力学特論 演習問題 No. 1 (2025年10月2日)
解析力学と線形代数の復習
5問 (3ページ) あります。

問題 1-1 ： 直交行列

$O^TO = OO^T = 1$ が成立する $N \times N$ の実数行列 O を直交行列という。（ここで O^T は行列 O の転置行列である。）実 N 次元ベクトル $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_N)^T$ を直交行列で変換すること、$\vec{v'} = O\vec{v}$、を直交変換という。

(i) ベクトルの長さや、2つのベクトルの間の角度は、直交変換で変わらないことを示せ。（ヒント：2つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の内積 $\vec{u} \cdot \vec{v}$、もしくは、$\vec{u}^T\vec{v}$ が直交変換で不変であることを示せばよい。）このことは、N 次元ベクトル空間の正規直交基底 $\{\vec{e}_i\}$ を別の正規直交基底 $\{\vec{e'}_i\}$ に変換することを示している。更に、直交行列 O の列ベクトルは、正規直交基底になることを示せ。つまり、$O = (\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_N)$ としたとき、$\vec{E}_i^T\vec{E}_j = \delta_{ij}$ を示せ。このことは、正規直交基底 $(\vec{e}_i)_l = \delta_{il}$ と取ると、$\vec{E}_i = O\vec{e}_i$ となることを示している。

(ii) 直交行列 $\{O\}$ は行列としての積に関して群をなすことを示せ。つまり、

(a) 任意の二つの直交行列 O_1 と O_2 に対して、O_1O_2 は直交行列である。

(b) 任意の3つの直交行列 O_1、O_2 と O_3 に対して、$(O_1O_2)O_3 = O_1(O_2O_3)$ を満たす。（結合則）

(c) 単位元 $\mathbf{1}$ が存在する。つまり、$O\mathbf{1} = \mathbf{1}O = O$。

(d) 逆元 O^{-1} が存在する。つまり、$OO^{-1} = O^{-1}O = \mathbf{1}$

を示せ。この群を直交群と呼ぶ。

(iii) $N \times N$ 実対称行列 $A = A^T$ は、直交行列 O によって対角化できることが知られている。つまり、O^TAO が対角行列になる O が存在する。以下、対称行列の問題になる。λ_i を対称行列 A の固有値、$\vec{u}_i$ をその固有値に対応する固有ベクトルとする。つまり、$A\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$ である。ここで、$i = 1, \cdots, N$ である。もし、$\lambda_i \neq \lambda_j$ の時、対応する固有ベクトルは直交する、つまり、$\vec{u}_i^T\vec{u}_j = 0$ となることを示せ。

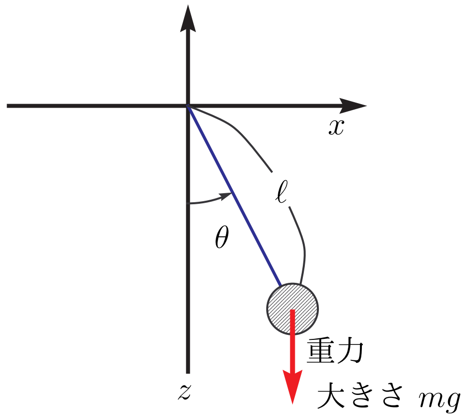
(iv) A が実対称行列の時、固有値 λ_i は実数であることを示せ。

(v) 次の行列 A の固有値と固有ベクトル、対角化行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

問題 1-2 ： 単振り子

右図のように、質量の無視できる長さ ℓ の棒の一端に質量 m の質点が固定された単振り子を考える。この振り子に対し、鉛直方向に重力が作用している。図のように一般化座標 θ を設定し、重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。



(a) 一般化座標 θ を用いて、この系に対するポテンシャル V をあらわせ。

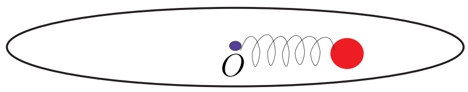
(b) 一般化座標 θ を用いてこの系に対するラグランジアンをあらわせ。

(c) θ に共役な運動量を求めよ。

(d) Euler-Lagrange 方程式を求めよ。

問題 1-3 ： ２次元調和振動子

右図のように、原点 O に一端が固定されている自然長 l でばね定数 k のバネの他端に質量 m の質点が固定されている。質点と水平面の摩擦は無視できるとする。質点が水平面上を運動するとき、以下の問に答えよ。



(a) 2 次元平面上の極座標を用い、この系に対するラグランジアンを求めよ。

(b) Euler-Lagrange 方程式を求めよ。

(c) Euler-Lagrange 方程式から角運動量が保存することを示せ。

(d) 力学的エネルギー E とハミルトニアン H を求めよ。

(e) ハミルトンの運動方程式を求めよ。

問題 1-4 [省略可]： ポアソン (Poisson) 括弧

正準変数 q_r, p_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ で記述される力学系がある。A と B はともに正準変数 q_r, p_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ の関数とするとき、A と B がつくるポアソン括弧 $[A\,,\,B]$ を

$$[A\,,\,B] = \sum_r \left(\frac{\partial A}{\partial q_r}\frac{\partial B}{\partial p_r} - \frac{\partial B}{\partial q_r}\frac{\partial A}{\partial p_r} \right)$$

で定義する。

(a) A, B, C を正準変数の関数とするとき、次の関係式が成り立つことを確かめよ。

 (1) $[A\,,\,B] = -[B\,,\,A]$

 (2) λ_1, λ_2 を正準変数を含まない量とするとき $[A\,,\,\lambda_1 B + \lambda_2 C] = \lambda_1[A\,,\,B] + \lambda_2[A\,,\,C]$

 (3) $[AB\,,\,C] = A[B\,,\,C] + [A\,,\,C]B$

 (4) $[[A\,,\,B]\,,\,C] + [[B\,,\,C]\,,\,A] + [[C\,,\,A]\,,\,B] = 0$

(b) ポアソン括弧を使うと、ハミルトンの方程式が次のように書けることを確かめよ。

$\dot{q}_r = [q_r\,,\,H]$、$\dot{p}_r = [p_r\,,\,H]$

ただしここで、H はハミルトニアンである。

D, F, G を時刻 t における正準変数 q_r, p_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ 、及び t の関数とする。

(c) ハミルトンの方程式を用いて、D の時間微分が次のようになることを示せ。

$$\frac{dD}{dt} = [D\,,\,H] + \frac{\partial D}{\partial t}$$

(d) 次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dt}\,[F\,,\,G] = \left[\frac{dF}{dt}\,,\,G\right] + \left[F\,,\,\frac{dG}{dt}\right]$$

問題 1-5 ： ポアソン括弧と保存量

正準変数 q, p で記述される力学系がある。次の問に答えよ。

(a) ハミルトニアン $H(q,p)$ が時刻 t を陽に含んでおらず、また $F(q,p,t)$ が保存量であれば、$\dfrac{\partial F}{\partial t}$ も保存量であることを示せ。

(b) ハミルトニアンが、$H = \dfrac{p^2}{2m} + mgq$ であるような、質量 m の粒子の重力加速度 g のもとでの落下運動を考える。このとき、$F = q - \dfrac{p}{m}t - \dfrac{1}{2}gt^2$ は保存量であって、従って $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ もそうなっていることを運動方程式を用いて確かめよ。

力学特論演習問題 No. 2 (2025年10月16日実施)

問題は2-1から2-4まであります。レポートは問題2-2です。

問題 2-1 ：重心

次の剛体の質量と重心の位置を求めよ。

(i) 単位面積当たりの質量 σ が一定で厚さを無視できる中心角 2α、半径 a の扇形の板。

(ii) 単位体積当たりの質量 ρ が一定で、底面の半径 a, 高さ h の直円錐。

問題 2-2 ：[レポート] 主慣性モーメント

次の剛体の、重心回りの回転に対する主慣性モーメントを3つともそれぞれ求めよ。

(i) 一様な質量密度の質量 M、半径 R の円環。

(ii) 一様な質量密度の質量 M、半径 R の円板。

(iii) 一様な質量密度の質量 M、半径 R で厚さが無視できる球殻。

(iv) 一様な質量密度の質量 M、半径 R の球

問題 2-3 ：剛体の慣性モーメント

質量 M で長さ L の一様な棒がある。次の慣性モーメントを求めよ。

(i) 棒の中心を通り、棒に垂直な軸の回りの慣性モーメント。

(ii) 棒の一端を通り、棒に垂直な軸の回りの慣性モーメント。

問題 2-4 ：2次元空間上での剛体の運動

質量 m_1 と m_2 の二つの質点が、それぞれ軽い棒の両端についている剛体を考える。この剛体がxy鉛直面上を回転しながら運動している。（重力加速度を g とし、y軸を上向きに取る。）

(i) この二つの質点の位置を表す直交座標 $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ および $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ を使って、重心座標 $\vec{R} = (X, Y)$ を与えよ。

(ii) $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\bar{r}}_i$ $(i = 1, 2)$ とすると、$\vec{\bar{r}}_i$ は重心からそれぞれの質点への一ベクトルを表す。重心を原点とした剛体の慣性モーメント I を質点の質量と $\vec{\bar{r}}_i$ の大きさ $\bar{r}_i$ を用いて書け。

(iii) $\vec{\bar{r}}_1 = \bar{r}_1(\cos\theta, \sin\theta)$、$\vec{\bar{r}}_2 = \bar{r}_2(-\cos\theta, -\sin\theta)$ として、質点の運動エネルギー $T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2$ を書き直せ。（質点の質量と $\vec{R}$ と $\bar{r}_i$ と θ を用いよ。）

(iv) 重力ポテンシャル V を求め、全体のラグランジアン $L = T - V$ を全質量 $M = m_1 + m_2$、$\vec{R} = (X, Y)$、I、θ、g を用いて書き下せ。

(v) 運動方程式を導出し、重心の運動と重心周りの回転運動に分離できることを確かめよ。また、重心周りの角運動量が保存することを示せ。

力学特論 演習問題 No. 3 (2025年10月30日実施)

問題は3-1から3-5まであります。

問題 3-1 ：テンソル

回転に対する n 階のテンソル $T_{a_1a_2\cdots a_n}$ とは、回転行列を O_{ab} とすると、回転により、

$$T_{a_1a_2\cdots a_n} \to T'_{a_1a_2\cdots a_n} = O_{a_1b_1}O_{a_2b_2}\cdots O_{a_nb_n}T_{b_1b_2\cdots b_n} \tag{1.1}$$

と変換するものとして定義できる。ただし、添え字 $a, b, c, a_i, b_i = 1, 2, 3$ である。

次のように ϵ_{abc} を定義する。$\epsilon_{123} = 1$ であり、ϵ_{abc} は、任意の a, b, c の入れ替えに対して反対称である（このことを完全反対称と呼ぶ。）この記号を用いるとベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の外積は $(\vec{A}\times\vec{B})_a = \epsilon_{abc}A_bB_c$ と書ける。

また、クロネッカーのデルタを δ_{ab} とする。以下の問いに答えよ。

(i) 座標 $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ や運動量 $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ が1階のテンソルであることを確かめよ。1階のテンソルをベクトルと呼ぶ。

(ii) δ_{ab} は、もともとは、回転によって特に変換しないものとして定義されているが、テンソルとして変換すると考えてもよいことを示せ。（つまり、$\delta_{ab} \to \delta'_{ab} = O_{ac}O_{bd}\delta_{cd} = \delta_{ab}$ となることを示せ。）

(iii) ϵ_{abc} は、もともとは、回転によって特に変換しないものとして定義されているが、テンソルとして変換すると考えてもよいことを示せ。（つまり、$\epsilon_{abc} \to \epsilon'_{abc} = O_{ad}O_{be}O_{cf}\epsilon_{def} = \epsilon_{abc}$ となることを示せ。）ϵ_{abc} のことを ϵ テンソルと呼ぶ。また、δ や ϵ を不変テンソルと呼ぶ。

(iv) 以上により、外積 $\vec{A}\times\vec{B}$ はベクトルであり、また、慣性テンソルは2階のテンソルになっていることを示せ。

(v) 以下のベクトル解析の公式を ϵ テンソルを用いて導け。

(a) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$

(b) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \Delta\vec{V}$

ただし、$\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial r_i}$ であり、ϕ はスカラー（0階のテンソル）、$\vec{V}$ はベクトル、また、公式

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{cde} = \delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd} \tag{1.2}$$

を使ってもよい。

問題 3-2 ：剛体振り子

原点を中心として xz 平面内を回転できるように固定された質量 M の剛体振り子を考える。ただし、この剛体振り子の重心は原点からの距離が ℓ であるように固定されているとする。この剛体振り子には、鉛直軸（z 軸）方向に一様重力が働いているとし、重力加速度を g とする。また、原点から剛体の重心に向かうベクトルが鉛直方向下向きとなす角を Θ とする。この剛体振り子の、回転軸回りの慣性モーメントを I として、以下の問に答えよ

(i) この剛体振り子のポテンシャルエネルギーを求めよ。

(ii) Θ を正準座標とするラグランジアンを求めよ。

(iii) 問 (ii) で求めたラグランジアンから運動方程式を求めよ。

(iv) この剛体振り子が、質量の無視できる剛体棒に、質量 M で半径 a の一様な剛体円板が固定されてできているとする。円板面が回転軸と垂直になっている場合の、回転軸回りの慣性モーメント I を求めよ。

(v) 問 (iv) で求めた慣性モーメントを用いて、微小振動の場合の振動周期を求めよ。

問題 3-3 ：直交行列による変換は、ある軸周りの回転になっている

任意の自明でない 3×3 特殊直交行列による変換には、ある回転軸回りの回転であることを次の問いに答えることで示そう。

(i) 証明の前に、Z 軸周りの θ 回転の行列 $O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える。O の固有値を求めよ。

(ii) それぞれの固有ベクトルはどうなるか。

(iii) ここから証明に移る。特殊直交行列 O の固有値の一つは 1 であることを示せ。（ヒント：$(O-1)O^T = 1 - O^T$ を示し、両辺の行列式を計算せよ。また、$n\times n$ 行列を A とすると、$\det(-A) = (-)^n \det(A)$ であることを用いるとよい。）

(iv) O の 3 つの固有値を λ_i、 $(i = 1, 2, 3)$ とすると、$\det O = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ である。$\lambda_3 = 1$ としたとき、残りの λ_1、λ_2 の大きさは 1 であることを示せ。（ヒント：固有値方程式 $\det(O - \lambda\times 1) = 0$ は、O の成分が実数のため、λ_1 が複素数の時、$\lambda_2 = \lambda_1^*$ である。）

以上により、固有値は次の 3 つの場合に分けられる。A:すべての固有値が 1，B：２つの固有値がー 1 で残りが 1，C，一つの固有値が 1 で他の二つは、$e^{i\phi}$ と $e^{-i\phi}$ である。A は、恒等変換、つまり、自明な変換である。B は、一つの座標軸まわりの π 回転である。

(v) C は、固有値 1 の固有ベクトルが回転軸になると考えられる。その周りに ϕ 回転することを示せ。（ヒント：回転軸を z 軸とするような座標変換（回転）が存在する。その変換は O に対しては相似変換（変換行列を A とすると、$O \to O' = AOA^T$ という変換）になっている。その時、$O' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。相似変換で行列のトレースは変わらないことを使って ϕ と θ の関係を導け。）

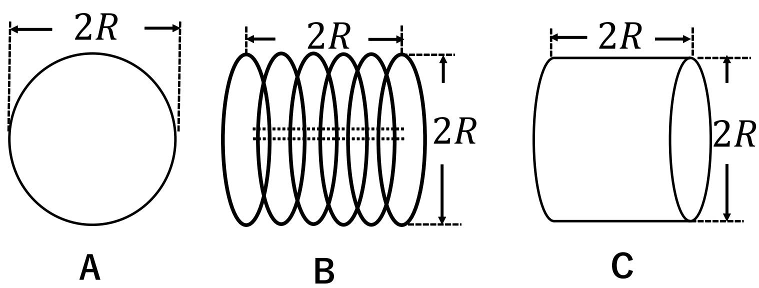
問題 3-4 ：剛体の運動

面積密度 σ の薄い板を使い、次の 3 つの物体を作り、転がる様子を議論する。

A:半径 R の球殻

B:半径 R の円盤 6 枚のそれぞれの中心に垂直に長さ $2R$ の軽い車軸を通したもの。

C:半径 R、長さ $2R$ の円筒。底と蓋、中身はない。



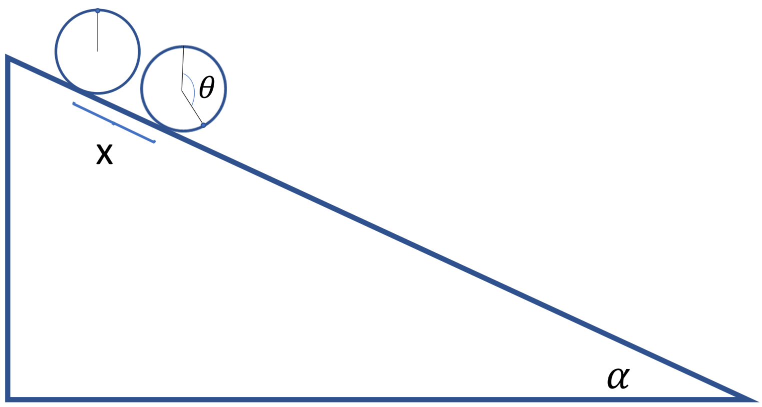
以下の問いに答えよ。

(i) 3 つの物体のそれぞれの質量 M_A、M_B、M_C を計算せよ。

(ii) 3 つの物体の軸対称軸周りの慣性モーメント I_A、I_B、I_C を計算せよ。

(iii) 質量 M、慣性モーメント I の物体が転がる際の運動エネルギーは、重心の運動エネルギーと回転運動のエネルギーの和で与えられる。重心の運動エネルギーを重心の座標 x を用いて書け。また、回転運動エネルギーを回転角 θ を用いて書け。また、全運動エネルギーを回転角 θ を用いて書け。ただし、x と θ の関係は下図のようであり、$dx/dt = Rd\theta/dt$ となるとする。

(iv) これらの物体が下図のような坂を転がる運動を考える。 はじめ静止していた位置から同時に転がり始めたとき、ある一定の距離に到達する順番を書け。また、その理由を述べよ。（式を用いてもよい。）



(v) 平坦かつ滑らかな地面に静止している3つの物体それぞれに同じ一定の力を加えて転がした。同じ距離を進んだ時、早い順から並べよ。（ゴールに到達するまで一定の力を加え続けるとする。）その理由を述べよ。（式を用いてもよい。）

問題 3-5 ：剛体の自由回転

一様な円錐形の剛体があり、剛体の重心が原点に固定されている。剛体は原点回りに自由に回転できるとする。また、剛体には外力が働いていないとする。以下、外力がなくても歳差運動することを見る。

以下では、剛体の対称軸を慣性主軸の3方向にとり、主慣性モーメントを $I_1 = I_2 = I$、I_3 とする。慣性主軸を座標軸とする座標系で、剛体の角速度を $\vec{\omega} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3$ とする。ただしここで、$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は、慣性主軸方向の単位ベクトルである。

(i) $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ に対するオイラーの運動方程式を書き下せ。

(ii) ω_3 が定数になることを示せ。

(iii) 前問の定数を ω_0 $(\omega_3 = \omega_0)$ としたとき、ω_1 および ω_2 の一般解を求めよ。

(iv) 角運動量ベクトル $\vec{L}$ を求めよ。

(v) 外力がないため、角運動量は保存するがそのことを上記の結果を使って具体的に確かめよ。

力学特論 演習問題 No. 4 (2025年11月13日実施)

レポートは問題 4-4 です。問題は 4-1 から 4-4 まであります。

問題 4-1 ：剛体の自由回転 2

問題 3-4 での運動では角運動量が保存するので、角運動量の向きを慣性系の z 軸にとることにする。角運動量の大きさを ℓ とすると角運動量ベクトルは、$\vec{L} = \ell \vec{e}_z$ と表される。

(i) オイラー角を用いると角運動量ベクトルは、

$$\vec{e}_z = \sin\theta \sin\psi \vec{e}_1 + \sin\theta \cos\psi \vec{e}_2 + \cos\theta \vec{e}_3$$

となることを示せ。つまり、

$$\vec{L} = \ell \vec{e}_z = \ell \sin\theta \sin\psi \vec{e}_1 + \ell \sin\theta \cos\psi \vec{e}_2 + \ell \cos\theta \vec{e}_3$$

となる。

(ii) また、角速度ベクトルは、オイラー角を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi \ , \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta} \sin\psi \ , \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

オイラー角の時間依存性を決定せよ。なお、初期条件は適当にとること。

(ヒント：主慣性モーメントと慣性主軸の定義から、角運動量 $\vec{L} = \ell \vec{e}_z$ は、$\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$ とも表される。)

問題 4-2 ：対称コマ

頂点が原点に固定された一様な円錐形の剛体があり、z 軸の負方向に一様な重力が働いている場合を考える。原点から剛体の重心までの距離を ℓ, 剛体の原点回りの主慣性モーメントを $I_1 = I_2 = I$, 及び I_3 とする。

(i) オイラー角を用いてラグランジアンを表せ。

(ii) ϕ と ψ に正準共役な運動量 p_ϕ と p_ψ を求めよ。

(iii) p_ϕ と p_ψ が保存することを示せ。

以下では、$p_\psi = I_3\omega_0$ と表すことにする。

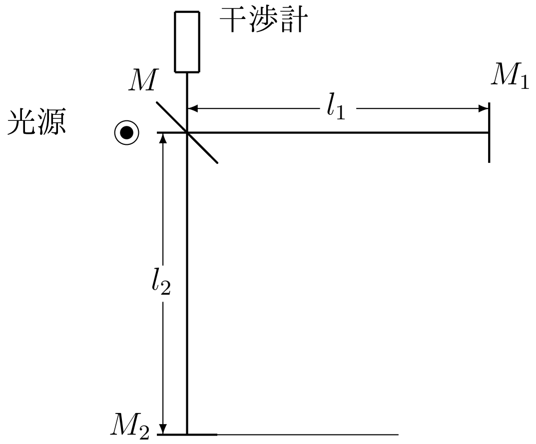
(iv) エネルギーを求めよ。

(v) 物体が章動せずに、θ が一定の歳差運動をしている場合に、ω_0 の満たす条件を求めよ。

(vi) 前問の場合の歳差運動の角速度を求めよ。ただし、$\theta = 0, \pi$ の運動は考えないとする。

問題 4-3 ：マイケルソンとモーレーの実験

マイケルソンとモーレーの実験装置は大体次のようなものである：



光源から出た光は半透明のマジックミラー M により、一部が反射されて、鏡 M_2 に行き、反射され、更に一部が M を通り抜けて、干渉計に入る。光源から出て M を通った光は鏡 M_1 で反射され、更に M で再び反射された光が干渉計に入る。二つの経路を通った光は互いに干渉し、光路差に応じた干渉縞を作る。

ガリレイ変換が成り立つとし、光を伝える媒質としてエーテルを仮定する。そして、エーテルの静止系での光速を c とする。以下の問に答えよ。

(a) もし装置が、エーテルの静止系に対して M_1 の方向に速さ v で運動していたとする。光が M と M_1 の間を往復するのに必要な時間 T_1 及び光路の長さ $L_1 = cT_1$ を求めよ。

(b) 装置が M_1 の方向に速さ v で運動している場合、M と M_2 の間を往復するのに必要な時間 T_2 及び光路の長さ L_2 を求めよ。

(c) 光路差 $\Delta = L_1 - L_2$ を求めよ。

(d) また、装置を M を中心に時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させた時の光路差 Δ' を求めよ。

(e) $\beta \equiv v/c \ll 1$ として、二つの光路差の差 $\delta = \Delta' - \Delta$ を求めよ。

(f) v が地球の公転の速さ（$\sim 3 \times 10$ km/s）で与えられ、$l_1 = l_2 = 10$ m で、光源としてナトリウムの D 線 (波長 6×10^{-5} cm) を使ったとき、光路差の差 δ は何波長分に当たるか？ただし、$c = 3 \times 10^5$ km/s とせよ。

問題 4-4 ： [レポート] ローレンツ変換

慣性系 (t,x,y,z) (O 系) に対し、別の慣性系 (t',x',y',z') (O' 系) が x-軸の正方向に速さ V で動いている。以下では光速を c とし、$\beta = V/c$ とする。また、O 系の $t=0$ が、O' 系の $t'=0$ で、二つの慣性系の原点が一致していたとする。

(a) (t,x,y,z) と (t',x',y',z') の関係を記せ。

(b) この変換の下で次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'}\ , \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\frac{\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}\ , \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

(c) 前問の結果を使い $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\vec{\nabla}^2$ がこの変換の下で不変になることを示せ。

(d) 2 時空間点 (t_1,x_1,y_1,z_1) と (t_2,x_2,y_2,z_2) の間の距離の二乗を

$$s^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2$$

で定義したときこれが問 (a) で求めた変換で不変になっていることを示せ。

力学特論演習問題 No. 5 (2025年12月4日実施)

問題は5-1から5-4まであります。

問題 5-1 ：ローレンツ変換による長さと時間の変化

(i) ある慣性系にいる観測者からみて、長さ 1.0×10 m の棒が、棒と平行な方向に、速さ 3.0×10 km/s で運動している。観測者が見たとき、棒の長さはどれだけ短くなっているか。但し光速を 3.0×10^5 km/s とする。

(ii) 地球に対して速さ V で飛ぶロケットがある。ここで V は $\left(\frac{V}{c}\right)^2 = 0.99$ で与えられたとする。ロケットが地球を通過してから地球上で1時間経過したとき、このロケット内ではどれだけの時間が経過しているか答えよ。

(iii) 宇宙線が大気の原子と衝突してミュー粒子が発生する場合を考える。ミュー粒子は電子とニュートリノに自然に崩壊するが、その半減期は静止している場合に 1.5×10^{-6} [sec] である。地表から約 2.0×10 [km] で発生したミュー粒子が地表に到達するまでに1/4に減少した。このミュー粒子の速さを V、光速を c、$\beta = V/c$ とした場合、$1 - \beta$ 求めよ。ただし答えの有効数字は1桁でよい。

(iv) 慣性系 O 系において、x 軸上で 9.0×10^3[km] 離れた地点で、時刻 $t = 0$ で同時にライトが点灯した。これを、O 系に対して x 軸の正方向に光速の80%の速さで運動する O' 系で観測する。二つのライトはO系で静止しているものとして、以下の問に答えよ。

(a) O' 系では、２つのライトが異なる時間に点灯するように見える。この時間差を求めよ。ただし、光速は、3.0×10^5 [km/s] とする。

(b) O' 系で、各ライトが点灯した瞬間でのライトの位置の間の距離求めよ。

問題 5-2 ：双子のパラドックス

慣性系Sに対して、x 方向に速度 v で動く宇宙船が原点にいる慣性系S' を考える。（$t = t' = 0$ の時にそれぞれの原点 O と O' が一致していたとする。）宇宙船は、ある地点Pまで進んだ時、外力を受け、瞬時に速度が $-v$ となって、再び、S系の原点 O に戻ってきたとする。次の問いに答えよ。光速を c として、$\beta \equiv v/c$ を用いてもよい。

(i) 宇宙船が地点Pに到達したときのS系での時間を t_1、S' 系での時間 t_2 とした時、t_2 を t_1 を用いて書け。

(ii) 一方、宇宙船から見て地点Pに到達した時の、S系の原点の時刻 t_3 を t_2 を用いて書け。（S系の原点とS' 系の原点は離れているため、同時の概念が異なる。そのため、$t_1 \neq t_3$ となる。）

(iii) 宇宙船の軌跡を時空図に書け。（慣性系Sの時空軸を直角に取ること。）

(iv) 点Pで速度が v から $-v$ に変わった瞬間に、宇宙船から見たS系の時間が $2(t_1 - t_3)$ 進んでいることを、時空図を用いて説明せよ。

(v) 再会したときに、宇宙船の中の時計と慣性系Sでの時計を比べるとどちらが遅れているか。

問題 5-3 ： 速度の変換

慣性系 (O_1 系) (t, x, y, z) に対し、別の慣性系 (O_2 系) (t', x', y', z') が x-軸の正方向に速さ V で動いている。

(i) O_1 系で質点が速度 $\vec{V}_{(1)} = \left(V_{(1)x}, V_{(1)y}, V_{(1)z}\right) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ で運動している場合を考える。O_2 系での速度 $\vec{V}_{(2)} = \left(V_{(2)x}, V_{(2)y}, V_{(2)z}\right) = (dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt')$ を求めよ。ただし c を光速とする。

(ii) 次の等式を示し、$V < c$ で $\left|\vec{V}_{(1)}\right| < c$ ならば $\left|\vec{V}_{(2)}\right| < c$ となることを示せ。

$$c^2 - \left|\vec{V}_{(2)}\right|^2 = \frac{\left(c^2 - \left|\vec{V}_{(1)}\right|^2\right)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V_{(1)x}V}{c^2}\right)^2}$$

(iii) $V \to c$ のとき $\vec{V}_{(2)} \to (-c\,, 0\,, 0)$ となることを示せ。

(iv) $\vec{V}_{(1)} \to (c\,,\,0\,,\,0)$ のとき $\vec{V}_{(2)} \to (c\,, 0\,, 0)$ となることを示せ。

問題 5-4 ：速度の変換 2

O 系に対して一定の速さ V で x 軸の正方向に運動している O' 系がある。O 系にいる観測者が、x 軸に対して角度 θ の方向から来る光を観測した。同じ光を O' 系にいる観測者は、x' 軸に対して角度 θ' の方向から来るものとして観測した。以下の問に答えよ。

(i) θ' と θ の関係を求めよ。

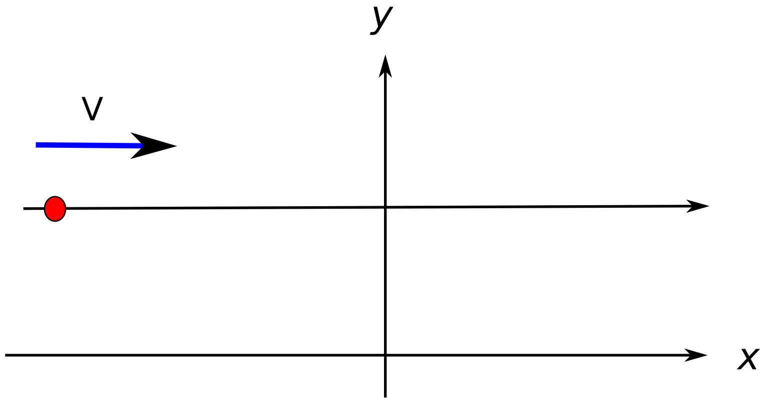
(ii) $\theta = \pi/2$ の場合を考える。$\theta' = \pi/2 + \Delta\theta$ として、$\sin\Delta\theta$ を求めよ。

力学特論演習問題 No. 6 (2025年12月18日実施)

レポートは問題 **6-1** です。

問題 6-1 ： 横ドップラー効果

慣性系 O 系の原点に観測者がいる。図のように、O 系の $y = y_0 > 0,\ z = 0$ の直線上を、x 軸正方向に一定の速さ V で移動する光源がある。光源は一定の周波数 f_0 の光を出している。



光速を c として、以下の問に答えよ。

(i) 光源が O 系での座標で $(x, y) = (x, y_0)$ にあるときに発した光を、O 系の原点にいる観測者が観測する振動数 f を、y_0、f_0、V、c、及び、x を用いて表せ。（1個目の光の山がでた時空点を $(ct, x, y_0, 0)$ とし、2個目の山が出た時空点を $(ct_2, x_2, y_0, 0)$ として、考えよ。）

(ii) 光源が無限遠点から近づいてくるとき、すなわち $x \to -\infty$ のときの $\frac{f}{f_0}$ を求めよ。

(iii) 光源が無限遠点に遠ざかるとき、すなわち $x \to \infty$ のときの $\frac{f}{f_0}$ を求めよ。

(iv) y_0 が光源が出す光の波長に比べて十分に大きく、

$$y_0 \gg \gamma\beta \frac{c}{f_0}$$

が成り立つ場合、$\frac{f}{f_0}$ を、$x,\ y_0,\ V,\ c$ を用いて表せ。

問題 6-2 ：4 元ベクトル

行列 $\eta_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ を

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。また、$\eta^{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ を $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列とする。

(i) $\eta^{\mu\nu}$ を求めよ。

(ii) A_μ を、A^μ と $\eta_{\mu\nu}$ を用いてあらわせ。

(iii) 4 元ベクトル $A^\mu = (A^0, \vec{A}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ が与えられた時、A_μ の成分を A^0、A^1、A^2、A^3 を使って書き表せ。

(iv) 2 つの 4 元ベクトル $(A^\mu) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$、$(B^\mu) = (B^0, B^1, B^2, B^3)$ に対し、$A_\mu B^\mu$ を A^0、A^1、A^2、A^3、B^0、B^1、B^2、B^3 を使って書き表せ。

問題 6-3 不変テンソル

不変テンソルとは、ある変換に対して、テンソルとして変換するとしても元に戻るテンソルであり、変換しないと考えてもよい。回転変換では、クロネッカーの δ と完全反対称 3 階テンソル ϵ_{ijk} が不変テンソルだった。ローレンツ変換では、メトリックテンソル $\eta_{\mu\nu}$ と 4 階反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ が不変テンソルとなる。以下では、η が不変テンソルになることを示そう。つまり、反変ベクトル x^μ と共変ベクトル x_μ がそれぞれ

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \\ x_\mu &\rightarrow x'_\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu \end{aligned}$$

とローレンツ変換するとき、2 階のテンソル $\eta_{\mu\nu}$ は、

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta'_{\mu\nu} = L_\mu{}^\rho L_\nu{}^\sigma \eta_{\rho\sigma}$$

と変換するが、それが、$\eta_{\mu\nu}$ に等しくなることを示す。ただし、$L_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}L^\rho{}_\sigma$ である。行列 $L^\mu{}_\nu$ を単に L、行列 $\eta_{\mu\nu}$、$\eta^{\mu\nu}$ を η と書く（行列として $\eta_{\mu\nu}$ の逆行列 $\eta^{\mu\nu}$ は同じ行列、しかも対称行列、になる。）とすると、$L_\mu{}^\nu$ は、$\eta L \eta$ と書くことができる。また、行列 A と B とすると、$AB = 1$ が成立したとき、$BA = 1$ も成立することを用いてもよい。

(i) まず、ローレンツ変換を示す行列 L の逆行列が、$\eta L^T \eta$ と書けることを示せ。(時空距離不変から導出される式 $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta$ を用いてよい。)

(ii)

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき、$\eta L^T \eta$ を計算し、逆行列になることを確かめよ。つまり、$(\eta L^T \eta)L = L(\eta L^T \eta) = 1$ であることを確かめよ。

(iii) $L(\eta L^T \eta) = 1$ から、$L_\mu{}^\rho L_\nu{}^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}$ を示せ。（つまり、η は不変テンソルである。）

(iv) $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ が完全反対称の時、$A^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} \equiv L^{\bar{\mu}}{}_\mu L^{\bar{\nu}}{}_\nu L^{\bar{\rho}}{}_\rho L^{\bar{\sigma}}{}_\sigma \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ が完全反対称であることを示せ。（完全反対称とはすべての足の入れ替えに対して符号が反対になる性質である。）

問題 6-4 ： 固有時

慣性系にいる観測者から見て、質点が、

$$x = R\cos at \ , \quad y = R\sin at \ , \quad z = Vt$$

という運動をしている。ここで R, a, V は定数である。観測者から見て、時間 T 後に、質点に固定された時計が刻む時間を求めよ。ただし、光速を c とせよ。

問題 6-5 ： エネルギー運動量ベクトル

O_1 系で速度 $\vec{V}_{(1)} = \left(V_{(1)x}, V_{(1)y}, V_{(1)z}\right)$ で運動している質量 m の質点がある。相対論的エネルギー運動量ベクトルは

$$p^\mu_{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{mc}{\sqrt{1-\frac{V_{(1)}^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mV_{(1)x}}{\sqrt{1-\frac{V_{(1)}^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mV_{(1)y}}{\sqrt{1-\frac{V_{(1)}^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mV_{(1)z}}{\sqrt{1-\frac{V_{(1)}^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

と表される。一方、O_1 系に対して速度 $\vec{V} = (V, 0, 0)$ で運動する O_2 系では、

$$p^\mu_{(2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{mc}{\sqrt{1-\frac{V_{(2)}^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mV_{(2)x}}{\sqrt{1-\frac{V_{(2)}^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mV_{(2)y}}{\sqrt{1-\frac{V_{(2)}^2}{c^2}}} \\ \dfrac{mV_{(2)z}}{\sqrt{1-\frac{V_{(2)}^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

と表される。ただしここで、$V_{(1)}^2 = \left|\vec{V}_{(1)}\right|^2$, $V_{(2)}^2 = \left|\vec{V}_{(2)}\right|^2$ である。

(i) 問題 5-3 の結果を用いて、$p^\mu_{(1)}$ から $p^\mu_{(2)}$ へのローレンツ変換が、次の $L^\mu{}_\nu$ を用いて、$p^\mu_{(2)} = L^\mu{}_\nu \, p^\nu_{(1)}$ と表されることを示せ。

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad \beta = \frac{V}{c} \ , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(ii) 問題 6-2 の $\eta_{\mu\nu}$ を用いて、$p_{(1)\mu}$ と $p_{(2)\mu}$ を、$p_{(1)\mu} = \eta_{\mu\nu} p^\nu_{(1)}$, $p_{(2)\mu} = \eta_{\mu\nu} p^\nu_{(2)}$ と定義する。$p_{(1)\mu}$ から $p_{(2)\mu}$ へのローレンツ変換を、$p_{(2)\mu} = L_\mu{}^\nu p_{(1)\nu}$ と書くとき、$L_\mu{}^\nu$ を求めよ。

(iii) $p^\mu_{(1)} \, p_{(1)\mu} = p^\mu_{(2)} \, p_{(2)\mu} = m^2 c^2$ であることを示せ。