Markdown to PDF

Contents

1　量子力学 I 学期末試験問題案（3 通り）

1.1　試験問題案第 1 セット

1.1.1　問題 1: 無限に深い井戸型ポテンシャルと測定（演習問題 4-1, 4-2 をもとに）

質量 m の粒子が、以下のポテンシャル $V(x)$ の中で運動する量子力学を考える。a は正の定数である。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x > a) \end{cases}$$

このポテンシャル中の粒子の波動関数が、時刻 $t = 0$ において次のように与えられているとする：

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} C\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)\right] & (0 < x < a) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases}$$

ここで、$C > 0$ は規格化定数である。

この系のエネルギー固有関数は次で与えられる：

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & (0 < x < a) \\ 0 & (x \leq 0, x \geq a) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

対応するエネルギー固有値は：

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(a) エネルギー固有関数 $u_n(x)$ が規格直交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) u_m(x) dx = \delta_{nm}$$

を満たすことを示せ。

(b) 初期波動関数 $\Psi(x, 0)$ をエネルギー固有関数 $u_n(x)$ の線形結合として表せ。また、規格化条件から係数 C を決定せよ。

(c) 時刻 $t = 0$ でエネルギーの測定を１回行ったとき、得られるエネルギーの値とその確率を求めよ。

(d) エネルギーの測定を多数回繰り返し行った結果得られるエネルギーの平均値（期待値）を求めよ。

1.1.2　問題 2: エーレンフェストの定理と不確定性関係（演習問題 3-1, 3-2 をもとに）

質量 m の粒子がポテンシャル $V(x)$ の下で１次元空間内を運動している。$V(x)$ は x の実関数とする。波動関数 $\Psi(x,t)$ は規格化されているとする。

(a) 位置 x と運動量 p の期待値をそれぞれ $\langle x\rangle$ と $\langle p\rangle$ と定義する。このとき、以下の関係式が成り立つことを示せ：

$$\frac{d}{dt}\langle p\rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

（ヒント：シュレーディンガー方程式と部分積分を用いよ。）

(b) 規格化された波動関数 $\Psi(x,t)$ に対して、関数 $I(\lambda)$ を次で定義する：

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| (x-\langle x\rangle)\Psi(x,t) + i\lambda\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \langle p\rangle\right)\Psi(x,t)\right|^2$$

ここで、λ は実数であり、$\langle x\rangle$ と $\langle p\rangle$ はそれぞれ位置と運動量の期待値を表す。

位置と運動量の標準偏差（不確定さ）をそれぞれ

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle (p-\langle p\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$$

と定義する。

$I(\lambda)$ が以下の形で書けることを示せ：

$$I(\lambda) = (\Delta x)^2 - \hbar\lambda + (\Delta p)^2\lambda^2$$

(c) 定義により、$I(\lambda)\geq 0$ である。この事実を用いて、不確定性関係

$$\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つことを示せ。

1.1.3　問題 3: 有限深さのポテンシャル井戸と束縛状態（発展問題：演習問題 5-2 をもとに発展）

質量 m の粒子が、以下のポテンシャル $V(x)$ の中で運動する量子力学を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x<0) \\ -V_0 & (0<x<a) \\ 0 & (x>a) \end{cases}$$

ここで、$V_0>0$、$a>0$ は定数である。束縛状態（$-V_0<E<0$）を考える。

(a) ハミルトニアンの固有関数を $u(x)$、エネルギー固有値を E として、各領域における時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(b) $x = 0$ および $x \to \infty$ で $u(x)$ が満たすべき条件を述べよ。

(c) $0 < x < a$ の領域におけるシュレーディンガー方程式の一般解を求めよ。ただし、$q = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar$ とおいてよい。

(d) $x > a$ の領域におけるシュレーディンガー方程式の一般解を求めよ。ただし、$\kappa = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ とおいてよい。

(e) 固有関数 $u(x)$ とその導関数 $du(x)/dx$ が $x = a$ で満たすべき連続条件を書け。

(f) 上の連続条件から、$\kappa = -q \cot qa$ という関係式が導かれることを示せ。

(g) 無次元変数 $\lambda = 2mV_0 a^2/\hbar^2$ と $y = qa$ を用いて、上の関係式を

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

と書き直せ。この方程式を満たす束縛状態が存在するための λ の条件を求めよ。

1.2 試験問題案第 2 セット

1.2.1 問題 1: 箱の中の粒子の期待値と不確定性（演習問題 3-4 をもとに）

質量 m の粒子が、以下のポテンシャル $V(x)$ の中で運動する量子力学を考える。a は正の定数である。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ \infty & (x > a) \end{cases}$$

この系の n 番目のエネルギー固有状態の規格化された固有関数とエネルギー固有値は次で与えられる：

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & (0 < x < a) \\ 0 & (x \le 0, x \ge a) \end{cases}$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(a) n 番目のエネルギー状態に対して、粒子の位置の期待値 $\langle x \rangle$ を計算し、その平均が箱の中心 $a/2$ であることを確認せよ。

(b) n 番目のエネルギー状態に対して、運動量の期待値 $\langle p \rangle$ を計算し、その平均が 0 であることを確認せよ。

(c) 基底状態（$n = 1$）に対して、$\langle x^2 \rangle$ を計算し、位置の不確定さ $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ を求めよ。

(d) 基底状態（$n = 1$）に対して、$\langle p^2 \rangle$ を計算し、運動量の不確定さ $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ を求めよ。

(e) 基底状態（$n = 1$）に対して、$\Delta x \cdot \Delta p$ を求めよ。ハイゼンベルクの不確定性原理との関連について述べよ。

1.2.2　問題 2: 演算子の交換関係とエルミート性（演習問題 4-4 をもとに）

1次元空間において、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ が与えられている。

(a) 交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}]$ を計算せよ。

(b) ハミルトニアン演算子 $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{x}) = -\hbar^2/(2m)\partial^2/\partial x^2 + V(x)$ が与えられている。交換関係 $[\hat{x}, \hat{H}]$ と $[\hat{p}, \hat{H}]$ を計算せよ。

(c) 演算子 $\hat{O}$ がエルミートであるとは、任意の規格化可能な波動関数 $\Psi_1(x,t)$、$\Psi_2(x,t)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_1^*(x,t)\hat{O}\Psi_2(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\hat{O}\Psi_1(x,t))^*\Psi_2(x,t)$$

が成り立つことである。運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ がエルミートであることを示せ。

(d) ハミルトニアン演算子 $\hat{H} = -\hbar^2/(2m)\partial^2/\partial x^2 + V(x)$（$V(x)$ は実関数）がエルミートであることを示せ。

1.2.3　問題 3: 調和振動子の波束と時間発展（発展問題：演習問題 6-4, 7-2 をもとに発展）

1次元調和振動子のハミルトニアンは次で与えられる：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

昇降演算子を次で定義する：

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

(a) 交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ となることを示せ。

(b) 個数演算子を $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と定義する。ハミルトニアン $\hat{H}$ が個数演算子 $\hat{N}$ を用いて $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}+1/2)$ と表されることを示せ。

(c) 基底状態 $|0\rangle$ が $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす規格化された状態であるとする。基底状態の波動関数 $u_0(x) = \langle x|0\rangle$ が従うべき1階の微分方程式を導出し、規格化された解を求めよ。

（ヒント：位置表示において $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)$ となることを用いよ。ここで $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x$ である。）

(d) 時刻 $t = 0$ において、調和振動子が次のガウス型波束で与えられているとする：

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2}\right)$$

ここで、$\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x$、$\xi_0$ は定数である。この波動関数をエネルギー固有状態 $|n\rangle$ で展開したときの展開係数 $c_n = \langle n|\Psi(0)\rangle$ を求めよ。

（ヒント：エルミート多項式の母関数 $S(\xi, s) = e^{-s^2+2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!}s^n$ を用いよ。）

(e) 任意の時刻 t における波動関数 $\Psi(x,t)$ を求め、確率密度 $|\Psi(x,t)|^2$ が古典的な調和振動子のように単振動することを示せ。

1.3　試験問題案第 3 セット

1.3.1　問題 1: トンネル効果（演習問題 5-1 をもとに）

質量 m の粒子が、以下のポテンシャル $V(x)$ の中で運動する量子力学を考える。

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

ここで、$V_0 > 0$、$a > 0$ は定数である。エネルギー E（$0 < E < V_0$）を持った粒子が $x = -\infty$ から入射してくる状況を考える。

(a) ハミルトニアンの固有関数を $u(x)$ として、$|x| > a$ での時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(b) $|x| < a$ での時間に依存しないシュレーディンガー方程式を書け。

(c) $x < -a$ でのシュレーディンガー方程式の解で、入射粒子の確率の流れが $\hbar k/m$ となるものを求めよ。ここで $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ である。

(d) $x > a$ でのシュレーディンガー方程式の解で、$x = \infty$ から入射してくる粒子はないことを示すものを求めよ。

(e) $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ として、$-a < x < a$ でのシュレーディンガー方程式の解を求めよ。

(f) 固有関数 $u(x)$ とその導関数 $du(x)/dx$ が $x = -a$ および $x = a$ で満たすべき連続条件を書け。

(g) 上の連続条件を解くことにより、反射波と透過波の確率の流れを求めよ。

(h) 反射率と透過率を求め、透過率が 0 でないこと（すなわちトンネル効果が起こっていること）を確認せよ。

1.3.2　問題 2: デルタ関数型ポテンシャル（演習問題 5-3 をもとに）

質量 m の粒子が、ポテンシャル $V(x) = -\lambda\delta(x)$（$\lambda > 0$）内で運動する量子力学を考える。エネルギー $E < 0$ の束縛状態を考える。

(a) $x > 0$ における時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解が $u(x) = Ae^{-\kappa x}$（$A > 0$ は規格化定数、$\kappa = \sqrt{2m|E|}/\hbar$）と与えられているとする。$u(x)$ が $x = 0$ で連続であり、$x \to -\infty$ で $u(x) \to 0$ を満たす条件下で、$x < 0$ におけるシュレーディンガー方程式の解を求めよ。

(b) $u(x)$ が $x = 0$ で連続だが微分不可能であることを示すため、シュレーディンガー方程式を $x = -\varepsilon$ から $x = \varepsilon$ まで積分し、$\varepsilon \to 0$ の極限を取ることにより、$du(x)/dx$ が以下の条件を満たすことを示せ：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=-\varepsilon} \right] = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2} u(0)$$

(c) 上の条件を用いて、エネルギー固有値 E を決定せよ。

(d) 固有関数 $u(x)$ が規格化されていることから、定数 A を決定せよ。

(e) 固有関数 $u(x)$ に対して、期待値 $\langle x \rangle$ と $\langle x^2 \rangle$ を計算し、位置の不確定さ $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ を求めよ。

(f) 固有関数 $u(x)$ に対して、期待値 $\langle p \rangle$ と $\langle p^2 \rangle$ を計算し、運動量の不確定さ $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ を求めよ。

（注意：$u(x)$ の微分が $x = 0$ で不連続であることに注意せよ。）

(g) 上の結果から、$\Delta x \cdot \Delta p$ を求め、不確定性原理との関係を述べよ。

1.3.3 問題 3: 調和振動子の演算子法とコヒーレント状態（発展問題：演習問題 7-1, 7-2 をもとに発展）

1 次元調和振動子のハミルトニアンは次で与えられる：

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

昇降演算子を次で定義する：

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

(a) 交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて、$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ となることを示せ。

(b) 個数演算子を $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と定義する。ハミルトニアン $\hat{H}$ が個数演算子 $\hat{N}$ を用いて $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N}+1/2)$ と表されることを示せ。

(c) ハミルトニアン $\hat{H}$ の固有状態が $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）で与えられることを確認し、そのエネルギー固有値を求めよ。ここで、$|0\rangle$ は規格化された基底状態（$\hat{a}|0\rangle = 0$）を表す。

(d) 固有状態 $|n\rangle$ が規格直交条件 $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を満たすことを示せ。

(e) 固有状態 $|n\rangle$ が $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ および $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$（$n \geq 1$）を満たすことを示せ。

(f) コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$（α は実数）を、生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を用いて $|\alpha\rangle = Ce^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$ で定義する。ここで、C は適当な定数である。コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ を満たすことを示せ。

（ヒント：$[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n] = n(\hat{a}^\dagger)^{n-1}$ を用いよ。）

(g) コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ と規格化されている場合に、定数 C を決定せよ。

（ヒント：2 つの演算子 $\hat{A}$、$\hat{B}$ がいずれも $[\hat{A}, \hat{B}]$ と可換な時、$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$ なる公式が成り立つことを用いてよい。）

(h) 状態 $|\alpha\rangle$ を個数演算子 $\hat{N}$ の規格化された固有状態 $|n\rangle$ で展開し、これを用いて、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が n 個の量子を含む確率を求めよ。この確率分布はポアソン分布と呼ばれることを確認せよ。

1.4 出題傾向の分析と問題選択の根拠

1.4.1 過去の出題傾向（2023-2025 年）

1. **無限に深い井戸型ポテンシャル**：2023 年、2024 年、2025 年（間接的）に頻出
2. **調和振動子**：2023 年、2024 年、2025 年に毎年出題
3. **デルタ関数ポテンシャル**：2025 年に出題

4. **時間発展**：2024年、2025年に出題
5. **測定と確率**：演習問題で頻出（4-1, 4-2）

1.4.2 各セットの特徴

第1セット： - 問題1：測定と確率（演習4-1, 4-2）- 問題2：エーレンフェストの定理と不確定性関係（演習3-1, 3-2）- 問題3：有限深さのポテンシャル井戸（演習5-2の発展）

第2セット： - 問題1：箱の中の粒子の期待値（演習3-4）- 問題2：演算子の交換関係とエルミート性（演習4-4）- 問題3：調和振動子の波束と時間発展（演習6-4, 7-2の発展）

第3セット： - 問題1：トンネル効果（演習5-1）- 問題2：デルタ関数型ポテンシャル（演習5-3）- 問題3：調和振動子の演算子法とコヒーレント状態（演習7-1, 7-2の発展）

1.4.3 難易度の配分

各セットとも：- **問題1, 2**：演習問題を基にした標準的な問題（基礎〜中級）- **問題3**：発展的な問題（中級〜上級）

1.4.4 必要な前提知識

すべての問題に共通して必要な知識：- シュレーディンガー方程式（時間依存・時間非依存）- 波動関数の規格化と確率解釈 - エネルギー固有値と固有関数 - 期待値の計算 - 不確定性原理

各問題で特に必要な知識：- **第1セット問題1**：フーリエ級数展開、測定の確率解釈 - **第1セット問題2**：部分積分、期待値の時間微分 - **第1セット問題3**：境界条件、連続条件、超越方程式 - **第2セット問題1**：三角関数の積分 - **第2セット問題2**：交換関係、エルミート演算子 - **第2セット問題3**：エルミート多項式、母関数 - **第3セット問題1**：確率の流れ、反射率・透過率 - **第3セット問題2**：デルタ関数、不連続性 - **第3セット問題3**：昇降演算子、コヒーレント状態、ポアソン分布