量子力学 I 演習問題 No. 7 詳細解説（初学者向け）

問題の概要

本演習では、**演算子法による調和振動子問題の解法**と**コヒーレント状態**について学びます。調和振動子は量子力学において最も基本的かつ重要な系の一つであり、その解法は多くの物理現象の理解の基礎となります。

初学者のための用語集と前提知識

重要な用語の説明

1. 調和振動子（Harmonic Oscillator）

- **意味**: バネにつながれた物体のように、平衡点の周りを振動する系のこと
- **具体例**:
  - バネにつながれたおもり
  - 振り子（小さい振幅の場合）
  - 原子の振動
- **特徴**: エネルギーが離散的な値（量子化）しか取れない

2. 演算子（Operator）

- **意味**: 関数や状態ベクトルに作用して、別の関数や状態ベクトルに変換する「操作」のこと
- **記号**: 演算子には「ハット記号」をつけて表す（例：$\hat{x}$, $\hat{p}$）
- **具体例**:
  - $\hat{x}$: 位置演算子（位置を測定する操作）
  - $\hat{p}$: 運動量演算子（運動量を測定する操作）
  - $\hat{H}$: ハミルトニアン（エネルギーを表す演算子）

3. ハミルトニアン（Hamiltonian）$\hat{H}$

- **意味**: 系の全エネルギーを表す演算子
- **古典力学との対応**: 古典力学では $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$（運動エネルギー ＋ ポテンシャルエネルギー）
- **量子力学**: 位置 x と運動量 p を演算子 $\hat{x}$, $\hat{p}$ に置き換えたもの

4. 交換関係（Commutator）$[\hat{A}, \hat{B}]$

- **定義**: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
- **意味**: 2 つの演算子の「順序を変えたときの違い」を表す
- **重要な交換関係**: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$（不確定性原理の数学的表現）
- **計算例**:
  - $[\hat{x}, \hat{x}] = \hat{x}\hat{x} - \hat{x}\hat{x} = 0$（同じ演算子は交換可能）
  - $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0$（位置と運動量は交換不可能）

5. 固有値（Eigenvalue）と固有状態（Eigenstate）

- **固有状態**: 演算子を作用させても、方向が変わらず大きさだけが変わる状態
- **固有値**: そのときの「大きさの変化の倍率」
- **数学的表現**: $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ のとき、$|\psi\rangle$ が固有状態、a が固有値
- **具体例**:
  - エネルギー固有状態 $|n\rangle$: $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$
  - エネルギー固有値 E_n: その状態のエネルギー

6. プランク定数 $\hbar$（エイチバー）

- **定義**: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）
- **値**: $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34}$ J·s
- **意味**: 量子効果の大きさを決める基本的な定数

- **重要性**: これが 0 に近づくと、量子力学は古典力学に近づく

7. 虚数単位 i

- **定義**: $i^2 = -1$ を満たす数
- **意味**: 複素数を表すために必要な数
- **性質**:
  - $i \times i = -1$
  - $(-i) \times i = 1$
  - 複素共役: $(a + bi)^* = a - bi$（$*$ は複素共役を表す）

8. ブラ・ケット記法（Bra-Ket Notation） ブラ・ケット記法は、量子力学で状態ベクトルを表すための記法です。ディラック (Dirac) によって考案されました。

基本的な記号の意味:

- $|$（**縦線**）: ケット記号の開始を表す
- $\rangle$（**右向きの山括弧**）: ケット記号の終了を表す
- $\langle$（**左向きの山括弧**）: ブラ記号の開始を表す
- $|$（**縦線**）: ブラ記号の終了を表す（ケットと同じ）

ケット $|n\rangle$（Ket）:

- **意味**: 量子状態を表す**縦ベクトル**
- **読み方**: 「ケット n」または「n ケット」
- **数学的表現**:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

  これは無限次元のベクトル（通常は無限次元空間の要素）
- **具体例**:
  - $|0\rangle$: 基底状態（最も低いエネルギー状態）
  - $|1\rangle$: 第 1 励起状態
  - $|2\rangle$: 第 2 励起状態

ブラ $\langle n|$（Bra）:

- **意味**: ケットの**複素共役転置**（横ベクトル）
- **読み方**: 「ブラ n」または「n ブラ」
- **数学的表現**:

$$\langle n| = (|n\rangle)^\dagger = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* & c_3^* & \cdots \end{pmatrix}$$

  ここで、$*$ は複素共役を表す
- **関係**: $\langle n|$ は $|n\rangle$ の「双対ベクトル」（共役ベクトル）

内積 $\langle n|m\rangle$（Bra-Ket）:

- **意味**: 2 つの状態の「重なり」を表す**スカラー**（数値）
- **計算方法**: ブラ（横ベクトル）とケット（縦ベクトル）の積

$$\langle n|m\rangle = \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = c_1^* d_1 + c_2^* d_2 + \cdots$$

- **性質**:
  - **エルミート性**: $\langle n|m\rangle^* = \langle m|n\rangle$
  - **正定値性**: $\langle n|n\rangle \geq 0$（等号は $|n\rangle = 0$ のときのみ）
- **物理的意味**:
  - $|\langle n|m\rangle|^2$: 状態 $|m\rangle$ を測定したときに状態 $|n\rangle$ が得られる確率
  - $\langle n|m\rangle = 0$: 2 つの状態が「直交」（独立）している

具体例:

1. **規格化条件**: $\langle 0|0\rangle = 1$
   - 自分自身との内積が 1（状態の「大きさ」が 1）
2. **直交条件**: $\langle 0|1\rangle = 0$
   - 異なるエネルギー状態は直交している
3. **正規直交条件**: $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$
   - $n = m$ のとき 1、$n \neq m$ のとき 0

演算子の作用:

- **演算子をケットに作用**: $\hat{A}|n\rangle = |\psi\rangle$
  - 演算子 $\hat{A}$ が状態 $|n\rangle$ に作用して、新しい状態 $|\psi\rangle$ を作る
- **ブラと演算子とケット**: $\langle m|\hat{A}|n\rangle$
  - これは「行列要素」と呼ばれる
  - 計算順序: $\langle m|(\hat{A}|n\rangle) = \langle m|\psi\rangle$（$\psi = \hat{A}|n\rangle$）

ベクトル空間との対応:

通常のベクトル記法との対応：

- **通常のベクトル**: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
- **ケット**: $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$（同じ）
- **ブラ**: $\langle v| = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* \end{pmatrix}$（複素共役転置）
- **内積**: $\langle u|v\rangle = u_1^* v_1 + u_2^* v_2$（通常の内積の複素版）

計算のコツ:

1. **内積の計算**: ブラ（横）とケット（縦）を掛ける

$$\langle n|m\rangle = \text{横ベクトル} \times \text{縦ベクトル} = \text{スカラー}$$

2. **演算子の作用**: 演算子は常に右側のケットに作用する

$$\hat{A}|n\rangle = \text{新しいケット}$$

3. **複素共役**: ブラは常にケットの複素共役

$$\langle n| = (|n\rangle)^\dagger$$

4. **期待値**: $\langle n|\hat{A}|n\rangle$ は状態 $|n\rangle$ における演算子 $\hat{A}$ の期待値

9. 規格化（Normalization）

- **意味**: 状態の「大きさ」を 1 にすること
- **数学的表現**: $\langle \psi|\psi\rangle = 1$
- **重要性**: 確率の解釈のために必要（確率の総和は 1）

10. デルタ関数 δ_{nm}（クロネッカーのデルタ）

- **定義**:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

- **意味**: n と m が等しいときだけ 1、それ以外は 0
- **用途**: 正規直交条件を表す（$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$）

前提となる数学的知識

1. 複素数の計算　**複素数の基本: - 定義**: $z = a + bi$（a は実部、b は虚部、$i^2 = -1$）**- 複素共役**: $z^* = (a+bi)^* = a - bi$ **- 絶対値の 2 乗**: $|z|^2 = zz^* = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

複素数の掛け算:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

具体例: - $(1+2i)(3+4i) = 3 + 4i + 6i + 8i^2 = 3 + 10i - 8 = -5 + 10i$ - $(1+i)^* = 1 - i$ - $|1+i|^2 = (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

1-1. ベクトルと内積（重要）　**通常のベクトル（実数）: - 縦ベクトル**: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **- 横ベクトル**: $\vec{v}^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$（転置）

内積（実数ベクトル）:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_i u_i v_i$$

複素ベクトル（量子力学で重要）: - 縦ベクトル（ケット）: $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$（$v_i$ は複素数）**- 横ベクトル（ブラ）**: $\langle v| = \begin{pmatrix} v_1^* & v_2^* & v_3^* \end{pmatrix}$（複素共役転置）

内積（複素ベクトル）:

$$\langle u|v\rangle = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + u_3^* v_3 = \sum_i u_i^* v_i$$

重要な性質: - エルミート性: $\langle u|v\rangle^* = \langle v|u\rangle$ **- 正定値性**: $\langle v|v\rangle = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 \geq 0$

具体例: - $|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $|v\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき - $\langle u| = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}$（$i$ の複素共役は $-i$）- $\langle u|v\rangle = 1 \cdot 2 + (-i) \cdot 1 = 2 - i$

2. 平方根の計算

- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $(\sqrt{a})^2 = a$

3. 指数関数の性質

- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $e^{ab} = (e^a)^b$
- $\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$

4. 階乗 $n!$

- **定義**: $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
- **例**: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $0! = 1$

計算のコツ

1. **演算子の積を展開するとき**: 交換関係に注意（$\hat{x}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{x}$）
2. **複素数の計算**: 実部と虚部を分けて計算
3. **平方根を含む計算**: まず 2 乗してから平方根を取る
4. **交換関係を使う**: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ から $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} + [\hat{A}, \hat{B}]$ を導出

ブラ・ケット記法の計算例

例 1: 内積の計算

状態 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき：

- $\langle 0|0\rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$（規格化）
- $\langle 0|1\rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$（直交）
- $\langle 1|1\rangle = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$（規格化）

例 2: 演算子の作用

演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ が状態 $|n\rangle$ に作用する場合：

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$$

これは、$|n\rangle$ が $\hat{N}$ の固有状態で、固有値が n であることを意味します。

例 3: 期待値の計算

状態 $|n\rangle$ における演算子 $\hat{A}$ の期待値：

$$\langle n|\hat{A}|n\rangle = \text{期待値（実数）}$$

例 4: 状態の展開

任意の状態 $|\psi\rangle$ をエネルギー固有状態 $|n\rangle$ で展開：

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

ここで、展開係数は：

$$c_n = \langle n|\psi\rangle$$

例 5: 確率の計算

状態 $|\psi\rangle$ を測定したときに、エネルギー固有状態 $|n\rangle$ が得られる確率：

$$P(n) = |\langle n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2$$

例 6: 正規直交条件の確認

$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ の確認：

- $n = m$ のとき: $\langle n|n\rangle = 1$（規格化）
- $n \neq m$ のとき: $\langle n|m\rangle = 0$（直交）

計算の順序:

1. **内積**: $\langle u|v\rangle \rightarrow$ ブラ（横）とケット（縦）を掛ける
2. **演算子の作用**: $\hat{A}|v\rangle \rightarrow$ 新しいケット
3. **期待値**: $\langle u|\hat{A}|v\rangle \rightarrow$ まず $\hat{A}|v\rangle$ を計算してから内積を取る
4. **複素共役**: $\langle u|v\rangle^* = \langle v|u\rangle \rightarrow$ 順序を入れ替えて複素共役

問題 7-1: 演算子法による調和振動子問題の解法

問題設定

調和振動子のハミルトニアン

調和振動子のハミルトニアンは、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて以下のように与えられます：

式 (1):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

ここで：- m: 質量 - ω: 角振動数（$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$、$k$ はバネ定数）

古典力学との対応:

古典力学では、調和振動子のハミルトニアンは：

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

量子力学では、位置 x と運動量 p を演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ に置き換えたものが式 (1) です。

昇降演算子（Ladder Operators）の定義と動機

なぜ昇降演算子を導入するのか？

通常の方法（シュレーディンガー方程式を解く方法）では、微分方程式を解く必要があり、計算が複雑になります。一方、**演算子法**（昇降演算子を用いた方法）では：

1. **代数的アプローチ**: 微分方程式を直接解く必要がない
2. **対称性の明確化**: 調和振動子の対称性が代数的に表現される
3. **一般化の容易さ**: 他の系（角運動量、スピンなど）への応用が可能

昇降演算子の定義:

昇降演算子（ladder operators）は以下のように定義されます：

式 (2):

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \tag{2}$$

式 (3):

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \tag{3}$$

$\hat{a}$ は**消滅演算子**（lowering operator）、$\hat{a}^\dagger$ は**生成演算子**（raising operator）と呼ばれます。

定義の動機:

1. **無次元化**: 係数 $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$ と $\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$ は、位置と運動量を適切にスケールして、無次元化された演算子を作るためです。
2. **複素数の導入**: i を導入することで、位置と運動量を「回転」させ、交換関係を簡潔な形（$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$）にすることができます。
3. **エルミート共役の関係**: $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ は互いにエルミート共役の関係にあり、i の符号が逆になっています。

係数の意味:

- $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$: 位置演算子の係数。質量と角振動数を含む。
- $\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$: 運動量演算子の係数。運動量のスケールを調整。

これらの係数は、後で見るように、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たすように選ばれています。

命名の由来:

- **生成演算子（Raising Operator）**：エネルギー準位を「上げる」（1 つ上の準位に移す）ため

- **消滅演算子（Lowering Operator）**：エネルギー準位を「下げる」（1 つ下の準位に移す）ため

この「階段（ladder)」のような構造から、「ladder operators」とも呼ばれます。

(i) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ の証明

問題: 交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。

用語の説明

- **交換関係（Commutator）**：$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ で定義される量
- **意味:** 2 つの演算子の順序を入れ替えたときの「違い」を表す
- $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$: 位置と運動量は交換不可能（不確定性原理の数学的表現）

解答（詳細な計算ステップ）

ステップ 1: 交換子の定義

交換子を直接計算します：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

これは、$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を「順番を変えて掛け算したときの差」を計算するということです。

ステップ 2: $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ の計算

式 (2) と式 (3) を代入します。まず、式 (2) と式 (3) を再確認：

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$$

これらを掛け算します：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

展開の詳細（複素数の掛け算）：

$(A + Bi)(C + Di) = AC + ADi + BCi + BDi^2 = AC + (AD + BC)i + BD(-1) = (AC - BD) + (AD + BC)i$

ここで：- $A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}$ - $Bi = i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$（つまり $B = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$) - $C = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}$ - $Di = -i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$（つまり $D = -\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$)

展開すると：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} \cdot \left(-i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

$$+i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \cdot \left(-i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

各項を計算：

1. **第 1 項:** $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2$

2. **第 2 項**: $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} \cdot \left(-i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right) = -i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{x}\hat{p}$

   $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} = \frac{1}{2\hbar}$ より：

   $= -i\frac{1}{2\hbar}\hat{x}\hat{p}$

3. **第 3 項**: $i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} = i\frac{1}{2\hbar}\hat{p}\hat{x}$

4. **第 4 項**: $i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \cdot \left(-i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right) = -i^2\frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 = \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2$

   ($i^2 = -1$ より $-i^2 = 1$)

したがって：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 - i\frac{1}{2\hbar}\hat{x}\hat{p} + i\frac{1}{2\hbar}\hat{p}\hat{x} + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2$$

第 2 項と第 3 項をまとめると：

$$-i\frac{1}{2\hbar}\hat{x}\hat{p} + i\frac{1}{2\hbar}\hat{p}\hat{x} = i\frac{1}{2\hbar}(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}) = i\frac{1}{2\hbar}[\hat{p}, \hat{x}]$$

交換関係の性質：$[\hat{p}, \hat{x}] = -[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar$ より：

$$= i\frac{1}{2\hbar}(-i\hbar) = \frac{1}{2}$$

したがって：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}$$

ステップ 3: $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の計算

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

展開すると：

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + i\frac{1}{2\hbar}\hat{x}\hat{p} - i\frac{1}{2\hbar}\hat{p}\hat{x} + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 + i\frac{1}{2\hbar}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 + \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}]$$

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ より：

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 + \frac{i}{2\hbar}(i\hbar) = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 - \frac{1}{2}$$

ステップ 4: 交換子の計算

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{p}^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

答え: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

別の証明方法（より簡潔なアプローチ）

上記の証明は詳細な計算ステップを示しましたが、交換関係の**線形性**を利用することで、より簡潔に証明することもできます。

方法 2: 線形性を利用した証明

昇降演算子の定義式 (2) と式 (3) を再確認：

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$$

交換関係の線形性（$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$）を利用して、直接計算します：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right]$$

交換関係の線形性より：

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}[\hat{x}, \hat{x}] - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}[\hat{x}, \hat{p}]$$

$$+i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}[\hat{p}, \hat{x}] - i^2\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}[\hat{p}, \hat{p}]$$

ここで：- $[\hat{x}, \hat{x}] = 0$（同じ演算子は交換可能）- $[\hat{p}, \hat{p}] = 0$（同じ演算子は交換可能）- $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ - $[\hat{p}, \hat{x}] = -[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar$

したがって：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 0 - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot i\hbar + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot (-i\hbar) + 0$$

係数を整理：

$$\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} = \frac{1}{2\hbar}$$

したがって：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -i \cdot \frac{1}{2\hbar} \cdot i\hbar + i \cdot \frac{1}{2\hbar} \cdot (-i\hbar)$$

$$= -\frac{i^2\hbar}{2\hbar} - \frac{i^2\hbar}{2\hbar} = -\frac{(-1)\hbar}{2\hbar} - \frac{(-1)\hbar}{2\hbar} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

より簡潔な表現:

係数を $A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$ とおくと：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = [A\hat{x} + iB\hat{p}, A\hat{x} - iB\hat{p}]$$

$$= A^2[\hat{x}, \hat{x}] - iAB[\hat{x}, \hat{p}] + iAB[\hat{p}, \hat{x}] - i^2B^2[\hat{p}, \hat{p}]$$

$$= 0 - iAB \cdot i\hbar + iAB \cdot (-i\hbar) + 0 = -i^2AB\hbar - i^2AB\hbar = 2AB\hbar$$

ここで、$AB = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \frac{1}{2\hbar}$ より：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 2 \cdot \frac{1}{2\hbar} \cdot \hbar = 1$$

方法 3: 対称性を利用した直感的な理解

昇降演算子の定義式を見ると、$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ は互いに**複素共役**の関係にあります（i の符号が逆）。

この対称性から、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ は実数であることが期待されます（実際に 1 という実数になります）。

また、$\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の定義式は、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を「回転」させたような形になっており、この回転により交換関係が $i\hbar$（複素数）から 1（実数）に変換されます。

各方法の比較:

- **方法 1（詳細な計算）**: すべての計算ステップを明示的に示すため、初学者にとって理解しやすい
- **方法 2（線形性を利用）**: より簡潔で、交換関係の性質を直接利用する
- **方法 3（対称性）**: 直感的な理解を深めるが、厳密な証明としては補助的な役割

物理的意味の詳細な説明

1. 正準交換関係とは？

- **意味**: 量子力学の基本的な関係式で、位置と運動量が「同時に正確に測定できない」ことを数学的に表現したもの
- **式**: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$
- **重要性**: この関係が、量子力学のすべての結果の基礎となっている

2. $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ の意味

- **昇降演算子の関係**: 生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ と消滅演算子 $\hat{a}$ は、互いに「補完的」な関係にある
- **具体例**:
  - $\hat{a}^\dagger$ を作用させると、エネルギーが 1 つ増える（階段を 1 段上がる）
  - $\hat{a}$ を作用させると、エネルギーが 1 つ減る（階段を 1 段下がる）
- **等間隔のエネルギー準位**: この交換関係により、エネルギー準位が $\hbar\omega$ の間隔で等間隔に並ぶことが保証される

3. なぜ 1 なのか？

- **数値の意味**: 1 という値は、昇降演算子が「1 つずつ」エネルギーを変化させることを意味する
- **単位**: 無次元の数（単位がない）で、これは「個数」を表している
- **比較**: $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ は次元を持つが、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ は無次元

考察と応用

1. 量子化の一貫性

- **意味**: 調和振動子の量子化が、正準量子化の枠組みで一貫していることを示している
- **重要性**: この結果により、調和振動子の解法が他の量子系にも応用できる

2. エネルギー固有値への影響

- **等間隔性**: この交換関係は、後で見るように、エネルギー固有値が $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ という形になることの根拠となる
- **量子数** n: n は $0, 1, 2, ...$ という整数値しか取れない（量子化）

3. 実用的な意味

- **レーザー**: レーザー光の理論で重要な役割を果たす
- **超伝導**: 超伝導体の理論でも使われる
- **場の量子論**: 場の量子論への拡張の基礎となる

(ii) ハミルトニアンの個数演算子表示

問題: 個数演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を用いて、ハミルトニアンが $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ と表されることを示せ。

用語の説明

- **個数演算子** $\hat{N}$: $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ で定義される演算子
- **意味**: 状態に含まれる「エネルギー量子の個数」を表す
- **固有値**: $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$（$n$ は $0, 1, 2, ...$ の整数）

解答（詳細な計算ステップ）

ステップ 1: $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ で表す

式 (2) と式 (3) を再確認：

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \tag{2}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} \tag{3}$$

これらを「連立方程式」として解きます。目標は、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ で表すことです。

方法 1: 足し算と引き算を使う

これは、2 つの式を足したり引いたりして、一方の変数を消去する方法です。

$\hat{x}$ を求める:

$\hat{a} + \hat{a}^\dagger$ を計算すると、$\hat{p}$ の項が消えます：

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right) + \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$$

$$= 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} = \sqrt{\frac{4m\omega}{2\hbar}}\hat{x} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x}$$

したがって：

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$\hat{p}$ を求める:

$\hat{a} - \hat{a}^\dagger$ を計算すると、$\hat{x}$ の項が消えます：

$$\hat{a} - \hat{a}^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right) - \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p}$$

$$= 2i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p} = i\sqrt{\frac{4}{2m\omega\hbar}}\hat{p} = i\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}\hat{p}$$

したがって：

$$\hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

ここで、$\frac{1}{i} = -i$（$i \times (-i) = -i^2 = 1$ より）なので：

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

確認: - $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ - $\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$

重要なポイント:

- $\hat{x}$ は $\hat{a} + \hat{a}^\dagger$ に比例（実数係数）
- $\hat{p}$ は $\hat{a} - \hat{a}^\dagger$ に比例（虚数係数 $-i$）

これは、位置が「対称的」、運動量が「反対称的」な性質を反映しています。

ステップ 2: ハミルトニアンに代入

式 (1) のハミルトニアン：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{1}$$

に、上で求めた $\hat{x}$ と $\hat{p}$ を代入します。

第 1 項（運動エネルギー項）の計算:

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\right)^2$$

2 乗の計算:

$$\left(-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\right)^2 = (-i)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\right)^2 \cdot (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2$$

$$= (-1) \cdot \frac{m\omega\hbar}{2} \cdot (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2$$

$(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2$ の展開:

$$(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^2 = (\hat{a}-\hat{a}^\dagger)(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$$

$$= \hat{a}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) - \hat{a}^\dagger(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$$

$$= \hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$$

$$= \hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2$$

したがって：

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\cdot\left(-\frac{m\omega\hbar}{2}\right)(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2)$$

$$= -\frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2)$$

第 2 項（ポテンシャルエネルギー項）の計算:

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2 = \frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2$$

$(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2$ **の展開:**

$$(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2 = (\hat{a}+\hat{a}^\dagger)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$$

$$= \hat{a}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) + \hat{a}^\dagger(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$$

$$= \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$$

$$= \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2$$

したがって：

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2)$$

ステップ 3: 両項を足し合わせる

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

$$= -\frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2) + \frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2)$$

各項を整理:

各項を展開して整理します：

$$\hat{H} = -\frac{\omega\hbar}{4}\hat{a}^2 + \frac{\omega\hbar}{4}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{\omega\hbar}{4}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}^\dagger)^2$$

$$+\frac{\omega\hbar}{4}\hat{a}^2 + \frac{\omega\hbar}{4}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{\omega\hbar}{4}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\omega\hbar}{4}(\hat{a}^\dagger)^2$$

同類項をまとめると：

- $\hat{a}^2$ の項: $-\frac{\omega\hbar}{4} + \frac{\omega\hbar}{4} = 0$（消える）
- $(\hat{a}^\dagger)^2$ の項: $-\frac{\omega\hbar}{4} + \frac{\omega\hbar}{4} = 0$（消える）
- $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ の項: $\frac{\omega\hbar}{4} + \frac{\omega\hbar}{4} = \frac{\omega\hbar}{2}$
- $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の項: $\frac{\omega\hbar}{4} + \frac{\omega\hbar}{4} = \frac{\omega\hbar}{2}$

したがって：

$$\hat{H} = \frac{\omega\hbar}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})$$

ステップ 4: 交換関係を使う

(i) で証明した $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ より：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$$

これを代入：

$$\hat{H} = \frac{\omega\hbar}{2}((\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{\omega\hbar}{2}(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)$$

$$= \omega\hbar\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

個数演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を使うと：

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

答え: $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$

物理的意味の詳細な説明

1. 個数演算子とは？

- **意味**: $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ は、状態に含まれる「エネルギー量子の個数」を表す演算子
- **固有値**: $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, ...)$
- **解釈**: 状態 $|n\rangle$ には n 個のエネルギー量子が含まれている

2. エネルギー固有値の意味

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$$

この式から、エネルギー固有値は：

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

- $n\hbar\omega$: n 個のエネルギー量子のエネルギー（各量子が $\hbar\omega$ のエネルギーを持つ）
- $\frac{1}{2}\hbar\omega$: **零点エネルギー**（基底状態でも存在するエネルギー）

3. 零点エネルギーとは？

- **意味**: 基底状態（$n = 0$）でも存在するエネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$
- **古典力学との違い**: 古典力学では、最低エネルギーは 0（静止状態）
- **量子力学**: 不確定性原理により、位置と運動量を同時に 0 にすることはできない
- **結果**: 基底状態でも微小な振動（零点振動）が存在し、そのエネルギーが零点エネルギー

4. 等間隔のエネルギー準位

- **間隔**: 隣り合うエネルギー準位の差は常に $\hbar\omega$
- **意味**: エネルギー量子を 1 つ追加（または削除）すると、エネルギーが $\hbar\omega$ だけ変化する
- **具体例**:
  - $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$
  - $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$（差は $\hbar\omega$）
  - $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$（差は $\hbar\omega$）

考察と応用

1. 個数演算子による形式化

- **利点**: 調和振動子の問題が「個数演算子の固有値問題」に帰着される
- **意味**: 調和振動子を「n 個の量子（フォノン）を含む状態」として理解できる
- **応用**: 場の量子論や多体問題への拡張の基礎となる

2. フォノン（Phonon）とは？

- **意味**: 結晶中の原子の振動を量子化した「準粒子」
- **調和振動子との関係**: 各振動モードが調和振動子として記述される
- **個数演算子**: フォノンの個数を表す

3. 実用的な応用

- **固体物理学**: 結晶の熱的性質を理解するために重要
- **レーザー**: レーザー光の理論で重要な役割を果たす
- **量子情報**: 量子計算の基礎となる

(iii) エネルギー固有状態と固有値

問題: エネルギー固有状態が $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ で与えられ、エネルギー固有値が $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ であることを示せ。

解答:

まず、基底状態 $|0\rangle$ が $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たすことを確認します。これは基底状態の定義です。

個数演算子の作用を調べます。$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ なので、$|0\rangle$ に対して：

$$\hat{N}|0\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$$

したがって、$|0\rangle$ は $\hat{N}$ の固有値 0 の固有状態です。

次に、$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ が $\hat{N}$ の固有状態であることを示します。

$\hat{N}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換関係を計算：

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

ここで、$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$（(i) の結果より）を用いると：

$$= \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger$$

したがって：

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

この関係から、$\hat{N}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{N} + [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\hat{N} + \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{N} + 1)$ が得られます。

帰納法による証明:

$n = 1$ のとき：

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)|0\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{N} + 1)|0\rangle = \hat{a}^\dagger(0 + 1)|0\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle = 1 \cdot (\hat{a}^\dagger)|0\rangle$$

$n = k$ で成り立つと仮定（つまり、$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle = k(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle$）：

$n = k + 1$ のとき：

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^{k+1}|0\rangle = \hat{N}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{N} + 1)(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle$$

$$= \hat{a}^\dagger(\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle + (\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle) = \hat{a}^\dagger(k(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle + (\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle)$$

$$= \hat{a}^\dagger(k + 1)(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle = (k + 1)(\hat{a}^\dagger)^{k+1}|0\rangle$$

したがって、すべての n に対して：

$$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

したがって：

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{N}\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n|n\rangle$$

つまり、$|n\rangle$ は $\hat{N}$ の固有値 n の固有状態です。

ハミルトニアンの固有値は：

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

したがって、エネルギー固有値は：

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

物理的意味:

この結果は、調和振動子のエネルギー準位が**等間隔**（$\hbar\omega$ の間隔）で並ぶことを示しています。n は**量子数**と呼ばれ、状態 $|n\rangle$ には n 個のエネルギー量子が含まれていると解釈できます。

エネルギー準位の構造:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

- $n\hbar\omega$: n 個のエネルギー量子のエネルギー（各量子が $\hbar\omega$ のエネルギーを持つ）
- $\frac{1}{2}\hbar\omega$: **零点エネルギー**（基底状態でも存在するエネルギー）

具体例:

- $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$（基底状態）
- $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$（第 1 励起状態、$E_0$ から $\hbar\omega$ 上昇）
- $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$（第 2 励起状態、$E_1$ から $\hbar\omega$ 上昇）
- $E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$（第 3 励起状態、$E_2$ から $\hbar\omega$ 上昇）

すべての準位間の差は $\hbar\omega$ で一定です。

零点エネルギーとは？

基底状態 $|0\rangle$ のエネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ は零点エネルギーであり、これは不確定性原理の直接的な帰結です。

- **古典力学**: 最低エネルギーは 0（静止状態、$x = 0, p = 0$）
- **量子力学**: 不確定性原理により、位置と運動量を同時に 0 にすることはできない
- **結果**: 基底状態でも微小な振動（零点振動）が存在し、そのエネルギーが零点エネルギー

状態の構成:

任意のエネルギー固有状態 $|n\rangle$ は、基底状態 $|0\rangle$ に生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を n 回作用させることで構成されます：

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

これは、調和振動子のすべての状態が基底状態から「生成」できることを意味します。

考察:

エネルギー準位の等間隔性は、調和振動子が特別な対称性（$SU(2)$ 代数構造）を持つことを反映しています。この構造により、任意のエネルギー固有状態は基底状態から生成演算子を繰り返し作用させることで構成できます。

古典的極限:

$\hbar \to 0$ の極限では、エネルギー準位の間隔が 0 に近づき、連続的なエネルギー準位（古典力学）に近づきます。しかし、零点エネルギー $\frac{1}{2}\hbar\omega$ は $\hbar$ に比例するため、$\hbar \to 0$ で 0 になります。

(iv) 正規直交条件

問題: $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を示せ。

解答:

まず、$n = m$ の場合（規格化）を証明します。

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ より：

$$\langle n|n\rangle = \frac{1}{n!}\langle 0|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

ここで、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を用いて、$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n$ を計算します。

帰納法により、$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n!|0\rangle$ が成り立ちます（詳細は後述）。

したがって：

$$\langle n|n\rangle = \frac{1}{n!} \cdot n!\langle 0|0\rangle = 1$$

次に、$n \neq m$ の場合（直交性）を証明します。

一般性を失わず $n < m$ とします。$\langle n|m\rangle$ を計算：

$$\langle n|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}\langle 0|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$$

ここで、$(\hat{a})^n$ を右側に移動することを考えます。

$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m$ を計算する際、交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ を用いて、$\hat{a}$ を 1 つずつ右に移動させます。

$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^m = (\hat{a}^\dagger)^m\hat{a} + m(\hat{a}^\dagger)^{m-1}$（(v) で証明した補題）より：

$$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle = (\hat{a})^{n-1}\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$$

$$= (\hat{a})^{n-1}((\hat{a}^\dagger)^m\hat{a} + m(\hat{a}^\dagger)^{m-1})|0\rangle$$

$\hat{a}|0\rangle = 0$ より、第一項は 0 です：

$$= m(\hat{a})^{n-1}(\hat{a}^\dagger)^{m-1}|0\rangle$$

この操作を繰り返すと、n 回繰り返した後：

$$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle = m(m-1)\cdots(m-n+1)(\hat{a}^\dagger)^{m-n}|0\rangle$$

($m>n$ なので、$m-n\geq 1$)

したがって、$(\hat{a}^\dagger)^{m-n}|0\rangle$ は $|m-n\rangle$ に比例しますが、これは $|0\rangle$ ではありません。

しかし、より直接的に考えると、$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$ は $|m-n\rangle$ に比例する状態であり、$m\neq n$ のとき、これは $|0\rangle$ に比例しません。

したがって、$\langle 0|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle = 0$（$m\neq n$ のとき）です。

より厳密には、$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$ を $|0\rangle$ で展開したとき、$|0\rangle$ 成分は 0 です（$m\neq n$ のとき)。

したがって：

$$\langle n|m\rangle = 0$$

したがって、$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ が成り立ちます。

補足: $(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n!|0\rangle$ の証明

帰納法で証明します。

$n=1$ のとき：

$$(\hat{a})(\hat{a}^\dagger)|0\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a},\hat{a}^\dagger])|0\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|0\rangle$$

$\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = \hat{N}|0\rangle = 0$ より：

$$= 0 + 1\cdot|0\rangle = 1!|0\rangle$$

$n=k$ で成り立つと仮定（つまり、$(\hat{a})^k(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle = k!|0\rangle$)：

$n=k+1$ のとき：

$$(\hat{a})^{k+1}(\hat{a}^\dagger)^{k+1}|0\rangle = (\hat{a})^k\hat{a}\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle$$

$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a}+1$ より：

$$= (\hat{a})^k(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)(\hat{a}^\dagger)^k|0\rangle$$

$$= (\hat{a})^k \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^k |0\rangle + (\hat{a})^k (\hat{a}^\dagger)^k |0\rangle$$

第一項について、$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^k = (\hat{a}^\dagger)^k \hat{a} + k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}$（(v) で証明した補題）より：

$$(\hat{a})^k \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^k |0\rangle = (\hat{a})^k \hat{a}^\dagger ((\hat{a}^\dagger)^k \hat{a} + k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}) |0\rangle$$

$$= (\hat{a})^k \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^k \hat{a} |0\rangle + k (\hat{a})^k \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{k-1} |0\rangle$$

$\hat{a}|0\rangle = 0$ より第一項は 0 です。第二項について：

$$k (\hat{a})^k \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger)^{k-1} |0\rangle = k (\hat{a})^k (\hat{a}^\dagger)^k |0\rangle = k \cdot k! |0\rangle = k \cdot k! |0\rangle$$

したがって：

$$(\hat{a})^{k+1} (\hat{a}^\dagger)^{k+1} |0\rangle = k \cdot k! |0\rangle + k! |0\rangle = (k+1) k! |0\rangle = (k+1)! |0\rangle$$

物理的意味:

正規直交条件は、異なるエネルギー固有状態が**独立**であることを保証します。これは、系が特定のエネルギー状態 $|n\rangle$ にあるとき、他のエネルギー状態 $|m\rangle$（$m \neq n$）の成分が存在しないことを意味します。

考察:

この正規直交性により、任意の状態 $|\psi\rangle$ はエネルギー固有状態の線形結合として一意に展開できます：

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad c_n = \langle n|\psi\rangle$$

これは、エネルギー固有状態が**完全正規直交系**を形成することを示しています。

(v) 昇降演算子の作用

問題: 以下の関係式を示せ：- $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ - $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$

解答:

1. $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$ の証明

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$ より：

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \hat{a}^\dagger \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^{n+1} |0\rangle$$

一方、$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} (\hat{a}^\dagger)^{n+1} |0\rangle$ なので：

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} |n+1\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

2. $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ の証明

$\hat{a}|n\rangle$ を計算：

$$\hat{a}|n\rangle = \hat{a} \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

補題: $\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n = (\hat{a}^\dagger)^n\hat{a} + n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$ の証明

帰納法で証明します。

$n = 1$ のとき：

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 = (\hat{a}^\dagger)\hat{a} + 1 \cdot (\hat{a}^\dagger)^0$$

($(\hat{a}^\dagger)^0 = 1$ と約束します)

$n = k$ で成り立つと仮定（つまり、$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^k = (\hat{a}^\dagger)^k\hat{a} + k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}$）：

$n = k + 1$ のとき：

$$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{k+1} = \hat{a}(\hat{a}^\dagger)^k\hat{a}^\dagger = ((\hat{a}^\dagger)^k\hat{a} + k(\hat{a}^\dagger)^{k-1})\hat{a}^\dagger$$

$$= (\hat{a}^\dagger)^k\hat{a}\hat{a}^\dagger + k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}\hat{a}^\dagger = (\hat{a}^\dagger)^k(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) + k(\hat{a}^\dagger)^k$$

$$= (\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^k + k(\hat{a}^\dagger)^k = (\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a} + (k+1)(\hat{a}^\dagger)^k$$

したがって、すべての n に対して：

$$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^n = (\hat{a}^\dagger)^n\hat{a} + n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$$

この補題を用いると：

$$\hat{a}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left((\hat{a}^\dagger)^n\hat{a} + n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}\right)|0\rangle$$

$\hat{a}|0\rangle = 0$ より、第一項 $(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}|0\rangle = 0$ です：

$$\hat{a}|n\rangle = \frac{n}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle$$

ここで、$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}$ より：

$$\hat{a}|n\rangle = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)!}}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}|0\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

物理的意味:

これらの関係式は、昇降演算子が状態を「1 つ上の準位」または「1 つ下の準位」に移動させることを示しています。生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ はエネルギー量子を 1 つ追加し、消滅演算子 $\hat{a}$ はエネルギー量子を 1 つ取り除きます。

係数 $\sqrt{n+1}$ と $\sqrt{n}$ は、状態の規格化を保つために必要です。特に、$n = 0$ のとき $\hat{a}|0\rangle = 0$ となり、基底状態より下の準位は存在しないことが保証されます。

考察:

昇降演算子の作用により、調和振動子の状態空間は**離散的な階段構造**を持ちます。この構造は、エネルギーが量子化されていることの直接的な表現です。また、これらの関係式は、調和振動子の遷移確率や期待値の計算において重要な役割を果たします。

(vi) 位置と運動量の期待値

問題: 任意の n に対して、$\langle n|\hat{x}|n\rangle$ と $\langle n|\hat{p}|n\rangle$ を計算せよ。

解答:

$\hat{x}$ と $\hat{p}$ は昇降演算子で表されます：

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

1. $\langle n|\hat{x}|n\rangle$ の計算

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|n\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n|\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle\right)$$

正規直交条件 $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ より：

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle = 0$$

2. $\langle n|\hat{p}|n\rangle$ の計算

$$\langle n|\hat{p}|n\rangle = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle n|(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)|n\rangle$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\langle n|\hat{a}|n\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle\right)$$

$$= -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle\right)$$

$$= 0$$

物理的意味:

この結果は、エネルギー固有状態において、位置と運動量の**平均値**が 0 であることを示しています。これは、調和振動子のエネルギー固有状態が**対称的**であることの反映です。

なぜ期待値が 0 なのか？

1. **対称性**: 調和振動子のポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ は $x = 0$ に関して対称です。したがって、エネルギー固有状態も対称性を持ちます。
2. **昇降演算子の性質**: $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ より、$\langle n|\hat{x}|n\rangle$ は $\langle n|\hat{a}|n\rangle$ と $\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle$ の和です。しかし、$\hat{a}|n\rangle \propto |n-1\rangle$、$\hat{a}^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$ なので、正規直交条件により 0 になります。

古典力学との比較:

- **古典力学**: 調和振動子は平衡点（$x = 0$）を中心に振動します。時間平均を取ると、位置の平均は 0 になります。
- **量子力学**: エネルギー固有状態は時間に依存しない定常状態であり、位置の期待値は常に 0（平衡点）です。

波動関数の対称性:

期待値が 0 であることは、波動関数が平衡点に関して対称（または反対称）であることを意味します。実際、調和振動子の固有関数はエルミート多項式で与えられ：- n が偶数のとき: 偶関数（$u_n(-x) = u_n(x)$）- n が奇数のとき: 奇関数（$u_n(-x) = -u_n(x)$）

どちらの場合でも、$|u_n(x)|^2$ は偶関数なので、期待値は 0 になります。

不確定性との関係:

期待値が 0 であっても、位置の**不確定性**（分散）は 0 ではありません。実際：

$$\Delta x = \sqrt{\langle n|\hat{x}^2|n\rangle - \langle n|\hat{x}|n\rangle^2} = \sqrt{\langle n|\hat{x}^2|n\rangle}$$

これは不確定性原理の直接的な帰結です。位置と運動量を同時に正確に測定することはできません。

具体例:

基底状態 $|0\rangle$ では、位置の期待値は 0 ですが、波動関数はガウス関数 $u_0(x) \propto e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ で、$x = 0$ を中心に広がっています。この「広がり」が不確定性を表しています。

(vii) 座標表示での昇降演算子

問題: 昇降演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ に関して、以下の関係式が成り立つことを示せ：

$$\langle x|\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\langle x|$$

$$\langle x|\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\langle x|$$

ここで、$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ は無次元化された座標です。

解答:

座標表示では、位置演算子と運動量演算子は以下のように作用します：

$$\langle x|\hat{x} = x\langle x|$$

$$\langle x|\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|$$

無次元化座標 $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ を導入すると：

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{d\xi}$$

したがって：

$$\langle x|\hat{p} = -i\hbar\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{d\xi}\langle x| = -i\sqrt{m\omega\hbar}\frac{d}{d\xi}\langle x|$$

昇降演算子の定義（式 (2) と式 (3)）を用いると：

$$\langle x|\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x|\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\langle x|\hat{p}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\langle x| + i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(-i\sqrt{m\omega\hbar}\frac{d}{d\xi}\right)\langle x|$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\langle x| + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{d\xi}\langle x|$$

$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ より $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi$ なので：

$$\langle x|\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\langle x| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\langle x|$$

同様に：

$$\langle x|\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x|\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\langle x|\hat{p}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\langle x| - i\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(-i\sqrt{m\omega\hbar}\frac{d}{d\xi}\right)\langle x|$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x\langle x| - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{d\xi}\langle x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\langle x| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\langle x|$$

物理的意味:

この結果は、昇降演算子が座標表示では**微分演算子と座標の組み合わせ**として表現されることを示しています。特に、消滅演算子 $\hat{a}$ は「微分 ＋ 座標」、生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ は「-微分 ＋ 座標」という形になります。

この形式は、波動関数を直接計算する際に有用です。

考察:

無次元化座標 ξ の導入により、物理定数が式から消え、数学的な構造がより明確になります。この形式化は、調和振動子の固有関数（エルミート多項式）を導出する際の出発点となります。

(viii) 基底状態の微分方程式

問題: 基底状態 $|0\rangle$ が $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たすことから、$u_0(x) = \langle x|0\rangle$ が従うべき 1 階の微分方程式を導け。

解答:

$\hat{a}|0\rangle = 0$ の両辺に $\langle x|$ を作用させると：

$$\langle x|\hat{a}|0\rangle = 0$$

(vii) の結果より：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\langle x|0\rangle = 0$$

$u_0(x) = \langle x|0\rangle$ とおくと：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\xi} + \xi\right) u_0(\xi) = 0$$

したがって：

$$\frac{du_0}{d\xi} + \xi u_0 = 0$$

これが求める 1 階の微分方程式です。

物理的意味:

この微分方程式は、基底状態が「消滅演算子によって消える」という条件を座標表示で表現したものです。これは、基底状態が可能な限り「低いエネルギー」を持つ状態であることを意味します。

考察:

この微分方程式は変数分離形であり、容易に解くことができます。次の問題で、この方程式を解いて具体的な波動関数を求めます。

(ix) 基底状態の固有関数

問題: 上の微分方程式を解き、規格化された基底状態の固有関数 $u_0(x)$ を求めよ。

解答:

微分方程式：

$$\frac{du_0}{d\xi} + \xi u_0 = 0$$

を変数分離して解きます：

$$\frac{du_0}{u_0} = -\xi d\xi$$

両辺を積分：

$$\ln u_0 = -\frac{\xi^2}{2} + C$$

したがって：

$$u_0(\xi) = Ae^{-\xi^2/2}$$

ここで、A は規格化定数です。

規格化条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|^2 dx = 1$$

を満たすように A を決定します。

$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ より $dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}d\xi$ なので：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|^2 dx = A^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = A^2 \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi} = 1$$

したがって：

$$A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

したがって、規格化された基底状態の固有関数は：

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

無次元化座標で表すと：

$$u_0(\xi) = \pi^{-1/4} e^{-\xi^2/2}$$

物理的意味:

基底状態の波動関数は**ガウス関数**（正規分布）の形をしています。これは、不確定性原理の下で、位置と運動量の不確定性の積が最小となる状態です。

波動関数の幅は $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ のオーダーであり、これは**量子長さスケール**を表します。古典的な振幅と比較すると、量子効果が重要になる領域が明確になります。

考察:

ガウス関数の形は、調和振動子の対称性（パリティ保存）と不確定性原理の両方を満たす自然な結果です。この基底状態から、生成演算子を繰り返し作用させることで、すべての励起状態の波動関数を構成できます。

問題 7-2: 個数演算子とコヒーレント状態

問題設定

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$（ここでは α は実数）は、生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を用いて以下のように定義されます：

式 (4):

$$|\alpha\rangle = Ce^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{4}$$

ここで、C は規格化定数です。

コヒーレント状態は、古典的な調和振動子の運動に最も近い量子状態であり、レーザー光や超伝導体の理論において重要な役割を果たします。

(i) コヒーレント状態の性質

問題: コヒーレント状態が $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ を満たすことを示せ。

解答:

$|\alpha\rangle = Ce^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ に消滅演算子 $\hat{a}$ を作用させます。

まず、$\hat{a}$ と $e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$ の交換関係を調べます。

補題: $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$ **の証明**

帰納法で証明します。

$n=1$ のとき：

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1=1\cdot(\hat{a}^\dagger)^0$$

($(\hat{a}^\dagger)^0=1$ と約束します)

$n=k$ で成り立つと仮定（つまり、$[\hat{a},(\hat{a}^\dagger)^k]=k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}$）：

$n=k+1$ のとき：

$$[\hat{a},(\hat{a}^\dagger)^{k+1}]=\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{k+1}-(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}$$

$$=\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^k\hat{a}^\dagger-(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}$$

ここで、$\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^k=(\hat{a}^\dagger)^k\hat{a}+k(\hat{a}^\dagger)^{k-1}$（(v) で証明した補題）を用いると：

$$=((\hat{a}^\dagger)^k\hat{a}+k(\hat{a}^\dagger)^{k-1})\hat{a}^\dagger-(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}$$

$$=(\hat{a}^\dagger)^k\hat{a}\hat{a}^\dagger+k(\hat{a}^\dagger)^k-(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}$$

$$=(\hat{a}^\dagger)^k(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)+k(\hat{a}^\dagger)^k-(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}$$

$$=(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^k+k(\hat{a}^\dagger)^k-(\hat{a}^\dagger)^{k+1}\hat{a}=(k+1)(\hat{a}^\dagger)^k$$

したがって、すべての n に対して：

$$[\hat{a},(\hat{a}^\dagger)^n]=n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$$

この補題を用いて、$[\hat{a},e^{\alpha\hat{a}^\dagger}]$ を計算します：

$$[\hat{a},e^{\alpha\hat{a}^\dagger}]=[\hat{a},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}[\hat{a},(\hat{a}^\dagger)^n]$$

$n=0$ のとき $[\hat{a},1]=0$ なので、$n\geq 1$ の項のみが残ります：

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{(n-1)!}(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$$

$m=n-1$ と置き換えると：

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+1}}{m!}(\hat{a}^\dagger)^m=\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^m}{m!}=\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

したがって：

$$\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}=e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}+\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}$$

これを用いると：

$$\hat{a}|\alpha\rangle=C\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle=C(e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\hat{a}+\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger})|0\rangle$$

$\hat{a}|0\rangle=0$ より：

$$\hat{a}|\alpha\rangle=C\alpha e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle=\alpha|\alpha\rangle$$

物理的意味:

この結果は、コヒーレント状態が**消滅演算子の固有状態**であることを示しています。これは、コヒーレント状態が「古典的な振動」を最もよく再現する量子状態であることの数学的表現です。

古典力学では、調和振動子の位置と運動量は時間とともに周期的に変化しますが、コヒーレント状態では、この時間発展が量子力学的に実現されます。

考察:

$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ という関係は、コヒーレント状態が「最小不確定性状態」であることを意味します。実際、コヒーレント状態における位置と運動量の不確定性の積は、不確定性原理の下限 $\frac{\hbar}{2}$ を達成します。

(ii) 規格化定数の決定

問題: $|\alpha\rangle$ が $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ と規格化されている場合に、定数 C を決定せよ。

ヒント: 2 つの演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ がいずれも $[\hat{A}, \hat{B}]$ と可換なとき、$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$ が成り立つ。

解答:

規格化条件：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C|^2\langle 0|e^{\alpha\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = 1$$

ヒントの公式を用います。$\hat{A} = \alpha\hat{a}, \hat{B} = \alpha\hat{a}^\dagger$ とおくと：

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \alpha^2[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \alpha^2$$

これは数（演算子ではない）なので、$\hat{A}$ と $\hat{B}$ の両方と可換です。

したがって：

$$e^{\alpha\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{\alpha\hat{a}}e^{\alpha^2}$$

これを用いると：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C|^2e^{\alpha^2}\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{\alpha\hat{a}}|0\rangle$$

$e^{\alpha\hat{a}}|0\rangle = |0\rangle$（$\hat{a}|0\rangle = 0$ より、$e^{\alpha\hat{a}}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a})^n}{n!}|0\rangle = |0\rangle$）なので：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C|^2e^{\alpha^2}\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$$

次に、$\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ を計算します。

$e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ を数状態で展開すると：

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

ここで、$(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ は $|n\rangle$ に比例しますが、規格化定数を含めると：

$$(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}|n\rangle$$

したがって：

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

この状態と $|0\rangle$ の内積を取ると：

$$\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|n\rangle$$

正規直交条件 $\langle 0|n\rangle = \delta_{0n}$ より、$n = 0$ の項のみが残り：

$$\langle 0|e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \frac{\alpha^0}{\sqrt{0!}} \cdot 1 = 1$$

より：

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C|^2 e^{\alpha^2} = 1$$

したがって：

$$|C|^2 = e^{-\alpha^2}$$

位相を 0 に選ぶと（実数の C を選ぶ）：

$$C = e^{-\alpha^2/2}$$

物理的意味:

規格化定数 $C = e^{-\alpha^2/2}$ は、コヒーレント状態の「大きさ」を決定します。α が大きいほど、コヒーレント状態はより高いエネルギー準位に広がりますが、規格化定数により確率の総和が 1 に保たれます。

考察:

この規格化定数は、後で見るポアソン分布の正規化にも現れます。$e^{-\alpha^2/2}$ という形は、ガウス分布の正規化定数と類似しており、コヒーレント状態の統計的性質を反映しています。

(iii) コヒーレント状態の数状態展開とポアソン分布

問題: 状態 $|\alpha\rangle$ を個数演算子 $\hat{N}$ の規格化された固有状態 $|n\rangle$ で展開し、これを用いて、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が n 個の量子を含む確率を見いだせ。この確率分布はポアソン分布と呼ばれる。

解答:

コヒーレント状態を数状態で展開：

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

展開係数は：

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = \langle n|Ce^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = C\langle n|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^m}{m!}|0\rangle$$

$$= C\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{m!}\langle n|(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$$

ここで、$\langle n|(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$ を計算します。

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ より、$\langle n| = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|(\hat{a})^n$ です。

したがって：

$$\langle n|(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$$

この内積が非零になるのは、$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle$ が $|0\rangle$ に比例する場合、つまり $m = n$ の場合のみです。

$m = n$ のとき：

$$\langle n|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$$

(iv) の補足で証明したように、$(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = n!|0\rangle$ なので：

$$\langle n|(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\cdot n!\langle 0|0\rangle = \sqrt{n!}$$

$m \neq n$ のときは、$\langle n|(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle = 0$ です（詳細は (iv) の直交性の証明を参照)。

したがって：

$$c_n = C\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{m!}\langle n|(\hat{a}^\dagger)^m|0\rangle = C\frac{\alpha^n}{n!}\cdot\sqrt{n!} = C\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

規格化定数 $C = e^{-\alpha^2/2}$ を代入：

$$c_n = e^{-\alpha^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

したがって：

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

n 個の量子を含む確率は：

$$P(n) = |c_n|^2 = e^{-\alpha^2}\frac{\alpha^{2n}}{n!}$$

$\bar{n} = \alpha^2$ とおくと（これは後で確認される平均個数)：

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}$$

これが**ポアソン分布**です。

物理的意味:

ポアソン分布は、**独立な事象がランダムに発生する場合**の確率分布です。コヒーレント状態において、各エネルギー量子は独立に存在すると考えられ、その結果としてポアソン分布が現れます。

ポアソン分布の特徴：- 平均値と分散が等しい：$\langle n\rangle = \mathrm{Var}(n) = \bar{n}$ - n が大きいとき、正規分布に近づく

考察:

コヒーレント状態がポアソン分布に従うことは、レーザー光の光子数統計と直接関連しています。レーザー光は理想的なコヒーレント状態に近く、その光子数はポアソン分布に従います。これは、レーザー光が「古典的な電磁波」に最も近い量子状態であることの反映です。

(iv) 平均個数の計算

問題: コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ における量子の平均個数 $\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle$ を求めよ。

解答:

平均個数は：

$$\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle$$

(i) の結果 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ より：

$$\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\alpha|\alpha\rangle = \alpha\langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle$$

$\hat{a}^\dagger$ は $\hat{a}$ のエルミート共役なので、$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ のエルミート共役を取ると：

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha| = \alpha\langle\alpha|$$

(α は実数と仮定)

したがって：

$$\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = \alpha\cdot\alpha = \alpha^2$$

別の方法（数状態展開を用いる）：

$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

より：

$$\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\alpha^m}{\sqrt{n!m!}}\langle m|\hat{N}|n\rangle$$

$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ より：

$$\langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = e^{-\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{n!}n = e^{-\alpha^2}\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{2(n-1)}}{(n-1)!} = \alpha^2 e^{-\alpha^2}e^{\alpha^2} = \alpha^2$$

物理的意味:

平均個数が α^2 であることは、コヒーレント状態の「大きさ」が α によって制御されることを示しています。α が大きいほど、より多くのエネルギー量子を含む状態になります。

(iii) の結果と整合して、ポアソン分布の平均値は $\bar{n} = \alpha^2$ となります。

考察:

平均個数が α^2 であることは、コヒーレント状態のエネルギー期待値が：

$$\langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\right)$$

となることを意味します。これは、古典的な調和振動子のエネルギー $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$（$A$ は振幅）と対応しており、α が古典的な振幅と関連していることがわかります。

まとめと物理的意義

調和振動子の重要性

調和振動子は、量子力学において最も基本的な系の一つです。その理由は以下の通りです：

1. **解析的に解ける**: エネルギー固有値と固有関数が完全に求められる
2. **普遍性**: 多くの物理系が平衡点近傍で調和振動子として近似できる
3. **場の量子論への拡張**: 自由場の量子化は調和振動子の無限個の集合として理解できる

演算子法の利点

演算子法（昇降演算子を用いた方法）の利点：

1. **代数的アプローチ**: 微分方程式を直接解く必要がない
2. **対称性の明確化**: 調和振動子の対称性が代数的に表現される
3. **一般化の容易さ**: 角運動量やスピンなど、他の系への応用が可能

コヒーレント状態の応用

コヒーレント状態は以下の分野で重要です：

1. **量子光学**: レーザー光の理論的記述
2. **超伝導**: クーパー対の記述
3. **量子情報**: 連続変数量子計算の基礎

図による説明

図 1: 調和振動子のエネルギー準位

```
エネルギー
    ↑
      E = 9/2        |4
      E = 7/2        |3
      E = 5/2        |2
      E = 3/2        |1
      E = 1/2        |0  （基底状態）

                   →
```

- エネルギー準位は等間隔（$\hbar\omega$）で並ぶ
- 基底状態のエネルギーは 0 ではなく $\frac{1}{2}\hbar\omega$（零点エネルギー）
- 各準位間の遷移は、消滅演算子 $\hat{a}$ または生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ によって実現される

図 2: 基底状態の波動関数　基底状態 $u_0(x)$ はガウス関数の形をしており、平衡点 $x = 0$ を中心に対称です。波動関数の幅は $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ のオーダーで、これが量子効果が重要になる長さスケールです。

図 3: ポアソン分布　コヒーレント状態における量子数の確率分布はポアソン分布に従います。平均値 $\bar{n} = \alpha^2$ が大きいほど、分布はより広がり、正規分布に近づきます。

参考文献と発展的内容

発展的な話題

1. **多体調和振動子**: 複数の調和振動子の集合（統計力学、場の量子論）
2. **非調和振動子**: ポテンシャルに非線形項がある場合
3. **時間依存調和振動子**: 時間的に変化するパラメータを持つ場合
4. **コヒーレント状態の時間発展**: コヒーレント状態が時間とともにどのように変化するか

関連する物理現象

- **零点振動**: 基底状態でも粒子は静止せず、微小な振動を行う
- **トンネル効果**: 調和振動子ポテンシャルの外へのトンネリング
- **量子もつれ**: 複数の調和振動子間の量子もつれ

以上で、量子力学 I 演習問題 No. 7 の詳細解説を終わります。