2n}.$$

Sprawdźmy jak zachowuje się wyrażenie $\omega(n) = \gamma_n - \gamma - \frac{1}{2n}$.
Jeśli stałe są wyznaczone dobrze to wyrażenie to powinno być w przybliżeniu równe 0 dla dużych n. Zobaczmy wykres:



Pomimo tego, że $\omega(1)$ jest rzędu 10^{-2} to zbliża się ona do zera szybko. Dla n rzędu 10^4 $\omega(n)$ jest rzędu 10^{-10}. Wykres przedstawia wartości dla jeszcze większych n.

6 Podsumowanie

W tym doświadczeniu udało mi przybliżyć wyrażenie $\gamma_n - \gamma \approx \frac{1}{2n}$. Posłużyłem się metodą regresji liniowej wykorzystywanej w statystyce. Wyprowadziałem ogólny wzór i zastosowałem go do danego problemu. Na koniec, mając podejrzenia co do wartości szukanych stałych, sprawdziłem jak dobrze przybliżają one wyrażenie $\gamma_n - \gamma$.

Literatura

[1] Using matrix algebra in linear regresssion, Jackie Nicholas, Mathematics Learning Centre, University of Sydney (2010) - link

[2] Bo Li's lecture script - link