Cheatsheet WuS

Nicolas Wehrli

June 2023

1 Grundbegriffe

1.1 Wahrscheinlichkeitsraum

Axiome von Kolmogorov

Das Tuple $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist ein **Wahrscheinlichkeitsraum** mit

I. **Grundraum** Ω mit $\Omega \neq \emptyset$, wobei $\omega \in \Omega$ ein Elementarereignis ist.

II. **σ-Algebra** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ wobei gilt:
   1. $\Omega \in \mathcal{A}$
   2. $A \in \mathcal{A} \implies A^\complement \in \mathcal{A}$
   3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

III. **Wahrscheinlichkeitsmass** $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$, wobei gilt:
   1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
   2. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}, \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$
      $\implies \mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

De-Morgan

Sei $(A_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von beliebigen Mengen. Dann gilt

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^\complement = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^\complement$$

Daraus folgt

1. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies (A \cup B), (A \cap B) \in \mathcal{A}$

und für $A, B \in \mathcal{A}$

1. $\mathbb{P}(A^\complement) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Sei $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, dann gilt:

Union Bound

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Siebformel

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei $A, B \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}(B) > 0$, dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B**

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
Sei $(B_i)i \in I$ eine Partition von Ω. Dann gilt für jedes beliebige $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i:\ \mathbb{P}(B_i) > 0} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Satz von Bayes
Aus der Definition der bedingten W'keit folgt sofort die Bayessche Formel, welche den Zusammenhang zwischen $\mathbb{P}(A|B)$ und $\mathbb{P}(B|A)$ beschreibt:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Mit dem **Satz der totalen W'keit** können wir $\mathbb{P}(A)$ umschreiben und kommen auf folgende Form:
Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine **Partition** von Ω. Dann gilt für jedes beliebige $A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) > 0$

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j:\ \mathbb{P}(B_j) > 0} \mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}$$

Intuition Bayessche Statistik
In dieser Form würde man A als das **eingetretene Ereignis** und die B_i als die verschiedene **Hypothesen** verstehen.
In der Bayesschen Statistik versucht man die Hypothese zu finden, so dass $\mathbb{P}(B_i|A)$ **maximiert** wird.
(Wurde in der Vorlesung nicht weiter behandelt)

1.3 Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen

Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heissen **unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Wenn $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$ gilt:
A, B unabhängig $\iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

Wir können die Definition der Unabhängigkeit auf beliebige Mengen von Ereignissen erweitern.

Allgemeine Unabhängigkeit

Eine Kollektion von Ereignissen $(A_i; i \in I)$ heisst **(stochastisch) unabhängig**, wenn

$$J \subseteq I \text{endlich} \implies \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J}\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$