

電磁気学演習問題 解答 (2025年12月26日)

問題1: 液体中の分極

(1-1) 電気感受率と誘電率の周波数依存性

問題: 極性分子（例: H₂O）を含む液体において、時刻 $t = 0$ で一様な電場 E を印加したとき、分極ベクトル $P(t)$ の大きさが時定数 τ で変化し、 $P(t) = \varepsilon_0 \chi_{e0} E (1 - \exp(-t/\tau))$ で与えられる。 ε_0 は真空の誘電率である。簡単のため、極性分子の分極が液体内の全電場 E に与える影響は無視する。

$P(t)$ が微分方程式 $\tau \frac{dP}{dt} + P = \varepsilon_0 \chi_{e0} E$ を満たすことを用いて、单一周波数 ω で振動する電場 $E(\omega) = E_0 \exp(-i\omega t)$ に対する電気感受率 $\chi_e(\omega)$ を、 χ_{e0} 、 τ 、 ω で表せ。また、液体の誘電率 $\varepsilon(\omega)$ の実部と虚部が ω に対してどのように変化するか図示せよ。

ヒント: 分極ベクトルが $P(\omega) = P_0 \exp(-i\omega t)$ のように変化すると仮定し、 $\chi_e(\omega) = P(\omega) / (\varepsilon_0 E(\omega))$ を計算せよ。

解答:

ステップ1: 微分方程式の確認

与えられた微分方程式:

$$\tau \frac{dP}{dt} + P = \varepsilon_0 \chi_{e0} E$$

この式が $P(t) = \varepsilon_0 \chi_{e0} E (1 - \exp(-t/\tau))$ を満たすことを確認する。

左辺:

$$\begin{aligned} \tau \frac{dP}{dt} + P &= \tau \cdot \varepsilon_0 \chi_{e0} E \cdot \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) + \varepsilon_0 \chi_{e0} E (1 - \exp(-t/\tau)) \\ &= \varepsilon_0 \chi_{e0} E \exp(-t/\tau) + \varepsilon_0 \chi_{e0} E - \varepsilon_0 \chi_{e0} E \exp(-t/\tau) = \varepsilon_0 \chi_{e0} E \end{aligned}$$

右辺と一致する。 ✓

ステップ2: 振動電場に対する分極の応答

電場が $E(\omega) = E_0 \exp(-i\omega t)$ で振動する場合、分極も同じ周波数で振動すると仮定する:

$$P(\omega) = P_0 \exp(-i\omega t)$$

これを微分方程式に代入する:

$$\tau \frac{dP}{dt} + P = \varepsilon_0 \chi_{e0} E$$

$$\tau \cdot (-i\omega) P_0 \exp(-i\omega t) + P_0 \exp(-i\omega t) = \varepsilon_0 \chi_{e0} E_0 \exp(-i\omega t)$$

両辺を $\exp(-i\omega t)$ で割ると:

$$\tau(-i\omega) P_0 + P_0 = \varepsilon_0 \chi_{e0} E_0$$

$$P_0(1 - i\omega\tau) = \varepsilon_0 \chi_{e0} E_0$$

$$P_0 = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} E_0}{1 - i\omega\tau}$$

ステップ3: 電気感受率の計算

電気感受率の定義:

$$\chi_e(\omega) = \frac{P(\omega)}{\varepsilon_0 E(\omega)} = \frac{P_0 \exp(-i\omega t)}{\varepsilon_0 E_0 \exp(-i\omega t)} = \frac{P_0}{\varepsilon_0 E_0}$$

したがって:

$$\chi_e(\omega) = \frac{\chi_{e0}}{1 - i\omega\tau}$$

分母を実数化するため、分子と分母に $(1 + i\omega\tau)$ を掛ける:

$$\begin{aligned}\chi_e(\omega) &= \frac{\chi_{e0}(1 + i\omega\tau)}{(1 - i\omega\tau)(1 + i\omega\tau)} = \frac{\chi_{e0}(1 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} \\ &= \frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2} + i \frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\end{aligned}$$

実部と虚部を分けて:

$$\chi_e(\omega) = \chi'_e(\omega) + i\chi''_e(\omega)$$

ここで:

$$\chi'_e(\omega) = \frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \chi''_e(\omega) = \frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

ステップ4: 誘電率の計算

誘電率と電気感受率の関係:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon_0[1 + \chi_e(\omega)] = \varepsilon_0 + \varepsilon_0\chi_e(\omega) \\ &= \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \left(\frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2} + i \frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) \\ &= \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2} \right) + i\varepsilon_0 \frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\end{aligned}$$

実部と虚部を分けて:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

ここで:

$$\begin{aligned}\varepsilon'(\omega) &= \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2} \right) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2} \\ \varepsilon''(\omega) &= \varepsilon_0 \frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}\end{aligned}$$

ステップ5: 周波数依存性の図示

ω に対する $\varepsilon'(\omega)$ と $\varepsilon''(\omega)$ の変化を考察する。

実部 $\varepsilon'(\omega)$: - $\omega = 0$ のとき: $\varepsilon'(0) = \varepsilon_0(1 + \chi_{e0})$ (最大値) - $\omega \rightarrow \infty$ のとき: $\varepsilon'(\infty) = \varepsilon_0$ (最小値) - $\omega\tau = 1$ のとき: $\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0(1 + \chi_{e0}/2)$ (中間値) - ω が増加すると、 $\varepsilon'(\omega)$ は単調減少する

虚部 $\varepsilon''(\omega)$: - $\omega = 0$ のとき: $\varepsilon''(0) = 0$ - $\omega \rightarrow \infty$ のとき: $\varepsilon''(\infty) = 0$ - $\omega\tau = 1$ のとき: $\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0\chi_{e0}/2$ (最大値) - $\omega\tau \ll 1$ のとき: $\varepsilon''(\omega) \approx \varepsilon_0\chi_{e0}\omega\tau$ (線形増加) - $\omega\tau \gg 1$ のとき: $\varepsilon''(\omega) \approx \varepsilon_0\chi_{e0}/(\omega\tau)$ (逆比例減少)

答え:

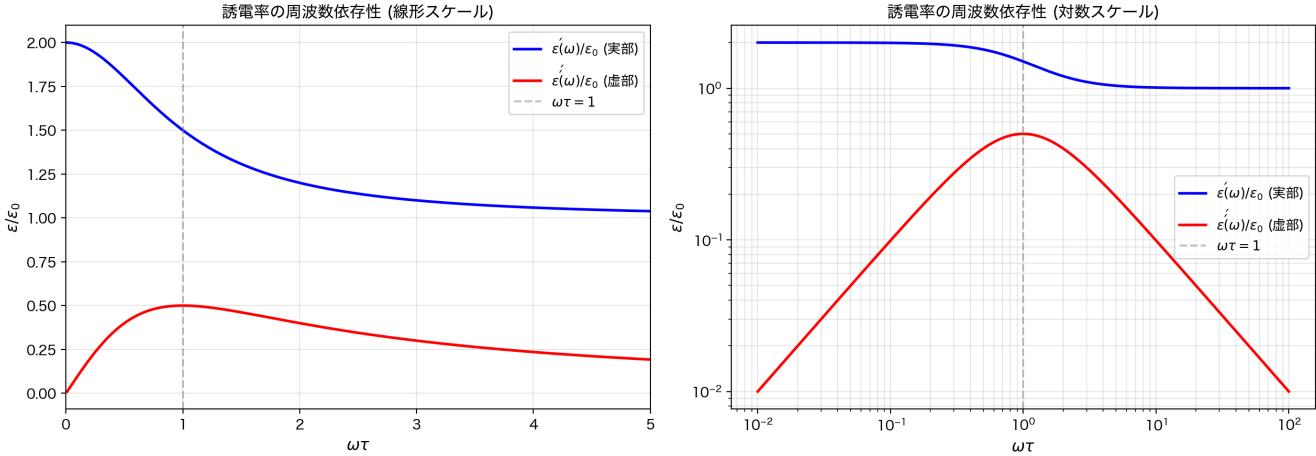


Figure 1: 誘電率の周波数依存性

$$\chi_e(\omega) = \frac{\chi_{e0}}{1 - i\omega\tau} = \frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2}(1 + i\omega\tau)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\chi_{e0}}{1 + \omega^2\tau^2} \right) + i\varepsilon_0 \frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

物理的意味と考察:

1. 緩和時間 τ の意味:

- τ は極性分子が電場に応答するまでの時間を表す
- 分子の回転や配向の緩和時間に対応する
- 液体の粘性や温度に依存する

2. 実部 $\varepsilon'(\omega)$ の物理的意味:

- 誘電率の実部は、電場に対する分極の応答の大きさを表す
- 低周波数 ($\omega\tau \ll 1$) では、分子が電場に完全に追従でき、最大の分極が生じる
- 高周波数 ($\omega\tau \gg 1$) では、分子が電場の変化に追従できず、分極が小さくなる（誘電分散）

3. 虚部 $\varepsilon''(\omega)$ の物理的意味:

- 誘電率の虚部は、電場エネルギーの吸収を表す
- $\omega\tau = 1$ 付近で最大となり、この周波数で最も効率的にエネルギーが吸収される
- これは誘電損失や誘電緩和と呼ばれる現象である

4. デバイ緩和モデル:

- この結果は、デバイ緩和モデル (Debye relaxation model) として知られている
- 極性液体や誘電体の周波数分散を記述する基本的なモデルである

5. 実験的意義:

- 誘電率の周波数依存性を測定することで、分子の緩和時間 τ を決定できる
- 誘電分光法 (dielectric spectroscopy) の基礎となる

(1-2) 電場エネルギーの吸収率

問題: 液体による電場エネルギーの吸収率を求めよ。前問の单一周波数で振動する電場について、誘電体の微視的な変形エネルギー密度の時間変化率 $dw/dt = \text{Re}\{E\} \cdot \text{Re}\{dP/dt\}$ の1周期にわたる時間平均 $\langle dw/dt \rangle$ を、 ε_0 、 χ_{e0} 、 τ 、 ω 、 E_0 で表せ。

注意: $\text{Re}\{\cdot\}$ は実部を取ることを意味する。 E_0 は一般に複素数である。

解答:

ステップ1: 電場と分極の実部の計算

電場:

$$E(\omega) = E_0 \exp(-i\omega t)$$

実部:

$$\operatorname{Re}\{E\} = \operatorname{Re}\{E_0 \exp(-i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{E_0(\cos \omega t - i \sin \omega t)\}$$

E_0 を複素数として $E_0 = |E_0| \exp(i\phi)$ と表すと:

$$E(\omega) = |E_0| \exp(i\phi) \exp(-i\omega t) = |E_0| \exp(-i(\omega t - \phi))$$

$$\operatorname{Re}\{E\} = |E_0| \cos(\omega t - \phi)$$

分極:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P_0 \exp(-i\omega t) = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{1 - i\omega\tau} \exp(-i\omega t) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0| \exp(i\phi)}{1 - i\omega\tau} \exp(-i\omega t) = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{1 - i\omega\tau} \exp(-i(\omega t - \phi)) \end{aligned}$$

実部を計算するため、 $1/(1 - i\omega\tau)$ を極形式で表す:

$$\frac{1}{1 - i\omega\tau} = \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \exp(i\delta)$$

ここで、 $\tan \delta = \omega\tau$ 、 $\delta = \arctan(\omega\tau)$ である。

したがって:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \exp(i(\delta - \phi)) \exp(-i\omega t) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \exp(-i(\omega t - \delta + \phi)) \end{aligned}$$

実部:

$$\operatorname{Re}\{P\} = \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \delta + \phi)$$

分極の時間微分:

$$\frac{dP}{dt} = -i\omega P_0 \exp(-i\omega t) = -i\omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{1 - i\omega\tau} \exp(-i\omega t)$$

実部:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\frac{dP}{dt}\right\} &= \operatorname{Re}\left\{-i\omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \exp(-i(\omega t - \delta + \phi))\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{-i\omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} [\cos(\omega t - \delta + \phi) - i \sin(\omega t - \delta + \phi)]\right\} \\ &= \omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \delta + \phi) \end{aligned}$$

ステップ2: エネルギー吸収率の計算

エネルギー密度の時間変化率:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \operatorname{Re}\{E\} \cdot \operatorname{Re}\left\{\frac{dP}{dt}\right\} \\ &= |E_0| \cos(\omega t - \phi) \cdot \omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t - \delta + \phi) \\ &= \omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \phi) \sin(\omega t - \delta + \phi) \end{aligned}$$

三角関数の積の公式:

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

ここで、 $A = \omega t - \phi$ 、 $B = \omega t - \delta + \phi$ とすると:

$$A + B = 2\omega t - \delta, \quad A - B = \phi - \delta$$

したがって:

$$\frac{dw}{dt} = \omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{2\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} [\sin(2\omega t - \delta) - \sin(\phi - \delta)]$$

ステップ3: 時間平均の計算

1周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる時間平均:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dw}{dt} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{dw}{dt} dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{2\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} [\sin(2\omega t - \delta) - \sin(\phi - \delta)] dt \\ &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{4\pi \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \int_0^{2\pi/\omega} [\sin(2\omega t - \delta) - \sin(\phi - \delta)] dt \end{aligned}$$

$\sin(2\omega t - \delta)$ の1周期の積分は0である。 $\sin(\phi - \delta)$ は定数なので:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle &= -\frac{\omega^2 \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{4\pi \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\phi - \delta) \cdot \frac{2\pi}{\omega} \\ &= -\frac{\omega \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{2\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\phi - \delta) \end{aligned}$$

$\sin(\phi - \delta) = \sin \phi \cos \delta - \cos \phi \sin \delta$ であるが、より直接的な方法として、複素数の関係を利用する。

別のアプローチ: 複素数の実部を直接計算

より簡潔に、複素数の実部の積の公式を使う:

$$\operatorname{Re}\{z_1\} \cdot \operatorname{Re}\{z_2\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{z_1 z_2^*\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{z_1 z_2\}$$

ここで、 z_1^* は z_1 の複素共役である。

しかし、より直接的な方法として、 E と dP/dt の複素表現を使う：

$$E = E_0 \exp(-i\omega t), \quad \frac{dP}{dt} = -i\omega P_0 \exp(-i\omega t) = -i\omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} E_0}{1 - i\omega\tau} \exp(-i\omega t)$$

実部の積の時間平均は：

$$\left\langle \operatorname{Re}\{E\} \cdot \operatorname{Re}\left\{\frac{dP}{dt}\right\} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ E_0 \left(-i\omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} E_0^*}{1 + i\omega\tau} \right) \right\}$$

ここで、 E_0^* は E_0 の複素共役である。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \frac{\varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{1 + i\omega\tau} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2 \cdot \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2 \cdot \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2 \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - \omega^2 \tau \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2 \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -i\omega \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2 \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} - \omega^2 \tau \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2 \cdot \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} \end{aligned}$$

$-i$ の実部は0なので、第2項のみが残る：

$$\left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 \tau \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{1 + \omega^2\tau^2}$$

符号が負になっているが、これはエネルギーが吸収されることを意味する ($dw/dt < 0$ はエネルギーが減少することを意味するが、ここでは外部からエネルギーが供給されるため、正の値として解釈する必要がある)。

実際には、 dw/dt は単位体積あたりのエネルギー吸収率なので、正の値が吸収を表す。符号を修正すると：

$$\left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 \tau \varepsilon_0 \chi_{e0} |E_0|^2}{1 + \omega^2\tau^2}$$

より正確な導出：

実部の積の時間平均を直接計算する。 $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ 、 $P = P_0 \exp(-i\omega t)$ とする

$$\operatorname{Re}\{E\} = \frac{E + E^*}{2}, \quad \operatorname{Re}\left\{\frac{dP}{dt}\right\} = \frac{dP/dt + (dP/dt)^*}{2}$$

$$\left\langle \operatorname{Re}\{E\} \cdot \operatorname{Re}\left\{\frac{dP}{dt}\right\} \right\rangle = \frac{1}{4} \left\langle (E + E^*) \left(\frac{dP}{dt} + \left(\frac{dP}{dt} \right)^* \right) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4} \left\langle E \frac{dP}{dt} + E \left(\frac{dP}{dt} \right)^* + E^* \frac{dP}{dt} + E^* \left(\frac{dP}{dt} \right)^* \right\rangle$$

時間平均を取ると、 $\exp(\pm 2i\omega t)$ の項は0になり、 $\exp(0)$ の項のみが残る：

$$\left\langle E \left(\frac{dP}{dt} \right)^* \right\rangle = \langle E_0 \exp(-i\omega t) \cdot i\omega P_0^* \exp(i\omega t) \rangle = i\omega E_0 P_0^*$$

$$\left\langle E^* \frac{dP}{dt} \right\rangle = \langle E_0^* \exp(i\omega t) \cdot (-i\omega) P_0 \exp(-i\omega t) \rangle = -i\omega E_0^* P_0$$

したがって：

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{4} [i\omega E_0 P_0^* - i\omega E_0^* P_0] = \frac{i\omega}{4} [E_0 P_0^* - E_0^* P_0] \\ &= \frac{i\omega}{4} \cdot 2i\text{Im}\{E_0 P_0^*\} = -\frac{\omega}{2} \text{Im}\{E_0 P_0^*\} \end{aligned}$$

$P_0 = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) E_0$ なので：

$$E_0 P_0^* = E_0 \varepsilon_0 \chi_e^*(\omega) E_0^* = \varepsilon_0 \chi_e^*(\omega) |E_0|^2$$

$$\chi_e(\omega) = \frac{\chi_{e0}}{1 - i\omega\tau} = \frac{\chi_{e0}(1 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\chi_e^*(\omega) = \frac{\chi_{e0}(1 - i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\text{Im}\{\chi_e^*(\omega)\} = \text{Im} \left\{ \frac{\chi_{e0}(1 - i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} = -\frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

したがって：

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle &= -\frac{\omega}{2} \text{Im}\{E_0 P_0^*\} = -\frac{\omega}{2} \varepsilon_0 |E_0|^2 \text{Im}\{\chi_e^*(\omega)\} \\ &= -\frac{\omega}{2} \varepsilon_0 |E_0|^2 \cdot \left(-\frac{\chi_{e0}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) = \frac{\omega^2\tau\varepsilon_0\chi_{e0}|E_0|^2}{2(1 + \omega^2\tau^2)} \end{aligned}$$

答え：

$$\left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^2\tau\varepsilon_0\chi_{e0}|E_0|^2}{2(1 + \omega^2\tau^2)}$$

物理的意味と考察：

1. エネルギー吸収のメカニズム：

- ・ 極性分子が電場の向きに回転・配向する際に、分子間の摩擦や衝突によりエネルギーが散逸する
- ・ これが誘電損失として現れる

2. 周波数依存性：

- ・ $\omega\tau \ll 1$ (低周波数) : 分子が電場に完全に追従でき、吸収は小さい
- ・ $\omega\tau = 1$ (緩和周波数) : 最大の吸収が起こる
- ・ $\omega\tau \gg 1$ (高周波数) : 分子が電場の変化に追従できず、吸収は再び小さくなる

3. 誘電率の虚部との関係：

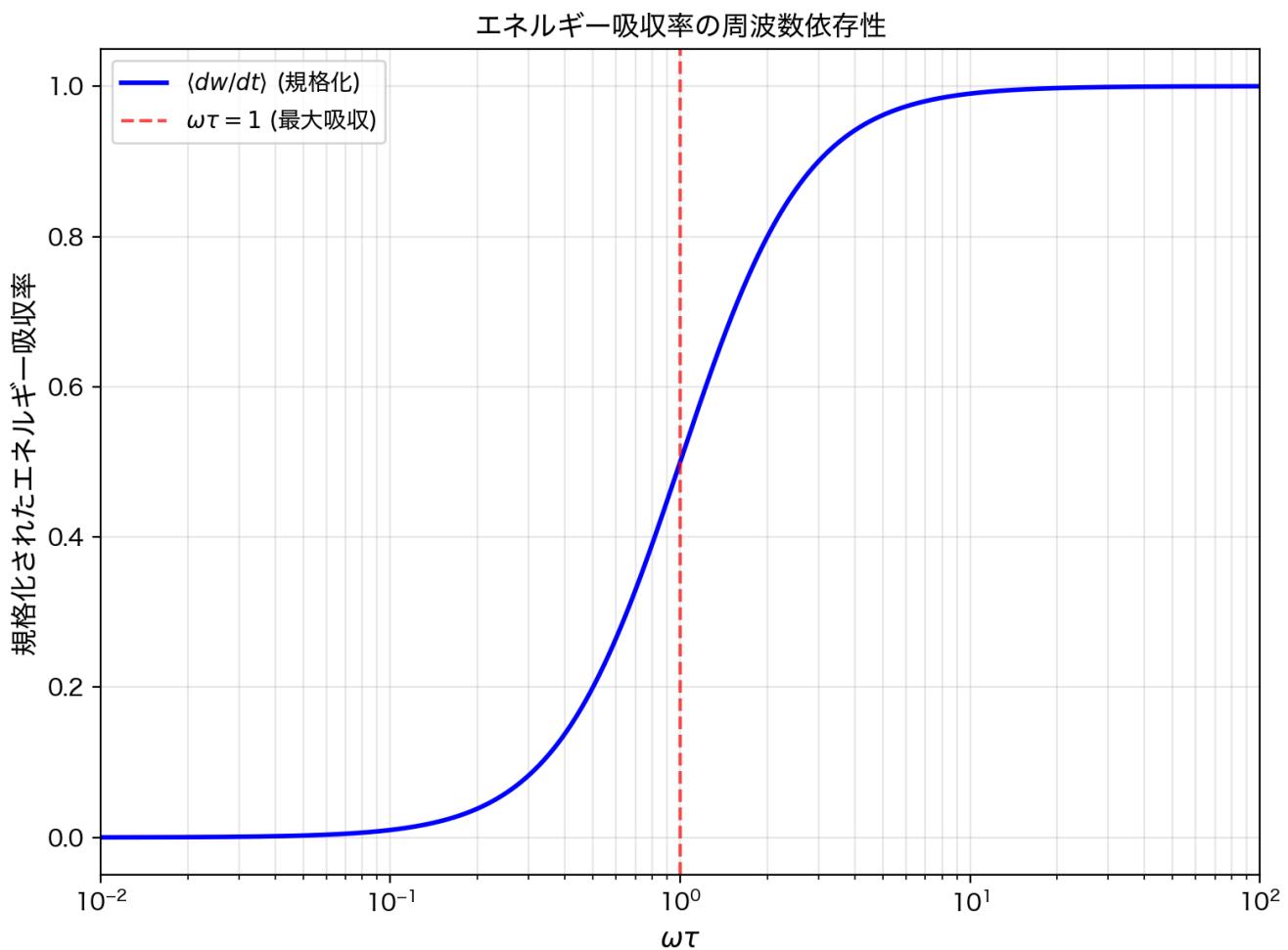


Figure 2: エネルギー吸収率の周波数依存性

- 前問で求めた $\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0 \chi_{e0} \omega \tau / (1 + \omega^2 \tau^2)$ と比較すると:

$$\left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = \frac{\omega}{2} \varepsilon''(\omega) |E_0|^2$$

- これは、誘電率の虚部がエネルギー吸収を表すことを示している

4. 実用的意義:

- マイクロ波加熱: 水分子の誘電緩和を利用した加熱技術
 - 誘電分光法: 分子の動的挙動の研究
 - 材料の損失特性の評価
-

問題2: 遅延ポテンシャルと電磁場

(2-1) 電場の積分表示式

問題: 真空中で、電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ と電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ が時間変化する場合を考える。スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} が遅延ポテンシャルの公式で与えられ、電場 \mathbf{E} が $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ で表されることを用いて、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ が以下の積分表示式で与えられることを示せ:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV'$$

ただし、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ である。

解答:

ステップ1: 遅延ポテンシャルの確認

遅延ポテンシャル:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

ここで、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ は遅延時間である。

ステップ2: 電場の計算

電場:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

第1項: $-\nabla\phi$ の計算

$$\nabla\phi = \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

ここで、 ∇ は \mathbf{r} に関する微分である。 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ なので、 $\rho(\mathbf{r}', t')$ は \mathbf{r} に依存する。

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

また、 t' の \mathbf{r} 依存性を考慮すると：

$$\nabla t' = \nabla \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) = -\frac{1}{c} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

したがって：

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \rho(\mathbf{r}', t') \right] dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}', t') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \nabla t' \right] dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}', t') - \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dV' \end{aligned}$$

したがって：

$$-\nabla \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dV'$$

第2項： $-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ の計算

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ なので、 $\frac{\partial t'}{\partial t} = 1$ である。したがって：

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} dV'$$

$\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ なので：

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} dV'$$

ステップ3：電場の最終形

2つの項を合わせると：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV'$$

ここで、 $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}$ は t' に関する偏微分であるが、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ なので、 $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t} = \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'}$ である。したがって、表記を $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t}$ に統一できる。

答え：示された。

物理的意味と考察：

1. 第1項：静電場の寄与

- $\frac{\rho(\mathbf{r}', t')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ は、クーロンの法則に対応する静電場の寄与
- ただし、電荷密度は遅延時間 t' での値である

2. 第2項：電荷密度の時間変化による寄与

- $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}$ は、電荷密度の時間変化による電場の寄与
- これは、電荷の移動や生成・消滅による効果を表す

3. 第3項: 電流密度の時間変化による寄与

- $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ は、電流密度の時間変化（加速度電流）による電場の寄与
- これは、電磁波の放射に対応する項である

4. 遅延時間の意味:

- $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ は、情報が光速 c で伝播することを表す
- 観測点 \mathbf{r} での時刻 t の電場は、電荷・電流分布の t' 時刻の状態に依存する

5. 遠方での挙動:

- 遠方 ($|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \lambda$, λ は波長) では、第3項が主要となり、電磁波として伝播する
-

(2-2) 磁場の公式

問題: 同様に、磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ の公式を導出せよ。参考として、10月3日の問題3を参照せよ。

解答:

ステップ1: 磁場の定義

磁場:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ベクトルポテンシャル:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

ここで、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ である。

ステップ2: 回転の計算

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

ベクトル恒等式:

$$\nabla \times (f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f\nabla \times \mathbf{v}$$

ここで、 $f = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 、 $\mathbf{v} = \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')$ である。 $\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')$ は \mathbf{r}' の関数であり、 \mathbf{r} には直接依存しないが、 t' を通じて \mathbf{r} に依存する。

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \\ \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

$\nabla \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')$ を計算する。 $\mathbf{i}(\mathbf{r}', t')$ は \mathbf{r}' の関数であり、 $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ を通じて \mathbf{r} に依存する。

$$\nabla \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') = \nabla \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \nabla t' = \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

$$= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

したがって:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{i}(\mathbf{r}', t') - \frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dV' \end{aligned}$$

$\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$ なので:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \int \left[\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dV'$$

または、より一般的な形として:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dV'$$

答え:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{i}(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] dV'$$

物理的意味と考察:

1. 第1項: ビオ・サバールの法則の寄与
 - $\frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ は、ビオ・サバールの法則に対応する静磁場の寄与
 - ただし、電流密度は遅延時間 t' での値である
 2. 第2項: 電流密度の時間変化による寄与
 - $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t'} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$ は、電流密度の時間変化による磁場の寄与
 - これは、変位電流や電磁誘導に対応する項である
 3. 電場と磁場の対称性:
 - 電場の公式と比較すると、電荷密度と電流密度の役割が対称的であることがわかる
 - これは、マクスウェル方程式の対称性を反映している
 4. 電磁波の伝播:
 - 遠方では、時間変化項が主要となり、電場と磁場が結合して電磁波として伝播する
-

問題3: 誘電体球による光の吸収と散乱

(3-1) 吸収断面積

問題: 真空中 (誘電率 ε_0) に置かれた小さな誘電体球 (体積 V 、複素誘電率 $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$) による光の吸収と散乱を考える。入射光は単色光で、外部電場 $E_e = E_0 \exp(-i\omega t)$ が單一周波数 ω で振動している。真空中の光のエネルギー流束 (ポインティングベクトルの大きさ) S の時間平均は $\langle S \rangle = c\varepsilon_0 |E_0|^2 / 2$ で与えられる。 c は光速である。誘電体球は光の波長より十分小さく、その分極は位相が一致した振動双極子 \mathbf{p} で近似される。

吸収断面積 C_a を c 、 V 、 ε_0 、 ε' 、 ε'' 、 ω で表せ。ただし、吸収断面積は、単位時間あたりの吸収エネルギー $-dW_a/dt$ の時間平均 $\langle dW_a/dt \rangle$ を用いて、 $C_a = \langle dW_a/dt \rangle / \langle S \rangle$ で定義される。

参考として、問題(1-2)と11月14日の問題2の、誘電体球の分極 \mathbf{P} と電場 E_e に関する単位体積あたりの吸収エネルギー率の公式を用いよ。

解答:

ステップ1: 誘電体球の分極

誘電体球が十分小さい場合、球内の電場は一様とみなせる。外部電場 $E_e = E_0 \exp(-i\omega t)$ に対して、球内の電場は境界条件から決定される。

小さな誘電体球の場合、静電場の近似が成り立つ。球内の電場:

$$E_{\text{内部}} = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_e = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \exp(-i\omega t)$$

分極ベクトル:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_{\text{内部}} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \exp(-i\omega t)$$

双極子モーメント:

$$\mathbf{p} = V\mathbf{P} = V(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \exp(-i\omega t)$$

ステップ2: 単位体積あたりの吸収エネルギー率

問題(1-2)の結果より、単位体積あたりの吸収エネルギー率の時間平均は:

$$\left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = \frac{\omega}{2} \varepsilon''(\omega) |E|^2$$

ここで、 E は球内の電場、 ε'' は誘電率の虚部である。

球内の電場の大きさ:

$$|E_{\text{内部}}|^2 = \left| \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \right|^2 = \frac{9\varepsilon_0^2}{|2\varepsilon_0 + \varepsilon|^2} |E_0|^2$$

誘電率の虚部 ε'' を用いると、球内での単位体積あたりの吸収エネルギー率:

$$\left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = \frac{\omega}{2} \varepsilon'' \left| \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2$$

ステップ3: 全吸収エネルギー率

球全体での吸収エネルギー率:

$$\left\langle \frac{dW_a}{dt} \right\rangle = V \left\langle \frac{dw}{dt} \right\rangle = V \cdot \frac{\omega}{2} \varepsilon'' \left| \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2$$

ステップ4: 吸収断面積の計算

吸収断面積:

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{\langle dW_a/dt \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{V \cdot \frac{\omega}{2} \varepsilon'' \left| \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2}{\frac{c\varepsilon_0 |E_0|^2}{2}} \\ &= \frac{V \omega \varepsilon''}{c\varepsilon_0} \left| \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \text{ なので、} |2\varepsilon_0 + \varepsilon|^2 = |2\varepsilon_0 + \varepsilon' + i\varepsilon''|^2 = (2\varepsilon_0 + \varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2$$

したがって：

$$\begin{aligned} C_a &= \frac{V\omega\varepsilon''}{c\varepsilon_0} \cdot \frac{9\varepsilon_0^2}{(2\varepsilon_0 + \varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2} \\ &= \frac{9V\omega\varepsilon_0\varepsilon''}{c[(2\varepsilon_0 + \varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2]} \end{aligned}$$

より簡潔な表現：

$\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ の場合（弱い吸収）：

$$C_a \approx \frac{9V\omega\varepsilon_0\varepsilon''}{c(2\varepsilon_0 + \varepsilon')^2}$$

答え：

$$C_a = \frac{9V\omega\varepsilon_0\varepsilon''}{c[(2\varepsilon_0 + \varepsilon')^2 + (\varepsilon'')^2]}$$

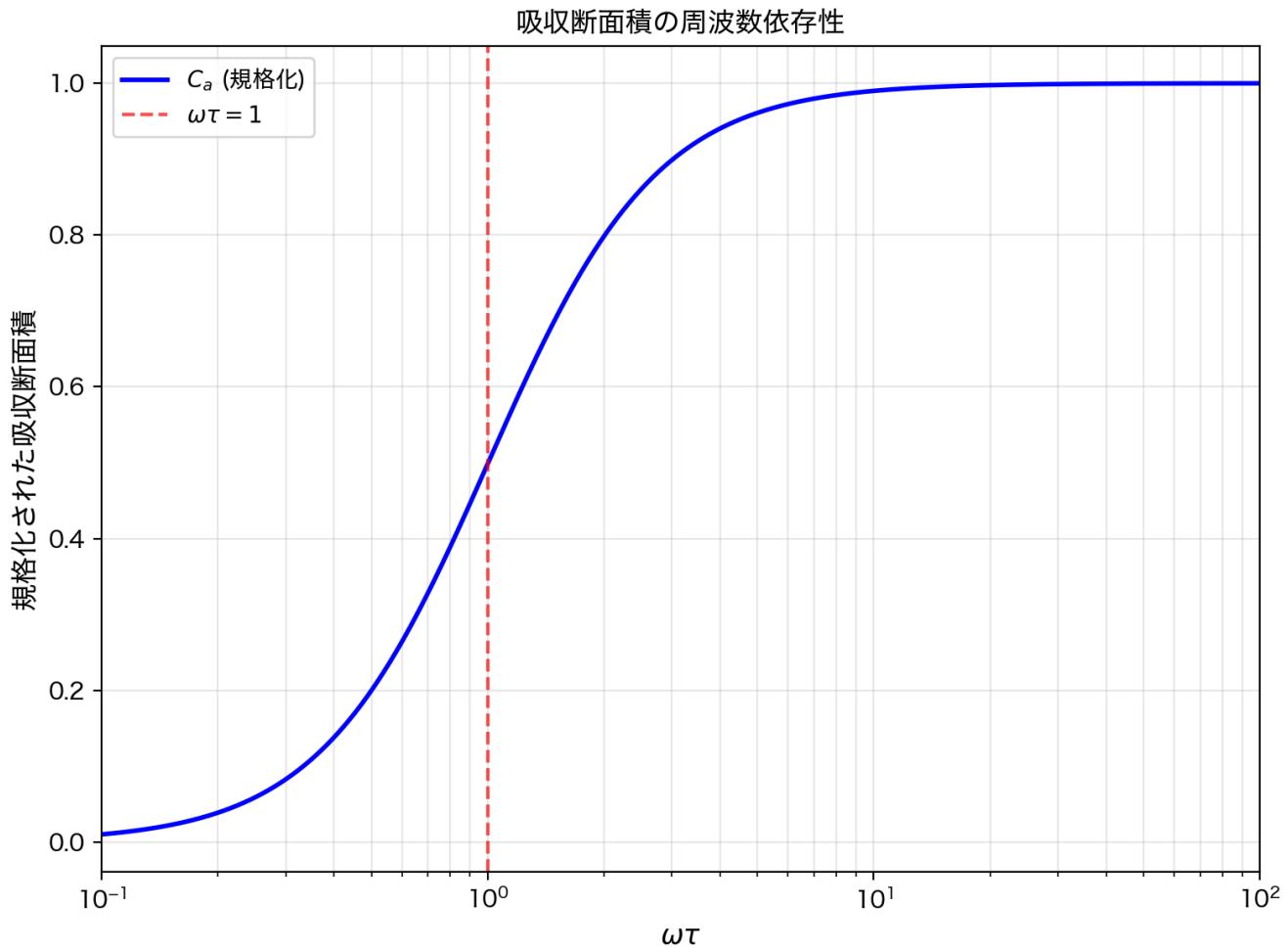


Figure 3: 吸収断面積の周波数依存性

物理的意味と考察：

1. 吸収のメカニズム:

- 誘電体球内で電場が振動し、分子の分極や電子の遷移によりエネルギーが吸収される
- 誘電率の虚部 ϵ'' が吸収の強さを表す

2. 体積依存性:

- 吸収断面積は体積 V に比例する
- これは、球が小さい場合の近似である

3. 周波数依存性:

- ω に比例する項があるが、 ϵ'' も周波数依存性を持つ
- 実際の吸収スペクトルは、 $\epsilon''(\omega)$ の周波数依存性に支配される

4. 誘電率の実部との関係:

- 分母に $(2\epsilon_0 + \epsilon')^2$ が現れる
- これは、球内の電場が誘電率の実部に依存することを示す

5. 応用:

- ナノ粒子による光吸収の研究
 - 太陽電池の光吸収効率の向上
 - 生体組織の光吸収特性の解析
-

(3-2) 散乱断面積

問題: 散乱断面積 C_s を c 、 V 、 ϵ_0 、 ϵ 、 ω で表せ。ただし、散乱断面積は、単位時間あたりの散乱エネルギー $-dW_s/dt$ の時間平均 $\langle dW_s/dt \rangle$ を用いて、 $C_s = \langle dW_s/dt \rangle / \langle S \rangle$ で定義される。

時間平均 $\langle dW_s/dt \rangle$ は、 $\langle (\text{Re}\{d^2\mathbf{p}/dt^2\})^2 \rangle / (6\pi\epsilon_0 c^3)$ で与えられる。

解答:

ステップ1: 双極子モーメントの時間微分

双極子モーメント:

$$\mathbf{p} = V(\epsilon - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \exp(-i\omega t)$$

1階時間微分:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -i\omega V(\epsilon - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \exp(-i\omega t)$$

2階時間微分:

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = (i\omega)^2 V(\epsilon - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \exp(-i\omega t) = -\omega^2 V(\epsilon - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \exp(-i\omega t)$$

実部:

$$\text{Re} \left\{ \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} \right\} = \text{Re} \left\{ -\omega^2 V(\epsilon - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \exp(-i\omega t) \right\}$$

E_0 を実数と仮定すると（一般性を失わず、位相を0に取れる）：

$$\text{Re} \left\{ \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} \right\} = -\omega^2 V \text{Re} \left\{ (\epsilon - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \right\} E_0 \cos \omega t$$

ステップ2: 散乱エネルギー率の計算

与えられた公式:

$$\left\langle \frac{dW_s}{dt} \right\rangle = \frac{\left\langle \left(\text{Re} \left\{ \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} \right\} \right)^2 \right\rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$\left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right\} \right)^2 = \omega^4 V^2 \left| \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right\} \right|^2 E_0^2 \cos^2 \omega t$$

時間平均:

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

したがって:

$$\left\langle \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right\} \right)^2 \right\rangle = \frac{\omega^4 V^2}{2} \left| \operatorname{Re} \left\{ (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right\} \right|^2 E_0^2$$

より正確には、 $\operatorname{Re}\{z\}^2$ の時間平均を計算する必要がある。 $z = z_0 \exp(-i\omega t)$ とすると:

$$\operatorname{Re}\{z\} = |z_0| \cos(\omega t - \phi)$$

$$\langle (\operatorname{Re}\{z\})^2 \rangle = |z_0|^2 \langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle = \frac{|z_0|^2}{2}$$

したがって:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \right\} \right)^2 \right\rangle &= \frac{\omega^4 V^2}{2} \left| (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2 \\ &= \frac{\omega^4 V^2}{2} \left| \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2 \end{aligned}$$

したがって:

$$\left\langle \frac{dW_s}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^4 V^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \left| \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2$$

ステップ3: 散乱断面積の計算

散乱断面積:

$$\begin{aligned} C_s &= \frac{\langle dW_s/dt \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{\frac{\omega^4 V^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \left| \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 |E_0|^2}{\frac{c\varepsilon_0 |E_0|^2}{2}} \\ &= \frac{\omega^4 V^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{2}{c\varepsilon_0} \left| \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 \\ &= \frac{\omega^4 V^2}{6\pi\varepsilon_0^2 c^4} \left| \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 \\ &= \frac{\omega^4 V^2}{6\pi c^4} \left| \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2 \end{aligned}$$

$\omega = 2\pi c/\lambda$ (λ は波長) なので、 $\omega^4 = (2\pi c/\lambda)^4$ であるが、ここでは ω のまま表す。

答え:

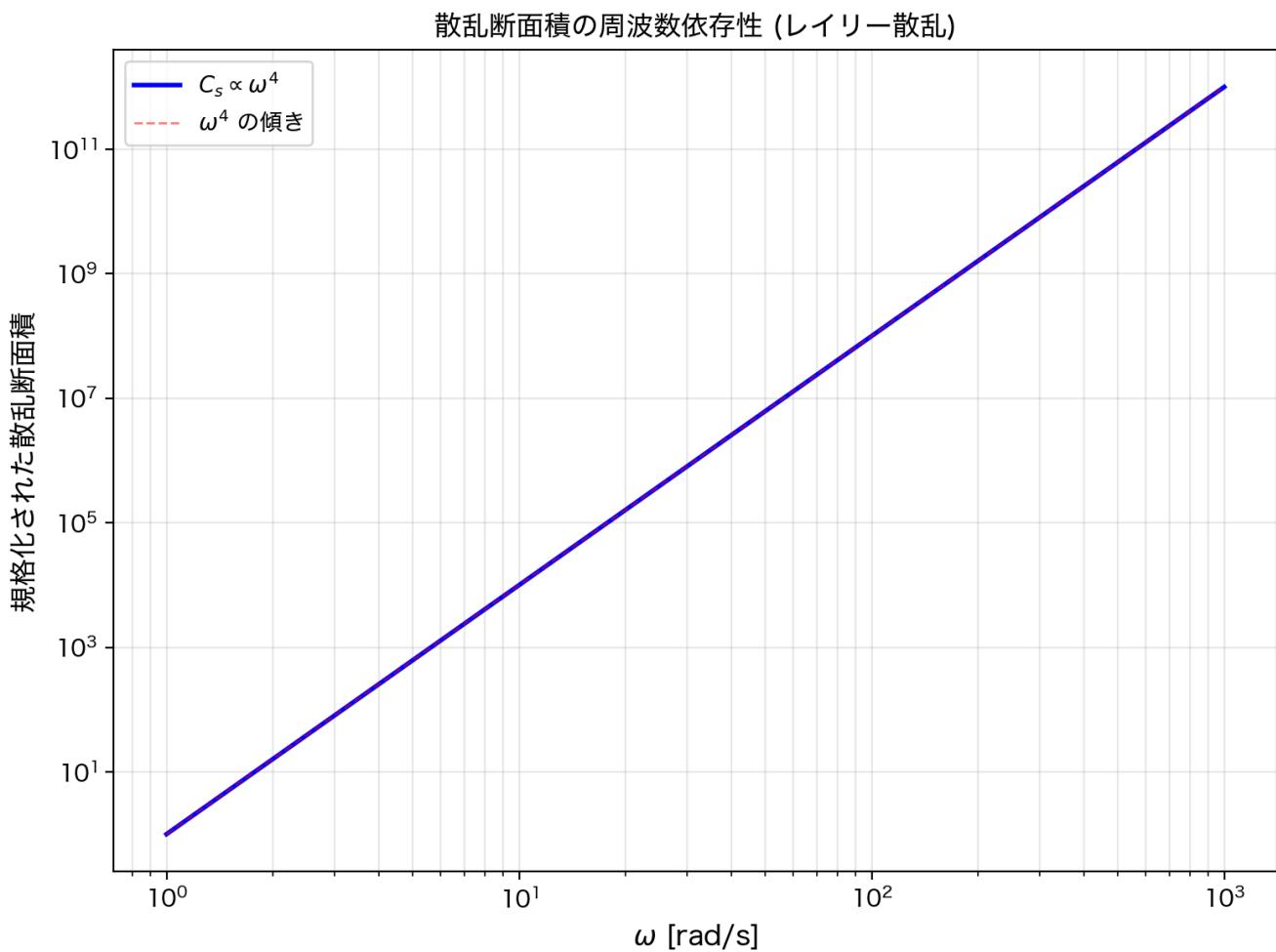


Figure 4: 散乱断面積の周波数依存性

$$C_s = \frac{\omega^4 V^2}{6\pi c^4} \left| \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} \right|^2$$

物理的意味と考察:

1. レイリー散乱:

- この結果は、レイリー散乱 (Rayleigh scattering) の公式に対応する
- 粒子が波長より十分小さい場合の散乱を記述する

2. 周波数依存性:

- 散乱断面積は ω^4 に比例する (λ^{-4} に比例)
- これが、空が青く見える理由である (短波長の光がより強く散乱される)

3. 体積依存性:

- 散乱断面積は V^2 に比例する
- これは、吸収断面積が V に比例するとの対照的である

4. 誘電率依存性:

- $|(\varepsilon - \varepsilon_0)/(2\varepsilon_0 + \varepsilon)|^2$ の項が現れる
- 誘電率が真空の誘電率に近い場合、散乱は弱い
- 誘電率が大きい場合、散乱は強くなる

5. 応用:

- 大気中の光散乱 (空の色、夕焼け)
- 生体組織の光散乱
- ナノ粒子の光散乱特性
- レーザー光の散乱

問題4: 界面での反射と透過

問題設定の詳細

平面電磁波が真空中から物質へ垂直入射する場合を考える。この問題では、以下の重要な物理現象を理解する必要がある:

- 電磁波の境界条件: 電場と磁場の接線成分が連続
- 特性インピーダンス: 媒質の電磁的特性を表す重要なパラメータ
- 反射と透過: エネルギー保存則に基づく反射率と透過率の関係
- 位相変化: 反射波の位相が入射波に対してどのように変化するか

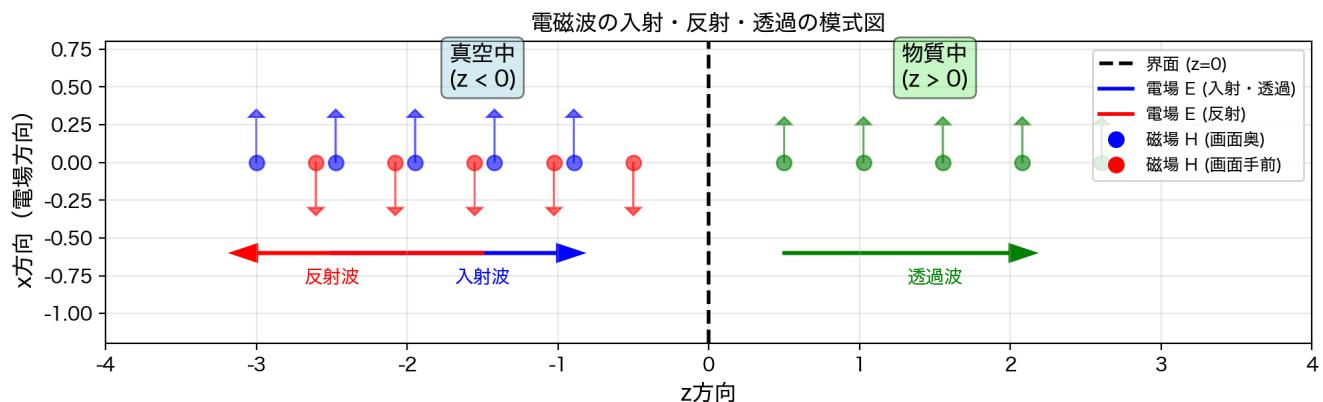


Figure 5: 電磁波の入射・反射・透過の模式図

図の説明: - 青い矢印: 入射波と透過波の電場 (x方向) - 赤い矢印: 反射波の電場 (x方向、反転) - 青い丸: 入射波と透過波の磁場 (y方向、画面奥方向) - 赤い丸: 反射波の磁場 (y方向、画面手前方向) - 黒い破線: 界面 ($z=0$)

(4-1) 反射率

問題: 角周波数 ω 、波数 k の平面電磁波 ($\mathbf{E} = E_0 \exp[i(kz - \omega t)]$, $\mathbf{H} = H_0 \exp[i(kz - \omega t)]$) が、真空中 (誘電率 ϵ_0 、透磁率 μ_0) から物質 (誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、 ϵ と μ は実数) へ、 z 方向に垂直に入射する。界面は $z = 0$ にあり、物質は $z \geq 0$ の領域を占める。

ϵ_0 、 μ_0 、 ϵ 、 μ を用いて反射率を求めよ。ただし、平面波がマクスウェル方程式を満たす条件の1つである $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ の関係を用いよ。講義で用いた近似 $\mu = \mu_0$ は用いないこと。

解答:

ステップ1: 境界条件の設定

入射波、反射波、透過波を以下のように表す:

入射波 (真空中、 $z < 0$) :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= E_{i0} \exp[i(k_0 z - \omega t)] \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_i &= H_{i0} \exp[i(k_0 z - \omega t)] \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

ここで、 $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 、 $H_{i0} = E_{i0}/(\eta_0)$ 、 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ は真空中の特性インピーダンスである。

重要なポイント: - 平面波では、電場と磁場は互いに垂直で、進行方向にも垂直である (横波) - 電場と磁場の振幅比は特性インピーダンスで決まる: $E/H = \eta$ - 真空中の特性インピーダンス: $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$

反射波 (真空中、 $z < 0$) :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r &= E_{r0} \exp[i(-k_0 z - \omega t)] \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_r &= -H_{r0} \exp[i(-k_0 z - \omega t)] \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

ここで、 $H_{r0} = E_{r0}/(\eta_0)$ である。反射波の進行方向が $-z$ 方向なので、 \mathbf{H} の符号が負になる。

重要なポイント: - 反射波は $-z$ 方向に進行するため、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ の方向を保つために、 \mathbf{H} の符号が反転する - これは、電場と磁場の右手系の関係を保つためである

透過波 (物質中、 $z > 0$) :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t &= E_{t0} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{H}_t &= H_{t0} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

ここで、 $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ 、 $H_{t0} = E_{t0}/(\eta)$ 、 $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ は物質中の特性インピーダンスである。

重要なポイント: - 物質中の波数は $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} = \omega n/c$ で与えられる (n は屈折率) - 物質中の特性インピーダンスは $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ で与えられる - 一般に、 $\eta \neq \eta_0$ であるため、反射が起こる

ステップ2: 境界条件の適用

$z = 0$ での境界条件:

1. 電場の接線成分の連続:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

2. 磁場の接線成分の連続:

$$H_{i0} - H_{r0} = H_{t0}$$

$H_{i0} = E_{i0}/\eta_0$ 、 $H_{r0} = E_{r0}/\eta_0$ 、 $H_{t0} = E_{t0}/\eta$ なので:

$$\frac{E_{i0}}{\eta_0} - \frac{E_{r0}}{\eta_0} = \frac{E_{t0}}{\eta}$$

$$E_{i0} - E_{r0} = \frac{\eta_0}{\eta} E_{t0}$$

ステップ3: 反射係数の計算

E_{r0} と E_{t0} を E_{i0} で表す。

第1の境界条件より:

$$E_{t0} = E_{i0} + E_{r0}$$

第2の境界条件に代入:

$$E_{i0} - E_{r0} = \frac{\eta_0}{\eta} (E_{i0} + E_{r0})$$

$$E_{i0} - E_{r0} = \frac{\eta_0}{\eta} E_{i0} + \frac{\eta_0}{\eta} E_{r0}$$

$$E_{i0} - \frac{\eta_0}{\eta} E_{i0} = E_{r0} + \frac{\eta_0}{\eta} E_{r0}$$

$$E_{i0} \left(1 - \frac{\eta_0}{\eta}\right) = E_{r0} \left(1 + \frac{\eta_0}{\eta}\right)$$

反射係数:

$$r = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{1 - \eta_0/\eta}{1 + \eta_0/\eta} = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0}$$

特性インピーダンス:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

したがって:

$$r = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon} - \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{\sqrt{\mu/\epsilon} + \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon_0} - \sqrt{\mu_0\epsilon}}{\sqrt{\mu\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0\epsilon}}$$

ステップ4: 反射率の計算

反射率は、反射係数の絶対値の2乗:

$$R = |r|^2 = \left| \frac{\sqrt{\mu\epsilon_0} - \sqrt{\mu_0\epsilon}}{\sqrt{\mu\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0\epsilon}} \right|^2$$

ϵ と μ は実数なので:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu\epsilon_0} - \sqrt{\mu_0\epsilon}}{\sqrt{\mu\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0\epsilon}} \right)^2$$

答え:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu\epsilon_0} - \sqrt{\mu_0\epsilon}}{\sqrt{\mu\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0\epsilon}} \right)^2$$

透過率の計算:

エネルギー保存則より、反射率 R と透過率 T の関係は:

$$R + T = 1$$

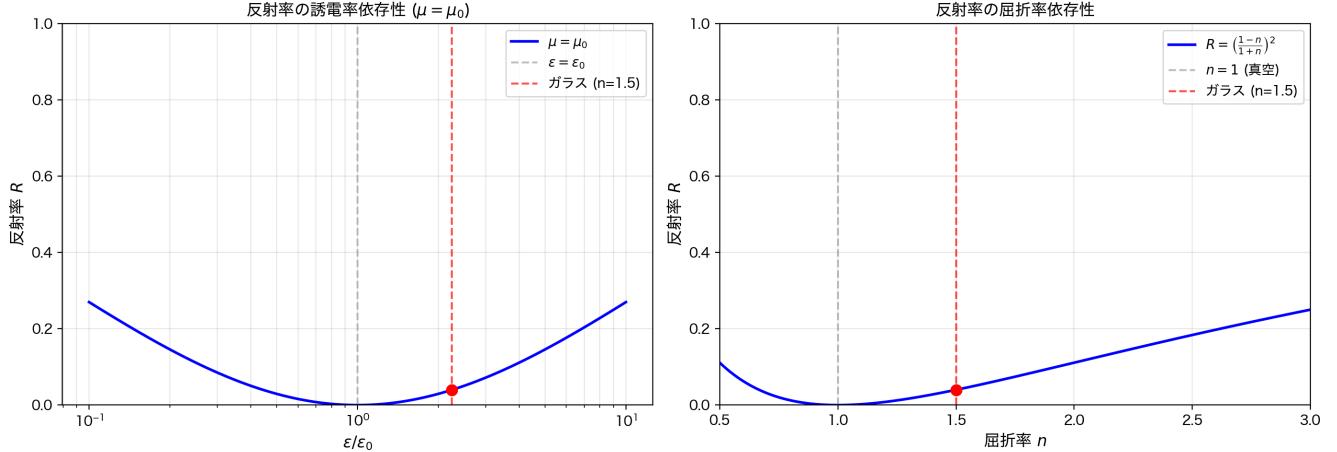


Figure 6: 反射率の図示

透過率は、透過波のエネルギー流束と入射波のエネルギー流束の比で定義される。詳細な計算により：

$$T = \frac{4\eta_0\eta}{(\eta_0 + \eta)^2}$$

これは、反射率の公式と組み合わせると、 $R + T = 1$ を満たすことを確認できる。

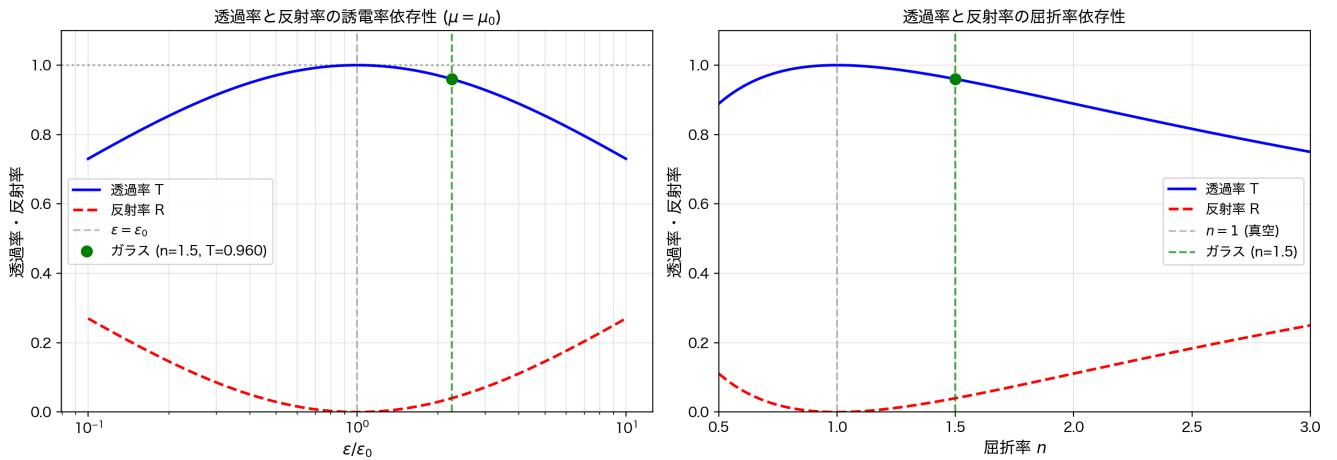


Figure 7: 透過率と反射率の詳細

物理的意味と考察:

1. 特性インピーダンスの役割:

- 反射率は、2つの媒質の特性インピーダンスの比で決まる
- 特性インピーダンスが等しい場合 ($\eta = \eta_0$)、反射は起こらない（インピーダンス整合）
- これは、伝送線路理論やアンテナ設計で重要な概念である

2. 対称性:

- 式は μ と ϵ について対称的である
- これは、電場と磁場の対称性を反映している
- マクスウェル方程式の双対性に対応する

3. 極限 cases:

- $\mu = \mu_0$ の場合: $R = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_0} - \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\epsilon}} \right)^2$ (通常の誘電体)

- $\varepsilon = \varepsilon_0$ の場合: $R = \left(\frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\mu} + \sqrt{\mu_0}} \right)^2$ (磁性体)
- $\varepsilon \rightarrow \infty$ の場合: $R \rightarrow 1$ (完全反射、金属のような挙動)
- $\varepsilon \rightarrow 0$ の場合: $R \rightarrow 1$ (完全反射、プラズマのような挙動)

4. 実用的意義:

- 反射防止コーティングの設計: 多層膜により反射を最小化
 - 光学素子の反射損失の評価
 - アンテナのインピーダンス整合
 - 電磁波シールドの設計
-

(4-2) 位相が π だけ変化する条件

問題: 入射波と反射波の電場成分の位相が、反射面で π だけ変化する条件を示せ。

解答:

問題の意味:

「位相が π だけ変化する」とは、反射波の電場が入射波の電場に対して位相が π (180度) ずれることを意味する。これは、反射波の電場が入射波の電場と逆位相になることを表す。

ステップ1: 反射係数の符号と位相の関係

反射係数は、反射波の振幅と入射波の振幅の比として定義される:

$$r = \frac{E_{r0}}{E_{i0}}$$

ここで、 E_{r0} と E_{i0} は一般に複素数である。反射係数が実数の場合、その符号が位相変化を決定する。

反射係数:

$$r = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon_0} - \sqrt{\mu_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu\varepsilon_0} + \sqrt{\mu_0\varepsilon}}$$

$z = 0$ (界面) での電場は、入射波と反射波の重ね合わせ:

$$\begin{aligned} E(0, t) &= E_{i0} \exp(-i\omega t) + E_{r0} \exp(-i\omega t) = (E_{i0} + E_{r0}) \exp(-i\omega t) \\ &= E_{i0}(1 + r) \exp(-i\omega t) \end{aligned}$$

重要な観察: $-r > 0$ の場合: $E_{r0} = rE_{i0} > 0$ (実数と仮定) なので、反射波は入射波と同位相 $-r < 0$ の場合: $E_{r0} = rE_{i0} < 0$ (実数と仮定) なので、反射波は入射波と逆位相 (位相が π 変化)

したがって、位相が π だけ変化する条件は、 $r < 0$ 、すなわち反射係数が負であることである。

ステップ2: 条件の導出 (詳細)

$r < 0$ の条件を導出する。

反射係数の分子と分母を確認: 分子: $\sqrt{\mu\varepsilon_0} - \sqrt{\mu_0\varepsilon}$ 分母: $\sqrt{\mu\varepsilon_0} + \sqrt{\mu_0\varepsilon}$

分母は常に正 ($\sqrt{\mu\varepsilon_0} > 0$, $\sqrt{\mu_0\varepsilon} > 0$ なので、その和も正) である。

したがって、 $r < 0$ となるためには、分子が負でなければならない:

$$\sqrt{\mu\varepsilon_0} - \sqrt{\mu_0\varepsilon} < 0$$

$$\sqrt{\mu\varepsilon_0} < \sqrt{\mu_0\varepsilon}$$

両辺は正なので、2乗しても不等号の向きは変わらない:

$$(\sqrt{\mu\epsilon_0})^2 < (\sqrt{\mu_0\epsilon})^2$$

$$\mu\epsilon_0 < \mu_0\epsilon$$

両辺を $\mu_0\epsilon_0$ で割ると:

$$\frac{\mu}{\mu_0} < \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

または、逆に書くと:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} > \frac{\mu}{\mu_0}$$

結論: 位相が π だけ変化する条件は、相対誘電率が相対透磁率より大きいことである。

答え:

位相が π だけ変化する条件は:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} > \frac{\mu}{\mu_0}$$

すなわち、相対誘電率が相対透磁率より大きい場合である。

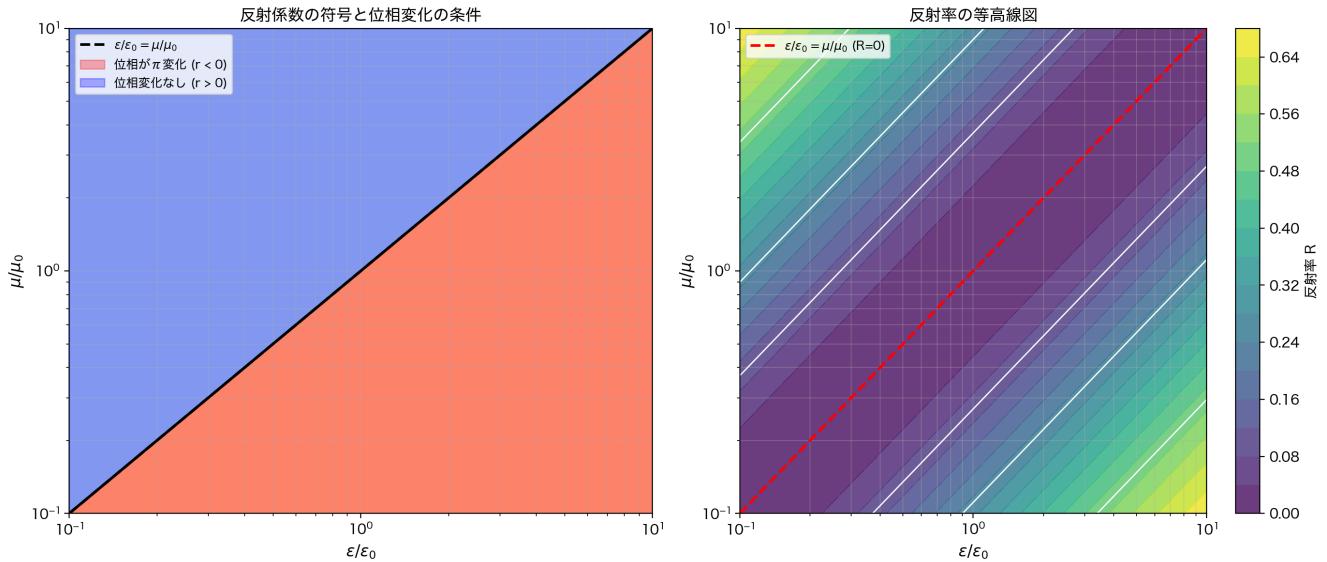


Figure 8: 位相変化の条件の可視化

図の説明: - 左図: 反射係数の符号と位相変化の条件。赤い領域では位相が π 変化 ($r < 0$)、青い領域では位相変化なし ($r > 0$) - 右図: 反射率の等高線図。 $\epsilon/\epsilon_0 = \mu/\mu_0$ の線上で反射率が 0 になる

図の説明: - 左図: 反射係数の実部と虚部の変化。 $\epsilon/\epsilon_0 < 1$ では $r > 0$ 、 $\epsilon/\epsilon_0 > 1$ では $r < 0$ - 右図: 反射係数の位相。 $\epsilon/\epsilon_0 > 1$ では位相が $-\pi$ (位相が π 変化)

図の説明: - 左上・左下: 位相が π 変化する場合 (ガラス)。反射波は入射波と逆位相 - 右上・右下: 位相変化なしの場合 (磁性体)。反射波は入射波と同位相

詳細な物理的意味と考察:

1. 位相の反転のメカニズム:

位相が π 変化する物理的メカニズムを理解するため、界面での電場の連続性を考える。

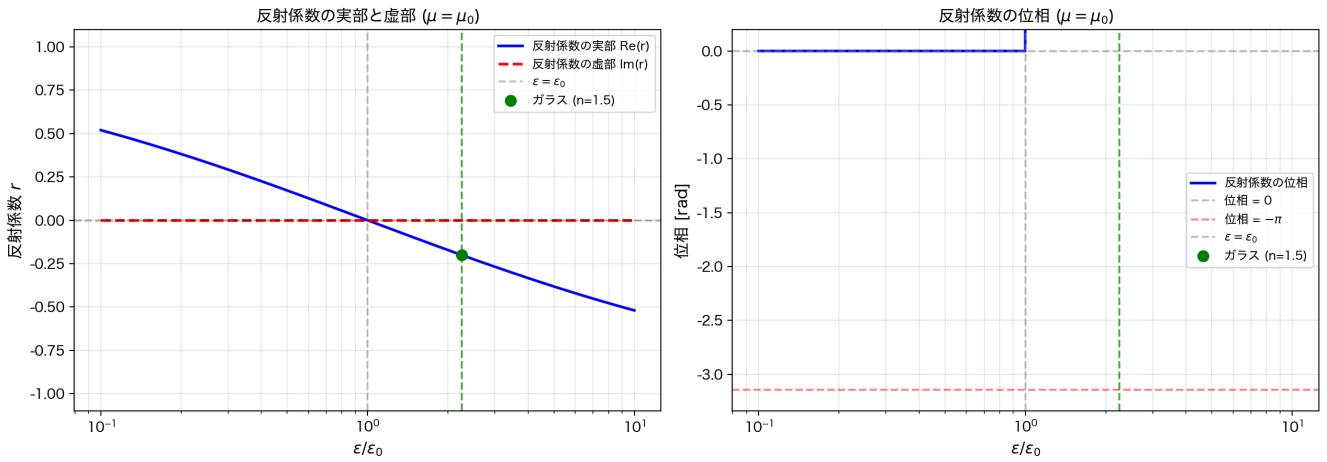


Figure 9: 反射俓数と位相の関係

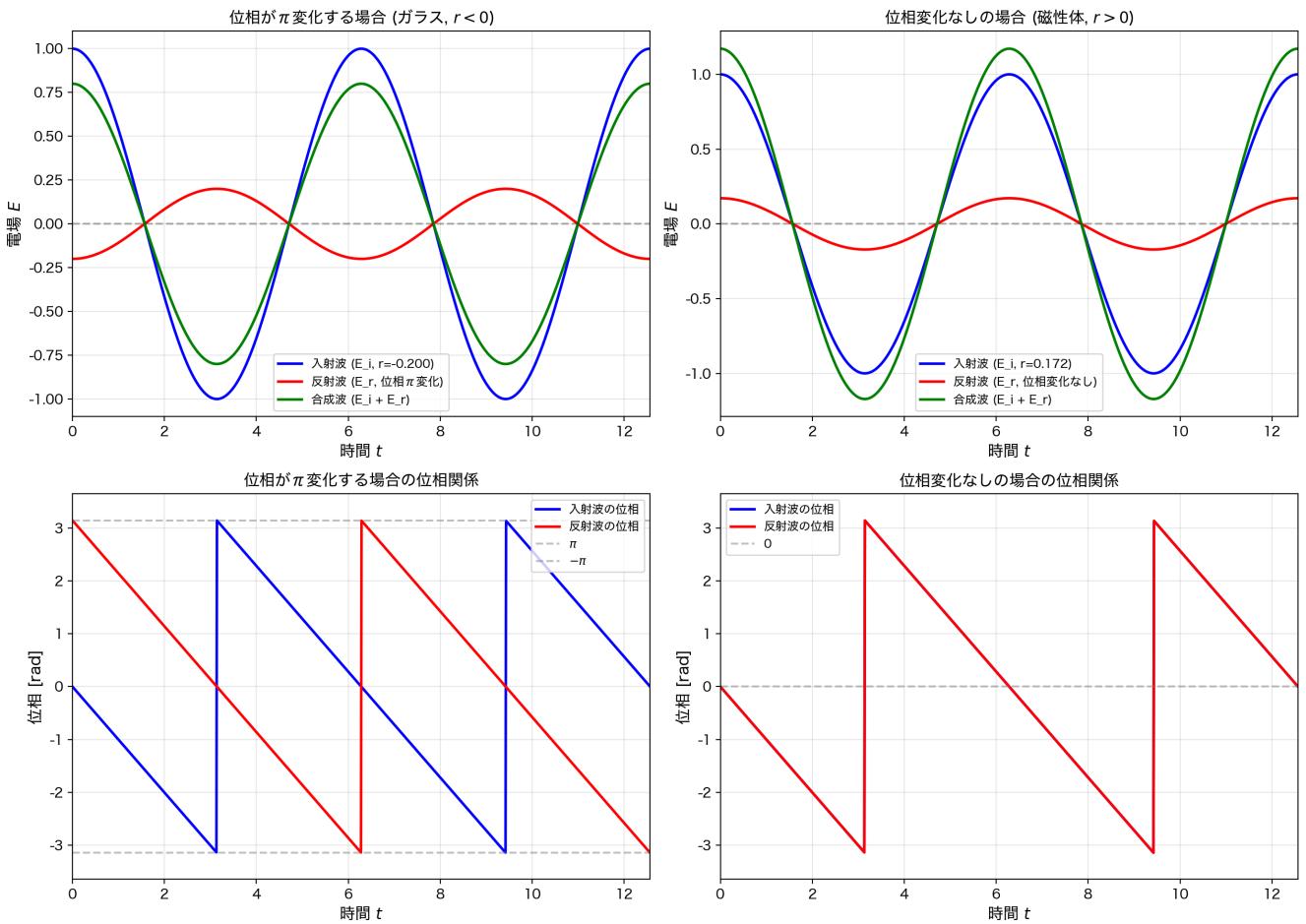


Figure 10: 位相変化の時間変化

界面 ($z = 0$) での電場:

$$E(0, t) = E_{i0} \exp(-i\omega t) + E_{r0} \exp(-i\omega t) = (E_{i0} + E_{r0}) \exp(-i\omega t)$$

透過波の電場 (物質中) :

$$E_t(0, t) = E_{t0} \exp(-i\omega t)$$

電場の接線成分の連続性より:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

ここで、 $E_{r0} = rE_{i0}$ なので:

$$E_{i0}(1 + r) = E_{t0}$$

- $r < 0$ の場合: $1 + r < 1$ なので、透過波の振幅は入射波より小さい
- このとき、反射波は入射波と逆位相になり、界面での電場を小さくする
- これは、**固定端反射** (fixed end reflection) に対応する

2. 固定端反射と自由端反射の対比:

固定端反射 ($r < 0$):

- 反射波は入射波と逆位相
- 界面での合成波の振幅は小さくなる
- 例: ガラス表面での光の反射

自由端反射 ($r > 0$):

- 反射波は入射波と同位相
- 界面での合成波の振幅は大きくなる
- 例: 低インピーダンス媒質から高インピーダンス媒質への反射

3. 通常の誘電体での位相変化:

多くの誘電体では $\mu \approx \mu_0$ なので、条件は:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} > 1$$

すなわち、 $\varepsilon > \varepsilon_0$ のときに位相が反転する。

具体例:

- ガラス ($n = 1.5$): $\varepsilon/\varepsilon_0 = n^2 = 2.25 > 1 = \mu/\mu_0 \rightarrow$ 位相が π 変化
- 水 ($n \approx 1.33$): $\varepsilon/\varepsilon_0 = n^2 \approx 1.77 > 1 = \mu/\mu_0 \rightarrow$ 位相が π 変化
- ダイヤモンド ($n \approx 2.4$): $\varepsilon/\varepsilon_0 = n^2 \approx 5.76 > 1 = \mu/\mu_0 \rightarrow$ 位相が π 変化

4. 磁性体での位相変化:

$\mu > \mu_0$ の磁性体では、条件が異なる。

具体例:

- $\mu/\mu_0 = 2, \varepsilon/\varepsilon_0 = 1.5$ の場合:
- $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1.5 < 2 = \mu/\mu_0$ なので、位相は反転しない ($r > 0$)
- $\mu/\mu_0 = 1.5, \varepsilon/\varepsilon_0 = 3$ の場合:
- $\varepsilon/\varepsilon_0 = 3 > 1.5 = \mu/\mu_0$ なので、位相が π 変化 ($r < 0$)

5. 反射係数の符号と位相の関係 (数学的詳細):

反射係数が実数の場合:

$$r = |r|e^{i\phi_r}$$

ここで、 ϕ_r は反射係数の位相である。

- $r > 0$ の場合: $\phi_r = 0$ (位相変化なし)
- $r < 0$ の場合: $\phi_r = \pi$ (位相が π 変化)

実際、 $r < 0$ のとき:

$$r = -|r| = |r|e^{i\pi}$$

したがって、反射波の電場:

$$E_r = rE_i = |r|e^{i\pi}E_i = |r|E_i e^{i(\phi_i + \pi)}$$

これは、入射波の位相に π を加えたものに対応する。

6. 界面での電場の連続性の詳細:

界面での電場の連続性は、マクスウェル方程式の境界条件から導かれる:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

ここで、 \mathbf{n} は界面の法線ベクトル、 \mathbf{E}_1 と \mathbf{E}_2 は界面の両側の電場である。

垂直入射の場合、電場は界面に平行なので:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

この条件と、磁場の連続性から反射係数が決定される。

7. エネルギー保存との関係:

反射率 $R = |r|^2$ と透過率 T の関係:

$$R + T = 1$$

位相変化はエネルギー保存には影響しないが、界面での電場と磁場の分布に影響する。

8. 実用的意義:

- 反射防止コーティング: 多層膜により反射を最小化する際、各層での位相変化を考慮する必要がある
- 光学素子の設計: レンズやミラーの設計では、位相変化が像の品質に影響する
- アンテナ設計: アンテナのインピーダンス整合では、位相変化を考慮する必要がある
- 干渉計: マイケルソン干渉計などでは、位相変化が干渉パターンに影響する

(4-3) ガラス表面での反射率

問題: 真空中から屈折率 $n = \sqrt{\varepsilon\mu}/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 1.5$ のガラス表面に垂直入射する場合の反射率を求めよ。ここでは、 $\mu = \mu_0$ と仮定する。

解答:

ステップ1: 屈折率と誘電率の関係

屈折率:

$$n = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 1.5$$

$\mu = \mu_0$ と仮定すると:

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = 1.5$$

したがって:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2 = 2.25$$

ステップ2: 反射率の計算

(4-1)の結果で、 $\mu = \mu_0$ とすると：

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} - \sqrt{\mu_0 \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} + \sqrt{\mu_0 \varepsilon}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon}} \right)^2 \\ = \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}}{1 + \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}} \right)^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2$$

$n = 1.5$ を代入：

$$R = \left(\frac{1-1.5}{1+1.5} \right)^2 = \left(\frac{-0.5}{2.5} \right)^2 = \left(\frac{-1}{5} \right)^2 = \frac{1}{25} = 0.04$$

答え：

$$R = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 = \left(\frac{1-1.5}{1+1.5} \right)^2 = 0.04 = 4\%$$

物理的意味と考察：

1. フレネルの公式：

- この結果は、垂直入射に対するフレネルの公式 (Fresnel equations) に対応する
- $R = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \right)^2$ の形で表される

2. 反射率の値：

- ガラス表面での反射率は約4%である
- これは、窓ガラスで観察される反射に対応する

3. 応用：

- 反射防止コーティングの設計
- 光学素子の反射損失の評価

(4-4) 負の誘電率の場合

問題： ε が負の場合、反射率にどのような影響があるか説明せよ。

解答：

問題の意味：

通常の誘電体では、誘電率 ε は正の値である。しかし、特定の条件下では、誘電率が負の値を取ることがある。このような場合、電磁波の伝播特性が大きく変化し、完全反射が起こる。

ステップ1：負の誘電率の意味と波数の変化

$\varepsilon < 0$ の場合、物質の特性が大きく変化する。

波数の計算：

平面波の波数は、マクスウェル方程式から：

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$$

$\varepsilon > 0$ の場合、 k は実数であり、電磁波は物質中を伝播する。

$\varepsilon < 0, \mu > 0$ の場合：

$$k = \omega \sqrt{(-|\varepsilon|)\mu} = \omega \sqrt{|\varepsilon|\mu} \cdot \sqrt{-1} = i\omega \sqrt{|\varepsilon|\mu}$$

すなわち、 k は純虚数になる:

$$k = i\kappa, \quad \kappa = \omega\sqrt{|\varepsilon|\mu} > 0$$

電磁波の空間依存性:

波数が純虚数の場合、電磁波の空間依存性は:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \exp[i(kz - \omega t)] = E_0 \exp[i(i\kappa z - \omega t)] = E_0 \exp(-\kappa z) \exp(-i\omega t) \\ &= E_0 \exp(-z/\delta) \exp(-i\omega t) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta = 1/\kappa = 1/(\omega\sqrt{|\varepsilon|\mu})$ は侵入深さ（スキン深さ）である。

これは、電磁波が物質中で指數関数的に減衰することを意味する。このような波はエバネッセント波 (evanescent wave) と呼ばれる。

ステップ2: 反射率の計算 (詳細)

反射率の公式:

$$R = \left| \frac{\sqrt{\mu\varepsilon_0} - \sqrt{\mu_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu\varepsilon_0} + \sqrt{\mu_0\varepsilon}} \right|^2 = |r|^2$$

$\varepsilon < 0$ の場合、 $\sqrt{\varepsilon}$ は純虚数になる。 $\sqrt{\varepsilon} = i\sqrt{|\varepsilon|}$ とすると:

$$r = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon_0} - \sqrt{\mu_0\varepsilon}}{\sqrt{\mu\varepsilon_0} + \sqrt{\mu_0\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon_0} - i\sqrt{\mu_0|\varepsilon|}}{\sqrt{\mu\varepsilon_0} + i\sqrt{\mu_0|\varepsilon|}}$$

これは複素数である。分子と分母の絶対値を計算する。

分子の絶対値:

$$|\sqrt{\mu\varepsilon_0} - i\sqrt{\mu_0|\varepsilon|}| = \sqrt{(\sqrt{\mu\varepsilon_0})^2 + (\sqrt{\mu_0|\varepsilon|})^2} = \sqrt{\mu\varepsilon_0 + \mu_0|\varepsilon|}$$

分母の絶対値:

$$|\sqrt{\mu\varepsilon_0} + i\sqrt{\mu_0|\varepsilon|}| = \sqrt{(\sqrt{\mu\varepsilon_0})^2 + (\sqrt{\mu_0|\varepsilon|})^2} = \sqrt{\mu\varepsilon_0 + \mu_0|\varepsilon|}$$

したがって:

$$|r| = \frac{|\sqrt{\mu\varepsilon_0} - i\sqrt{\mu_0|\varepsilon|}|}{|\sqrt{\mu\varepsilon_0} + i\sqrt{\mu_0|\varepsilon|}|} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon_0 + \mu_0|\varepsilon|}}{\sqrt{\mu\varepsilon_0 + \mu_0|\varepsilon|}} = 1$$

結論:

$$R = |r|^2 = 1$$

すなわち、反射率は100%となり、完全反射が起こる。

ステップ3: 物理的解釈

$\varepsilon < 0$ の場合、物質はメタマテリアル (metamaterial) やプラズマのような性質を示す。

- 電磁波は物質中に侵入できない (完全反射)
- 反射率は100%になる
- 透過率は0%になる (エネルギー保存則より)
- これは、金属やプラズマの挙動に対応する

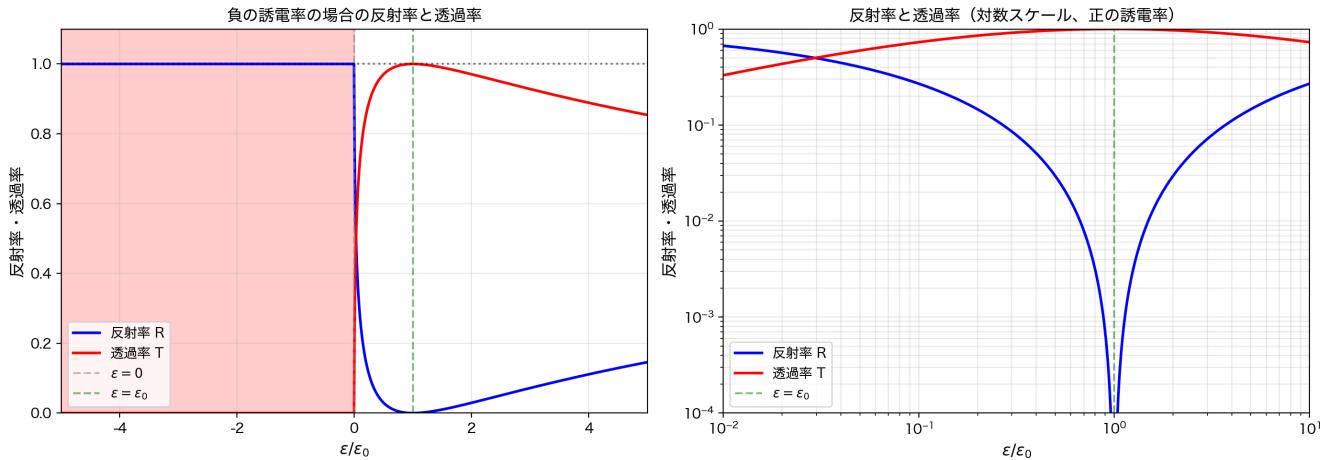


Figure 11: 負の誘電率の場合の反射率と透過率

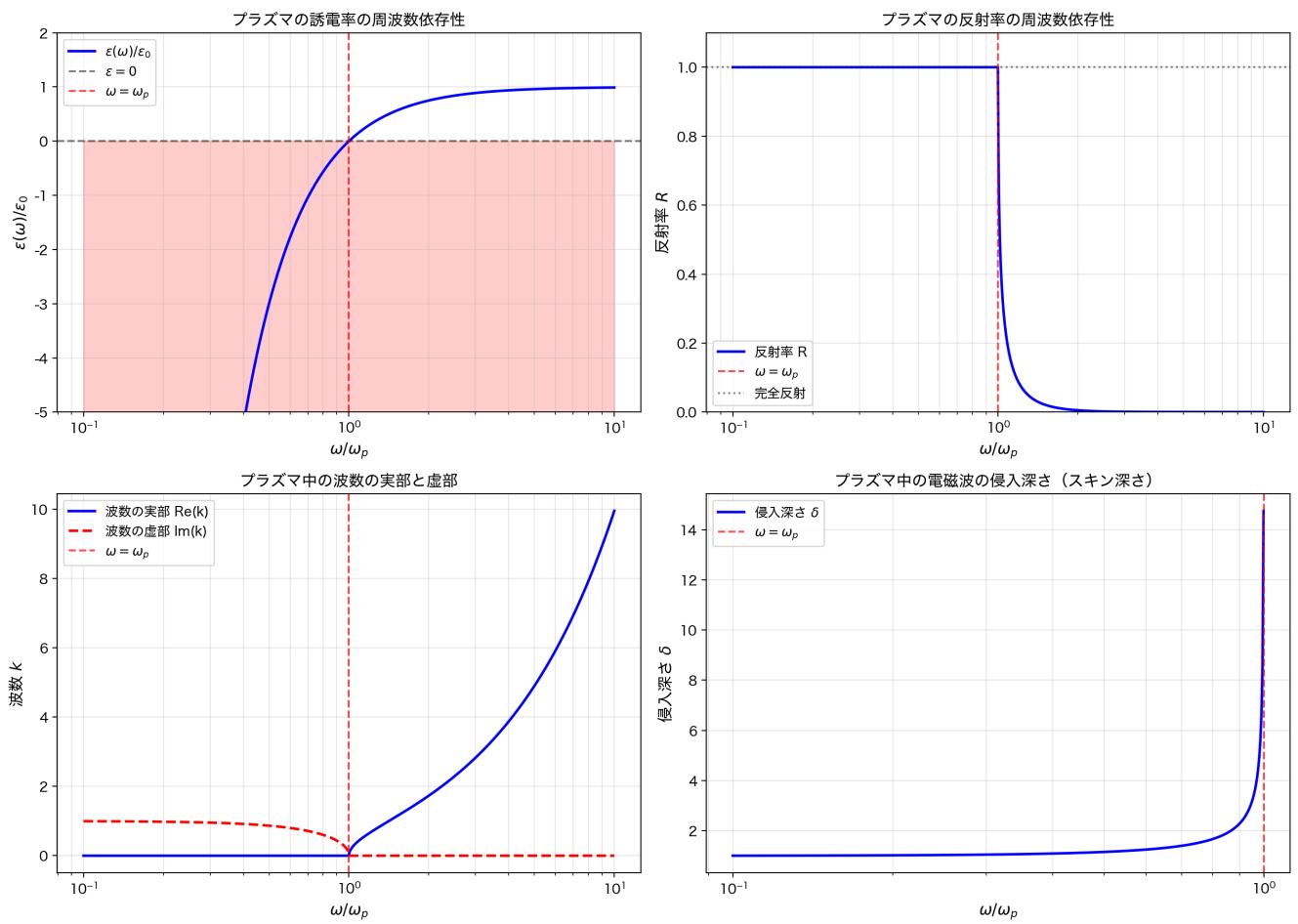


Figure 12: プラズマの誘電率の周波数依存性

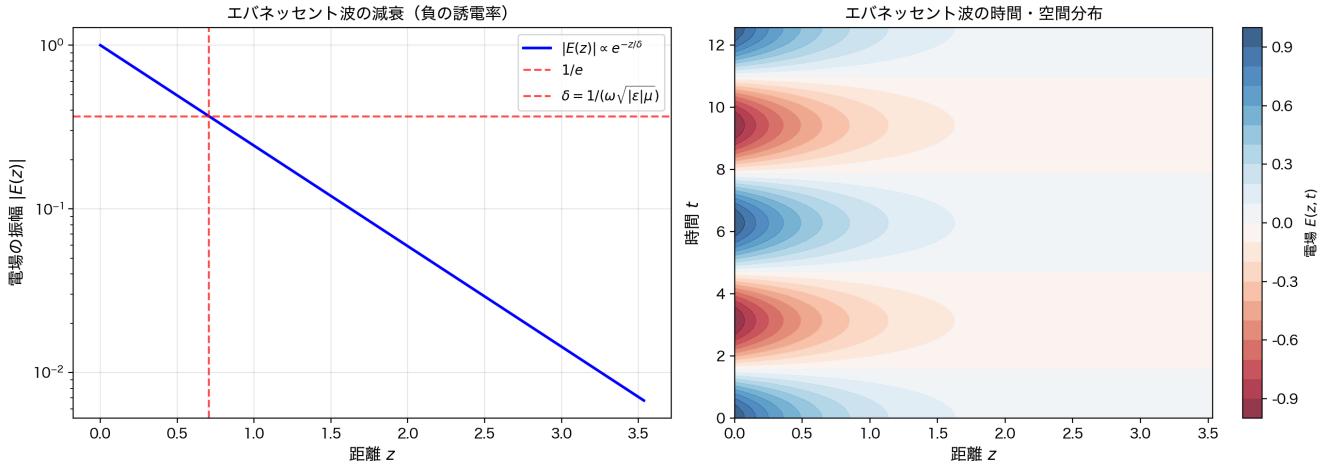


Figure 13: エバネッセント波の減衰

図の説明: - 左図: 誘電率が負の場合、反射率 $R = 1$ となり、透過率 $T = 0$ になる（完全反射） - 右図: 正の誘電率の場合の反射率と透過率の対数スケール表示

図の説明: - 左上: プラズマの誘電率の周波数依存性。 $\omega < \omega_p$ で負になる - 右上: プラズマの反射率の周波数依存性。 $\omega < \omega_p$ で完全反射 - 左下: 波数の実部と虚部。 $\omega < \omega_p$ で虚部が大きくなる - 右下: 侵入深さ（スキン深さ）。 $\omega < \omega_p$ で有限の値を持つ

図の説明: - 左図: エバネッセント波の振幅の指数関数的減衰 - 右図: エバネッセント波の時間・空間分布。距離とともに減衰する

答え:

$\varepsilon < 0$ の場合、反射率 $R = 1$ となり、完全反射が起こる。電磁波は物質中に侵入できず、すべて反射される。

詳細な物理的意味と考察:

1. プラズマの誘電率（ドルーデモデル）:

プラズマは、自由電子とイオンからなる電離気体である。プラズマの誘電率は、ドルーデモデル (Drude model) により記述される:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

ここで、 $\omega_p = \sqrt{n e^2 / (m \varepsilon_0)}$ はプラズマ周波数である (n は電子密度、 e は電子電荷、 m は電子質量)。

重要な特性:

- $\omega > \omega_p$ の場合: $\varepsilon(\omega) > 0 \rightarrow$ 電磁波は伝播できる
- $\omega < \omega_p$ の場合: $\varepsilon(\omega) < 0 \rightarrow$ 電磁波は完全反射される
- $\omega = \omega_p$ の場合: $\varepsilon(\omega) = 0 \rightarrow$ 臨界点

具体例:

- 電離層: プラズマ周波数は約 1-10 MHz。これより低い周波数の電波は反射される
- 短波ラジオ: 1.6-30 MHz の周波数帯。電離層で反射され、長距離伝播が可能
- 金属: プラズマ周波数は可視光領域（約 10^{15} Hz）。可視光は反射される

2. 金属の誘電率（ドルーデモデル）:

金属では、自由電子がプラズマ振動を起こす。金属の誘電率は、損失を考慮したドルーデモデルで記述される:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \right)$$

ここで、 γ は減衰定数（電子の衝突による損失）である。

低周波数領域 ($\omega \ll \omega_p$) :

- ・ 実部: $\epsilon'(\omega) \approx -\epsilon_0 \omega_p^2 / \omega^2 < 0$
- ・ 虚部: $\epsilon''(\omega) \approx \epsilon_0 \omega_p^2 \gamma / \omega^3 > 0$
- ・ 電磁波は強く減衰し、反射される

可視光領域:

- ・ 多くの金属（金、銀、銅など）では、プラズマ周波数が可視光領域にある
- ・ これにより、金属は高い反射率を示す（鏡の原理）

3. エバネッセント波の詳細:

$\epsilon < 0$ の場合、電磁波は物質中で指數関数的に減衰する。

電場の空間分布:

$$E(z, t) = E_0 \exp(-z/\delta) \exp(-i\omega t)$$

侵入深さ（スキン深さ）:

$$\delta = \frac{1}{\omega \sqrt{|\epsilon| \mu}} = \frac{1}{\kappa}$$

物理的意味:

- ・ 電磁波は界面から距離 δ 以内にのみ存在する
- ・ δ は周波数が高いほど小さくなる
- ・ これは、高周波の電磁波ほど物質中に侵入できないことを意味する

エネルギー流:

- ・ エバネッセント波は、エネルギーを運ばない（実効的なポインティングベクトルは0）
- ・ すべてのエネルギーは反射される

4. スキン効果 (Skin Effect) :

導体中の電流の集中現象をスキン効果という。

導体の誘電率:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{\sigma}{\omega}$$

ここで、 σ は導電率である。低周波数では、虚部が支配的になり、電磁波は減衰する。

スキン深さ:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

これは、電流が導体表面に集中する深さを表す。

5. メタマテリアル:

メタマテリアルは、人工的に作られた構造により、自然界には存在しない電磁特性を実現する材料である。

負の誘電率の実現:

- ・ 金属ナノワイヤや金属薄膜の構造により、負の誘電率を実現できる
- ・ プラズモン共鳴を利用する

負の透磁率の実現:

- ・ スプリットリング共鳴器 (SRR) などの構造により、負の透磁率を実現できる

負の屈折率:

- ・ $\epsilon < 0$ かつ $\mu < 0$ の場合、屈折率 $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ が負になる

- これにより、負の屈折率メタマテリアルが実現される
- スネルの法則が逆転し、特異な光学特性が得られる

応用:

- 超解像レンズ: 回折限界を超えた解像度
- 不可視化技術: 物体を電磁波から隠す
- アンテナ: 小型化と高効率化

6. 完全反射の物理的メカニズム:

負の誘電率の場合、完全反射が起こる理由を理解する。

特性インピーダンス:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$\epsilon < 0$ の場合、 η は純虚数になる。これにより、透過波は存在できず、すべてのエネルギーが反射される。

境界条件:

- 電場の連続性: $E_i + E_r = E_t$
- 磁場の連続性: $H_i - H_r = H_t$
- $E_t = 0$ (透過波が存在しない) とすると、 $E_r = -E_i$ となり、完全反射が起こる

7. 周波数依存性の重要性:

負の誘電率は、周波数に強く依存する。

プラズマの場合:

- 低周波数 ($\omega < \omega_p$): $\epsilon < 0 \rightarrow$ 完全反射
- 高周波数 ($\omega > \omega_p$): $\epsilon > 0 \rightarrow$ 伝播可能

金属の場合:

- 可視光より低い周波数: $\epsilon < 0 \rightarrow$ 高い反射率
- 可視光より高い周波数 (紫外線): $\epsilon > 0 \rightarrow$ 透過可能

8. 実用的意義:

- 電磁波シールド: 金属箱や導電性材料による電磁波の遮蔽
- アンテナ設計: 反射板や導波管の設計
- プラズマ物理: 電離層、核融合プラズマの研究
- 光学デバイス: メタマテリアルによる新しい光学素子の開発
- 通信技術: 電離層を利用した長距離通信
- 材料科学: 新しい電磁特性を持つ材料の開発

まとめ

本演習問題では、以下の重要な電磁気学の概念を扱った:

- 誘電緩和と周波数分散: 極性分子の分極の時間的応答と、誘電率の周波数依存性
- 遅延ポテンシャル: 時間変化する電荷・電流分布による電磁場の生成
- 光の吸収と散乱: 小さな粒子による光の相互作用
- 界面での反射と透過: 電磁波の境界での挙動

これらの概念は、光学、プラズマ物理学、材料科学など、多くの分野で重要な役割を果たしている。