

Contents

物理実験学期末試験 詳細解答	1
目次	1
問 1-1: グラフの問題点の指摘 (20 点)	7
問 1-2: ログロググラフと片対数グラフの関数形 (10 点)	8
問 1-3: ログロググラフが適切な例 (10 点)	11
問 1-4: 片対数グラフが適切な例 (10 点)	11
問 2-1: 誤差伝播の公式 (15 点)	12
問 2-2: パイプの壁厚の計算 (10 点)	14
問 2-3: 有効数字の掛け算 (5 点)	16
問 2-4: 誤差のある値の和 (5 点)	16
問 3-1: ノギスによるパイプの内径測定 (10 点)	17
問 3-2: アナログテスターの読み取り (15 点)	18
問 3-3: オシロスコープの波形読み取り (20 点)	19
問 4-1: 論理回路の真理値表 (30 点)	21
問 4-2: 論理回路の名称 (15 点)	23
問 4-3: 4 ビットカウンタの波形 (20 点)	23
問 5-1: ガンマ線の検出頻度の計算 (10 点)	25
問 5-2: ポアソン分布の適用 (10 点)	26
問 5-3: 短時間測定でのポアソン分布 (10 点)	28
問 5-4: 分散の加法性 (10 点)	29
問 5-5: 検出器面積の推定 (10 点)	29
問 6-1: 分子・原子の実在性についての論述 (50 点)	30

物理実験学期末試験 詳細解答

2024 年度秋学期「物理実験学」期末試験 2025 年 1 月 28 日実施

目次

1. 重要公式クイックリファレンス
2. よくある間違いと注意点 ☆ **重要**
3. テスト前の振り返り：解法・公式・単位変換まとめ
4. 大問 1: グラフの描き方
5. 大問 2: 誤差と有効数字
6. 大問 3: 装置の読み取り
7. 大問 4: 論理回路
8. 大問 5: 確率と統計の基礎
9. 大問 6: 分子・原子の実在性

重要公式クイックリファレンス ★

試験中に素早く参照するための公式集

誤差伝播

和・差の誤差伝播

$$\delta z = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (z = x \pm y)$$

積・商の誤差伝播

$$\frac{\delta z}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y|}\right)^2} \quad (z = xy \text{ または } z = x/y)$$

べき乗の誤差伝播

$$\frac{\delta z}{|z|} = |n| \frac{\delta x}{|x|} \quad (z = x^n)$$

対数の誤差伝播

$$\delta(\ln x) = \frac{\delta x}{|x|}$$

一般関数の誤差伝播

$$\delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2} \quad (z = f(x, y))$$

変数	説明
δz	結果の不確かさ
$\delta x, \delta y$	各測定値の不確かさ
z	計算結果
x, y	測定値

☆ 注意: 和・差と積・商で公式が異なる (混同しやすい)

グラフ

ログロググラフで直線になる関数形

$$y = ax^b \Rightarrow \log y = \log a + b \log x$$

片対数グラフで直線になる関数形

$$y = a \cdot e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$$

装置の読み取り

装置	読み取り精度	不確かさ
ノギス	最小読み取り目盛まで	最小読み取り目盛 / 2
アナログテスター	最小目盛の 1/5 まで	最小目盛の 1/10
オシロスコープ	最小グリッドの 1/5 まで	-

☆ 注意: アナログテスターのレンジ倍率を忘れない (R × 10 など)

統計

ポアソン分布 - 確率質量関数: $P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ - 平均 = 分散 = λ - 標準偏差 = $\sqrt{\lambda}$

統計的不確かさ

$$\sigma_N = \sqrt{N} \quad (N \text{ は検出数})$$

分散の加法性

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

ガンマ線検出

立体角 (近似)

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \quad (\text{検出器のサイズが距離に比べて十分小さい場合})$$

検出頻度 (カウント率)

$$R = \frac{S}{4\pi r^2} \times N_0$$

面積推定の不確かさ

$$\delta S = \frac{4\pi r^2}{N_0} \sqrt{N}$$

放射性崩壊

崩壊の法則

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

半減期

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

有効数字

- ・ **掛け算・割り算**: 最も有効数字が少ない数値に合わせる
- ・ **足し算・引き算**: 最も小数点以下の桁数が少ない数値に合わせる
- ・ **不確かさの表記**: 不確かさは1桁または2桁、測定値の有効桁は不確かさに合わせる

単位変換 (主要なもの)

物理量	変換
長さ	1 m = 100 cm = 1000 mm
時間	1 s = 1000 ms = $10^6 \mu\text{s}$ = 10^9ns
電圧	1 V = 1000 mV = $10^6 \mu\text{V}$
電流	1 A = 1000 mA = $10^6 \mu\text{A}$
抵抗	1 k Ω = 1000 Ω , 1 M Ω = $10^6 \Omega$
面積	1 m ² = 10^4cm^2 = 10^6mm^2

よくある間違いと注意点 ☆

誤差伝播

- ・ ☆ **和・差と積・商で公式が異なる** (混同しやすい)
 - － 和・差: 絶対不確かさの二乗和の平方根
 - － 積・商: 相対不確かさの二乗和の平方根
- ・ ☆ **相対不確かさと絶対不確かさを混同しない**
- ・ ☆ **べき乗の誤差伝播では指数が重要** ($z = x^n$ のとき、 $\delta z/|z| = |n|\delta x/|x|$)

有効数字

- ・ ☆ 掛け算・割り算と足し算・引き算でルールが異なる
 - 掛け算・割り算: 有効数字の桁数
 - 足し算・引き算: 小数点以下の桁数
- ・ ☆ 不確かさの有効桁数に合わせて測定値を表記する
 - 例: 13.23 ± 0.02 mm (不確かさ 2 桁、測定値も小数点以下 2 桁)

装置の読み取り

- ・ ☆ アナログテスターのレンジ倍率を忘れない ($R \times 10$ など)
- ・ ☆ オシロスコープのグラウンドレベルを考慮する
 - 波高 = (ピーク位置 - グラウンドレベル) \times 垂直軸スケール
- ・ ☆ ノギスの読み取りは主尺 + バーニア尺

グラフ

- ・ ☆ 欠損データの区間は直線で結ばない
- ・ ☆ 軸のラベルに単位を必ず記載
- ・ ☆ ログロググラフと片対数グラフの使い分け
 - ログログ: $y = ax^b$ のべき乗則
 - 片対数: $y = ae^{bx}$ の指数関数

統計

- ・ ☆ ポアソン分布では平均 = 分散 = λ
- ・ ☆ 統計的不確かさは \sqrt{N} で与えられる (N は検出数)
- ・ ☆ 分散の加法性は独立な確率変数に対してのみ成り立つ

単位変換

- ・ ☆ 計算前に必ず単位を統一する
- ・ ☆ 面積の単位変換に注意 ($1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$)

テスト前の振り返り：解法・公式・単位変換まとめ

重要な公式と定義

1. ログロググラフと片対数グラフ

ログロググラフで直線になる関数形：

$$y = ax^b \Rightarrow \log y = \log a + b \log x$$

(ログロググラフ上で直線となる)

片対数グラフで直線になる関数形：

$$y = a \cdot b^x \quad \text{または} \quad y = a \cdot e^{bx}$$

$$\Rightarrow \log y = \log a + x \log b \quad \text{または} \quad \ln y = \ln a + bx$$

(片対数グラフ上で直線となる)

グラフ作成の原則： 1. 軸のラベル：物理量名と単位を必ず記載 2. 目盛り：読み取りやすい間隔で設定（主目盛りと副目盛り） 3. データ点：明確なマーカーで表示 4. 凡例：複数のデータ系列がある場合は必ず記載 5. 欠損データ：データがない区間は直線で結ばない 6. グリッド線：読み取りを容易にするため追加 7. 適切なスケール：データが全体に分布するように範囲を設定

2. 誤差伝播の公式

和・差の誤差伝播：

$$z = x \pm y \Rightarrow \delta z = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$$

積・商の誤差伝播：

$$z = xy \text{ または } z = \frac{x}{y} \\ \Rightarrow \frac{\delta z}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{|x|}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{|y|}\right)^2}$$

一般関数の誤差伝播：

$$z = f(x, y) \Rightarrow \delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2}$$

特殊な関数の誤差伝播：- 対数関数： $\delta(\ln x) = \frac{\delta x}{|x|}$ - べき乗関数： $z = x^n$ のとき、 $\frac{\delta z}{|z|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$ - 積・商の一

般化： $z = x_1 x_2 \cdots x_n$ のとき、 $\frac{\delta z}{|z|} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta x_i}{|x_i|}\right)^2}$

☆ 注意: 和・差と積・商で公式が異なる (混同しやすい)

3. 有効数字 掛け算・割り算：- 最も有効数字が少ない数値に合わせる - 例： $3.24 \times 2.83 = 9.17$ (有効数字 3 桁)

足し算・引き算：- 最も小数点以下の桁数が少ない数値に合わせる - 例： $4.23 + 25.34 = 29.57$ (小数点以下 2 桁)

不確かさの表記：- 不確かさは 1 桁または 2 桁で表記 - 測定値の有効桁は不確かさの最小有効桁に合わせる - 例： $13.23 \pm 0.02 \text{ mm}$ (不確かさ 2 桁、測定値も小数点以下 2 桁)

4. 装置の読み取り

ノギス (バーニアカリパー)：- 読み取り方法：主尺の読み取り + バーニア尺の読み取り - 不確かさ：最小読み取り目盛の半分 - 例：最小読み取り目盛 $0.05 \text{ mm} \rightarrow$ 不確かさ 0.025 mm

アナログテスター (マルチメーター)：- 読み取り方法：最小目盛の $1/5$ まで読み取る - 不確かさ：最小目盛の $1/5$ の半分 = 最小目盛の $1/10$ - レンジの適用：読み取り値にレンジの係数を掛ける (例： $R \times 10$ レンジ)

☆ 注意: レンジ倍率を忘れない

オシロスコープ：- 読み取り方法：最小グリッドの $1/5$ まで読み取る - 波高：ピーク電圧 = (ピーク位置 - グラウンドレベル) \times 垂直軸スケール - 半値幅：最大値と最小値の差の半分の高さにおける時間幅

☆ 注意: グラウンドレベルを考慮する

5. トランジスタと論理ゲート

NPN トランジスタ：- ベース-エミッタ間電圧： $V_{BE} \approx 0.6 \text{ V}$ で ON 状態 ★ - ON 状態：コレクタ電圧 $\approx 0 \text{ V}$ (飽和状態) - OFF 状態：コレクタ電圧 $\approx +5 \text{ V}$ (プルアップ抵抗により)

論理ゲート：- NAND ゲート： $\overline{A \cdot B}$ (入力がすべて 1 のときのみ出力 0) - NOT ゲート： \overline{A} (入力の反転) - AND ゲート： $A \cdot B$ (NAND + NOT で実現可能)

D フリップフロップ (DFF) : - 動作 : クロックエッジ (立ち上がり) で D→Q に転送 - 出力 : Q (通常出力)、 \bar{Q} (反転出力) - トグル動作 : D 入力に \bar{Q} を接続すると、クロックごとに状態が反転

6. ポアソン分布

確率質量関数 :

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

性質 : - 平均 = 分散 = λ ★ - 標準偏差 = $\sqrt{\lambda}$ - ガンマ線検出などランダムイベントのカウント数に適用

分散の加法性 : 独立な確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の和の分散 :

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

7. ガンマ線検出の公式

立体角 (近似) :

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

ただし、 S は検出器の面積、 r は距離。検出器のサイズが距離に比べて十分小さい場合の近似。

検出頻度 (カウント率) :

$$R = \frac{S}{4\pi r^2} \times N_0$$

ここで、 N_0 は放射源からの放射線の放出率 (カウント/秒)。

統計的不確かさ : ポアソン分布に従う検出数 N の標準偏差 :

$$\sigma_N = \sqrt{N}$$

面積推定の不確かさ (誤差伝播) :

$$\delta S = \frac{4\pi r^2}{N_0} \delta N = \frac{4\pi r^2}{N_0} \sqrt{N}$$

8. 放射性崩壊と半減期

崩壊の法則 :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

半減期 :

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$$

ここで、 λ は崩壊定数。

単位変換

長さ : - 1 m = 100 cm = 1000 mm - 1 cm = 10 mm - 1 mm = 1000 μ m

時間 : - 1 s = 1000 ms = 10^6 μ s = 10^9 ns - 1 ms = 1000 μ s = 10^6 ns

電圧 : - 1 V = 1000 mV = 10^6 μ V - 1 mV = 1000 μ V

電流 : - 1 A = 1000 mA = 10^6 μ A - 1 mA = 1000 μ A

抵抗： $-1\text{ k}\Omega = 1000\text{ }\Omega - 1\text{ M}\Omega = 10^6\text{ }\Omega$

面積： $-1\text{ m}^2 = 10^4\text{ cm}^2 = 10^6\text{ mm}^2 - 1\text{ cm}^2 = 10^{-4}\text{ m}^2 = 100\text{ mm}^2$

頻度： $-1\text{ Hz} = 1\text{ 回/秒} = 1\text{ s}^{-1}$

大問 1: グラフの描き方

問 1-1: グラフの問題点の指摘 (20 点)

問題文

図 1 のように、名古屋の 2024 年 8 月 1 日と 2025 年 1 月 1 日の時間ごとの気温を比較したグラフである。ただし、2024 年 8 月 1 日の 11 時から 17 時までのデータは欠損している。

グラフにおいて不適切なプロット方法を 5 つ以上指摘し、理由と改善方法を述べよ。

解答

問題点 1: X 軸のラベルがない 理由： - 横軸が何を表しているか（時刻であることは問題文から推測できるが）が不明確 - 単位が記載されていない

改善方法： X 軸に「時刻 (時)」または「Time (hour)」とラベルを追加する。

問題点 2: 欠損データを直線で結んでいる 理由： - 欠損データの区間を直線で結ぶと、実際に測定していない時間の気温が存在するかのように誤解される - データの信頼性を損なう表現となる

改善方法： - 欠損データの区間は線を引かずに空白にする - または、データがないことを明示するために点線や破線で示すか、注釈を入れる

問題点 3: 目盛りの間隔が適切でない 理由： - 目盛りが 6 時間間隔のため、データ点の正確な時刻を読み取ることが困難

改善方法： - 主目盛りを 3 時間間隔 (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24) にする - または、主目盛りを 6 時間間隔のまま、副目盛りを 1 時間間隔で入れる

問題点 4: データ点のマーカーが不統一または不明瞭 理由： - 連続した線で結ばれているため、個々のデータ点がどの時刻の測定値かが分かりにくい

改善方法： - 各データ点を明確なマーカー（丸、三角など）で表示する

問題点 5: グリッド線がない 理由： - グリッド線がないと、データ点の値を正確に読み取ることが困難

改善方法： - 主目盛りと副目盛りに対応するグリッド線を追加する

問題点 6: Y 軸の範囲が最適でない 理由： - Y 軸の範囲が 0°C から 40°C となっているが、実際のデータはおおむね 5°C から 35°C の範囲に収まっている - データの細かい変化が見えにくくなる

改善方法： - Y 軸の範囲をデータの最小値と最大値に合わせて調整する

物理的意味と考察

このグラフは、同じ地点（名古屋）における夏（8 月）と冬（1 月）の気温変化を比較している。季節による気温の日変化パターンの違いを視覚的に理解するために作成されている。

観察される傾向：

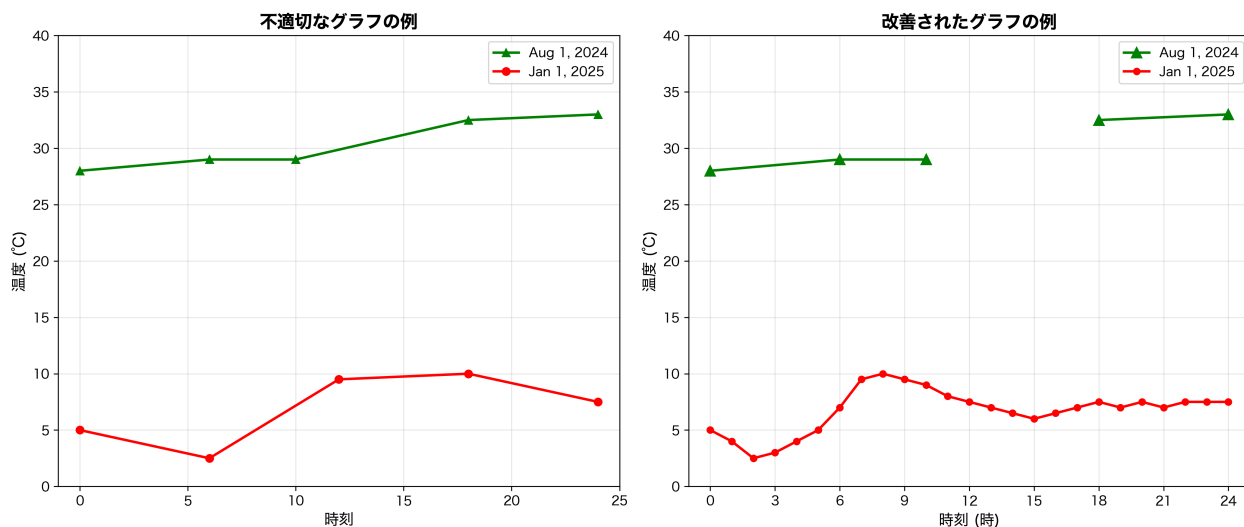


Figure 1: グラフの問題点の例

1. **8月1日**：全体的に気温が高い（25-35℃程度）。日中に気温が上昇する傾向がある。
2. **1月1日**：全体的に気温が低い（5-10℃程度）。日中の気温変化は比較的小さい。

問題の意味：

不適切なグラフは、データの解釈を誤らせたり、重要な情報を見落としたりする原因となる。特に、欠損データの処理は、データの信頼性と直接関係する重要な問題である。科学実験においてデータを適切に可視化することの重要性を問うている。

問 1-2: ログロググラフと片対数グラフの関数形（10 点）

問題文

ログロググラフと片対数グラフに適切な関数形を答えよ。横軸を x 、縦軸を y とし、 y と x の関係を定数 a 、 b 、 c などを用いて表せ。

解答

ログロググラフで直線になる関数形

$$y = ax^b$$

ここで、 $a > 0$ 、 b は実数である。

導出：

式の両辺の常用対数を取ると：

$$\log y = \log(ax^b) = \log a + b \log x$$

ここで、 $X = \log x$ 、 $Y = \log y$ と置くと：

$$Y = \log a + bX$$

これは Y を X の関数として見たときに、傾き b 、切片 $\log a$ の直線である。

物理的例： - 万有引力の法則： $F \propto r^{-2}$ - 振動数と波長： $f \propto \lambda^{-1}$

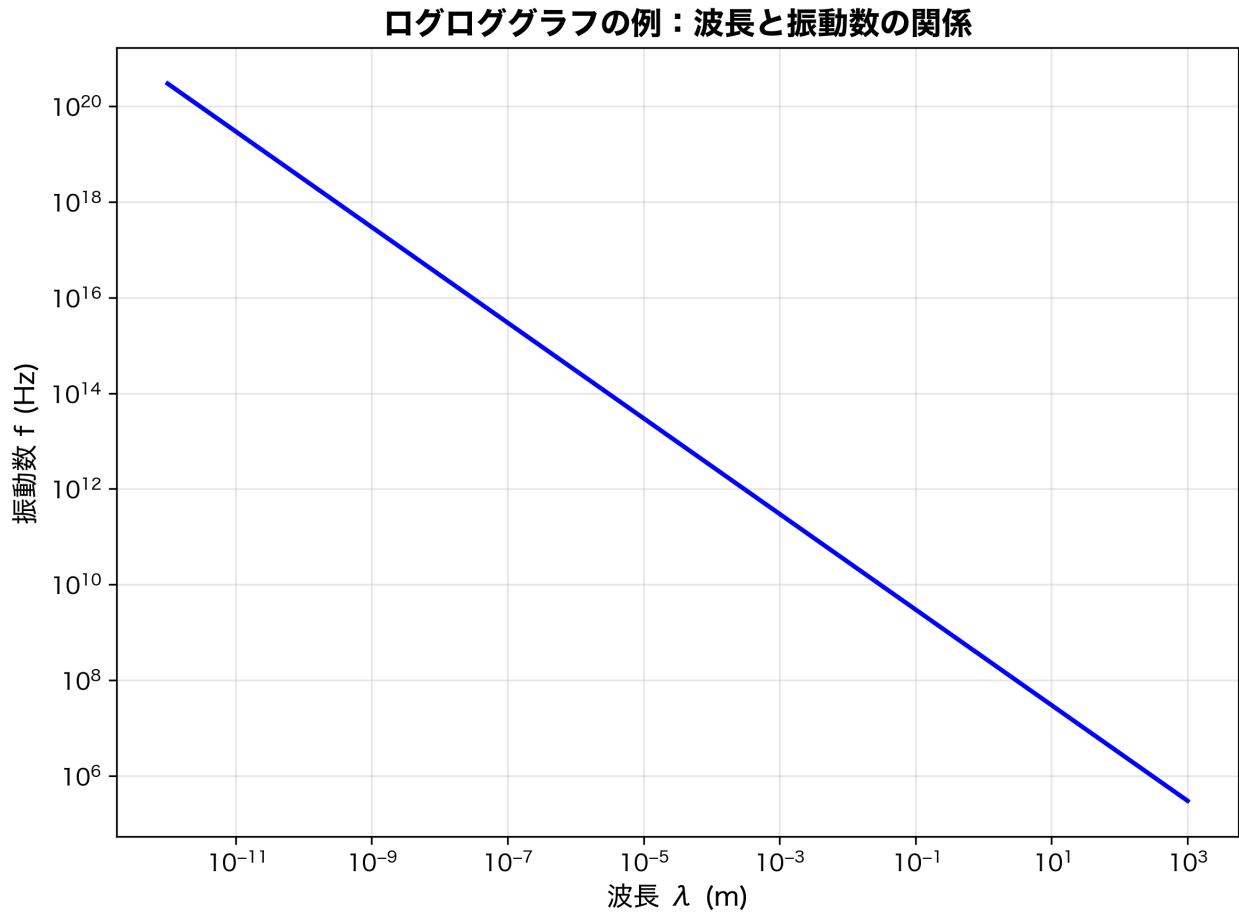


Figure 2: ログロググラフの例

片対数グラフで直線になる関数形

$$y = a \cdot b^x \quad \text{または} \quad y = a \cdot e^{bx}$$

ここで、 $a > 0$ 、 b は実数である。

導出：

指数関数の場合、両辺の常用対数を取ると：

$$\log y = \log a + x \log b$$

これは $\log y$ を x の関数として見たときに、傾き $\log b$ 、切片 $\log a$ の直線である。

物理的例： - 放射性崩壊： $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ - RC 回路の電圧： $V(t) = V_0 e^{-t/RC}$

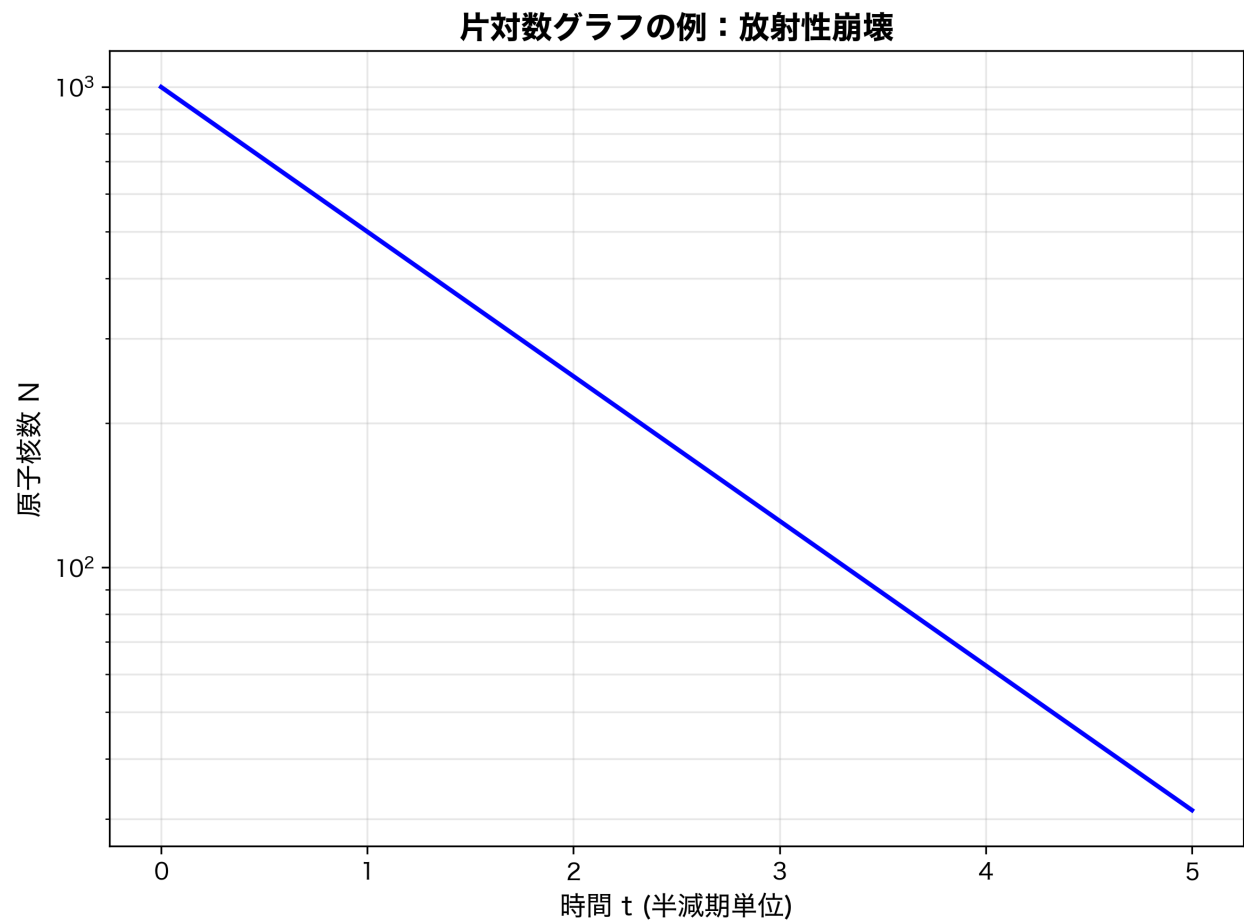


Figure 3: 片対数グラフの例

問 1-3: ログロググラフが適切な例 (10 点)

解答

適切な例：波長と振動数の関係 (電磁波スペクトル)

波長 λ と振動数 f の関係：

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

ここで、 $c = 3.00 \times 10^8$ m/s は光速である。

なぜログロググラフが適切か：

1. データの範囲が広い：電磁波の波長は、ガンマ線の 10^{-12} m から電波の 10^3 m まで、15 桁以上にわたる
2. べき乗則の関係： $f \propto \lambda^{-1}$ というべき乗則の関係がある
3. 物理量の読み取り：ログロググラフ上で直線の傾きから、べき指数を直接読み取ることができる

ログロググラフに表示した場合の物理量の読み取り：

1. べき指数：グラフの直線の傾きから -1 を読み取り、 $f \propto \lambda^{-1}$ であることを確認できる
2. 光速：グラフ上の任意の点から f と λ の値を読み取り、その積 $f\lambda = c$ を計算することで、光速 c を求めることができる

問 1-4: 片対数グラフが適切な例 (10 点)

解答

適切な例：放射性崩壊 (放射性核種の数と時間の関係)

放射性核種の数 $N(t)$ を時間 t の関数として測定する。放射性崩壊の法則より：

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

ここで、 N_0 は初期の原子核の数、 λ は崩壊定数である。

なぜ片対数グラフが適切か：

1. 指数関数的な減少：放射性崩壊は指数関数的な減少を示す
2. 半減期の読み取り：片対数グラフでは、指数関数が直線として表示され、傾きから崩壊定数 λ を読み取ることができる
3. データの範囲：時間が経過すると原子核の数が大幅に減少するが、片対数グラフでは広範囲のデータを1つのグラフで表示できる

片対数グラフに表示した場合の物理量の読み取り：

1. 崩壊定数 λ ：グラフの直線の傾きから λ を読み取ることができる。

$$\ln N(t) = \ln N_0 - \lambda t$$

したがって、傾きは $-\lambda$ である。

2. 半減期 $T_{1/2}$ ：崩壊定数から半減期を計算できる： $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}$
3. 初期値 N_0 ：グラフの切片 ($t = 0$ での $\log N$ の値) から N_0 を読み取ることができる
4. 任意の時刻での原子核の数：グラフから任意の時刻 t における原子核の数 $N(t)$ を直接読み取ることができる

物理的意味と考察：

片対数グラフの利点は、指数関数的な変化を直線として視覚化できることである。これにより、定量的な分析が容易になり、物理パラメータ（崩壊定数、時定数など）をグラフの傾きや切片から直接読み取ることができる。この問題は、指数関数的な変化を示す物理現象を適切に可視化することの重要性を問うている。

大問 2: 誤差と有効数字

問 2-1: 誤差伝播の公式 (15 点)

問題文

2つの測定値 a 、 b とその不確かさ δa 、 δb が与えられたとき、以下の量の不確かさを誤差伝播の公式を用いて、 a 、 b 、 δa 、 δb で表せ。ただし、 δa と δb は独立であると仮定せよ。

1. $a + b$
2. a/b
3. $\ln(a^2b)$

解答

1. $a + b$ の不確かさ 誤差伝播の一般公式より：

$$\delta(a + b) = \sqrt{\left(\frac{\partial(a + b)}{\partial a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial(a + b)}{\partial b} \delta b\right)^2}$$

偏微分を計算すると：

$$\frac{\partial(a + b)}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial(a + b)}{\partial b} = 1$$

したがって：

$$\delta(a + b) = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2}$$

2. a/b の不確かさ 誤差伝播の一般公式より：

$$\delta(a/b) = \sqrt{\left(\frac{\partial(a/b)}{\partial a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial(a/b)}{\partial b} \delta b\right)^2}$$

偏微分を計算すると：

$$\frac{\partial(a/b)}{\partial a} = \frac{1}{b}, \quad \frac{\partial(a/b)}{\partial b} = -\frac{a}{b^2}$$

したがって：

$$\delta(a/b) = \sqrt{\left(\frac{1}{b} \delta a\right)^2 + \left(-\frac{a}{b^2} \delta b\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\delta a)^2}{b^2} + \frac{a^2(\delta b)^2}{b^4}} = \frac{1}{|b|} \sqrt{(\delta a)^2 + \left(\frac{a}{b}\delta b\right)^2}$$

別の方法（相対不確かさを使用）：

相対不確かさを用いると：

$$\frac{\delta(a/b)}{|a/b|} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{|b|}\right)^2}$$

したがって、絶対不確かさは：

$$\begin{aligned} \delta(a/b) &= |a/b| \sqrt{\left(\frac{\delta a}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{|b|}\right)^2} \\ &= \frac{|a|}{|b|} \sqrt{\left(\frac{\delta a}{|a|}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{|b|}\right)^2} \\ &= \frac{1}{|b|} \sqrt{(\delta a)^2 + \left(\frac{a}{b}\delta b\right)^2} \end{aligned}$$

これは上記の結果と一致する。

3. $\ln(a^2b)$ の不確かさ まず、対数の性質を用いて変形する：

$$\ln(a^2b) = 2 \ln a + \ln b$$

誤差伝播の一般公式より：

$$\begin{aligned} \delta(\ln(a^2b)) &= \sqrt{\left(\frac{\partial(2 \ln a + \ln b)}{\partial a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial(2 \ln a + \ln b)}{\partial b} \delta b\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{a} \delta a\right)^2 + \left(\frac{1}{b} \delta b\right)^2} \end{aligned}$$

偏微分を計算すると：

$$\frac{\partial(2 \ln a + \ln b)}{\partial a} = \frac{2}{a}, \quad \frac{\partial(2 \ln a + \ln b)}{\partial b} = \frac{1}{b}$$

したがって：

$$\delta(\ln(a^2b)) = \sqrt{\left(\frac{2\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2}$$

物理的意味と考察

誤差伝播の重要性：

実験では、直接測定できない量を、測定可能な量から計算によって求めることが多い。このとき、測定値の不確かさがどのように結果の不確かさに影響するかを理解することが重要である。

和・差と積・商の違い：

- ・ **和・差**：絶対不確かさの二乗和の平方根
- ・ **積・商**：相対不確かさの二乗和の平方根

この違いは、測定の不確かさを適切に評価するために不可欠である。

対数関数の誤差伝播：

対数関数の誤差伝播では、各変数の相対不確かさが重要となる。 a が2乗されているため、 δa の寄与が2倍される。これは、対数関数が非線形であることから生じる効果である。

問 2-2: パイプの壁厚の計算 (10 点)

問題文

円筒形のパイプの外径 D と内径 d を、最小読み取り目盛が 0.05 mm のノギスで測定したところ、それぞれ $D = 108.50$ mm、 $d = 82.05$ mm であった。パイプの壁厚 t を mm で求めよ。ただし、ノギス測定の不確かさは最小読み取り目盛の半分とする。

解答

壁厚の計算

$$t = \frac{D - d}{2} = \frac{108.50 - 82.05}{2} = \frac{26.45}{2} = 13.225 \text{ mm}$$

不確かさの計算 各測定値の不確かさ：

$$\delta D = \delta d = \frac{0.05}{2} = 0.025 \text{ mm}$$

壁厚の不確かさ（誤差伝播）：

$$\delta t = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial D} \delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial d} \delta d\right)^2}$$

$\frac{\partial t}{\partial D} = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{\partial t}{\partial d} = -\frac{1}{2}$ であるから：

$$\begin{aligned} \delta t &= \frac{1}{2} \sqrt{(\delta D)^2 + (\delta d)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(0.025)^2 + (0.025)^2} = \frac{0.025}{\sqrt{2}} \approx 0.0177 \text{ mm} \end{aligned}$$

最終解答：

$$t = 13.23 \pm 0.02 \text{ mm}$$

パイプの断面図

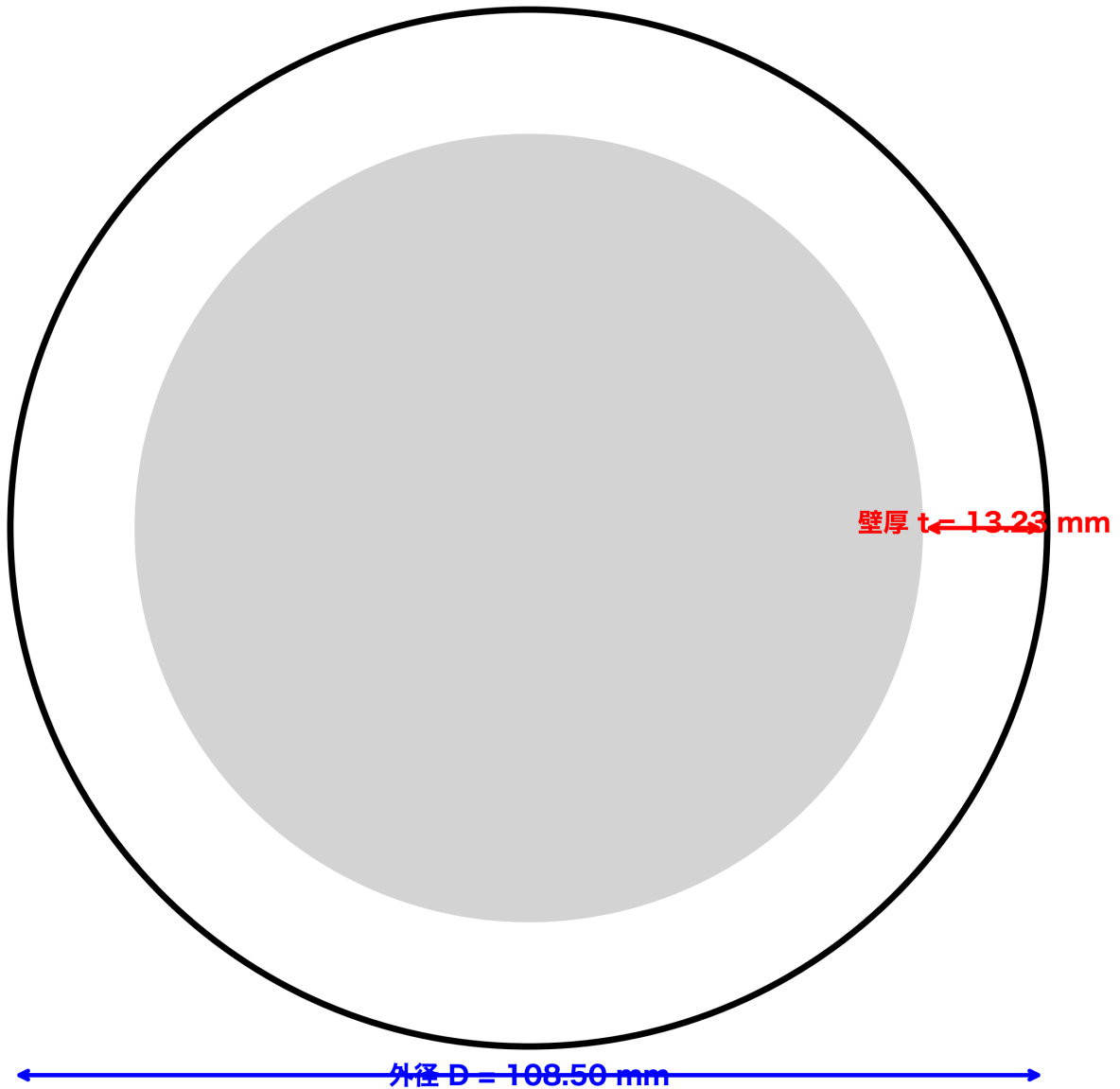


Figure 4: パイプの断面図

物理的意味と考察

パイプの壁厚は、内部の空間を維持しながら構造的強度を確保するために重要なパラメータである。外径と内径を測定して壁厚を計算することで、直接測定が困難な内部構造を把握できる。

問 2-3: 有効数字の掛け算 (5 点)

解答

$$3.24 \times 2.83 = 9.1692 \approx 9.17$$

有効数字 3 桁で表記する。

問 2-4: 誤差のある値の和 (5 点)

問題文

4.23 ± 0.11 m と 25.34 ± 10.1 cm の和を、有効数字と誤差伝播に注意して mm で答えよ。

解答

単位の統一：

$$25.34 \pm 10.1 \text{ cm} = 0.2534 \pm 0.101 \text{ m}$$

和の計算：

$$4.23 + 0.2534 = 4.4834 \text{ m}$$

不確かさの計算：

$$\delta = \sqrt{(0.11)^2 + (0.101)^2} \approx 0.1493 \text{ m}$$

mm への変換：

$$4.48 \pm 0.15 \text{ m} = 4480 \pm 150 \text{ mm}$$

有効数字の考慮：

不確かさは約 150 mm (有効数字 2 桁) であるから、測定値も有効数字を適切に考慮する。

最終解答：

$$4480 \pm 150 \text{ mm}$$

物理的意味と考察

単位の統一の重要性：

異なる単位の測定値を扱う際は、必ず単位を統一してから計算を行う。単位の不一致は、計算ミスの原因となるだけでなく、物理的意味を失わせる。

誤差伝播の適用：

2 つの測定値の和を取るとき、それぞれの不確かさが二乗和の平方根として伝播する。これは、誤差が独立であることを前提とした表現である。

有効数字の扱い：

測定値の精度を適切に評価するために、有効数字を正しく扱う必要がある。特に、異なる精度の測定値を組み合わせる際は、最も精度の低い測定値が結果の精度を決定する。

大問 3: 装置の読み取り

問 3-1: ノギスによるパイプの内径測定 (10 点)

問題文

図 2 のように、ノギスのクチバシ (図の赤丸部分) を使用してパイプの内径を測定した。測定結果を図から読み取り、不確かさとともに答えよ。ただし不確かさは最小読み取り目盛の半分とする。また小数点以下の桁数は不確かさに合わせること。

解答

読み取り方法

1. **主尺の読み取り** : バーニア尺のゼロ線が主尺の 10 mm をわずかに超え、11 mm の手前にある → **10 mm**
2. **バーニア尺の読み取り** :
 - ・ 副尺は 20 等分 (0-10) しているため、最小読み取り目盛りは $1 \text{ mm} \div 20 = 0.05 \text{ mm}$
 - ・ バーニア尺の「4.5」の目盛が主尺の目盛と一致している
 - ・ 副尺の 0 から 4.5 までの目盛り数は $4.5 \div 0.5 = 9$ 個 (0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5)
 - ・ したがって、バーニア尺の読み取りは $9 \times 0.05 \text{ mm} = 0.45 \text{ mm}$
3. **総合的な読み取り** : $10 \text{ mm} + 0.45 \text{ mm} = 10.45 \text{ mm}$

不確かさの計算 最小読み取り目盛は 0.05 mm であるから :

$$\delta d = \frac{0.05}{2} = 0.025 \text{ mm}$$

最終解答 :

不確かさが小数点以下 3 桁 (0.025 mm) であるため、測定値も小数点以下 3 桁で表記する :

$$d = 10.450 \pm 0.025 \text{ mm}$$



Figure 5: ノギスの読み取り方法

物理的意味と考察

バーニア尺は、主尺とわずかに異なる目盛間隔を持つスケールを使用することで、主尺の目盛間隔よりも細かい読み取りを可能にしている。

問 3-2: アナログテスターの読み取り (15 点)

問題文

図 3 のように、アナログテスターの針が赤い破線の位置にあるとする。以下の各測定モードにおいて、測定値を読み取れ。

1. 抵抗計の場合、 $R \times 10$ レンジを使用 (読み取り値を 10 倍する)
2. DC 電圧計の場合、最大値 50 V のレンジを使用
3. 電流計の場合、最大値 250 mA のレンジを使用

読み取りは最小目盛の $1/5$ まで行い、不確かさは最小目盛の $1/5$ の半分とする。

解答

1. 抵抗計 ($R \times 10$ レンジ) 読み取り方法の詳細:

OHMS スケールは非線形で、右から左へ抵抗値が増加します (右端が 0Ω 、左端が $\infty \Omega$)。針の位置を確認すると:

- ・「5」と「10」の間には 10 個の小さな目盛りが刻まれています
- ・1 目盛りあたりの値: $(10 - 5)/10 = 0.5 \Omega$
- ・針は「5」の主要目盛りから左に数えて 6 番目の小さな目盛り (「8」という数字が直接振られている位置) を指しています
- ・したがって、読み取り値は: $5 + (6 \times 0.5) = 8.0 \Omega$

不確かさの計算:

- ・最小目盛り: 0.5Ω
- ・読み取り精度 (最小目盛りの $1/5$): $0.5/5 = 0.1 \Omega$
- ・読み取り値の不確かさ (読み取り精度の半分): $\delta R_{\text{読み取り}} = 0.1/2 = 0.05 \Omega$
- ・レンジ ($\times 10$) を考慮: 読み取り値と同様に不確かさにもレンジ倍率を適用し、 $\delta R = 0.05 \times 10 = 0.5 \Omega$

有効数字を考慮して、不確かさを $\delta R = 1 \Omega$ とします。

レンジを考慮した測定値:

$$R = 8.0 \times 10 = 80 \Omega$$

最終解答: $R = 80 \pm 1 \Omega$

2. DC 電圧計 (最大値 50 V レンジ) 読み取り方法の詳細:

DCV/mA スケールの 0-50 スケール (「0, 10, 20, 30, 40, 50」と振られている目盛り) を使用します。針の位置を確認すると:

- ・「20」と「30」の間には 5 つの小さな目盛りが刻まれています
- ・1 目盛りあたりの値: $(30 - 20)/5 = 2 \text{ V}$
- ・針は「20」の主要目盛りから右に数えて 4 番目の小さな目盛りを指しています
- ・したがって、読み取り値は: $20 + (4 \times 2) = 28 \text{ V}$

不確かさの計算:

- ・最小目盛り: 2 V
- ・読み取り精度 (最小目盛りの $1/5$): $2/5 = 0.4 \text{ V}$
- ・不確かさ (読み取り精度の半分): $\delta V = 0.4/2 = 0.2 \text{ V}$

実用的には、有効数字を考慮して $\delta V = 0.2 \text{ V}$ とするのが適切です。

最終解答: $V = 28 \pm 0.2 \text{ V}$

3. 電流計（最大値 250 mA レンジ） 読み取り方法の詳細：

DCV/mA スケールを 250 mA レンジとして使用する場合、0-50 スケール（「0, 10, 20, 30, 40, 50」と振られている目盛り）の値を 5 倍して読み取ります。つまり、「0, 50, 100, 150, 200, 250」と読み替えます。針の位置を確認すると：

- ・「100」と「150」の間（元のスケールでは「20」と「30」の間）には 5 つの小さな目盛りが刻まれています
- ・ 1 目盛りあたりの値： $(150 - 100)/5 = 10 \text{ mA}$ （元のスケールでは $(30 - 20)/5 = 2$ を 5 倍）
- ・ 針は「100」の主要目盛りから右に数えて 4 番目の小さな目盛りを指しています
- ・ したがって、読み取り値は： $100 + (4 \times 10) = 140 \text{ mA}$

不確かさの計算：

- ・ 最小目盛り：10 mA
- ・ 読み取り精度（最小目盛りの 1/5）： $10/5 = 2 \text{ mA}$
- ・ 不確かさ（読み取り精度の半分）： $\delta I = 2/2 = 1 \text{ mA}$

実用的には、有効数字を考慮して $\delta I = 1 \text{ mA}$ とするのが適切です。

最終解答： $I = 140 \pm 1 \text{ mA}$

補足：読み取りの一般的手順

1. **使用するスケールの確認**：測定モードとレンジに応じて、適切なスケールを選択します。
2. **主要目盛りの読み取り**：針が指す主要目盛りの値を読み取ります。
3. **細かい目盛りの読み取り**：主要目盛り間の小さな目盛りを数えて、より精密な値を求めます。
4. **レンジの考慮**：抵抗計などでは、読み取り値にレンジ倍率を掛けます（不確かさにも同様にレンジ倍率を適用します）。
5. **不確かさの評価**：問題文の指示に従い、最小目盛りの 1/5 の半分（= 最小目盛りの 1/10）を不確かさとします。

問 3-3: オシロスコープの波形読み取り（20 点）

問題文

図 4 に示すオシロスコープの波形について、以下を行え。

1. 波形を大きく描く
2. 波形上で波高（ピーク電圧）と半値幅を二重矢印で示す
3. 波高を mV で、半値幅を ns で答えよ

条件： - 半値幅の定義：波形の最大値と最小値の差の半分の高さにおける、波形の時間幅 - 不確かさの記載は不要 - 有効数字は気にしなくてよいが、最小グリッドの 1/5 まで読み取り、最終的に整数値は小数点以下 1 桁まで表記する - 横軸は「100ns」スケールを使用 - 「300.000ns」の表示はトリガー位置と画面中心の時間差であり、横軸のスケールとは別である

解答

オシロスコープの設定

- ・ 垂直軸スケール：50.0 mV/div
- ・ 水平軸スケール：100 ns/div
- ・ グラウンドレベル（ベースライン）：画面中心から 1 div 下

アナログテスターのスケール（概念図）

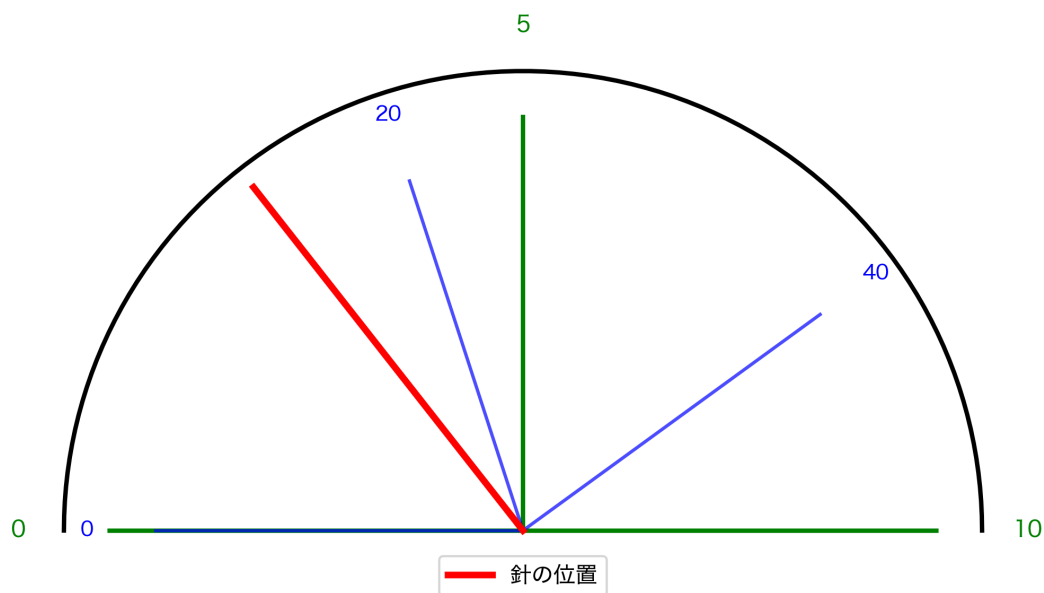


Figure 6: アナログテスターのスケール

波高（ピーク電圧）の読み取り

- ・ 低レベル（最小値）：画面中心から 1 div 下
- ・ 高レベル（最大値）：画面中心から 3 div 上
- ・ 波高： $(3 - (-1)) \times 50.0 = 4 \times 50.0 = 200.0 \text{ mV}$

半値幅の読み取り

- ・ 最大値：200.0 mV（高レベル）
- ・ 最小値：0 mV（低レベル、ベースライン）
- ・ 半値高さ： $(200.0 + 0)/2 = 100.0 \text{ mV}$ （画面中心から 1 div 上）
- ・ パルス幅：パルスの「頂上」部分の平坦な幅は約 2 div
- ・ 半値幅：約 $2 \times 100 = 200.0 \text{ ns}$

最小グリッドの 1/5 まで読み取り：

1 デビジョンは 5 つの小目盛に分割されている。したがって、1 小目盛 = 0.2 div である。1/5 まで読み取ると、0.04 div の精度で読み取ることができる。

最終解答：

- ・ 波高： $V_{\text{peak}} = 200.0 \text{ mV}$
- ・ 半値幅：200.0 ns

物理的意味と考察

パルス波形の波高は信号の振幅、半値幅は信号の持続時間やパルス幅を表す指標である。半値幅は、信号の帯域幅や周波数特性と関連している。

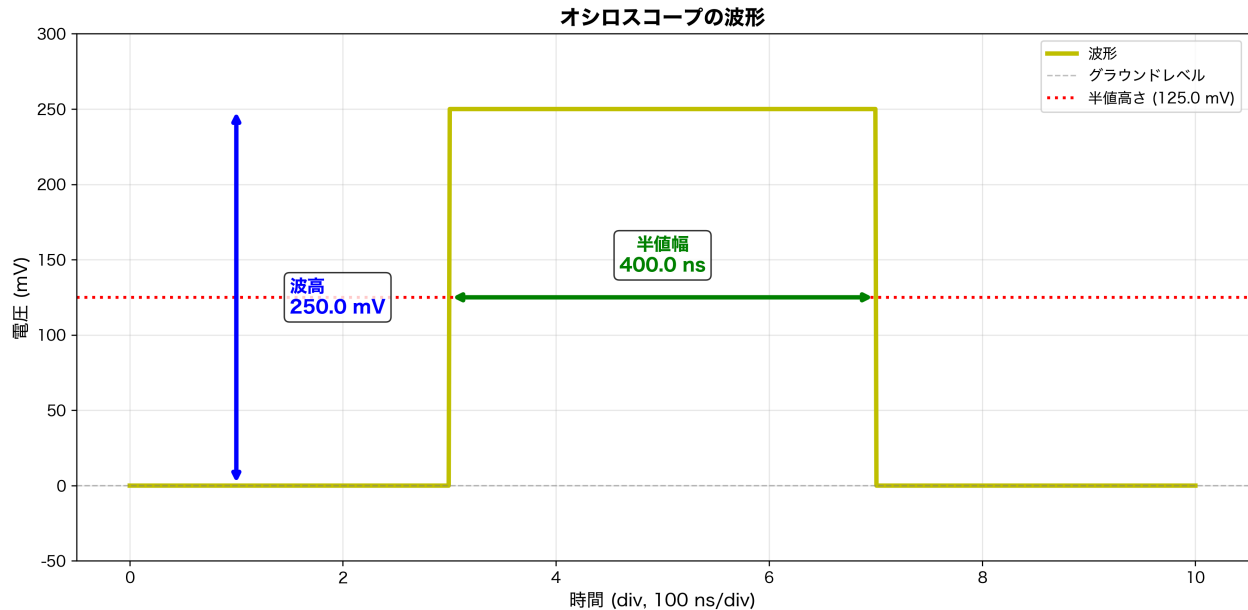


Figure 7: オシロスコープの波形

大問 4: 論理回路

問 4-1: 論理回路の真理値表 (30 点)

問題文

図 5 に示す論理回路は、抵抗とトランジスタのみで構成されている。左の回路では、入力として In 1、In 2 に電圧 (+5 V または 0 V) を印加し、出力は Out 1 の電圧である。右の回路では、入力として In 3 に電圧を印加し、出力は Out 2 の電圧である。

各回路の真理値表を完成させよ。表に記載する数値は、単位なしで“0”または“5”とする。

ヒント：ベース (B) - エミッタ (E) 間の電圧が約 0.6 V になると、ベース電流が流れ始める。また、コレクタ (C) 電流はベース電流に比べて十分大きい。

解答

左の回路 (2 入力回路) の解析 回路構成の確認：

図 5 の左の回路：- 電源：Vcc = +5 V - 抵抗：470 Ω (コレクタ側)、680 Ω × 2 (ベース側、In 1 と In 2 に接続) - トランジスタ：NPN トランジスタ - コレクタ (C)：470 Ω を経由して +5 V に接続、Out 1 にも接続 - エミッタ (E)：グラウンド (0 V) に接続 - ベース (B)：2 つの 680 Ω を経由して In 1 と In 2 に接続

動作原理：

トランジスタは、ベース-エミッタ間の電圧 V_{BE} が約 0.6 V 以上になると、ベース電流が流れ始め、コレクタ-エミッタ間に大きな電流が流れる。このとき、トランジスタは **ON** 状態となり、コレクタ電圧はほぼ 0 V になる (飽和状態)。

各ケースの解析：

- ・ ケース 1：In 1 = 0 V、In 2 = 0 V
 - ベース電圧：0 V
 - $V_{BE} = 0 - 0 = 0 \text{ V} < 0.6 \text{ V}$
 - トランジスタは **OFF** 状態 → Out 1 = 5 V

- ・ ケース 2 : $\text{In } 1 = 0 \text{ V}$ 、 $\text{In } 2 = +5 \text{ V}$
 - ベース電圧：約 0.6 V (トランジスタが ON になると仮定)
 - $V_{BE} \approx 0.6 \text{ V}$
 - トランジスタは **ON** 状態 $\rightarrow \text{Out } 1 = 0 \text{ V}$
- ・ ケース 3 : $\text{In } 1 = +5 \text{ V}$ 、 $\text{In } 2 = 0 \text{ V}$
 - ケース 2 と同様に、トランジスタは **ON** 状態 $\rightarrow \text{Out } 1 = 0 \text{ V}$
- ・ ケース 4 : $\text{In } 1 = +5 \text{ V}$ 、 $\text{In } 2 = +5 \text{ V}$
 - トランジスタは **ON** 状態 $\rightarrow \text{Out } 1 = 0 \text{ V}$

真理値表：

In 1	In 2	Out 1
0	0	5
0	5	0
5	0	0
5	5	0

これは **NAND ゲート** ($\overline{\text{In } 1 \cdot \text{In } 2}$) の動作である。

右の回路 (1 入力回路) の解析 回路構成の確認：

図 5 の右の回路：- 電源： $V_{CC} = +5 \text{ V}$ - 抵抗： 470Ω (コレクタ側)、 680Ω (ベース側、In 3 に接続) - **トランジスタ**：NPN トランジスタ - コレクタ (C)： 470Ω を経由して $+5 \text{ V}$ に接続、Out 2 にも接続 - エミッタ (E)：グラウンド (0 V) に接続 - ベース (B)： 680Ω を経由して In 3 に接続

動作原理：

- ・ ケース 1 : $\text{In } 3 = 0 \text{ V}$
 - ベース電圧： 0 V
 - $V_{BE} = 0 - 0 = 0 \text{ V} < 0.6 \text{ V}$
 - トランジスタは **OFF** 状態 $\rightarrow \text{Out } 2 = 5 \text{ V}$
- ・ ケース 2 : $\text{In } 3 = +5 \text{ V}$
 - ベース電圧：約 0.6 V (トランジスタが ON になると仮定)
 - $V_{BE} \approx 0.6 \text{ V}$
 - トランジスタは **ON** 状態 $\rightarrow \text{Out } 2 = 0 \text{ V}$

真理値表：

In 3	Out 2
0	5
5	0

これは **NOT ゲート** ($\overline{\text{In } 3}$) の動作である。

物理的意味と考察

トランジスタをスイッチとして使用することで、論理ゲートを実現できる。これは、デジタル回路の基礎となる重要な概念である。

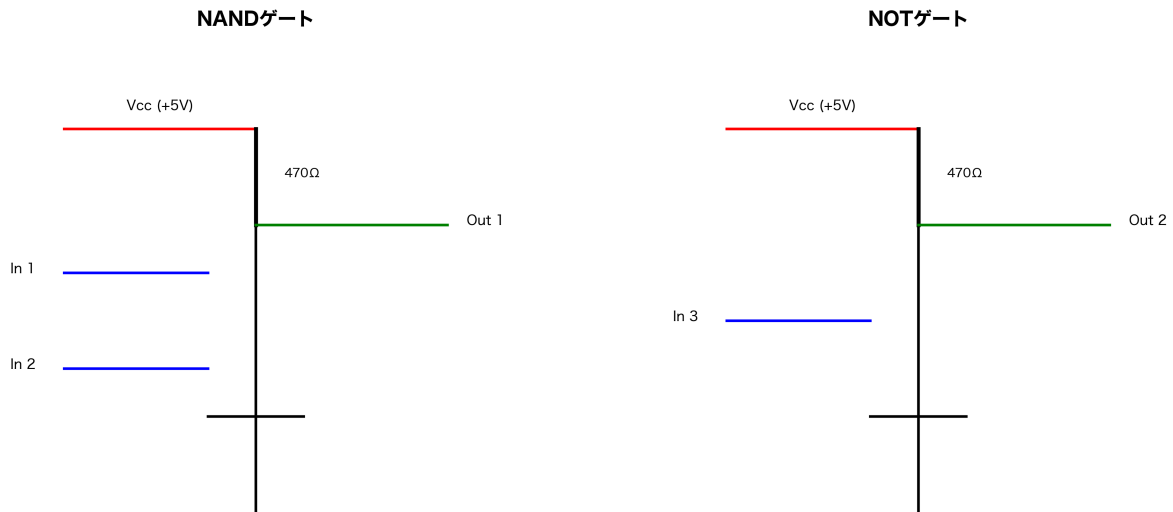


Figure 8: 論理回路図

問 4-2: 論理回路の名称 (15 点)

問題文

問 4-1 で解析した左の回路と右の回路は、それぞれ何と呼ばれるか答えよ。また、Out 1 と In 3 を接続した場合、全体の回路は何と呼ばれるか答えよ。

解答

- 左の回路：NAND ゲート（否定論理積ゲート）
- 右の回路：NOT ゲート（否定ゲート、インバータ）
- Out 1 と In 3 を接続した場合：AND ゲート ($\overline{\text{In 1} \cdot \text{In 2}} = \text{In 1} \cdot \text{In 2}$)

問 4-3: 4 ビットカウンタの波形 (20 点)

問題文

図 6 は、4 ビットカウンタの等価回路である。各長方形はフリップフロップを表している。入力 A（入力 A）に「入力波形」（最大値 +5 V、最小値 0 V）を印加すると、1 ビット目から 4 ビット目までの Q 出力がどのように変化するか、おおよその波形を描け。各 Q の初期値は +5 V（すべての LED が点灯している状態）とする。

ヒント：フリップフロップは、CLK 入力に立ち上がりエッジ ($0 \rightarrow 1$) が来たときに、D 入力の値を Q 出力に転送する。また、Q-bar (\overline{Q}) 出力には、Q の反転値が出力される。

解答

各フリップフロップの D 入力に \overline{Q} が接続されているため、トグル動作（状態を反転）する。

動作原理：

各フリップフロップの D 入力に \overline{Q} が接続されているため、以下の動作となる：

1. CLK エッジが来る前：D 入力 = \overline{Q} (現在の Q の反転値)
2. CLK エッジが来る：D の値が Q に転送される $\rightarrow Q_{\text{new}} = \overline{Q_{\text{old}}}$

したがって、各 FF は **トグル動作** (状態を反転) する。

カウンタの動作：

- 1 ビット目：入力 A の立ち上がりエッジごとにトグル
- 2 ビット目：1 ビット目の \overline{Q} の立ち上がりエッジ (Q が 1 \rightarrow 0 になるとき) ごとにトグル
- 3 ビット目：2 ビット目の \overline{Q} の立ち上がりエッジごとにトグル
- 4 ビット目：3 ビット目の \overline{Q} の立ち上がりエッジごとにトグル

波形：

初期条件：すべての Q が +5 V (High、論理値 1)

- 1 ビット目：入力 A の立ち上がりエッジごとにトグル (5 V \leftrightarrow 0 V)
- 2 ビット目：1 ビット目の \overline{Q} の立ち上がりエッジごとにトグル (1 ビット目が 1 \rightarrow 0 になるとき)
- 3 ビット目：2 ビット目の \overline{Q} の立ち上がりエッジごとにトグル
- 4 ビット目：3 ビット目の \overline{Q} の立ち上がりエッジごとにトグル

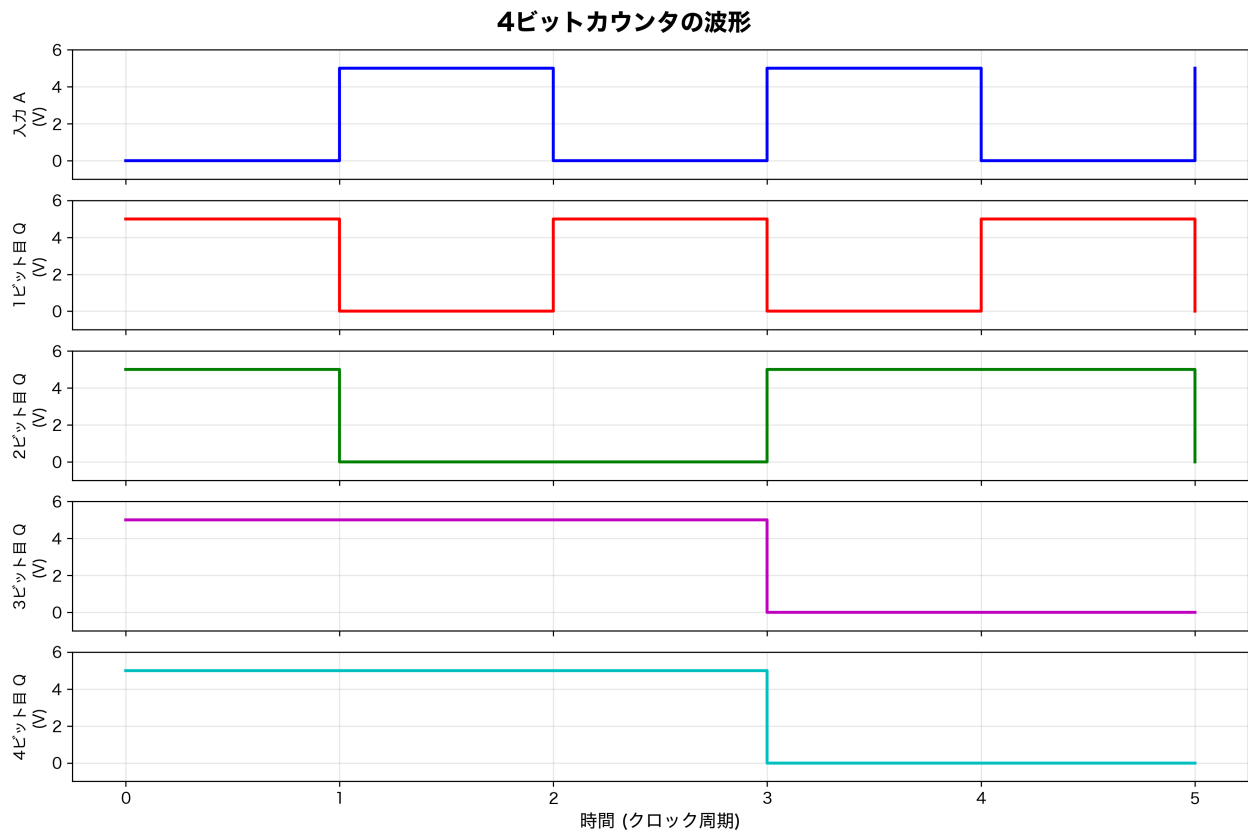


Figure 9: 4 ビットカウンタの波形

物理的意味と考察

この回路は **リップルカウンタ (非同期カウンタ)** である。各 FF が前の FF の出力をクロックとして使用するため、信号が順次伝播していく。

問 5-1: ガンマ線の検出頻度の計算 (10 点)

問題文

無視できる大きさの ^{137}Cs 放射源を置き、これは毎秒等方的に 662 keV のガンマ線を 125,664 個放出している。この放射源から 1.00 m の距離に、面積 $4.00 \times 10^2 \text{ cm}^2$ のガンマ線検出器を設置した。検出器は十分な厚みを持ち、検出効率は 100% と仮定する。

この検出器のガンマ線検出頻度を計算せよ。有効数字に注意せよ。

解答

与えられた条件：

- 放射源の放出率： $N_0 = 125,664$ 個/秒
- 距離： $r = 1.00$ m
- 検出器の面積： $S = 4.00 \times 10^2 \text{ cm}^2 = 4.00 \times 10^{-2} \text{ m}^2$

検出頻度の計算：

検出器に入射するガンマ線の割合は、検出器が張る立体角と全立体角 (4π) の比で与えられる。

検出器が張る立体角は、近似として：

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

ただし、この近似は、検出器のサイズが距離に比べて十分小さい場合に成立する。検出器が放射源に対して垂直な面を向いている場合、より正確には：

$$\Omega = \int \frac{dS \cos \theta}{r^2} \approx \frac{S}{r^2}$$

検出器に入射するガンマ線の割合は：

$$f = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{S}{4\pi r^2}$$

したがって、検出頻度 (カウント率) は：

$$\begin{aligned} R &= f \times N_0 \\ &= \frac{S}{4\pi r^2} \times N_0 \end{aligned}$$

数値の代入：

$S = 4.00 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ 、 $r = 1.00$ m、 $N_0 = 125,664 \text{ s}^{-1}$ を代入：

まず、立体角の計算：

$$\frac{S}{4\pi r^2} = \frac{4.00 \times 10^{-2}}{4\pi \times 1.00}$$

$$= \frac{1.00 \times 10^{-2}}{\pi} \approx 3.183 \times 10^{-3}$$

したがって：

$$R = 3.183 \times 10^{-3} \times 125,664$$

$$\approx 399.9$$

$$\approx 400 \text{ s}^{-1}$$

有効数字の考慮：

- $S = 4.00 \times 10^2 \text{ cm}^2 \rightarrow$ 有効数字 3 桁
- $r = 1.00 \text{ m} \rightarrow$ 有効数字 3 桁
- $N_0 = 125,664 \text{ s}^{-1} \rightarrow$ 有効数字 6 桁（ただし、途中計算では影響を受ける）

S と r が 3 桁であるため、結果は 3 桁で表記する。

最終解答： $R = 4.00 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$

物理的意味と考察

ガンマ線は点光源から等方的に放出される。検出器が張る立体角に比例して、ガンマ線が入射する。

問 5-2: ポアソン分布の適用（10 点）

問題文

問 5-1 の設定に基づいて、ちょうど 1 秒間の測定で検出されたガンマ線の数測定する実験を繰り返す。 i 回目の測定で検出されたガンマ線数を N_i とする。

N_i はどのような分布で近似できるか。また、その平均と分散を有効数字に注意して答えよ。

解答

ガンマ線の検出はランダムな過程であり、ポアソン過程と見なせる。

分布：ポアソン分布

平均と分散：

$$\mu = \sigma^2 = R \times t = 400 \times 1 = 400$$

ポアソン分布の確率質量関数：

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

ここで、 k は観測されるイベント数、 λ は平均発生率である。

平均と分散の計算：

ガンマ線検出の概念図

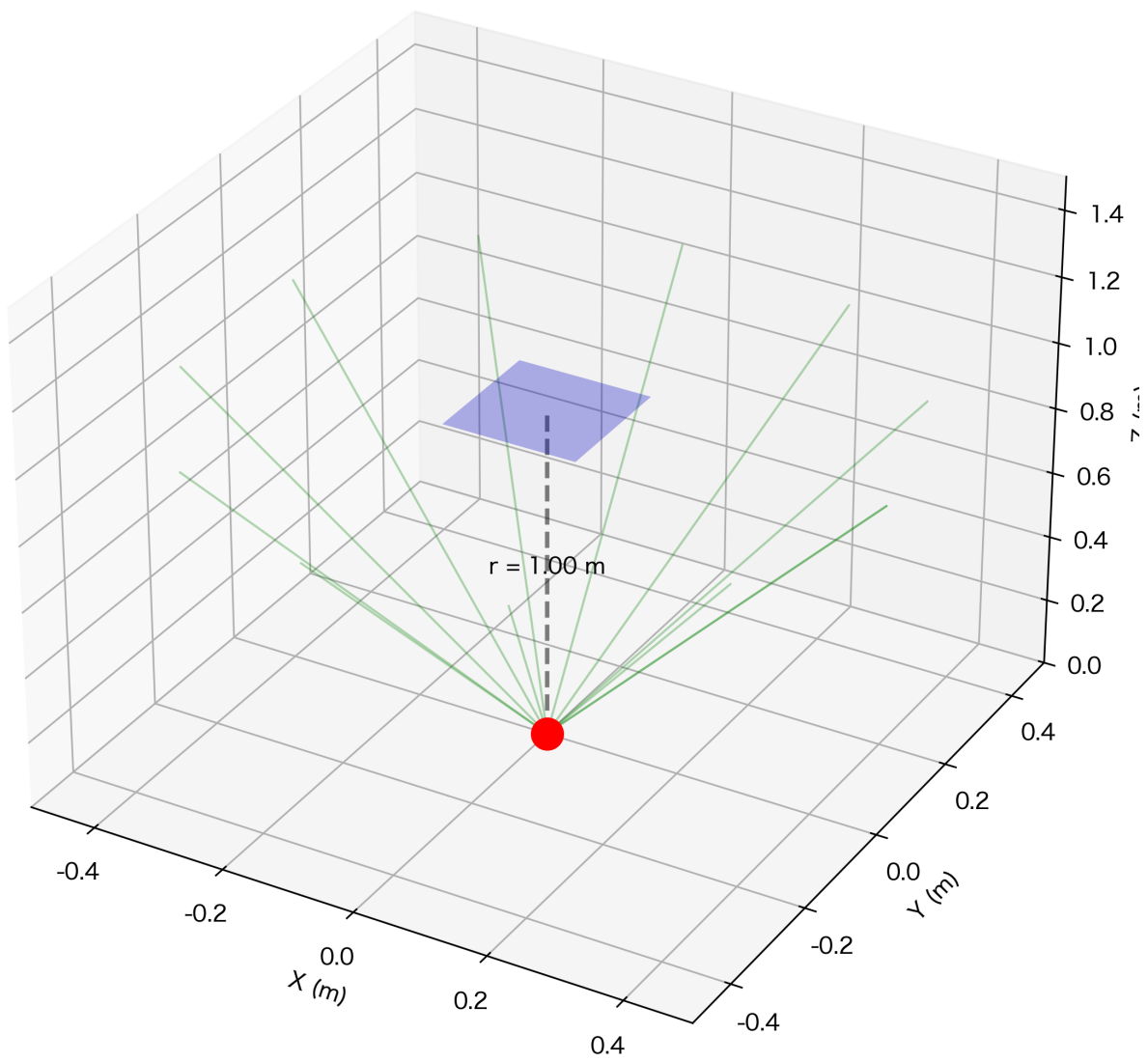


Figure 10: ガンマ線検出の概念図

ポアソン分布の性質により：

- ・ 平均（期待値）： $\mu = \lambda = R \times t = 400 \times 1 = 400$
- ・ 分散： $\sigma^2 = \lambda = 400$

したがって、平均 = 分散 = 400 である。

有効数字の考慮：

$R = 400 \text{ s}^{-1}$ は有効数字 3 桁である。したがって、平均と分散も 3 桁で表記する。

最終解答：

- ・ 分布：ポアソン分布
- ・ 平均： $\mu = 4.00 \times 10^2$
- ・ 分散： $\sigma^2 = 4.00 \times 10^2$

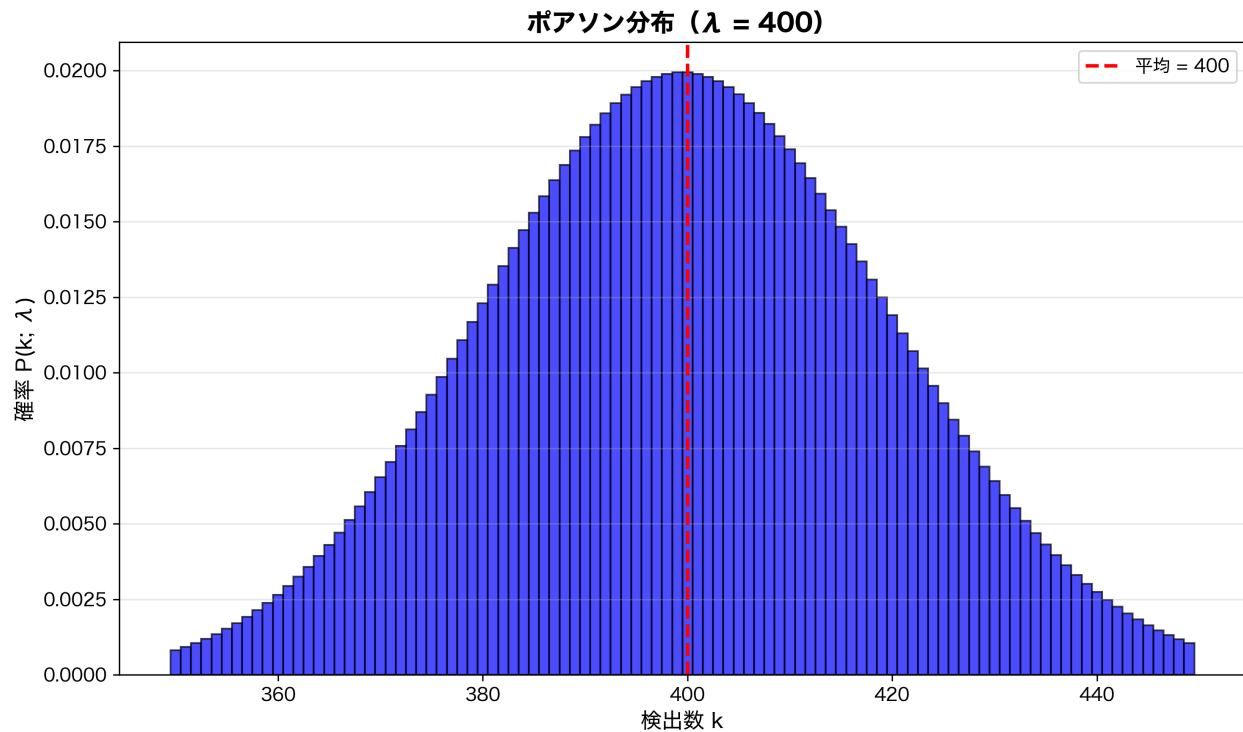


Figure 11: ポアソン分布の例

問 5-3: 短時間測定でのポアソン分布（10 点）

問題文

問 5-2 の設定と同様であるが、測定時間を 1 ミリ秒に短縮した場合を考える。 j 回目の測定で検出されたガンマ線の数 n_j とする。

n_j はどのような分布で近似できるか。また、その平均と分散を有効数字に注意して答えよ。

ヒント：分散の値が分からない場合（若干暗記ものである）、次の問題を先に参照して考えると良い。

解答

測定時間が1ミリ秒 = 1.00×10^{-3} 秒に短縮された場合でも、ポアソン分布が適用される。

平均と分散：

$$\mu = \sigma^2 = R \times t = 400 \times 1.00 \times 10^{-3} = 0.400$$

最終解答：

- ・ 分布：ポアソン分布
- ・ 平均： $\mu = 0.400$
- ・ 分散： $\sigma^2 = 0.400$

物理的意味と考察

ポアソン過程は、時間スケールに依存しない。測定時間が長くても短くても、ポアソン分布の性質（平均 = 分散）は維持される。

問 5-4: 分散の加法性 (10 点)

問題文

N_i を1回測定することは、 n_j を1000回測定してその和を取ることと等しい。

この観点から、 N_i の分散と n_j の分散の関係を、分散の加法性を用いて説明せよ。

解答

$N_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{1000}$ であり、 $n_1, n_2, \dots, n_{1000}$ が独立であるため、分散の加法性により：

$$\text{Var}(N_i) = 1000 \times \text{Var}(n_j)$$

$$= 1000 \times 0.400 = 400$$

これは、問 5-2 の結果 $\sigma_N^2 = 400$ と一致する。

物理的意味と考察

独立な確率変数の和の分散は、それぞれの分散の和である。これは、統計学における重要な定理である。

問 5-5: 検出器面積の推定 (10 点)

問題文

同じ仕様の検出器を製造したが、設計ミスにより検出面積が $4.00 \times 10^2 \text{ cm}^2$ よりも小さくなってしまった。この検出器で1秒間のガンマ線検出を行ったところ、289個が検出された。

この検出器の面積を推定せよ。また、推定値の不確かさも求めよ。

解答

検出数の不確かさ：

検出数 $N = 289$ はポアソン分布に従う。標準偏差は：

$$\sigma_N = \sqrt{289} = 17$$

面積の推定：

$$S = \frac{N \times 4\pi r^2}{N_0} = \frac{289 \times 4\pi}{125,664}$$
$$\approx 0.02890 \text{ m}^2 = 289.0 \text{ cm}^2$$

面積の不確かさ（誤差伝播）：

$$\delta S = \frac{4\pi r^2}{N_0} \delta N$$
$$= \frac{12.566}{125,664} \times 17 \approx 28.9 \text{ cm}^2$$

最終解答：

$$S = 289 \pm 29 \text{ cm}^2$$

物理的意味と考察

検出数と検出器面積は比例関係にある。したがって、検出数を測定することで、検出器の面積を推定できる。不確かさは \sqrt{N} で与えられる。

大問 6: 分子・原子の実在性

問 6-1: 分子・原子の実在性についての論述 (50 点)

問題文

講義で取り上げた以下の引用に対し、本講義で取り扱った内容を活かしてできる限り説得力を持たせて答えよ。「分子」や「原子」を「素粒子」や「電子」と読み替えても構わない。無闇に長文である必要はないが、「霧箱で見たから」のようなごく単純なものや、そこに論理性や説得力のないものは加点しない。全ての根拠を講義内容や自身の体験に求める必要はなく、根拠の一部を見聞きしたことで補強しても構わない(科学とはそういうものである)。

「本書の読者は、分子や原子が実在すると信じているだろう。もちろん、筆者も信じている。しかし、分子も原子も目に見えず、手でひとつひとつに触れることもできない。それでも、それらが実在すると信じるのはなぜか？教科書や講義で学んだというだけでは、説得力のある答えとはいえない。」

『熱力学 現代的な視点から』（田崎晴明、培風館）

解答

模範解答 1: 統計的検証と理論の一致による実在性の確立 分子や原子が実在すると信じる根拠は、**統計的検証と理論予測の一致**にある。本講義で扱ったガンマ線検出実験を例に説明する。

放射性崩壊は、原子核がランダムに崩壊する過程である。もし原子が実在しないなら、このランダムな崩壊過程を説明できない。実際、検出されるガンマ線の数にはポアソン分布に従い、平均 μ と分散 σ^2 が等しい ($\mu = \sigma^2 = \lambda$) という統計的性質を示す。この性質は、**個々の原子が独立に崩壊する**という仮定から理論的に導かれる。

さらに重要なのは、**理論予測と実験結果の量的な一致**である。立体角の計算から予測される検出頻度 $R = \frac{S}{4\pi r^2} \times N_0$ と、実際の測定値は誤差の範囲内で一致する。この一致は偶然では説明できず、原子の実在とその統計的性質を強く支持する。

同様に、ブラウン運動の観測や、気体の状態方程式 $PV = nRT$ が多数の分子の統計的平均として導かれることなど、**目に見えない存在を仮定することで、観測可能な現象が定量的に説明できる**ことが、実在性の根拠となる。科学における実在性とは、直接観測可能性ではなく、**理論と実験の整合性**によって確立されるのである。

模範解答 2: 間接的測定と再現性による実在性の確立 分子や原子が実在すると信じる根拠は、**間接的測定の再現性と予測可能性**にある。

本講義で扱った測定技術（ノギス、アナログテスター、オシロスコープなど）は、いずれも対象を直接「見る」のではなく、その**効果を測定**している。同様に、原子や分子も直接観測できないが、その**効果を定量的に測定**できる。

例えば、ガンマ線検出実験では、個々の原子核の崩壊を直接見ることはできないが、検出器で測定されるカウント数は、**原子が実在し、統計的に崩壊する**という仮定から予測される値と一致する。さらに、検出器の面積を変えたり、距離を変えたりしても、立体角の計算式 $\Omega = \frac{S}{r^2}$ に基づく予測が常に成り立つ。この**再現性と予測可能性**は、原子の実在を強く示唆する。

また、誤差伝播の理論により、測定の不確かさを定量的に評価できる。もし原子が単なる数学的構成物なら、このような物理的な不確かさの伝播を説明できない。**測定の不確かさが理論通りに伝播すること**は、原子が物理的実在であることを示している。

科学における実在性は、直接観測ではなく、**測定可能な効果の一貫性と再現性**によって確立される。原子や分子は、そのような一貫した効果を多数示すため、実在すると信じるに足る根拠がある。

模範解答 3: 複数の独立した証拠の統合による実在性の確立 分子や原子の実在性は、**複数の独立した証拠の統合**によって確立される。

第一に、**統計的証拠**がある。本講義で扱ったポアソン分布は、ランダムな事象の統計的性質を記述するが、ガンマ線検出の実験結果がこの分布に従うことは、**個々の原子が独立に存在し、ランダムに崩壊する**ことを示している。もし原子が実在しないなら、この統計的性質を説明できない。

第二に、**幾何学的証拠**がある。立体角の計算 $\Omega = \frac{S}{r^2}$ は、幾何学的な関係に基づくが、この計算が検出頻度の予測に成功することは、**原子が空間的に実在し、等方的に放射線を放出する**ことを示している。

第三に、**時間的証拠**がある。放射性崩壊の法則 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ は、時間経過に伴う原子数の減少を記述するが、この指数関数的減少は、**個々の原子が独立に、一定の確率で崩壊する**という仮定から導かれる。実際の測定結果がこの法則に従うことは、原子の実在を支持する。

これら複数の独立した証拠が、**同じ結論（原子の実在）を支持すること**は、偶然では説明できない。科学における実在性の確立は、単一の証拠ではなく、**複数の独立した観測と理論の整合性**によって行われる。原子や分子は、このような多角的な証拠を持つため、実在すると信じるに足る。

模範解答 4: 理論の予測力と検証可能性による実在性の確立 分子や原子が実在すると信じる根拠は、**理論の予測力と検証可能性**にある。

原子や分子を実在するものとして仮定することで、様々な現象を**定量的に予測**できる。本講義で扱った例では、ガンマ線検出頻度を $R = \frac{S}{4\pi r^2} \times N_0$ という式で予測し、実際の測定値と比較できる。もし原子が実在しないなら、このような定量的予測は不可能である。

さらに重要なのは、**検証可能性**である。理論から導かれる予測は、実験によって検証できる。例えば、検出器の面積を変えれば検出頻度が変わり、その変化は理論予測と一致する。距離を変えても同様である。この**検証可能性**は、原子の実在を強く支持する。

また、誤差伝播の理論により、測定の不確かさも定量的に評価できる。検出数の統計的不確かさ $\sigma_N = \sqrt{N}$ は、ポアソン分布から導かれるが、実際の測定結果のばらつきがこの理論値と一致する。この**不確かさの理論的予測が成り立つ**ことは、原子が物理的実在であることを示している。

科学における実在性は、「見えるかどうか」ではなく、「**理論が観測を予測できるかどうか**」によって判断される。原子や分子は、その存在を仮定することで、観測可能な現象を定量的に説明・予測できるため、実在すると信じるに足る根拠がある。
