

# 電磁氣学 過去問 解答・解説

名古屋大学 理学部

2023 年度・2024 年度・2024 年度再試験

## 目次

この解答解説について（初学者の方へ）	3
類題一覧	3
<b>第 I 部 2023 年度 期末試験</b>	<b>4</b>
1 問題 1：物質中の Maxwell 方程式	4
2 問題 2：誘電体板と導体板の電場中の振る舞い	7
3 問題 3：金属表面における平面電磁波の反射と透過	13
<b>第 II 部 2024 年度 期末試験</b>	<b>17</b>
1 問題 1：物質中の Maxwell 方程式	18
2 問題 2：均一に分極した強誘電体球	20
3 問題 3：液体中の有極性分子の分極ダイナミクス	24
<b>第 III 部 2024 年度 再試験</b>	<b>27</b>
1 問題 1：物質中の Maxwell 方程式	28
2 問題 2：強誘電体球の電場	29
3 問題 3：液体中の極性分子の分極と電気感受率	31
4 問題 4：金属内の電子の運動と電気伝導率	33

## この解答解説について（初学者の方へ）

各問題の解答では、次のような構成を心がけています。

- この問題のポイント：その問題で何を理解することが大切か、どのような流れで解くかを短くまとめています。
- 解き方の流れ：各小問をどの順に、どの公式や法則を使って解くかを箇条書きにしています。
- 用語の説明：分極、磁化、電束密度、誘電率、透磁率など、問題で使う用語を初出付近で説明しています。
- 使用する物理法則：Maxwell 方程式、境界条件、オームの法則など、どの法則に基づいて式を立てているかを明示しています。
- 計算のステップ：式を立てるときに「ステップ 1」「ステップ 2」と区切り、途中を省略せずに記述しています。
- なぜこのように求まるか：答えの式が成り立つ理由や、物理的な意味を補足しています。
- 図：設定の概念図、電場・磁場の向き、グラフなどを入れています。

数式の変形では「明らかに」「同様に」に頼らず、途中のステップを書いています。ベクトル計算では成分を明示し、積分では変数変換や部分積分の過程を示しています。

### ■読むときのコツ（初学者の方へ）

- まず各問題の「この問題のポイント」と「解き方の流れ」を読むと、何を求めるか・どの順で式を立てるかが把握しやすくなります。
- 用語（分極、磁化、電束密度、境界条件など）は初出付近の「用語の説明」で定義しています。わからなくなったらそこに戻って確認してください。
- 「なぜ～か」「原理的な説明」「物理的考察」の段落は、式の意味や物理的なイメージを理解するためのものです。答えの式だけではなく、なぜその式になるかも読むと理解が深まります。
- 図は設定のイメージや式の対応関係を示しています。図のキャプションにも式や条件を書いているので、図と本文を対応させて読むとよいです。
- 2024 年度・再試験では「2023 年度問題 1 と同一」のように他年度を参照することができます。その場合は該当年度の該当問題を開き、「解き方の流れ」と「なぜ～か」の段落をあわせて読むと理解しやすくなります。

## 類題一覧

- 問題 1 (物質中の Maxwell 方程式) : 2023・2024・2024 再のいずれにも出題。静電磁場の 4 式 (1-1)、 $D, H$  を用いた書き換え (1-2)、時間変動を含む 2 式 (1-3) の流れで共通。
- 問題 2 : 2023 は誘電体板・導体板の電場、2024・2024 再は強誘電体球の内部電場と  $E_p$ 。2024 再は (2-1)(2-2) のみ。
- 問題 3 : 2023 は金属表面での平面電磁波の反射・透過、2024 は極性分子の分極と電気感受率  $\chi_e(\omega)$ 、2024 再も極性分子 (3-1, 3-2) に加え、問題 4 で金属内電子の伝導率  $\sigma(\omega)$ 。

# 第Ⅰ部

## 2023 年度 期末試験

### 1 問題 1：物質中の Maxwell 方程式

#### 1.1 問題

静電磁場における物質中の Maxwell 方程式を考え、その後、時間変動する電磁場に拡張する。真空中の誘電率を  $\epsilon_0$ 、透磁率を  $\mu_0$  とする。

- 物質内部には、真電荷（電荷密度  $\rho$ ）、真電流（電流密度  $\mathbf{i}$ ）、分極電荷（電荷密度  $\rho_p$ ）、磁化電流（電流密度  $\mathbf{i}_M$ ）が存在する。Maxwell 方程式の 4 つの式を、電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\rho$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\rho_p$ 、 $\mathbf{i}_M$  だけを用いて示せ。
- 分極ベクトル  $\mathbf{P}$  と磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  を用いると、 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 、 $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  と表せる。物質の誘電率  $\epsilon$  は  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  で定義され、物質の透磁率  $\mu$  は  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  で定義される。物質中の Maxwell 方程式のうち、分極電荷と磁化電流を含む式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\rho$ 、 $\mathbf{i}$  だけを用いて示せ。ただし、 $\epsilon$  と  $\mu$  は空間的に一様ではなく、場所の関数であると考える。
- 時間変動する電磁場を考える。物質中の Maxwell 方程式のうち、時間変動する項を含む式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  を用いて示せ。

#### 1.2 解答

■この問題のポイント（初学者向け） 物質中では真電荷・真電流に加え、分極電荷  $\rho_p$  と磁化電流  $\mathbf{i}_M$  が現れる。これらを明示した形で 4 つの Maxwell 方程式を書き（1-1）、次に  $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  を  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H}$ （誘電率・透磁率）に吸収した形に書き直す（1-2）。時間変動がある場合はファラデーの法則とアンペールの法則に  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 、 $\partial \mathbf{E} / \partial t$  および分極・磁化の時間変化が現れる（1-3）。

#### ■解き方の流れ

- 問 1：静電磁場なので時間微分はゼロ。電場の源は  $\rho + \rho_p$ 、磁場の回転の源は  $\mathbf{i} + \mathbf{i}_M$  として、ガウスの法則（電場・磁束）、ファラデー、アンペールの 4 式を書く。
- 問 2： $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  と  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  から  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$  を導く。 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}$  と透磁率の定義から  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$  を導く。
- 問 3：時間変動を含むファラデーの法則  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  と、変位電流・分極の時間変化を含むアンペールの法則を書く。

#### ■用語の説明

- 真電荷  $\rho$ ：物質の外部から与えられた自由電荷の密度。
- 分極電荷  $\rho_p$ ：誘電体の分極によって現れる見かけの電荷。 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 。
- 真電流  $\mathbf{i}$ ：自由電子などによる電流密度。
- 磁化電流  $\mathbf{i}_M$ ：磁化  $\mathbf{M}$  による見かけの電流。 $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ （問題文では  $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  とある）

が、多くの教科書では  $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}$  と定義し、アンペールの法則に  $\mathbf{i}_M$  を足す形をとる。以下では問題文の表記に従う)。

- 電束密度  $\mathbf{D} : \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 。誘電体中のガウスの法則を簡潔に書くときに使う。
- 磁場の強さ  $\mathbf{H} : \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  あるいは  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  から  $\mathbf{H}$  を定義する流儀がある。問題文の定義  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  は、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  かつ  $\mathbf{M} = (\mu/\mu_0 - 1)\mathbf{H}$  のような関係と整合させる書き方である。ここでは「分極電荷と磁化電流を含む式」を  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \epsilon, \mu, \rho, \mathbf{i}$  だけで書くので、 $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$  と  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$  (またはそれに相当する形) を導く。

### 問題1: 物質中のMaxwell方程式の物理的意味 (電場・磁場の源)

#### 電場 $\mathbf{E}$ の源 磁場 $\mathbf{B}$ の源

真電荷  $\rho$  + 分極電荷  $\rho_p$

真電流  $\mathbf{i}$  + 磁化電流  $\mathbf{i}_M$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_p)/\epsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M)$$

物質中では分極・磁化による「見かけの」電荷・電流が現れる

図1 問題1: 物質中の Maxwell 方程式の物理的意味。電場の源は真電荷と分極電荷の和、磁場の回転の源は真電流と磁化電流の和である。物質中では分極・磁化により「見かけの」電荷・電流が生じ、それらも電磁場の源として扱う。

■1-1: 4つの Maxwell 方程式 ( $\rho, \mathbf{i}, \rho_p, \mathbf{i}_M$  を用いた形) 静電磁場では時間微分はゼロとする。電場の源は真電荷と分極電荷、磁場の源は真電流と磁化電流である。

ガウスの法則 (電場) : 電場の発散は、真電荷密度と分極電荷密度の和を  $\epsilon_0$  で割ったものに等しい。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

磁束密度のガウスの法則 : 磁束線は湧き出し・吸い込みがなく、常に閉じている。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2)$$

ファラデーの法則 (静磁場) : 静電磁場では時間変動がないため、誘導電場はゼロ。

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

アンペールの法則 : 磁場の回転の源は真電流と磁化電流である。問題文では  $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  とあるので、アンペールの法則は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M) = \mu_0 \mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}. \quad (4)$$

(多くの教科書では磁化電流を  $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}$  と定義し、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M)$  と書く。問題文の  $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  に合わせるなら、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}$  となり、同じ形になる。)まとめると、求める 4 式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i} + \mathbf{i}_M. \quad (8)$$

ただし問題文では  $\mathbf{i}_M$  を「電流密度」として与えているので、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M)$  と書いておく。 $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  なら  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}$  である。

■なぜ物質中では分極電荷・磁化電流を明示するか（原理的な説明） 真空中の Maxwell 方程式では、電場の源は真電荷  $\rho$ 、磁場の回転の源は真電流  $\mathbf{i}$  だけである。しかし物質（誘電体・磁性体）の中では、原子や分子の応答として「分極」や「磁化」が生じ、それらが見かけの電荷・電流として振る舞う。分極  $\mathbf{P}$  は正負の電荷の重心のずれを表し、その発散  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$  が分極電荷密度  $\rho_p$  になる（正の端に正の見かけ電荷、負の端に負の見かけ電荷が現れる）。磁化  $\mathbf{M}$  は分子電流の巨視的な平均であり、その回転  $\nabla \times \mathbf{M}$  が磁化電流としてアンペールの法則に効く。したがって、物質中の電磁場を正しく記述するには、真電荷・真電流に加えて  $\rho_p$  と  $\mathbf{i}_M$  を明示した形で 4 式を書く必要がある。

■1-2 :  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{i}$  だけを用いた形 分極電荷を含む式はガウスの法則 (1)。 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  と  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  より、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (9)$$

移項して  $\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$ 、すなわち

$$\boxed{\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho}. \quad (10)$$

$\varepsilon$  は場所の関数なので、左辺は  $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + (\nabla \varepsilon) \cdot \mathbf{E}$  である。そのまま  $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$  と書けば、分極電荷を含む式を  $\mathbf{E}, \varepsilon, \rho$  だけで表したことになる。

磁化電流を含む式はアンペールの法則。 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}$  を、 $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{M}$  をまとめた形で書く。

ステップ 1：問題文の透磁率の定義は  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  である。これより  $\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}/\mu_0 = \mathbf{B}/\mu$  なので、 $\mathbf{H} := \mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  とおくと、 $\mathbf{H}$  は  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{M}$  で表せる。

ステップ 2： $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}$  の両辺を  $\mu_0$  で割ると  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu_0) = \mathbf{i} + \nabla \times (\mathbf{M}/\mu_0)$ 。ここで  $\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{B}/\mu + \mathbf{M}/\mu_0$ （定義  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  から  $\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{B}/\mu + \mathbf{M}/\mu_0$ ）なので、 $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) + \nabla \times (\mathbf{M}/\mu_0) = \mathbf{i} + \nabla \times (\mathbf{M}/\mu_0)$ 。両辺で  $\nabla \times (\mathbf{M}/\mu_0)$  が打ち消し、 $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$  を得る。すなわち

$$\boxed{\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{i}}. \quad (11)$$

$\mu$  が場所の関数のときは、 $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu)$  は  $\nabla \times \mathbf{B}$  と  $\nabla(1/\mu)$  の項からなるが、問題の要求通り「 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \varepsilon, \mu, \rho, \mathbf{i}$  だけを用いて示せ」の答えとして、上記 2 式でよい。

■なぜ  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{H}$  を導入するか (物理的考察)  $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$  は「真電荷だけが電束密度  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  の湧き出しの源である」ことを表す。分極電荷  $\rho_p$  は  $\mathbf{P}$  に含めて  $\mathbf{D}$  に吸収したので、式の上では真電荷  $\rho$  だけが右辺に現れる。同様に  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$  は「真電流だけが磁場の回転の源である」ように見える形になっており、磁化電流は透磁率  $\mu$  を通して左辺に取り込まれている。このように書くことで、境界値問題や波動方程式を扱うときに、真電荷・真電流の分布だけに注目すればよい形になり、計算が簡潔になる。

■1-3：時間変動する項を含む 2 式 時間変動する電磁場では、ファラデーの法則に  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 、アンペールの法則に  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  (および分極・磁化の時間変化) が現れる。

ファラデーの法則：誘導起電力は磁束の時間変化に比例する。微分形では

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (12)$$

これは  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  のみで、 $\mathbf{P}, \mathbf{M}$  は含まない。

アンペールの法則 (変位電流を含む)：電流のほか、電場の時間変化が磁場を回転させる。この効果を変位電流 ( $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  および物質中では  $\partial \mathbf{P} / \partial t$ ) という。真電流  $\mathbf{i}$ 、変位電流、分極の時間変化  $\partial \mathbf{P} / \partial t$ 、磁化  $\mathbf{M}$  を用いた形は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) + \nabla \times \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}. \quad (13)$$

問題文は「 $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \epsilon_0, \mu_0, \mathbf{i}, \mathbf{P}, \mathbf{M}$  を用いて示せ」なので、上記のまま

■なぜ時間変動で  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  と変位電流が現れるか (原理的な説明) ファラデーの法則  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  は、磁束の時間変化が閉回路に沿った誘導起電力を生むという実験事実 (電磁誘導) の数学的表現である。静磁場では  $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$  なので  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  だったが、時間変動があると渦電場が生じる。アンペールの法則には、マクスウェルが補完した変位電流  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  および物質中では分極の時間変化  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  が加わる。変位電流を導入しないと、コンデンサの極板間のように電流が流れていないう領域で磁場が説明できなくなる。つまり「電場の時間変化も磁場を回転させる」という対称性が、電磁波の存在を可能にしている。

## 2 問題 2：誘電体板と導体板の電場中の振る舞い

### 2.1 問題

真空の一様な外部電場  $\mathbf{E}_0$  の中に、誘電体板または導体板を置いたときの、内部の電場・電束密度および表面電荷密度を求める。真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

- 無限に広く平らで一様な誘電体板 (誘電率  $\epsilon$ ) を、外部電場  $\mathbf{E}_0$  に対して垂直に置く。誘電体板の内部の電束密度  $\mathbf{D}$  および電場  $\mathbf{E}$  を求めよ。

- 2.問 (2-1) の誘電体板の表面に現れる分極電荷の面密度  $\sigma_p$  を求めよ。
- 3.誘電体板を外部電場に対して斜めに置く。誘電体板の法線と  $\mathbf{E}_0$  とのなす角を  $\theta_0$  とする。誘電体板の内部電場の大きさ  $E$  を、 $E_0$ などを用いて表せ。
- 4.誘電体板を導体板に変更する。導体板を電場に垂直に置いたとき、静電誘導によって導体面に現れる電荷の面密度を求めよ。

## 2.2 解答

■この問題のポイント（初学者向け） 誘電体では電束密度  $\mathbf{D}$  の法線成分が境界で連続、導体では内部電場がゼロで表面に電荷が現れる。垂直配置では  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ （真空側と同じ）から内部の  $\mathbf{E}$  を求め、斜め配置では法線・接線成分の境界条件を満たすように  $E$  を決める。

### ■解き方の流れ

- 1.問 (2-1) : 境界で  $\mathbf{D}$  の法線成分が連続であることから内部の  $\mathbf{D}$  を求め、 $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$  で内部電場を得る。
- 2.問 (2-2) :  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$  と表面での  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  から分極電荷の面密度を求める。
- 3.問 (2-3) : 法線成分は  $D_n$  連続から  $E_n = (\epsilon_0/\epsilon) E_0 \cos \theta_0$ 、接線成分は  $E_t$  連続から  $E_t = E_0 \sin \theta_0$ 。  
 $E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2}$  で大きさを求める。
- 4.問 (2-4) : 導体内部で電場がゼロになるように、上面  $+\sigma$  と下面  $-\sigma$  が作る電場が外部電場を打ち消す条件から  $\sigma = \epsilon_0 E_0$  を導く。

### ■用語の説明

- 電束密度  $\mathbf{D}$  :  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  (線形誘電体)。ガウスの法則で  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  (真電荷のみ) となる。
- 分極電荷の面密度  $\sigma_p$  : 誘電体表面では  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  は表面外向き法線)。 $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$  なので  $\sigma_p = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ 。
- 境界条件 : 誘電体と真空の境界で、 $\mathbf{D}$  の法線成分は連続、 $\mathbf{E}$  の接線成分は連続。

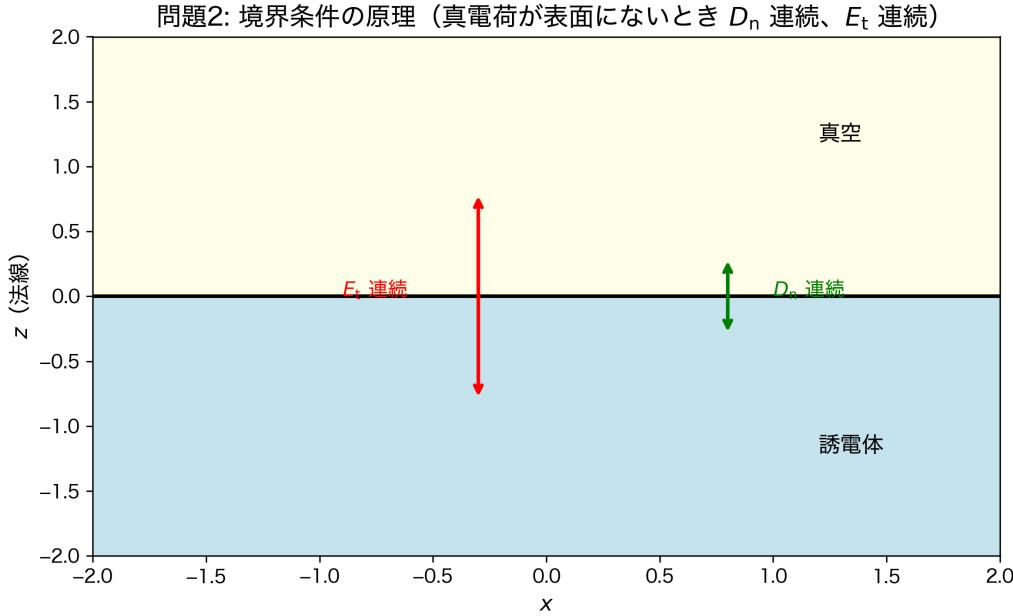


図 2 問題 2：誘電体と真空の境界での境界条件の原理。真電荷が表面がないとき、ガウスの法則から  $\mathbf{D}$  の法線成分は連続 ( $D_n$  が境界を貫いて同じ値)。電場の回転がゼロ（静電場）から、 $\mathbf{E}$  の接線成分は連続 ( $E_t$  が境界の両側で同じ)。

■2-1：誘電体板内部の  $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{E}$ （垂直配置） 板を  $z$  軸に垂直に置き、外部電場を  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$  ( $z$  正方向) とする。板は無限に広いので、内部では電場も電束密度も一様である。

#### ステップ 1： $\mathbf{D}$ の法線成分の連続性

真空と誘電体の境界で、真電荷が表面がないとき  $\mathbf{D}$  の法線成分は連続。真空側では  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ 。板の上面 ( $z$  が大きい側) では法線は  $+\mathbf{e}_z$  なので、 $D_{n,vac} = \epsilon_0 E_0$ 。誘電体内部の  $\mathbf{D}$  を  $\mathbf{D} = D_z \mathbf{e}_z$  すると、連続性から  $D_z = \epsilon_0 E_0$ 。したがって

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \epsilon_0 E_0 \mathbf{e}_z}. \quad (14)$$

#### ステップ 2：内部電場

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  より、 $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon = (\epsilon_0/\epsilon) \mathbf{E}_0$ 。したがって

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{E}_0 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0 \mathbf{e}_z}. \quad (15)$$

■なぜ内部電場は外部より弱くなるか（物理的考察） 真空では電場  $\mathbf{E}_0$  がそのまま存在するが、誘電体内部では分極  $\mathbf{P}$  が生じ、分極電荷が表面に現れる。この分極電荷が作る電場は外部電場と逆向き（誘電体内部で下向きの成分）になるため、内部の実効的な電場  $\mathbf{E}$  は  $\mathbf{E}_0$  より小さくなる。一方、電束密度  $\mathbf{D}$  の法線成分は境界で連続なので、真電荷が表面にない限り真空側と誘電体側で同じ値である。 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  と  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ （法線成分が連続なので内部でも  $D_n = \epsilon_0 E_0$ ）から、 $E = (\epsilon_0/\epsilon) E_0 < E_0$  となる。誘電率  $\epsilon$  が真空より大きい ( $\epsilon > \epsilon_0$ ) ほど、内部電場は弱くなる。これはコンデンサに誘電体を挿入すると静電容量が増える理由とも対応している。

■2-2：分極電荷の面密度  $\sigma_p$  分極は  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 - \epsilon_0 (\epsilon_0/\epsilon) \mathbf{E}_0 = \epsilon_0 (1 - \epsilon_0/\epsilon) \mathbf{E}_0$ 。板の上面では外向き法線は  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  なので、 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \epsilon_0 (1 - \epsilon_0/\epsilon) E_0$ 。下面では  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$  なので

$\sigma_p = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_z = -\varepsilon_0(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)E_0$ 。通常「面密度」は大きさで答えるか、上面の値を答える。上面の分極電荷の面密度は

$$\boxed{\sigma_p = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) E_0}. \quad (16)$$

(下面では  $-\sigma_p$  で、板全体で分極電荷の合計はゼロである。)

■なぜ表面に分極電荷が現れるか（原理的な説明） 分極  $\mathbf{P}$  は誘電体内で一様でも、境界面では「正負の電荷の重心のずれ」が表面に突き出した形になり、見かけの電荷が表面に現れる。数学的には  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  で、 $\mathbf{P}$  が境界で不連続にゼロ（真空側）に変わるために、その発散が表面にデルタ関数型の面密度  $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  として現れる。上面では  $\mathbf{P}$  が上向きなので外向き法線  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  と同方向で  $\sigma_p > 0$ 、下面では  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$  なので  $\sigma_p < 0$  となる。これらの分極電荷が作る電場が、外部電場を打ち消す方向に働き、内部電場を弱めている。

■2-3：誘電体板を斜めに置いたときの内部電場の大きさ  $E$  板の法線を  $\mathbf{n}$  とし、 $\mathbf{E}_0$  と  $\mathbf{n}$  のなす角を  $\theta_0$  とする。真空側では  $\mathbf{E}_0$  の法線成分は  $E_0 \cos \theta_0$ 、接線成分は  $E_0 \sin \theta_0$ 。

境界条件： $\mathbf{D}$  の法線成分が連続、 $\mathbf{E}$  の接線成分が連続。誘電体内部で  $\mathbf{E}$  は一様で、その法線成分を  $E_n$ 、接線成分を  $E_t$  とする。接線成分の連続から  $E_t = E_0 \sin \theta_0$ 。法線成分について、真空側の  $D_n = \varepsilon_0 E_0 \cos \theta_0$  が誘電体側の  $D_n = \varepsilon E_n$  と等しいので、 $E_n = (\varepsilon_0/\varepsilon) E_0 \cos \theta_0$ 。したがって内部電場の大きさは

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} E_0^2 \cos^2 \theta_0 + E_0^2 \sin^2 \theta_0} = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}. \quad (17)$$

したがって

$$\boxed{E = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}}. \quad (18)$$

■なぜ法線成分と接線成分で扱いが違うか（物理的考察） 境界では  $\mathbf{D}$  の法線成分が連続（真電荷が表面にないとき）、 $\mathbf{E}$  の接線成分が連続（静電場では  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  から）という2つの条件が独立に成り立つ。法線方向では分極電荷が現れるため  $D_n$  が「真電荷の湧き出し」を表す量として連続になる。接線方向では表面に沿った電場の積分が境界の両側で等しくなければならないため  $E_t$  が連続になる。斜め配置では、外部電場の法線成分  $E_0 \cos \theta_0$  に対して内部では  $E_n = (\varepsilon_0/\varepsilon) E_0 \cos \theta_0$  に弱められ、接線成分  $E_t = E_0 \sin \theta_0$  はそのままなので、内部の電場の大きさは  $E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2}$  で上記の式になる。 $\theta_0 = 0$  のときは垂直配置の結果  $E = (\varepsilon_0/\varepsilon) E_0$  に一致する。

■2-4：導体板を垂直に置いたときの表面電荷の面密度 導体内部では電場はゼロ。静電誘導で、導体の表面に電荷が現れ、それらが作る電場が外部電場を打ち消す。板を電場に垂直に置き、 $z$  軸を上向き ( $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$ ) とする。板の両面に現れる電荷の面密度を上面  $+\sigma$ 、下面  $-\sigma$  とする。

無限平面が作る電場：面密度  $\sigma$  の無限平面は、面に垂直で大きさ  $\sigma/(2\varepsilon_0)$  の電場を「表側」と「裏側」に作る。表側では外向き法線の向きに、裏側では逆向きに働く。

導体内部での2面の寄与：上面の  $+\sigma$  の「裏側」(=導体内部) では電場は下向き  $-\sigma/(2\varepsilon_0) \mathbf{e}_z$ 。下面の  $-\sigma$  の「裏側」(=導体内部) では、下面の内向き法線は  $+\mathbf{e}_z$  なので、面密度  $-\sigma$  が作る裏側の電場は  $(-\sigma)/(2\varepsilon_0) \times (+\mathbf{e}_z) = -\sigma/(2\varepsilon_0) \mathbf{e}_z$  (下向き)。よって上面・下面の寄与はともに  $-\sigma/(2\varepsilon_0) \mathbf{e}_z$  で、合計は  $-\sigma/\varepsilon_0 \mathbf{e}_z$ 。外部電場  $E_0 \mathbf{e}_z$  と打ち消し合うには  $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$ 、すなわち  $\sigma = \varepsilon_0 E_0$ 。上面

に現れる電荷の面密度は  $+\varepsilon_0 E_0$ 、下面には  $-\varepsilon_0 E_0$ 。したがって

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0 E_0} . \quad (19)$$

(上面 :  $+\varepsilon_0 E_0$ 、下面 :  $-\varepsilon_0 E_0$ 。)

■なぜ導体内部の電場がゼロになるか（原理的な説明） 導体では自由電子が移動できるため、外部電場がかかると静電誘導によって表面に電荷が再配置される。導体内部の任意の点で電場がゼロでないと、自由電子が力を受けて動き続け、定常状態に達しない。したがって静電平衡では導体内部の電場は必ずゼロである。無限に広い板を電場に垂直に置いた場合、上面に正の電荷、下面に負の電荷が誘導され、それらが作る電場が導体内部で外部電場  $\mathbf{E}_0$  と丁度打ち消し合う。無限平面の面密度  $\sigma$  が作る電場は面に垂直で大きさ  $\sigma/(2\varepsilon_0)$  なので、上面の  $+\sigma$  と下面の  $-\sigma$  が内部で作る電場の和が  $-\mathbf{E}_0$  になるように  $\sigma = \varepsilon_0 E_0$  と決まる。

### 問題2(2-1)(2-2): 誘電体板を垂直に置いた場合

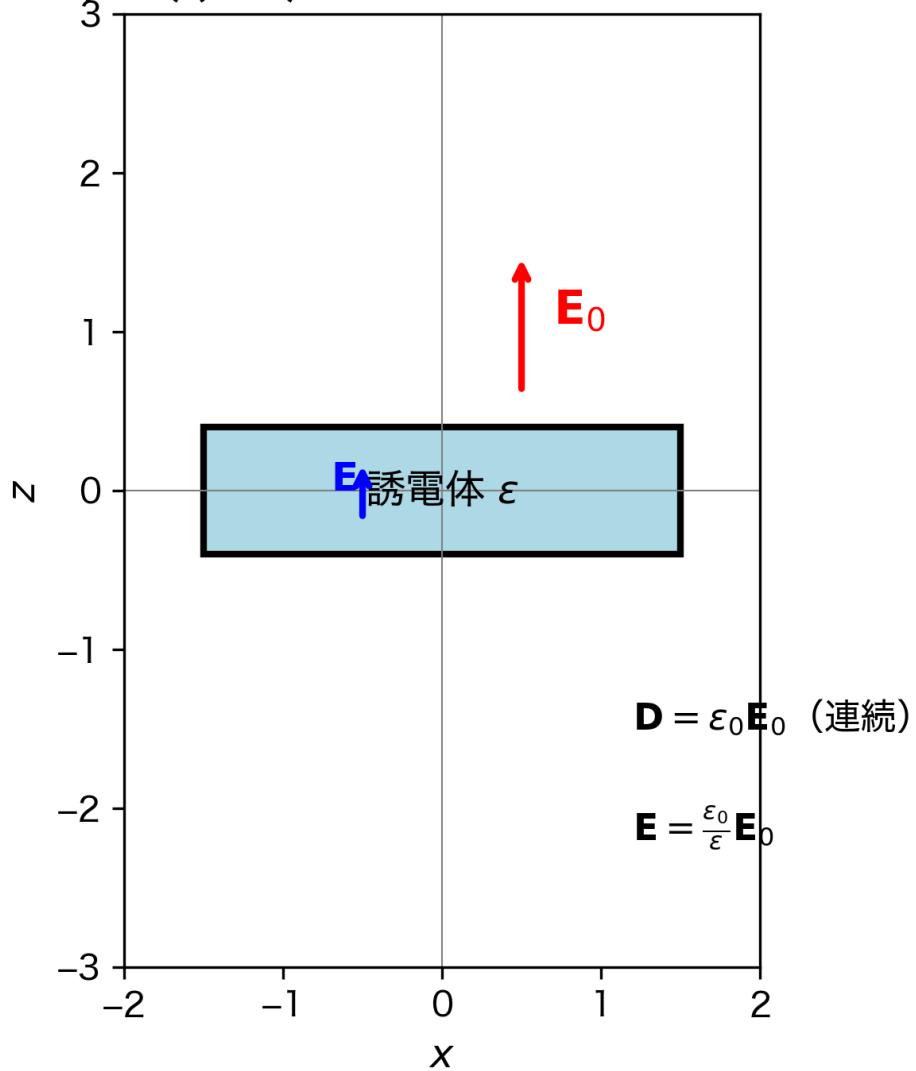


図 3 問題 2(2-1)(2-2)：誘電体板を外部電場に垂直に置いた場合。 $\mathbf{D}$  は連続、内部の  $\mathbf{E}$  は  $\varepsilon_0/\varepsilon$  倍になる。表面に分極電荷が現れる。

問題2(2-3): 誘電体板を斜めに置いた場合 (法線と  $\mathbf{E}_0$  のなす角  $\theta_0$ )

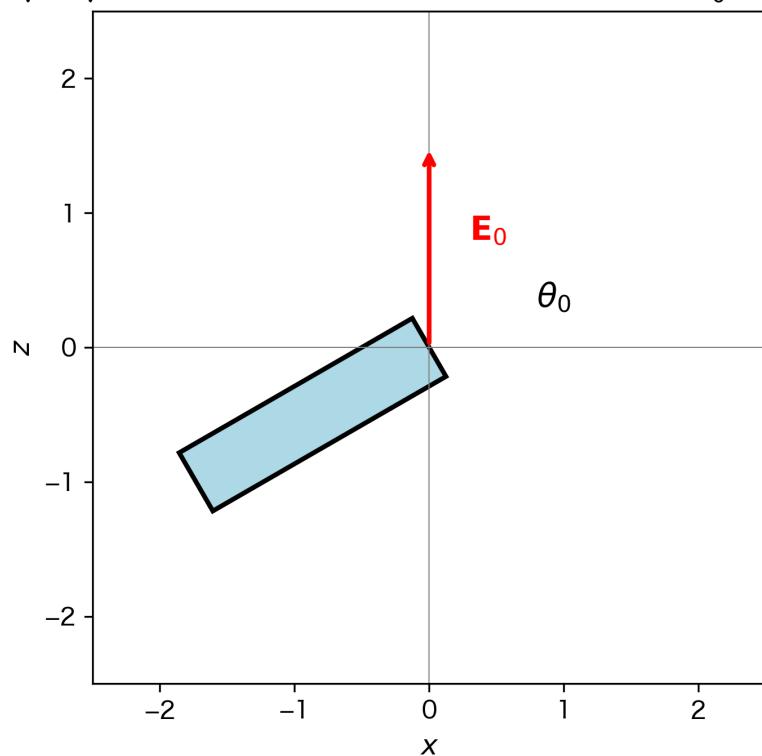


図 4 問題 2(2-3) : 誘電体板を斜めに置いた場合。法線と  $\mathbf{E}_0$  のなす角を  $\theta_0$  とする。

## 問題2(2-4): 導体板を垂直に置いたときの静電誘導

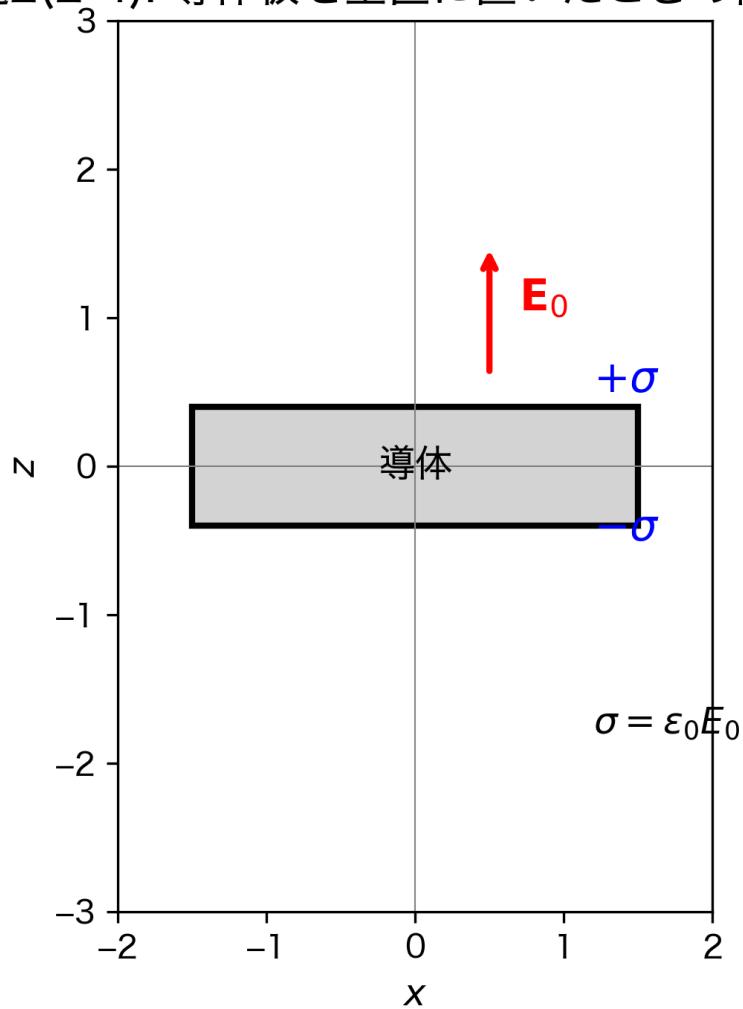


図 5 問題 2(2-4)：導体板を電場に垂直に置いたときの静電誘導。表面に  $\pm\sigma$  の電荷が現れ、内部電場をゼロにする。

### 3 問題 3：金属表面における平面電磁波の反射と透過

#### 3.1 問題

$z$  軸方向に進行する平面電磁波が、真空から金属の境界面に垂直に入射する。平面電磁波は  $\mathbf{E} = E_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ ,  $\mathbf{H} = H_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ 。角振動数  $\omega$ 、波数  $k$ 。真空 (誘電率  $\epsilon_0$ 、透磁率  $\mu_0$ )。金属は電気伝導率  $\sigma$ 、誘電率  $\epsilon_0$ 、透磁率  $\mu_0$ 。 $\sigma$  は実数。境界面は  $z = 0$ 、金属は  $z \geq 0$ 。

1.  $\epsilon_0$ 、 $\sigma$ 、 $\omega$ などを用いて、反射率  $R$  を求めよ。
2. 真空中からの入射光の強度を  $I_0$  とする。金属表面から深さ  $z = d$  ( $d > 0$ ) の金属内部での光の強度  $I_1$  を、 $R$ 、 $d$ 、 $\mu_0$ 、 $\sigma$ 、 $\omega$ などを用いて求めよ。
3. 金属が厚み  $d$  の板 ( $0 \leq z \leq d$ ) であるとき、厚み  $d$  の金属板を通過後の光の強度  $I_2$  を求めよ。金属内部での多重反射を考え、位相は考慮せず振幅だけを足し合わせてよい。

## 3.2 解答

■この問題のポイント（初学者向け） 金属中では複素誘電率または複素波数を用い、境界  $z = 0$  で反射率を求める。金属内部では電磁波が減衰し、強度は  $\exp(-2\beta z)$  に比例する。厚み  $d$  の板の透過率は、減衰と多重反射（振幅を足し合わせる）で求める。

### ■解き方の流れ

- 1.問 (3-1)：金属の複素波数  $k_m = k_0 \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  とインピーダンスから反射率  $R = |(1 - k_m/k_0)/(1 + k_m/k_0)|^2$  を求める。
- 2.問 (3-2)：金属表面直下の強度は  $I_0(1 - R)$ 。内部では  $\exp(-2\beta z)$  で減衰するので、 $z = d$  での強度は  $I_1 = I_0(1 - R)\exp(-2\beta d)$ 。
- 3.問 (3-3)：板を透過する光の経路（1回透過、2回反射後透過、…）の強度を等比級数で足し合わせ、 $I_2 = I_0(1 - R)^2 \exp(-2\beta d)/(1 - R \exp(-2\beta d))$  を得る。

■使用する公式 真空中的な波数： $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 。金属中では電流  $\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$  を考慮し、実効的に  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + i\sigma/\omega$ （複素誘電率）とおく。金属中の波数は  $k_m = k_0 \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  ( $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ )。 $k_m = \alpha + i\beta$  とおくと、金属中の電場は  $E \propto \exp(-\beta z) \exp(i(\alpha z - \omega t))$  のように減衰する。強度（光のエネルギー流）は電場の2乗に比例するので、 $I \propto |E|^2 \propto \exp(-2\beta z)$  である。

インピーダンス：電磁波の進行において、電場と磁場の比  $Z = E/H$  をインピーダンスという。真空中では  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ 。境界で電場・磁場の接続条件を課すと、反射振幅は両媒質のインピーダンスの差で決まり、反射率  $R$  はその絶対値の2乗である。

■3-1：反射率  $R$  垂直入射のとき、境界  $z = 0$  での電場・磁場の接続条件から、反射振幅は  $(Z_m - Z_0)/(Z_m + Z_0)$  で与えられる ( $Z_0$ ：真空のインピーダンス、 $Z_m$ ：金属の複素インピーダンス)。反射率は強度比なので、

$$R = \left| \frac{Z_m - Z_0}{Z_m + Z_0} \right|^2. \quad (20)$$

金属中では  $k_m = \omega\sqrt{\mu_0(\varepsilon_0 + i\sigma/\omega)} = k_0\sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$ 。良導体近似  $\sigma/(\omega\varepsilon_0) \gg 1$  では  $k_m \approx i\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}(1+i) = (1+i)\sqrt{\omega\mu_0\sigma/2}$ 。金属のインピーダンスは  $Z_m = \omega\mu_0/k_m \approx \sqrt{\omega\mu_0/(2\sigma)}(1-i)$  で、 $|Z_m| \ll Z_0$  なら  $R \approx |(-Z_0)/(Z_0)|^2 = 1$  に近い。より正確には、 $Z_m/Z_0 = k_0/k_m = 1/\sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  なので、

$$R = \left| \frac{1 - Z_0/Z_m}{1 + Z_0/Z_m} \right|^2 = \left| \frac{1 - k_m/k_0}{1 + k_m/k_0} \right|^2. \quad (21)$$

$k_m = k_0\sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  を代入して整理する。 $n_m = k_m/k_0 = \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  とおくと、 $R = |(1 - n_m)/(1 + n_m)|^2$ 。複素数  $n_m$  の実部・虚部を  $n_m = n'_m + i n''_m$  とすると、

$$R = \frac{(1 - n'_m)^2 + n''_m{}^2}{(1 + n'_m)^2 + n''_m{}^2}. \quad (22)$$

良導体では  $|n_m| \gg 1$  ので  $R \rightarrow 1$ 。問題では「 $\varepsilon_0, \sigma, \omega$  を用いて反射率  $R$  を求めよ」とあるので、上記の  $n_m = \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  を用いた

$$R = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}}{1 + \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}} \right|^2. \quad (23)$$

が答えである。 $\sqrt{1 + ix}$  ( $x = \sigma/(\omega\varepsilon_0)$ ) は、 $1 + ix = re^{i\phi}$  とおき  $r = \sqrt{1 + x^2}$ 、 $\phi = \arctan x$  から  $\sqrt{1 + ix} = r^{1/2}e^{i\phi/2}$  で計算できる。良導体近似では  $R \approx 1 - 2\sqrt{2\omega\varepsilon_0/(\sigma\mu_0)}$  などの形にも書けるが、指定に従い上記でよい。

■なぜ金属は光をよく反射するか（物理的考察） 金属中では自由電子が存在し、電気伝導率  $\sigma$  が大きい。電磁波が金属に入射すると、金属内で電流  $\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$  が流れ、その電流が作る磁場・電場が入射波と干渉する。結果として、金属のインピーダンス  $Z_m$  は真空のインピーダンス  $Z_0$  よりずっと小さく ( $|Z_m| \ll Z_0$ )、境界での反射係数  $(Z_m - Z_0)/(Z_m + Z_0)$  はほぼ  $-1$  に近い。つまり入射波と逆向きの反射波が強く、透過波は弱い。これが金属が鏡のように光を反射する理由である。周波数が低い（可視～マイクロ波）ほど  $\sigma/(\omega\varepsilon_0)$  が大きくなり、良導体近似が成り立ち  $R \rightarrow 1$  に近づく。

■3-2: 金属内部  $z = d$  での光の強度  $I_1$  金属中では電場が  $E(z) \propto \exp(i(k_m z - \omega t))$  で、 $k_m = \alpha + i\beta$  ( $\beta > 0$ ) とすると  $|E(z)| \propto \exp(-\beta z)$ 。強度は  $|E|^2$  に比例するので、 $z = 0$  での入射強度に対する金属内の強度の比は、 $z = 0$  界面直下での振幅の 2 乗比（つまり  $(1 - R)$  に相当する進入率）に  $\exp(-2\beta d)$  をかけたもの。入射強度を  $I_0$  とすると、金属表面 ( $z = 0^+$ ) での強度は  $I_0(1 - R)$ 。そこから  $z = d$  では

$$I_1 = I_0(1 - R) \exp(-2\beta d). \quad (24)$$

ここで  $\beta = \text{Im } k_m$ 。 $k_m = k_0 \sqrt{1 + i\sigma/(\omega\varepsilon_0)}$  の虚部である。 $\sqrt{1 + ix} = a + ib$  とおくと、 $(a + ib)^2 = 1 + ix$  から  $a^2 - b^2 = 1$ 、 $2ab = x$ 。 $a^2 + b^2 = \sqrt{1 + x^2}$  と  $a^2 - b^2 = 1$  を解いて、 $a^2 = (1 + \sqrt{1 + x^2})/2$ 、 $b^2 = (\sqrt{1 + x^2} - 1)/2$ 。よって  $\beta = k_0 b = k_0 \sqrt{(\sqrt{1 + x^2} - 1)/2}$ 、 $x = \sigma/(\omega\varepsilon_0)$ 。良導体では  $\beta \approx \sqrt{\omega\mu_0\sigma}/2$ 。

■なぜ金属内部で光が減衰するか（スキン深度の物理） 金属中では複素波数  $k_m = \alpha + i\beta$  の虚部  $\beta$  が正であるため、電場が  $e^{-\beta z}$  で減衰する。これは電流  $\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$  がジュール熱としてエネルギーを消費し、電磁波のエネルギーが金属内で吸収されるためである。減衰の長さ  $\delta = 1/\beta$  をスキン深度（侵入深さ）といい、良導体では  $\delta \approx \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)}$  となる。周波数が高いほど  $\delta$  は短くなり、高周波の電磁波は金属表面付近しか侵入しない。強度は  $|E|^2$  に比例するので、 $z = d$  での強度は  $z = 0$  直下の強度  $I_0(1 - R)$  に  $\exp(-2\beta d)$  をかけた  $I_1 = I_0(1 - R) \exp(-2\beta d)$  となる。図 6 に強度の減衰の様子を示す。

問題3(3-2): 金属内部での光の強度の減衰 ( $z = 0$  が金属表面)

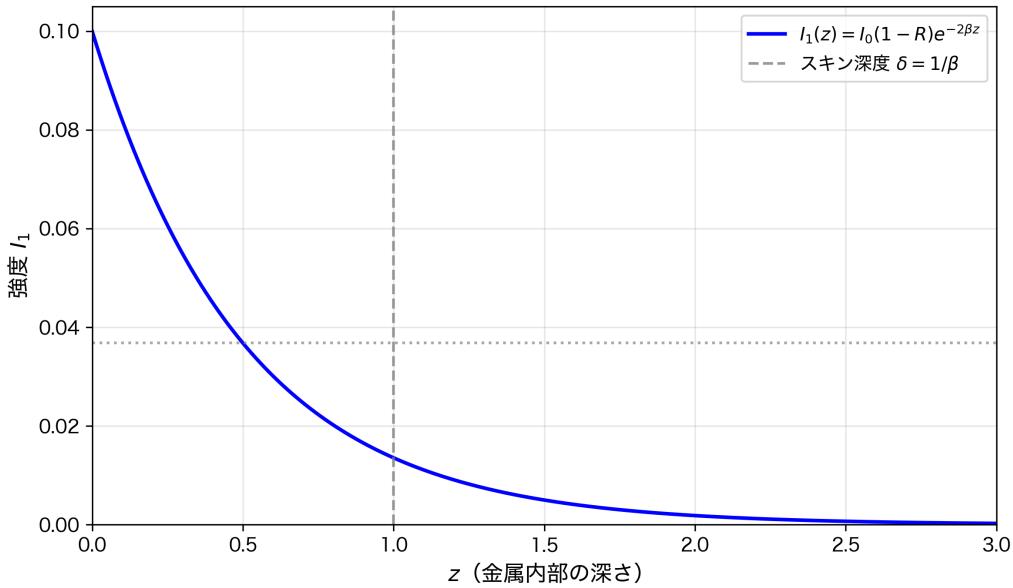


図6 問題3(3-2): 金属内部での光の強度  $I_1(z) = I_0(1 - R) \exp(-2\beta z)$  の減衰。 $z = 0$  が金属表面。スキン深度  $\delta = 1/\beta$  の程度で強度が  $1/e$  に減る。

■3-3: 厚み  $d$  の金属板を通過後の強度  $I_2$  金属板の後表面 ( $z = d$ ) で透過した光と、板内で多重反射して透過する光の振幅を足し合わせる（位相は無視）。金属内で  $z = 0$  から  $z = d$  まで進むと振幅は  $\exp(-\beta d)$  倍。後表面での透過係数（振幅）を  $t$  とすると、最初に透過する振幅は入射振幅を  $A$  として  $A(1 - R)^{1/2} \exp(-\beta d)t$ （ここで  $(1 - R)^{1/2}$  は進入振幅比の目安）。多重反射：前表面で反射 → 後表面で透過の経路では、金属内を  $2d$  進むので  $\exp(-2\beta d)$ 、さらに前表面でまた反射 → 後表面で透過では  $\exp(-4\beta d)$ 、…。透過振幅の和は、位相を無視して振幅だけ足すと、各往復で  $\sqrt{R} \exp(-2\beta d)$  倍になる。透過強度は、最初の透過が  $I_0(1 - R)^2 \exp(-2\beta d)$  に相当し、2回目は  $I_0(1 - R)^2 R \exp(-4\beta d)$ 、3回目は  $I_0(1 - R)^2 R^2 \exp(-6\beta d)$ 、…。合計は

$$I_2 = I_0(1 - R)^2 \exp(-2\beta d) (1 + R \exp(-2\beta d) + R^2 \exp(-4\beta d) + \dots) = I_0 \frac{(1 - R)^2 \exp(-2\beta d)}{1 - R \exp(-2\beta d)}. \quad (25)$$

したがって

$$I_2 = I_0 \frac{(1 - R)^2 \exp(-2\beta d)}{1 - R \exp(-2\beta d)}. \quad (26)$$

■なぜ多重反射を足し合わせるか（物理的考察） 金属板の前表面 ( $z = 0$ ) で一部が反射、一部が透過して金属内に入る。金属内で減衰しながら後表面 ( $z = d$ ) に達し、そこで再び一部が反射、一部が透過する。透過した光が板の外に出るが、後表面で反射した光は金属内を戻り、前表面でまた一部が透過（板の外へ）し、残りは反射して金属内を進む……という過程が繰り返される。問題では位相を無視して振幅だけを足し合わせるので、各経路の透過強度を  $I_0(1 - R)^2 R^n \exp(-2\beta d(n + 1))$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$  は後表面での反射回数) として等比級数の和をとると上記の  $I_2$  になる。板が厚いか  $\beta$  が大きいと  $\exp(-2\beta d)$  が小さく、最初の透過のみが効き  $I_2 \approx I_0(1 - R)^2 \exp(-2\beta d)$  となる。

問題3: 金属表面への垂直入射（反射率  $R$ 、内部で減衰）

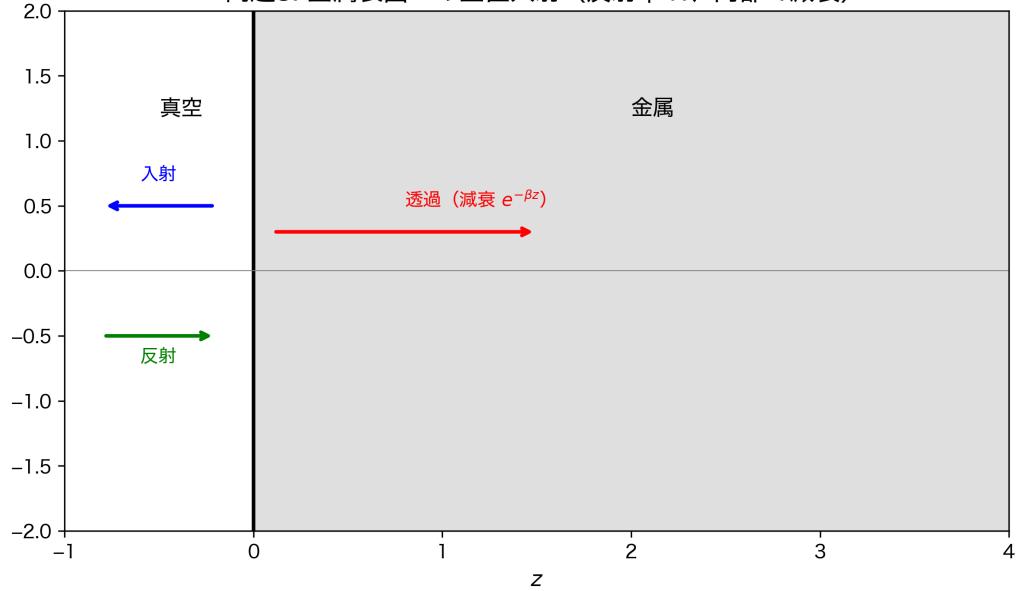


図 7 問題 3: 真空から金属表面への垂直入射。反射率  $R$ 、金属内部では減衰定数  $\beta$  で強度が  $\exp(-2\beta z)$  に比例する。

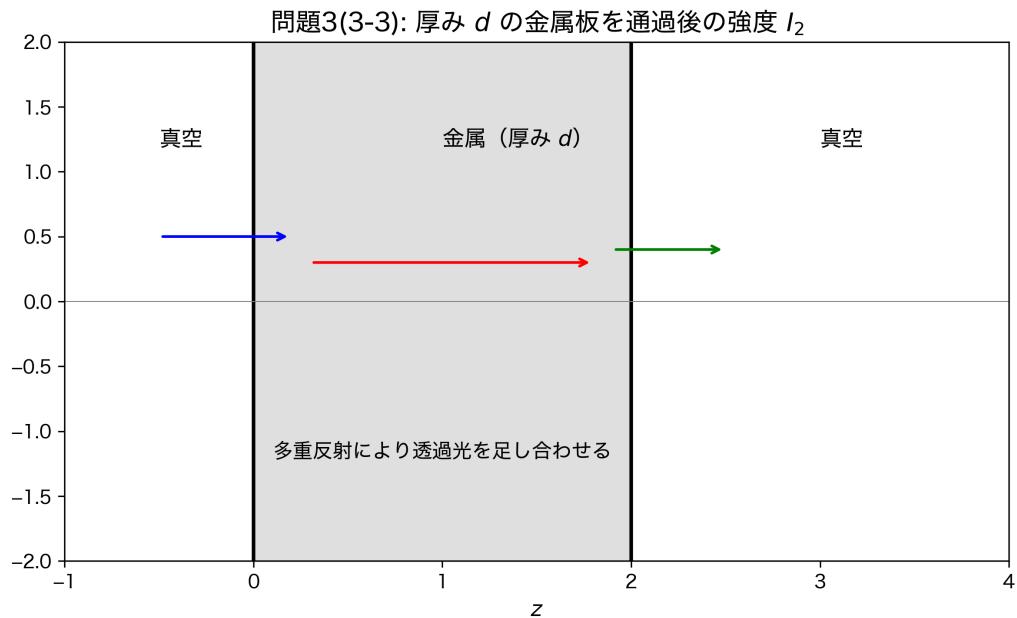


図 8 問題 3(3-3): 厚み  $d$  の金属板。多重反射により透過光を足し合わせる。

# 第 II 部

## 2024 年度 期末試験

### 1 問題 1：物質中の Maxwell 方程式

#### 1.1 問題

静電磁場における物質中の Maxwell 方程式を考え、その後、時間変動する電磁場に拡張する。真空中の誘電率を  $\epsilon_0$ 、透磁率を  $\mu_0$  とする。

1. 物質内部に真電荷（電荷密度  $\rho$ ）、真電流（電流密度  $\mathbf{i}$ ）、分極電荷（電荷密度  $\rho_p$ ）、磁化電流（電流密度  $\mathbf{i}_M$ ）が存在する場合に、Maxwell 方程式の 4 つの式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\rho$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\rho_p$ 、 $\mathbf{i}_M$  を用いて示せ。
2. 分極ベクトル  $\mathbf{P}$  と磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  を用いて  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 、 $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  と表せる。物質の誘電率  $\epsilon$  を  $\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  で定義し、透磁率  $\mu$  を  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  で定義する。(1-1) のうち、分極電荷と磁化電流を含む 2 つの式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\rho$ 、 $\mathbf{i}$  だけを用いて書き直せ。ただし  $\epsilon$ 、 $\mu$  は場所の関数とする。
3. 時間変動する電磁場を考える。物質中の Maxwell 方程式のうち、時間変動する項を含む 2 つの式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  を用いて示せ。

#### 1.2 解答

■この問題のポイント 2023 年度問題 1 と同一である。1-1 で 4 式を  $\rho, \mathbf{i}, \rho_p, \mathbf{i}_M$  で書き、1-2 で分極・磁化を含む 2 式を  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}/\mu$  の形に書き直し、1-3 で時間変動を含むファラデー・アンペールの式を示す。

#### ■解き方の流れ

1. 問 1：静電磁場の 4 式を  $\rho, \rho_p, \mathbf{i}, \mathbf{i}_M$  を用いて書く。
2. 問 2： $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$  と  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$  を導く（詳細は 2023 年度問題 1 参照）。
3. 問 3： $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  と変位電流・ $\partial \mathbf{P} / \partial t$  を含むアンペールの式を書く。

#### ■1-1：4 つの Maxwell 方程式 静電磁場では

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (28)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (29)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \mathbf{i}_M. \quad (30)$$

( $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  の定義に合わせるなら、右辺は  $\mu_0 \mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}_0$ 。)

■1-2:  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \varepsilon, \mu, \rho, \mathbf{i}$  だけを用いた 2 式 分極電荷を含む式: 1-1 のガウスの法則  $\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_p)/\varepsilon_0$  に  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  を代入し、移項すると  $\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$ 。 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  なので、

$$\boxed{\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho}. \quad (31)$$

磁化電流を含む式: 1-1 のアンペールの法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}$  と、問題文の透磁率の定義  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  から、両辺を  $\mu_0$  で割って  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu)$  を整理すると  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$  が得られる（詳細は 2023 年度問題 1 のステップ 1・ステップ 2 参照）。よって

$$\boxed{\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{i}}. \quad (32)$$

### 問題1: 物質中のMaxwell方程式の物理的意味（電場・磁場の源）

#### 電場 $\mathbf{E}$ の源

真電荷  $\rho$  + 分極電荷  $\rho_p$

#### 磁場 $\mathbf{B}$ の源

真電流  $\mathbf{i}$  + 磁化電流  $\mathbf{i}_M$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_p)/\varepsilon_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M)$$

物質中では分極・磁化による「見かけの」電荷・電流が現れる

図 9 問題 1: 物質中の Maxwell 方程式の物理的意味。電場の源は真電荷と分極電荷の和、磁場の回転の源は真電流と磁化電流の和。

### ■1-3: 時間変動する項を含む 2 式

■物理的考察 物質中では分極・磁化による「見かけの」電荷・電流が電磁場の源になる（上図）。 $\mathbf{D}$  と  $\mathbf{B}/\mu$  を導入すると、式の上では真電荷・真電流だけが右辺に現れ、計算が簡潔になる。時間変動ではファラデーの法則に  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 、アンペールの法則に変位電流  $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  と  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  が加わる。より詳しくは 2023 年度問題 1 の「なぜ～か」の段落を参照のこと。

## 2 問題 2：均一に分極した強誘電体球

### 2.1 問題

半径  $a$  の強誘電体球が、 $\mathbf{P} = (0, 0, P)$  で一様に自発分極している。球の中心は原点、外部電場はゼロ、真電荷はない。分極状態を再現するため、電荷密度  $+\rho$  で一様に帯電した半径  $a$  の球を  $(0, 0, s/2)$  に、電荷密度  $-\rho$  で一様に帯電した半径  $a$  の球を  $(0, 0, -s/2)$  に置く ( $s \ll a$ )。球内部に作る電場  $\mathbf{E}_p$  は、それぞれの帶電球が作る電場の足し合わせと考える。

1. 中心が原点にあり、電荷密度  $+\rho$  で一様に帯電した半径  $a$  の球のみを考える。原点から位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の場所における球内部の電場  $\mathbf{E}$  を  $\rho, \varepsilon_0, \mathbf{r}$  を用いて求めよ。
2. 上記の 2 つの帶電球が作る電場の足し合わせを考え、 $\mathbf{s} = (0, 0, s)$  とすると  $\mathbf{P} = \rho\mathbf{s}$  と書けることを用いて、 $\mathbf{E}_p$  を  $\mathbf{P}$  と  $\varepsilon_0$  を用いて表せ。
3. 強誘電体球内外での電気力線  $\varepsilon_0\mathbf{E}$  と電束線  $\mathbf{D}$  を  $xz$  平面上で概略図示せよ。
4. 強誘電体球内部での  $\mathbf{D}$  と  $\varepsilon_0\mathbf{E}$  の関係を、 $x$  軸と  $y$  軸に取って概念的に示し、(2-3) の状態がどこに相当するか答えよ。

### 2.2 解答

■この問題のポイント（初学者向け） 一様帶電球内部の電場はガウスの法則から  $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}$  で与えられる。 $+\rho$  と  $-\rho$  の 2 球を  $z$  軸上に  $\pm s/2$  だけずらして重ねると、それが小さいとき内部電場は  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  となる。真電荷がないので  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  であり、球内部では  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  と  $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  から  $\mathbf{D} = (2/3)\mathbf{P}$ （一様）となる。

#### ■用語の説明

- 強誘電体：外部電場がなくても自発分極  $\mathbf{P}$  を持つ物質。
- 電束密度  $\mathbf{D}$ ： $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ 。真電荷がなければ  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 。

#### ■解き方の流れ

1. 問 (2-1)：ガウスの法則を半径  $r$  の球面に適用し、一様帶電球内部の電場  $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}$  を求める。
2. 問 (2-2)：2 つの帶電球（中心が  $(0, 0, \pm s/2)$ ）が作る電場の和を計算し、 $\mathbf{P} = \rho\mathbf{s}$  を用いて  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  を得る。
3. 問 (2-3)：球内部では  $\varepsilon_0\mathbf{E}$  は  $z$  負向き、 $\mathbf{D}$  は  $z$  正向き  $((2/3)\mathbf{P})$ 。球外は双極子型の力線。 $xz$  平面で概略を描く。
4. 問 (2-4)：横軸  $\varepsilon_0 E$ 、縦軸  $D$  の平面上に、自発分極のみの状態  $((-P/3, 2P/3)$  付近) をプロットし、(2-3) の状態がそこに対応することを示す。

■2-1：一様帶電球内部の電場  $\mathbf{E}$  中心が原点、半径  $a$ 、電荷密度  $+\rho$  の球を考える。ガウスの法則：閉曲面  $S$  について、電束の総和  $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$  は、 $S$  の内部の全電荷  $Q_{in}$  を  $\varepsilon_0$  で割ったものに等しい。球対称なので、原点から距離  $r$  ( $r \leq a$ ) の点では  $\mathbf{E}$  は動径方向で大きさは  $r$  のみに依存する。

半径  $r$  の球面でガウスの法則を適用すると、左辺は  $E(r) \times 4\pi r^2$  (球面上で  $\mathbf{E}$  の大きさは一定)、右辺は  $Q_{\text{in}}/\varepsilon_0 = (4\pi r^3/3)\rho/\varepsilon_0$  (球面内の電荷) なので、 $4\pi r^2 E(r) = (4\pi r^3/3)\rho/\varepsilon_0$  より

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \quad (33)$$

ベクトルで書くと、位置  $\mathbf{r}$  では動径方向外向きに  $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}_\theta$ 。したがって

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}_\theta}. \quad (34)$$

■なぜ一様帯電球内部の電場が  $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}$  になるか (原理的な説明) 球対称な電荷分布では、ガウスの法則から、半径  $r$  の球面内の全電荷  $Q_{\text{in}} = (4\pi r^3/3)\rho$  が作る電場は、球面上一様で動径外向きに  $E(r) = Q_{\text{in}}/(4\pi\varepsilon_0 r^2) = \rho r/(3\varepsilon_0)$  となる。つまり内部の点では、その点より内側の電荷だけが寄与し、外側の電荷の寄与は球対称性からゼロである。したがって  $\mathbf{E}$  は原点から見た位置ベクトル  $\mathbf{r}$  に比例し、 $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}$  となる。

■2-2: 分極電場  $\mathbf{E}_p$  を  $\mathbf{P}$  と  $\varepsilon_0$  で表す  $+ \rho$  の球の中心が  $(0, 0, s/2)$ 、 $- \rho$  の球の中心が  $(0, 0, -s/2)$  にあり、 $s \ll a$  とする。原点付近の点  $\mathbf{r}$  は、 $s$  が十分小さいため、両方の球の内部にあるとみなせる。したがって、 $+ \rho$  の球が作る電場は問 (2-1) の公式が使え、その球の中心  $(0, 0, s/2)$  からの位置ベクトル  $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r} - (0, 0, s/2)$  を用いて  $\mathbf{E}_+ = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}_+$ 。同様に  $- \rho$  の球が作る電場は  $\mathbf{r}_- = \mathbf{r} - (0, 0, -s/2)$  として  $\mathbf{E}_- = (-\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}_-$ 。したがって

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}((\mathbf{r} - (0, 0, s/2)) - (\mathbf{r} - (0, 0, -s/2))) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(0, 0, -s) = -\frac{\rho\mathbf{s}}{3\varepsilon_0}. \quad (35)$$

$\mathbf{P} = \rho\mathbf{s}$  なので、

$$\boxed{\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}}. \quad (36)$$

(球内部で一様な電場である。)

■なぜ  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  になるか (脱分極電場の物理) 一様分極  $\mathbf{P}$  を、 $z$  軸上に  $\pm s/2$  だけずれた  $+ \rho$  と  $- \rho$  の 2 つの一様帯電球で再現する。球内部 (原点付近) では、 $+ \rho$  の球が作る電場はその中心  $(0, 0, s/2)$  からの位置ベクトルに比例して  $\mathbf{E}_+ = (\rho/(3\varepsilon_0))(\mathbf{r} - (0, 0, s/2))$ 、 $- \rho$  の球が作る電場は  $\mathbf{E}_- = (-\rho/(3\varepsilon_0))(\mathbf{r} - (0, 0, -s/2))$ 。足し合わせると  $\mathbf{r}$  に比例する項は打ち消し、 $\mathbf{E}_p = (\rho/(3\varepsilon_0))(-\mathbf{r}) = -\rho\mathbf{s}/(3\varepsilon_0)$  となる。 $\mathbf{P} = \rho\mathbf{s}$  なので  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$ 。この電場は分極と逆向きであり、脱分極電場 (分極を弱める方向に働く電場) と呼ばれる。球のような形状では内部に脱分極電場が生じ、外部電場がなくても  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  となる。

問題2(2024): 一様分極の等価モデル（2つの帶電球）と脱分極電場の向き

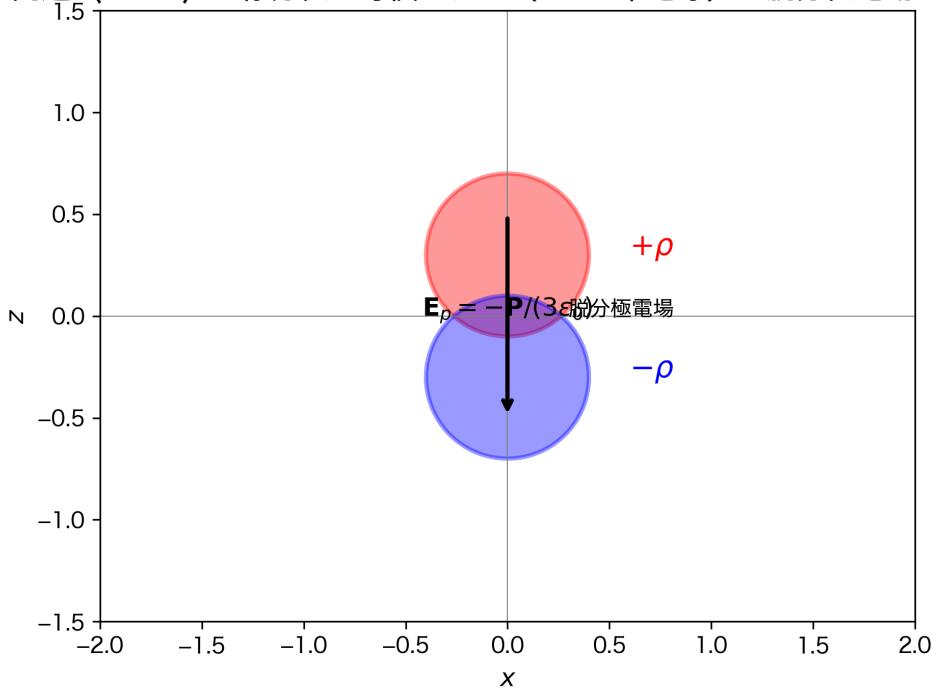


図 10 問題 2(2-2)：一様分極を 2 つの帶電球で再現するモデル。内部では 2 球の電場の和が  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$  という脱分極電場になる。

■2-3：電気力線  $\epsilon_0\mathbf{E}$  と電束線  $\mathbf{D}$  の概略 球内部： $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$  なので  $\epsilon_0\mathbf{E}$  は  $z$  負方向、大きさ  $P/3$ 。 $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  に代入すると、内部では  $\mathbf{D} = -\mathbf{P}/3 + \mathbf{P} = (2/3)\mathbf{P}$  となる ( $\mathbf{P}$  は一様なので  $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  であり、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = (2/3)\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  で真電荷なしの条件を満たす)。つまり球内部では  $\mathbf{D}$  は  $z$  正向きで大きさ  $(2/3)P$ 。球の外側では境界で  $\mathbf{D}$  の法線成分が連続で、球面の分極電荷から双極子型の場が広がる。まとめると、電気力線  $\epsilon_0\mathbf{E}$  は球内部で  $z$  負向き、球外では双極子型。電束線  $\mathbf{D}$  は球内部で  $z$  正向き  $((2/3)\mathbf{P})$ 、球外では双極子型。図では、xz 平面で、球内の  $\epsilon_0\mathbf{E}$  と  $\mathbf{D}$  の向き・相対的な密度、境界での連続条件を反映して描く。

■なぜ  $\mathbf{D}$  と  $\epsilon_0\mathbf{E}$  の向きが球内部で違うか（物理的考察）  $\mathbf{E}$  は「真電荷と分極電荷の両方」が作る電場であり、強誘電体球では表面の分極電荷が作る脱分極電場のため、内部では  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$  で分極と逆向きになる。一方  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  は分極を含めた量で、真電荷がなければ  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  を満たす。球内部では  $\mathbf{D} = (2/3)\mathbf{P}$  で分極と同方向である。つまり「電気力線  $\epsilon_0\mathbf{E}$ 」は分極と逆向き、「電束線  $\mathbf{D}$ 」は分極と同方向に描く。境界では  $\mathbf{D}$  の法線成分が連続、 $\mathbf{E}$  の接線成分が連続となるように、球外では両方とも双極子型の力線として続く。

■2-4： $\mathbf{D}$  と  $\epsilon_0\mathbf{E}$  の関係図と (2-3) の状態 強誘電体球内部では  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$ 、 $\mathbf{D} = (2/3)\mathbf{P}$ 。問題文の「 $x$  軸と  $y$  軸に取って」に従い、横軸に  $\epsilon_0 E$ 、縦軸に  $D$  を取った平面上では、この状態は点  $(\epsilon_0 E, D) = (-P/3, 2P/3)$  に対応する ( $P$  は  $\mathbf{P}$  の  $z$  成分の大きさ)。強磁性体の磁気ヒステリシスと同様、自発分極があるので原点を通らない。図では、横軸  $\epsilon_0 E$ 、縦軸  $D$  で、内部の状態が (2-3) で描いた状態、すなわち自発分極のみで外部電場ゼロの点を記入する。

■なぜ強磁性体のヒステリシスと類似するか（物理的考察） 強誘電体では外部電場がゼロでも自発分極  $\mathbf{P}$  が残り、 $\mathbf{D} = (2/3)\mathbf{P}$ 、 $\epsilon_0\mathbf{E} = -\mathbf{P}/3$  なので、 $D-\epsilon_0 E$  平面上の点は原点を通らない。強磁性体の  $B-H$  曲線（磁気ヒステリシス）でも、外部磁場がゼロのとき残留磁化が残り、原点を通らないループを描く。同様に強誘電体では  $D$  と  $\epsilon_0 E$  の関係が履歴を持ち、(2-3) で描いた状態は「外部電場ゼロ・自発分極のみ」の点、すなわち  $(-\epsilon_0 P/3, 2P/3)$  付近に対応する。

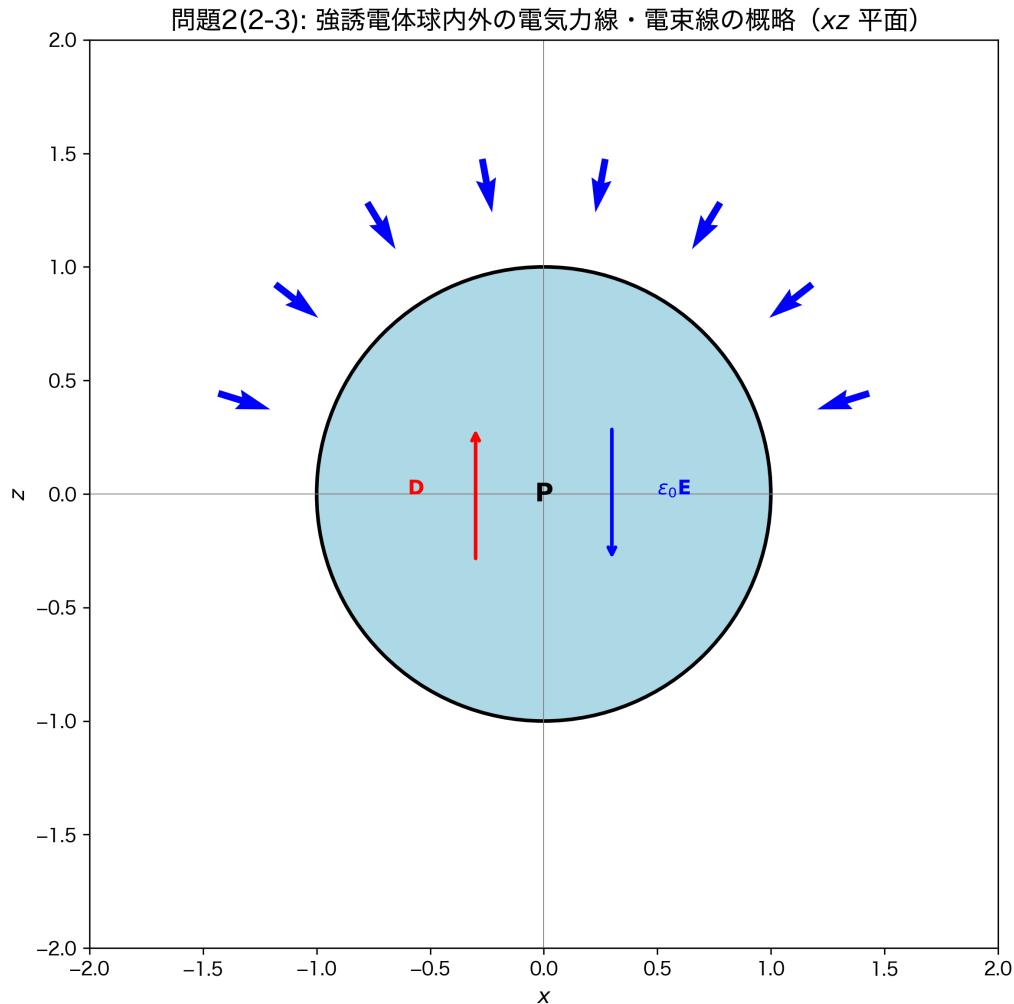


図 11 問題 2(2-3)：強誘電体球内外の電気力線  $\epsilon_0\mathbf{E}$  と電束線  $\mathbf{D}$  の概略 ( $xz$  平面)。

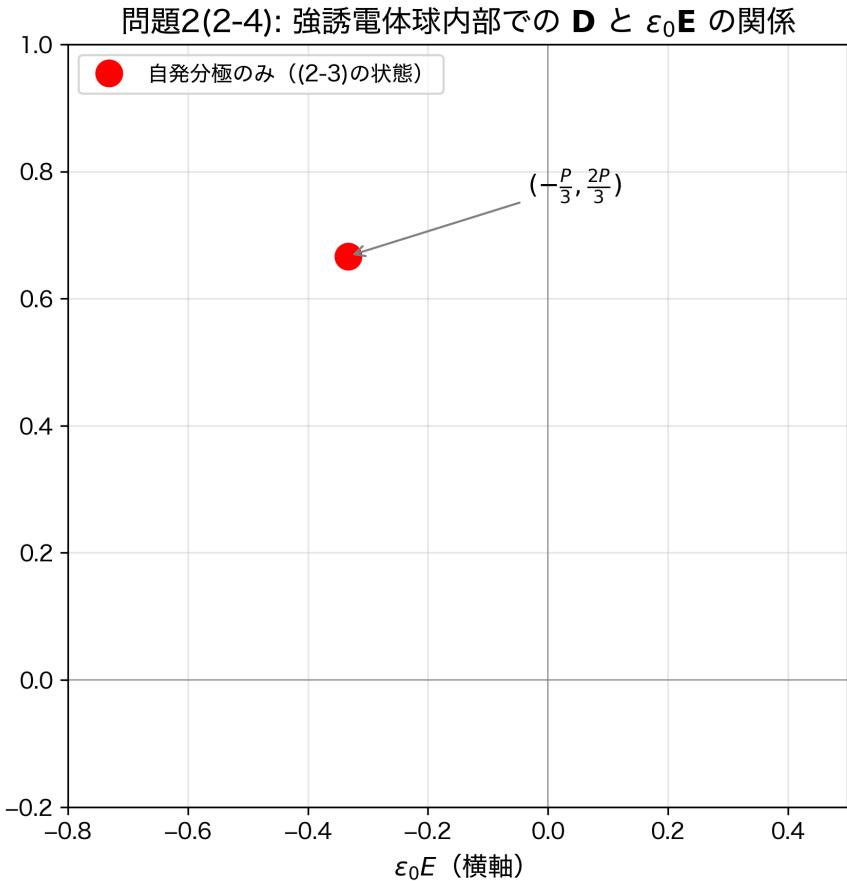


図 12 問題 2(2-4) : 強誘電体球内部での  $\mathbf{D}$  と  $\varepsilon_0\mathbf{E}$  の関係 (概念図)。自発分極のみの状態が (2-3) に対応。

### 3 問題 3：液体中の有極性分子の分極ダイナミクス

#### 3.1 問題

時刻  $t = 0$  で一様な電場  $\mathbf{E}$  をかけると、分極ベクトルの大きさは時定数  $\tau$  で  $P(t) = \varepsilon_0\chi_0 E(1 - \exp(-t/\tau))$  のように増加する。 $\varepsilon_0$  は真空の誘電率。水分子の分極が液体内の全電場に与える変化は無視する。

1.  $P(t)$  が微分方程式  $\tau dP/dt + P = \varepsilon_0\chi_0 E$  を満たすことを利用し、单一角振動数  $\omega$  で振動する電場  $E(\omega) = E_0 \exp(-i\omega t)$  に対する電気感受率  $\chi_e(\omega)$  を、 $\chi_0$ 、 $\tau$ 、 $\omega$  を用いて求めよ。ヒント： $P(\omega) = P_0 \exp(-i\omega t)$  とし、 $\chi_e(\omega) = P(\omega)/(E_0 E(\omega))$  を計算する。
2. 前問で求めた  $\text{Re}[\chi_e(\omega)]$  が  $\omega$  に対してどのように変化するか図示し、 $\omega = \tau^{-1} = \omega_0$  における値を記入せよ。
3. 振動数  $\omega$  が大きくなると、水分子の H-O 結合の振動が分極に効きはじめる。その固有振動数を  $\omega_1$  とする。水の誘電率の虚部  $\varepsilon''$  が、 $\omega_0$  および  $\omega_1$  を含む広い範囲の  $\omega$  でどのように変化するか図示し、電磁波の振動数が  $\omega_0$  あるいは  $\omega_1$  に等しいとき、それぞれどのような名前の電磁波に対応するか答えよ。

## 3.2 解答

■この問題のポイント(初学者向け) 緩和型の分極の微分方程式  $\tau \dot{P} + P = \varepsilon_0 \chi_0 E$  に  $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 、  
 $P = P_0 e^{-i\omega t}$  を代入して  $P_0/E_0$  を求め、 $\chi_e(\omega) = P_0/(\varepsilon_0 E_0)$  として周波数依存の電気感受率を求める。実部はデバイ型の分散、虚部は吸収に対応する。

### ■用語の説明

- 電気感受率  $\chi_e(\omega)$  : 分極と電場の比。 $\chi_e = P/(\varepsilon_0 E)$  で、周波数  $\omega$  によって変わるので  $\chi_e(\omega)$  と書く。直流では  $\chi_0$ 、高周波では追従できず小さくなる。
- 誘電率の虚部  $\varepsilon''$  :  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$  の虚部。電磁波の吸収(エネルギーが媒質に失われる割合)に対応する。 $\varepsilon''$  が大きい周波数で吸収が強い。

### ■解き方の流れ

- 問(3-1) :  $\tau dP/dt + P = \varepsilon_0 \chi_0 E$  に  $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 、 $P = P_0 e^{-i\omega t}$  を代入し、 $\chi_e(\omega) = P_0/(\varepsilon_0 E_0) = \chi_0/(1 - i\omega\tau)$  を導く。
- 問(3-2) :  $\text{Re}[\chi_e(\omega)] = \chi_0/(1 + \omega^2\tau^2)$  を  $\omega$  の関数として図示し、 $\omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_0/2$  を記入する。
- 問(3-3) :  $\varepsilon''$  が  $\omega_0$  (緩和) と  $\omega_1$  (赤外共鳴) 付近でピークを持つ概略図を描き、 $\omega_0$  はマイクロ波、 $\omega_1$  は赤外線に対応することを答える。

■3-1: 電気感受率  $\chi_e(\omega)$  微分方程式は  $\tau \frac{dP}{dt} + P = \varepsilon_0 \chi_0 E$ 。これは  $P$  について線形なので、電場が单一角振動数  $\omega$  で振動しているとき、定常状態では分極も同じ角振動数で振動し、 $P = P_0 \exp(-i\omega t)$  とおける(ヒント通り)。 $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ 、 $P = P_0 \exp(-i\omega t)$  を代入する。 $dP/dt = -i\omega P_0 \exp(-i\omega t)$  なので、

$$\tau(-i\omega)P_0 + P_0 = \varepsilon_0 \chi_0 E_0. \quad (37)$$

左辺をまとめると  $P_0(1 - i\omega\tau) = \varepsilon_0 \chi_0 E_0$ 。両辺を  $(1 - i\omega\tau)$  で割って  $P_0 = \varepsilon_0 \chi_0 E_0 / (1 - i\omega\tau)$ 。電気感受率は  $\chi_e(\omega) = P(\omega)/(\varepsilon_0 E(\omega)) = P_0/(\varepsilon_0 E_0)$  なので、

$$\chi_e(\omega) = \frac{\chi_0}{1 - i\omega\tau}. \quad (38)$$

分母を実数化すると  $\chi_e(\omega) = \chi_0(1 + i\omega\tau)/(1 + \omega^2\tau^2)$ 。したがって

$$\boxed{\chi_e(\omega) = \frac{\chi_0}{1 - i\omega\tau} = \frac{\chi_0(1 + i\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}}.$$

(39)

■なぜ周波数で電気感受率が変わるか(誘電緩和の物理) 微分方程式  $\tau \dot{P} + P = \varepsilon_0 \chi_0 E$  は、分極が電場の変化に「時定数  $\tau$  で遅れて」追従することを表す(緩和型)。直流( $\omega = 0$ )では  $P = \varepsilon_0 \chi_0 E$  で感受率は  $\chi_0$ 。角振動数  $\omega$  が  $1/\tau$  程度になると、電場の向きが変わるのが速く、分極が追いつかなくなる。そのため  $\omega$  が大きいほど感受率の実部は小さくなり、 $\text{Re}[\chi_e] = \chi_0/(1 + \omega^2\tau^2)$  となる。虚部  $\text{Im}[\chi_e] = \chi_0 \omega \tau / (1 + \omega^2\tau^2)$  はエネルギー吸収(誘電損失)に対応し、 $\omega \sim 1/\tau$  付近でピークを持つ。このような周波数分散をデバイ緩和という。

問題3(2024): 誘電緩和の物理 (遅い応答 → 高周波で感受率低下)

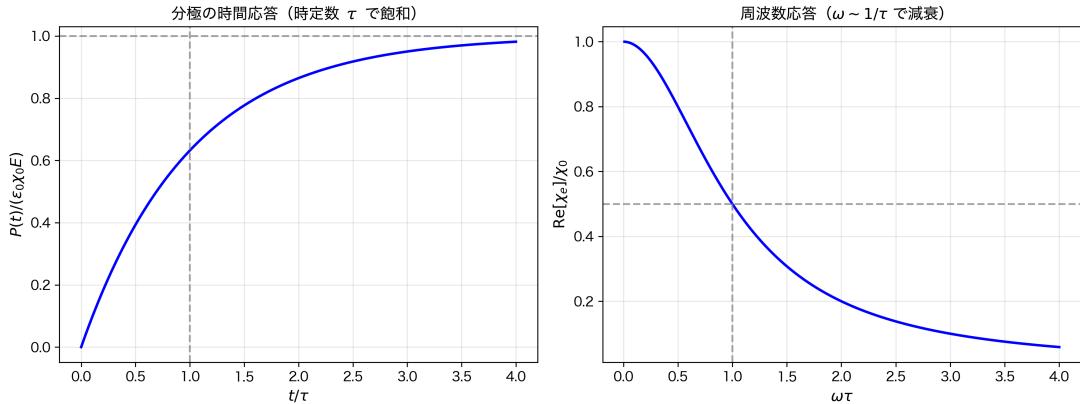


図 13 問題 3: 分極の時間応答  $P(t)$  (左) と周波数応答  $\text{Re}[\chi_e(\omega)]$  (右)。時定数  $\tau$  で遅れる応答のため、高周波では感受率が低下する。

■3-2 :  $\text{Re}[\chi_e(\omega)]$  の図示 実部は  $\text{Re}[\chi_e(\omega)] = \chi_0 / (1 + \omega^2 \tau^2)$ 。 $\omega = 0$  で  $\chi_0$ 、 $\omega \rightarrow \infty$  で 0。 $\omega = \omega_0 = 1/\tau$  では  $\text{Re}[\chi_e(\omega_0)] = \chi_0 / (1 + 1) = \chi_0 / 2$ 。

■3-3: 誘電率の虚部  $\varepsilon''$  と電磁波の名前 誘電率は  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$  なので、虚部は  $\varepsilon'' = \varepsilon_0 \text{Im}[\chi_e(\omega)]$ 。 $\varepsilon''$  は電磁波の吸収（媒質が光のエネルギーを吸収する強さ）に対応し、 $\varepsilon''$  が大きい周波数で吸収が強い。 $\text{Im}[\chi_e] = \chi_0 \omega \tau / (1 + \omega^2 \tau^2)$  なので、 $\omega_0 = 1/\tau$  付近でピークを持つ緩和型の吸収。さらに  $\omega_1$  (H-O 結合の振動) 付近では共鳴型のピークが現れる。 $\omega_0$  は緩和（配向分極）の時定数に対応し、マイクロ波～ラジオ波程度。 $\omega_1$  は赤外線（分子振動）に対応する。したがって、振動数が  $\omega_0$  に等しい電磁波はマイクロ波（または誘電緩和の周波数帯）、 $\omega_1$  に等しい電磁波は赤外線である。

■なぜ  $\varepsilon''$  に 2 つのピークが現れるか（物理的考察） 水の誘電率の虚部  $\varepsilon''$  は電磁波の吸収率に対応する。 $\omega_0 = 1/\tau$  付近では、極性分子（水分子）の配向分極が電場の向きに追従する際の遅れによる吸収（誘電緩和）がピークになる。この周波数帯はマイクロ波程度である。 $\omega_1$  付近では、水分子の H-O 結合の振動が電場と共に鳴り、赤外線の吸収がピークになる。つまり  $\varepsilon''(\omega)$  のグラフには、低周波側に緩和型のピーク ( $\omega_0$ )、高周波側に共鳴型のピーク ( $\omega_1$ ) が現れ、その間は比較的小さな値となる。これが水がマイクロ波で加熱され、赤外線でも吸収を持つ理由である。

問題3(3-2): 電気感受率の実部 ( $\omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_0/2$ )

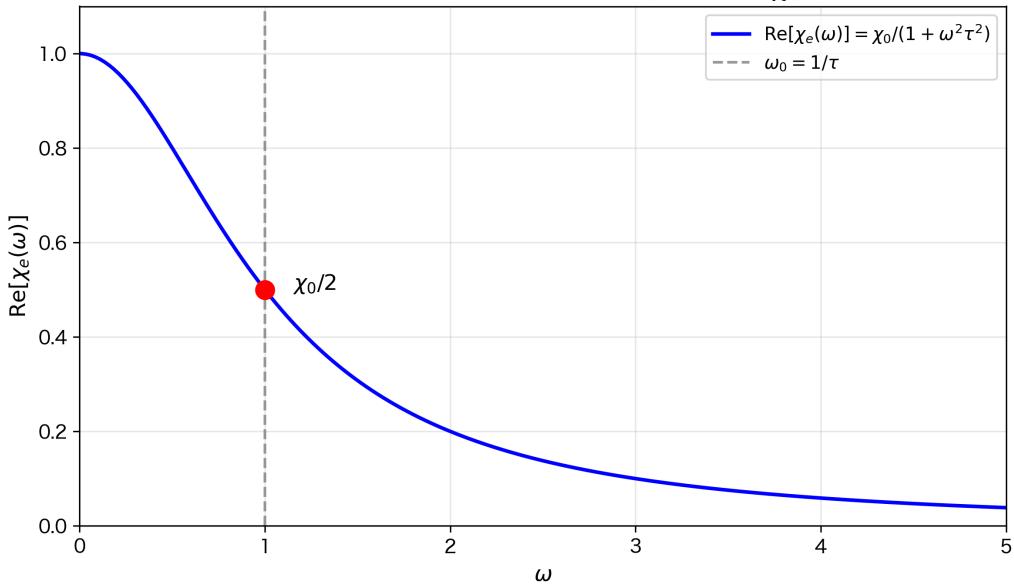


図 14 問題 3(3-2) : 電気感受率の実部  $\text{Re}[\chi_e(\omega)]$ 。 $\omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_0/2$ 。

問題3(3-3): 水の誘電率の虚部 ( $\omega_0$  で緩和型、 $\omega_1$  で共鳴型)

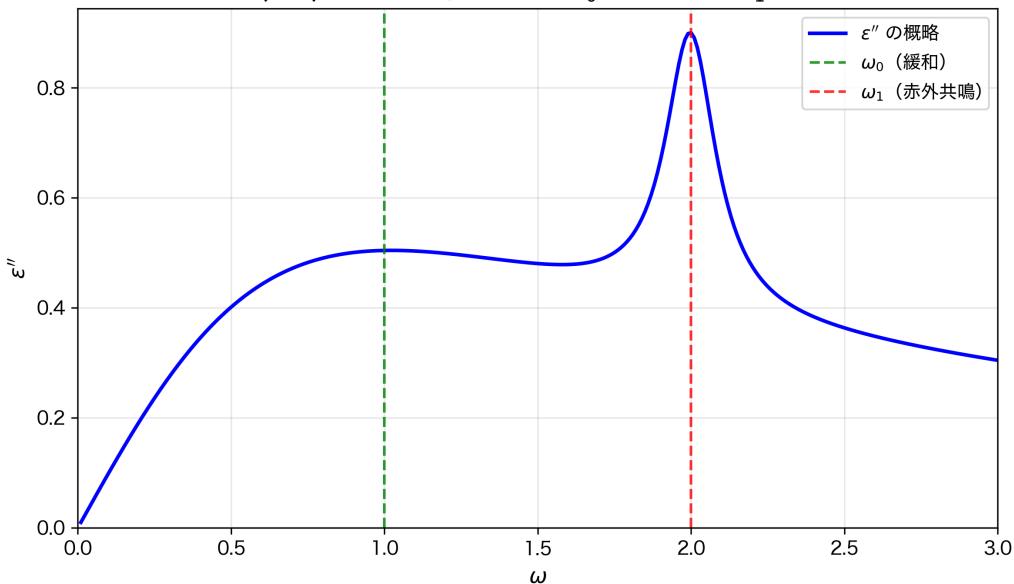


図 15 問題 3(3-3) : 水の誘電率の虚部  $\epsilon''$  の概略。 $\omega_0$  で緩和型、 $\omega_1$  で共鳴型のピーク。

# 第 III 部

## 2024 年度 再試験

### 1 問題 1：物質中の Maxwell 方程式

#### 1.1 問題

静電磁場における物質中の Maxwell 方程式を考え、その後、時間変動する電磁場に拡張する。真空中の誘電率を  $\epsilon_0$ 、透磁率を  $\mu_0$  とする。

1. 物質内部に真電荷（電荷密度  $\rho$ ）、真電流（電流密度  $\mathbf{i}$ ）、分極電荷（電荷密度  $\rho_p$ ）、磁化電流（電流密度  $\mathbf{i}_M$ ）が存在する場合に、電場  $\mathbf{E}$ 、磁束密度  $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\rho$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\rho_p$ 、 $\mathbf{i}_M$  だけを用いて、4つの Maxwell 方程式を示せ。
2. 分極ベクトル  $\mathbf{P}$  と磁化ベクトル  $\mathbf{M}$  を用いて  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 、 $\mathbf{i}_M = \nabla \times \mathbf{M}/\mu_0$  と表せる。物質の誘電率  $\epsilon$  は  $\epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  で定義され、透磁率  $\mu$  は  $\mathbf{B}/\mu = (\mathbf{B} - \mathbf{M})/\mu_0$  で定義される。前問で求めた Maxwell 方程式のうち、分極電荷と磁化電流を含む 2 つの式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\rho$ 、 $\mathbf{i}$  だけを用いて書き直せ。ただし  $\epsilon$ 、 $\mu$  は場所の関数とする。
3. 時間変動する電磁場を考える。物質中の Maxwell 方程式のうち、時間変動する項を含む 2 つの式を、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ 、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$  を用いて示せ。

#### 1.2 解答

■この問題のポイント 2023・2024 年度問題 1 と同一である。1-1 で 4 式、1-2 で  $\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \rho$  と  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{i}$ 、1-3 で時間変動を含む 2 式を示す。

##### ■解き方の流れ

1. 問 1：静電磁場の 4 式を書く。問 2： $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}/\mu$  の形に書き直す。問 3：ファラデーとアンペールの時間変動を含む式を書く（詳細は 2023 年度問題 1 参照）。

##### ■1-1：4 つの Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}, \quad (40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (41)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (42)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i} + \mathbf{i}_M. \quad (43)$$

##### ■1-2： $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\mathbf{i}$ だけを用いた 2 式

$$\boxed{\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \rho, \quad \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{i}.} \quad (44)$$

##### ■1-3：時間変動する項を含む 2 式

■物理的意味（初学者向け） 物質中では分極電荷・磁化電流が電磁場の源になる。1-1 のガウスの法則の右辺  $\rho + \rho_p$  は「真電荷と分極電荷の和」、アンペールの法則の右辺は「真電流と磁化電流の和」である。1-2 で  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}/\mu$  を導入すると、式の上では真電荷・真電流だけが右辺に現れる。詳細な導出・図は 2023 年度問題 1 を参照。

問題1: 物質中のMaxwell方程式の物理的意味（電場・磁場の源）

電場 $\mathbf{E}$ の源	磁場 $\mathbf{B}$ の源
真電荷 $\rho$ + 分極電荷 $\rho_p$	真電流 $\mathbf{i}$ + 磁化電流 $\mathbf{i}_M$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_p)/\epsilon_0$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M)$
物質中では分極・磁化による「見かけの」電荷・電流が現れる	

図 16 問題 1: 物質中の Maxwell 方程式の物理的意味。電場の源は真電荷と分極電荷の和、磁場の回転の源は真電流と磁化電流の和。

## 2 問題 2：強誘電体球の電場

### 2.1 問題

半径  $a$  の強誘電体球が  $\mathbf{P} = (0, 0, P)$  で一様に自発分極している。球の中心は原点、外部電場はゼロ、真電荷はない。分極状態を再現するため、電荷密度  $+\rho$  で一様に帯電した半径  $a$  の球を  $(0, 0, s/2)$  に、電荷密度  $-\rho$  で一様に帯電した半径  $a$  の球を  $(0, 0, -s/2)$  に置く ( $s \ll a$ )。分極電荷が球内部に作る電場  $\mathbf{E}_p$  は、これらの帶電球が作る電場の足し合わせとする。

1. 中心が原点にあり、電荷密度  $+\rho$  で一様に帯電した半径  $a$  の球のみを考える。原点から位置ベクトル  $\mathbf{r}$  の場所における球内部の電場  $\mathbf{E}$  を  $\rho$ 、 $\epsilon_0$ 、 $\mathbf{r}$  を用いて求めよ。
2. 問題文の通り、中心が原点から  $z$  軸上に微小距離  $\pm s/2$  だけずれた場所に置かれた  $\pm \rho$  の 2 つの帶電球が作る電場の足し合わせを考える。 $\mathbf{s} = (0, 0, s)$  とすると  $\mathbf{P} = \rho \mathbf{s}$  と書けることを用いて、 $\mathbf{E}_p$  を  $\mathbf{P}$  と  $\epsilon_0$  を用いて表せ。

## 2.2 解答

■この問題のポイント 2024年度問題2の(2-1)(2-2)と同一である。一様帯電球のガウスの法則から内部電場を求め、2つの帶電球の和から  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  を導く。

### ■用語の説明

- 強誘電体：外部電場がなくても自発分極  $\mathbf{P}$  を持つ物質。本問では一様に  $\mathbf{P} = (0, 0, P)$  で分極している球を考える。

### ■解き方の流れ

- 1.問(2-1)：球対称なガウスの法則で  $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}$  を求める。
- 2.問(2-2)：中心が  $(0, 0, \pm s/2)$  の2球の電場の和を計算し、 $\mathbf{P} = \rho\mathbf{s}$  で  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  を得る。

■2-1：一様帯電球内部の電場 中心が原点、半径  $a$ 、電荷密度  $+\rho$  の球を考える。ガウスの法則：閉曲面  $S$  について、電束の総和  $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$  は  $S$  の内部の全電荷  $Q_{in}$  を  $\varepsilon_0$  で割ったものに等しい。球対称なので、半径  $r$  ( $r \leq a$ ) の球面をガウス面に取ると、左辺は  $E(r) \times 4\pi r^2$ 、右辺は  $Q_{in}/\varepsilon_0 = (4\pi r^3/3)\rho/\varepsilon_0$  となる。よって  $4\pi r^2 E(r) = (4\pi r^3/3)\rho/\varepsilon_0$  から  $E(r) = \rho r/(3\varepsilon_0)$ 。位置  $\mathbf{r}$  では動径外向きに  $\mathbf{E} = (\rho/(3\varepsilon_0))\mathbf{r}$ 。したがって

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}}. \quad (45)$$

■2-2：分極電場  $\mathbf{E}_p$  2つの帶電球の中心が  $(0, 0, \pm s/2)$  にあり、 $s \ll a$  とする。原点付近の点  $\mathbf{r}$  は  $s$  が十分小さいため両方の球の内部にあるとみなせるので、問(2-1)の公式がそのまま使える。 $+\rho$  の球が作る電場は  $\mathbf{E}_+ = (\rho/(3\varepsilon_0))(\mathbf{r} - (0, 0, s/2))$ 、 $-\rho$  の球が作る電場は  $\mathbf{E}_- = (-\rho/(3\varepsilon_0))(\mathbf{r} - (0, 0, -s/2))$ 。足し合わせると  $\mathbf{E}_p = (\rho/(3\varepsilon_0))(-\mathbf{s}) = -\rho\mathbf{s}/(3\varepsilon_0)$ 。 $\mathbf{P} = \rho\mathbf{s}$  なので

$$\boxed{\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}}. \quad (46)$$

■なぜそう求まるか（原理的な説明） 一様分極を「 $z$  軸上に微小にずれた  $+\rho$  と  $-\rho$  の2つの一様帯電球」で等価に置き換えると、各球内部の電場はガウスの法則から中心からの位置ベクトルに比例する。2つの電場を足し合わせると、 $\mathbf{r}$  に比例する項は打ち消し、ずれベクトル  $\mathbf{s}$  に比例する項だけが残り  $\mathbf{E}_p = -\rho\mathbf{s}/(3\varepsilon_0) = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$  となる。この脱分極電場は分極と逆向きに働く。

### 問題2(2024): 一様分極の等価モデル（2つの帶電球）と脱分極電場の向き

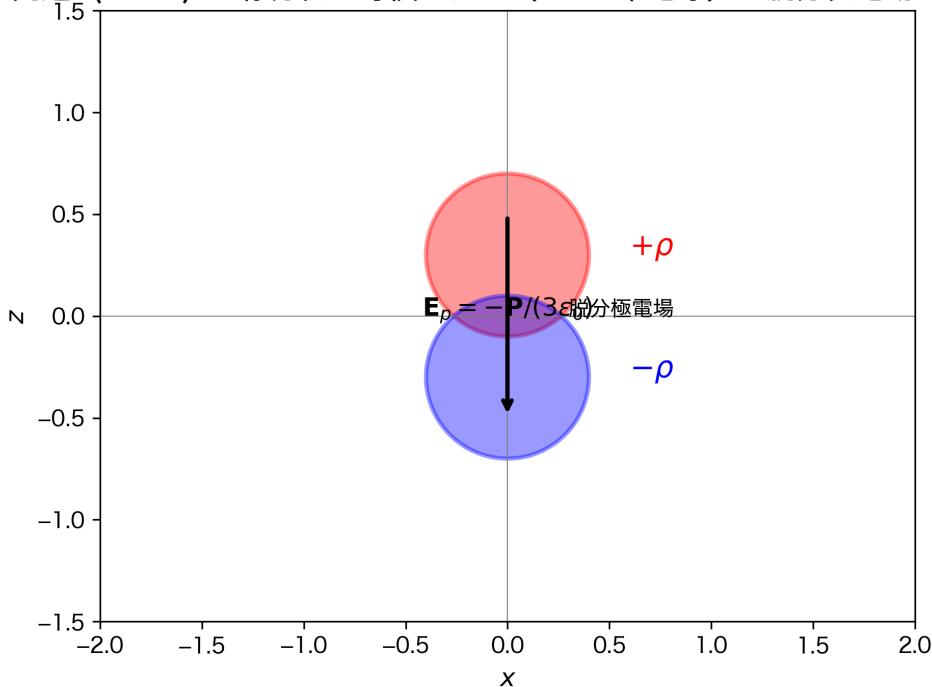


図 17 問題 2: 一様分極を 2 つの帶電球で再現するモデル。内部では 2 球の電場の和が  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$  という脱分極電場になる。

## 3 問題 3：液体中の極性分子の分極と電気感受率

### 3.1 問題

時刻  $t = 0$  で一様な電場  $\mathbf{E}$  がかけられたとき、水分子が回転して向きが揃い、分極ベクトルの大きさ  $P(t)$  が時定数  $\tau$  で  $P(t) = \epsilon_0 \chi_{e0} E (1 - \exp(-t/\tau))$  のように増加する ( $\epsilon_0$  は真空の誘電率)。水分子の分極が液体内の全電場に与える変化は無視する。

1. 上記の  $P(t)$  が微分方程式  $\tau dP/dt + P = \epsilon_0 \chi_{e0} E$  を満たすことを利用し、单一角振動数  $\omega$  で振動する電場  $E(\omega) = E_0 \exp(-i\omega t)$  に対する電気感受率  $\chi_e(\omega)$  を、 $\chi_{e0}$ 、 $\tau$ 、 $\omega$  を用いて求めよ。ヒント： $P(\omega) = P_0 \exp(-i\omega t)$  とし、 $\chi_e(\omega) = P(\omega)/(\epsilon_0 E(\omega))$  を計算する。
2. 前問で求めた電気感受率  $\chi_e(\omega)$  の実部  $\chi'_e$  が  $\omega$  に対してどのように変化するか図示し、 $\omega = \tau^{-1} = \omega_0$  における値を図に記入せよ。

### 3.2 解答

■この問題のポイント 2024 年度問題 3 の (3-1)(3-2) と同一である。記号  $\chi_0$  が  $\chi_{e0}$  になっているだけ。緩和型の微分方程式から周波数依存の電気感受率を求める。

■解き方の流れ

- 1.問(3-1) :  $\tau dP/dt + P = \varepsilon_0 \chi_{e0} E$  に  $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 、 $P = P_0 e^{-i\omega t}$  を代入し、 $\chi_e(\omega) = \chi_{e0}/(1 - i\omega\tau)$  を導く。
- 2.問(3-2) :  $\text{Re}[\chi_e(\omega)] = \chi_{e0}/(1 + \omega^2\tau^2)$  を図示し、 $\omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_{e0}/2$  を記入する。

■3-1: 電気感受率  $\chi_e(\omega)$  微分方程式  $\tau \frac{dP}{dt} + P = \varepsilon_0 \chi_{e0} E$  は  $P$  について線形なので、電場が單一角振動数  $\omega$  で振動しているとき、定常状態では分極も同じ角振動数で振動し、 $P = P_0 e^{-i\omega t}$  における（ヒントの通り）。 $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 、 $P = P_0 e^{-i\omega t}$  を代入すると、 $dP/dt = -i\omega P_0 e^{-i\omega t}$  より  $\tau(-i\omega)P_0 + P_0 = \varepsilon_0 \chi_{e0} E_0$ 、すなわち  $(1 - i\omega\tau)P_0 = \varepsilon_0 \chi_{e0} E_0$ 。両辺を  $(1 - i\omega\tau)$  で割って  $P_0 = \varepsilon_0 \chi_{e0} E_0 / (1 - i\omega\tau)$ 。電気感受率は  $\chi_e(\omega) = P_0 / (\varepsilon_0 E_0)$  なので、

$$\boxed{\chi_e(\omega) = \frac{\chi_{e0}}{1 - i\omega\tau}}. \quad (47)$$

■3-2: 実部  $\chi'_e$  の図示 実部は  $\chi'_e = \text{Re}[\chi_e(\omega)] = \chi_{e0}/(1 + \omega^2\tau^2)$ 。 $\omega = 0$  で  $\chi_{e0}$ 、 $\omega = \omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_{e0}/2$ 、 $\omega \rightarrow \infty$  で 0。図では横軸  $\omega$ 、縦軸  $\chi'_e$  を取り、 $\omega_0$  の位置に  $\chi_{e0}/2$  を記入する。

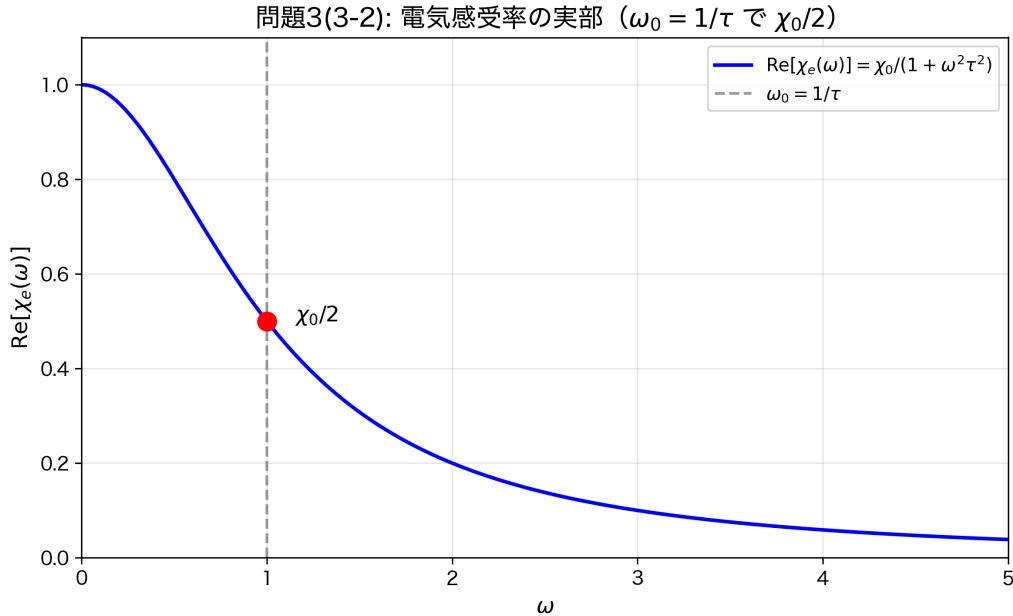


図 18 問題 3(3-2) : 電気感受率の実部  $\text{Re}[\chi_e(\omega)]$ 。 $\omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_{e0}/2$ 。

■なぜ高周波で感受率が低下するか（物理的考察） 極性分子の配向分極は、分子が回転して電場の向きに揃う過程であり、隣接分子との衝突などで時定数  $\tau$  の遅れが生じる。電場の振動が速い ( $\omega \gg 1/\tau$ ) と、分子が向きを変える前に電場の向きが反転してしまうため、平均的な分極は小さくなる。その結果、 $\text{Re}[\chi_e]$  は  $\omega$  が大きいほど減少し、 $\omega = \omega_0 = 1/\tau$  で  $\chi_{e0}/2$ 、 $\omega \rightarrow \infty$  で 0 に近づく。2024 年度本試験問題 3 の「なぜ周波数で電気感受率が変わるか」およびデバイ緩和の図を参照のこと。

## 4 問題 4：金属内の電子の運動と電気伝導率

### 4.1 問題

電場中に置かれた金属内を移動する電子には、電場によるクーロン力と、運動と逆向きに働く抵抗力（電子の運動速度  $\mathbf{v}$  に比例し、 $\gamma m\mathbf{v}$  と書ける。 $m$  は電子の質量）が働く。電子の電荷を  $q$ 、数密度を  $n$  とする。

- 1.電流密度  $\mathbf{i}$  と運動速度  $\mathbf{v}$  の関係を示せ。
- 2.電場が一定の場合、力が釣り合って定常運動となり、オームの法則  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$  が成り立つ。このときの電気伝導率  $\sigma$  を求めよ。
- 3.電場が  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$  によって時間変動するとき、複素電気伝導率  $\sigma(\omega)$  の実部  $\sigma'$  と虚部  $\sigma''$  を求めよ。

### 4.2 解答

■この問題のポイント（初学者向け） 電子の運動方程式  $md\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E} - \gamma m\mathbf{v}$  から、定常状態では  $q\mathbf{E} = \gamma m\mathbf{v}$  となり、電流密度  $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  と合わせてオームの法則  $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}$  および  $\sigma = nq^2/(\gamma m)$  を得る。時間変動電場では  $\mathbf{v} \propto e^{-i\omega t}$  とおき、複素伝導率  $\sigma(\omega)$  の実部・虚部を求める。

#### ■解き方の流れ

- 1.問 (4-1)：電流密度の定義から  $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  を示す。
- 2.問 (4-2)：定常状態で  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$  より  $\mathbf{v} = (q/(\gamma m))\mathbf{E}$ 。 $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  から  $\sigma = nq^2/(\gamma m)$  を導く。
- 3.問 (4-3)： $E = E_0 e^{-i\omega t}$ 、 $v = v_0 e^{-i\omega t}$  を運動方程式に代入し、 $\sigma(\omega)$  の実部  $\sigma'$  と虚部  $\sigma''$  を求める。

■使用する物理法則・用語 運動方程式： $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - \gamma m\mathbf{v}$ 。電流密度の定義： $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  ( $n$  は電子数密度、 $q$  は電子の電荷。電子なら  $q < 0$ 。) 抵抗力の係数  $\gamma$  は減衰係数で、散乱（フォノンや不純物との衝突）の頻度を表し、単位は 1/秒の次元を持つ。 $\gamma$  が大きいほど定常速度は小さくなり、伝導率  $\sigma = nq^2/(\gamma m)$  は小さくなる。

■4-1：電流密度  $\mathbf{i}$  と速度  $\mathbf{v}$  の関係 電流密度は、単位面積を単位時間に通過する電荷の流れである。電子が速度  $\mathbf{v}$  で運動しているとき、数密度  $n$ 、電荷  $q$  なら、 $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$ 。したがって

$$\boxed{\mathbf{i} = nq\mathbf{v}}. \quad (48)$$

■なぜ電流密度が  $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  か（原理的な説明） 電流の大きさ  $I$  は、断面を単位時間に通過する電荷の総量である。断面積  $S$ 、長さ  $v \Delta t$  の細い管を考え、電子が速度  $v$  で管に沿って動いているとすると、 $\Delta t$  の間に通過する電子数は  $nSv \Delta t$ 、電荷は  $nqSv \Delta t$  なので、電流は  $I = nqvS$ 、電流密度の大きさは  $i = I/S = nqv$ 。ベクトルで書くと  $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  となる。

■4-2：定常状態の電気伝導率  $\sigma$  定常状態では  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$  なので、運動方程式は  $q\mathbf{E} - \gamma m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 、すなわち  $\mathbf{v} = (q/(\gamma m))\mathbf{E}$ 。したがって

$$\mathbf{i} = nq\mathbf{v} = \frac{nq^2}{\gamma m}\mathbf{E}. \quad (49)$$

オームの法則  $\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$  と比較して、

$$\boxed{\sigma = \frac{nq^2}{\gamma m}}. \quad (50)$$

■なぜオームの法則が成り立つか（物理的考察） 定常状態では、電場による力  $q\mathbf{E}$  と抵抗力  $\gamma m\mathbf{v}$  が釣り合い、 $\mathbf{v} = (q/(\gamma m))\mathbf{E}$  となる。つまり速度は電場に比例する。電流密度  $\mathbf{i} = nq\mathbf{v}$  も電場に比例し、 $\mathbf{i} = \sigma\mathbf{E}$ （オームの法則）が成り立つ。伝導率  $\sigma = nq^2/(\gamma m)$  は、キャリア数  $n$  が多く、質量  $m$  が小さく、抵抗力  $\gamma$  が小さいほど大きくなる。金属では自由電子の数密度が高く、 $\gamma$  は散乱（フォノンや不純物との衝突）の頻度を表す。

■4-3：時間変動電場における複素伝導率  $\sigma(\omega)$  の実部・虚部  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$  のとき、定常振動解として  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(-i\omega t)$  を仮定する。運動方程式  $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - \gamma m\mathbf{v}$  に代入すると、 $m(-i\omega)\mathbf{v}_0 = q\mathbf{E}_0 - \gamma m\mathbf{v}_0$ 。したがって  $(-i\omega m + \gamma m)\mathbf{v}_0 = q\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{v}_0 = \frac{q\mathbf{E}_0}{m(\gamma - i\omega)}$ 。電流密度は  $\mathbf{i} = nq\mathbf{v} = nq\mathbf{v}_0 e^{-i\omega t} = \sigma(\omega)\mathbf{E}$  となるので、

$$\sigma(\omega) = \frac{nq^2}{m(\gamma - i\omega)} = \frac{nq^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega}. \quad (51)$$

分母を実数化： $\frac{1}{\gamma - i\omega} = \frac{\gamma + i\omega}{\gamma^2 + \omega^2}$  なので、

$$\sigma(\omega) = \frac{nq^2}{m} \frac{\gamma + i\omega}{\gamma^2 + \omega^2}. \quad (52)$$

実部と虚部は

$$\sigma' = \text{Re}[\sigma(\omega)] = \frac{nq^2}{m} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, \quad \sigma'' = \text{Im}[\sigma(\omega)] = \frac{nq^2}{m} \frac{\omega}{\gamma^2 + \omega^2}. \quad (53)$$

したがって

$$\boxed{\sigma' = \frac{nq^2\gamma}{m(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad \sigma'' = \frac{nq^2\omega}{m(\gamma^2 + \omega^2)}}. \quad (54)$$

■なぜ高周波で  $\sigma'$  が減り  $\sigma''$  が効くか（原理的な説明） 電場が  $E = E_0 e^{-i\omega t}$  で振動するとき、電子の運動方程式  $m\dot{v} = qE - \gamma mv$  の定常振動解は  $v = (q/(m(\gamma - i\omega)))E$  となる。 $\omega = 0$ （直流）では  $v = (q/(\gamma m))E$  で、電流は電場と同相であり、 $\sigma$  は実数でジュール損失を表す。 $\omega$  が大きくなると、電子の慣性（ $m\dot{v}$  の項）が効き、速度は電場に対して位相遅れを持つ。その結果、電流の電場と同相の成分（実部  $\sigma'$ ）は減り、90° ずれた成分（虚部  $\sigma''$ ）が現れる。 $\sigma'$  は  $\omega^2$  が  $\gamma^2$  より大きくなると減少し、 $\sigma''$  は  $\omega$  に比例して増加する領域がある。高周波では電子が電場の変化に追従しきれず、伝導率の実効値が低下する。

問題4(4-3): 複素電気伝導率の実部・虚部の周波数依存性

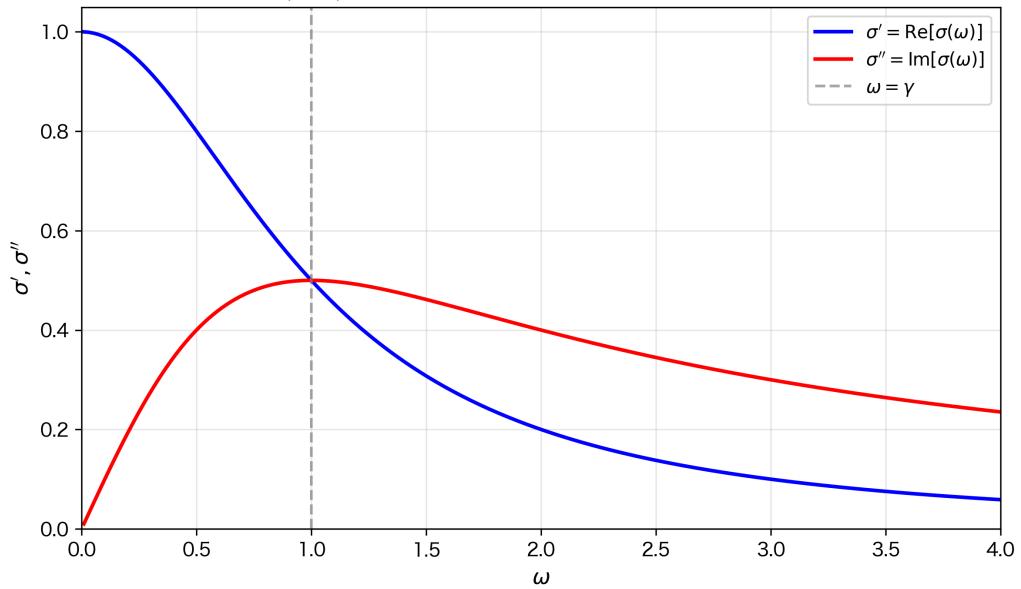


図 19 問題 4(4-3)：複素電気伝導率の実部  $\sigma'$  と虚部  $\sigma''$  の周波数依存性。 $\omega \sim \gamma$  で  $\sigma'$  が減り、 $\sigma''$  がピーク近くになる。

問題4: 高周波で  $\sigma'$  が減る理由（電子の慣性・位相遅れ）

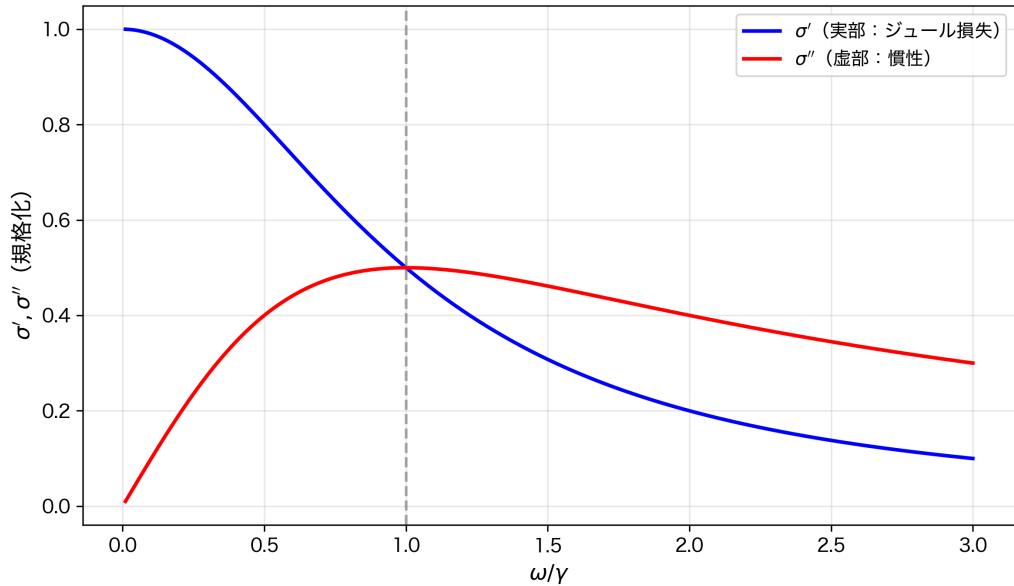


図 20 問題 4: 高周波で  $\sigma'$  が減る理由（電子の慣性・位相遅れ）の概念図。実部はジュール損失、虚部は慣性による位相ずれに対応する。