

# Cheatsheet WuS

Nicolas Wehrli

June 2023

## 1 Grundbegriffe

### 1.1 Wahrscheinlichkeitsraum

#### Axiome von Kolmogorov

Das Tuple  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ist ein **Wahrscheinlichkeitsraum** mit

I. **Grundraum**  $\Omega$  mit  $\Omega \neq \emptyset$ , wobei  $\omega \in \Omega$  ein Elementarereignis ist.

II.  **$\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  wobei gilt:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

III. **Wahrscheinlichkeitsmass**  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist eine Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$ , wobei gilt:

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}, \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies \mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

#### De-Morgan

Sei  $(A_i)_{i \geq 1}$  eine Folge von beliebigen Mengen. Dann gilt

$$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c$$

Daraus folgt

1.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
2.  $A, B \in \mathcal{A} \implies (A \cup B), (A \cap B) \in \mathcal{A}$

und für  $A, B \in \mathcal{A}$

1.  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2.  $A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
3.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Sei  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , dann gilt:

#### Union Bound

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

#### Siebformel

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

#### Atome

Sei  $\Omega$  nicht leer und diskret. Sei  $\mathcal{F}$  eine beliebige  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ . Eine nichtleere Menge  $A \in \mathcal{F}$  heisst **atomare** Menge von  $\mathcal{F}$  falls für alle  $B \in \mathcal{F}$  gilt:

$$B \subseteq A \implies B = \emptyset \vee B = A$$

(Intuitiv:  $A$  ist die kleinste nichtleere Menge bezüglich der Inklusion in  $\mathcal{F}$ )

Die Menge der atomaren Mengen von  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir mit  $\text{Atom}(\mathcal{F})$ . Jedes Element von  $\mathcal{F}$  lässt sich als abzählbare Vereinigung von Elementen aus  $\text{Atom}(\mathcal{F})$  schreiben.

## 1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

#### Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sei  $A, B \in \mathcal{A}$  und  $\mathbb{P}(B) > 0$ , dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$**

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

#### Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei  $(B_i)_{i \in I}$  eine Partition von  $\Omega$ . Dann gilt für jedes beliebige  $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i: \mathbb{P}(B_i) > 0} \mathbb{P}(A|B_i) \mathbb{P}(B_i)$$

#### Satz von Bayes

Aus der Definition der bedingten W'keit folgt sofort die Bayessche Formel, welche den Zusammenhang zwischen  $\mathbb{P}(A|B)$  und  $\mathbb{P}(B|A)$  beschreibt:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Mit dem **Satz der totalen W'keit** können wir  $\mathbb{P}(A)$  umschreiben und kommen auf folgende Form:

Sei  $(B_i)_{i \in I}$  eine **Partition** von  $\Omega$ . Dann gilt für jedes beliebige  $A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) > 0$

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j: \mathbb{P}(B_j) > 0} \mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}$$

#### Intuition Bayessche Statistik

In dieser Form würde man  $A$  als das **eingetretene Ereignis** und die  $B_i$  als die verschiedenen **Hypothesen** verstehen.

In der Bayesschen Statistik versucht man die Hypothese zu finden, so dass  $\mathbb{P}(B_i|A)$  **maximiert** wird.

(Wurde in der Vorlesung nicht weiter behandelt)

## 1.3 Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse  $A, B \in \mathcal{A}$  heissen **unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

- $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \implies A$  zu jedem Ereignis unabhängig
- $A$  zu sich selbst unabhängig  $\implies \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$
- $A, B$  unabhängig  $\implies A, B^c$  unabhängig

Wenn  $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$  gilt:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

Wir können die Definition der Unabhängigkeit auf beliebige Mengen von Ereignissen erweitern.

Eine Kollektion von Ereignissen  $(A_i; i \in I)$  heisst (**stochastisch**) **unabhängig**, wenn

$$J \subseteq I \text{ endlich} \implies \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$$

## 2 Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum.

#### Zufallsvariable

Eine (reellwertige) **Zufallsvariable** auf  $\Omega$  ist eine messbare Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \iff \forall B \subset \mathbb{R} \text{ closed. } X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Die Eigenschaft **messbar** ist bezüglich dem Wahrscheinlichkeitsmass  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  relevant. Dann ist  $\mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$  wohldefiniert.

Bei diskretem  $\Omega$ , können wir die rechte Seite vom '  $\iff$  ' durch  $\forall x \in \mathbb{R} : X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$  (1) ersetzen.

Für die Messbarkeit von  $X$  ist nur  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$  entscheidend und jede Teilmenge  $A \subseteq X(\Omega)$  ist abzählbar (da  $\Omega$  abzählbar). Somit kann  $X^{-1}(A)$  als abzählbare Vereinigung von  $\bigcup_{x \in A} X^{-1}(\{x\})$  geschrieben werden.

(1)  $\implies X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$  per Def.  $\sigma$ -Algebra

### 2.1 Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** ist die Abbildung  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definiert durch:

$$F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Die Funktion erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $F_X$  ist monoton wachsend
2.  $F_X$  ist rechtsstetig, i.e.  $\lim_{h \downarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b : \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

### Linksstetigkeit

Die Verteilungsfunktion ist nicht immer linksstetig. Sei  $F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a - h)$  für  $a \in \mathbb{R}$  beliebig. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-)$$

Intuitiv folgt daraus

- Wenn  $F_X$  in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  nicht stetig ist, dann ist die "Sprunghöhe"  $F_X(a) - F_X(a-)$  gleich der Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(X = a)$ .
- Falls  $F_X$  stetig in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$ , dann gilt  $\mathbb{P}(X = a) = 0$ .

Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Dann heissen  $X_1, \dots, X_n$  **unabhängig**, falls

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} :$$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

## 2.2 Diskrete Zufallsvariablen

Sei  $A \in \mathcal{F}$  ein Ereignis.

Wir sagen  $A$  tritt **fast sicher (f.s.)** ein, falls  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen:

$$X \leq Y \text{ f.s.} \iff \mathbb{P}(X \leq Y) = 1$$

Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **diskret**, falls eine endliche oder abzählbare Menge  $W \subset \mathbb{R}$  existiert, sodass

$$\mathbb{P}(X \in W) = 1$$

Falls  $\Omega$  endlich oder abzählbar ist, dann ist  $X$  immer diskret.

Die **Verteilungsfunktion** einer diskreten ZV  $X$ :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{y \in W} p(y) \cdot \mathbb{1}_{y \leq x}$$

Die **Gewichtsfunktion** einer diskreten ZV  $X$ :

$$\forall x \in X(\Omega) : p(x) = \mathbb{P}(X = x) \text{ wobei } \sum_{x \in X(\Omega)} p(x) = 1$$

## 2.3 Diskrete Verteilungen

**Bernoulli-Verteilung** ( $X \sim \text{Ber}(p)$ ):

$X(\Omega) = \{0, 1\}$  und die Gewichtsfunktion ist definiert durch

$$p(1) := \mathbb{P}(X = 1) = p \text{ und } p(0) := \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

**Binomialverteilung** ( $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ):

Wiederholung von  $n$  unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit gleichem Parameter  $p$ .

$$p(k) := \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

**Geometrische Verteilung** ( $X \sim \text{Geo}(p)$ ):

Warten auf den 1-ten Erfolg.

$$p(k) := \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

**Poisson-Verteilung** ( $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ):

Grenzwert der Binomialverteilung für grosse  $n$  und kleine  $p$ .

$$p(k) := \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \lambda > 0$$

- Für  $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(Y = k)$  wobei  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .
- Seien  $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$  und  $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$  unabhängig. Dann gilt  $(X_1 + X_2) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

## 2.4 Stetige Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heisst **stetig**, wenn ihre Verteilungsfunktion  $F_X$  wie folgt geschrieben werden kann

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine nicht-negative Funktion ist.  $f$  wird dann als **Dichte** von  $X$  benannt.

Wenn  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar ist, ist die Zufallsvariable  $X$  **absolut stetig**.

**Intuition:**  $f(x) dx$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X \in [x, x + dx]$ .

**Von  $F_X$  zu  $f$ :**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion  $F_X$  und  $F_X$  stückweise  $\mathcal{C}^1$ , d.h. es gibt  $x_0 = -\infty < \dots < x_{n-1} < x_n = +\infty$ , sodass  $F_X$  auf jedem Intervall  $(x_i, x_{i+1})$  Element von  $\mathcal{C}^1$  ist.

Dann ist  $X$  eine stetige Zufallsvariable und die Dichte  $f$  kann wie folgt konstruiert werden:

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1}) \quad f(x) = F'_X(x).$$

## Bedingte Dichte

Seien  $X, Y$  ZV auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit gemeinsamer Dichte  $f_{X,Y}(x, y)$  und Randdichte  $f_Y(y) \neq 0$ . Dann ist die bedingte Dichte von  $X$  bedingt durch  $Y$ :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

## 2.5 Stetige Verteilungen

**Gleichverteilung** ( $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ ):

Die Dichte ist auf dem Intervall  $[a, b]$  gleich.

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \end{cases}$$

**Exponentialverteilung** ( $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ ):

Lebensdauer oder Wartezeit eines allg. Ereignisses (Stetiges Äquivalent zur Geometrischen Verteilung).

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

**Normalverteilung** ( $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ):

Häufig verwendete Verteilung. undefiniert für  $\sigma = 0$ .

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

- Seien  $X_1, \dots, X_n$  **unabhängige** normalverteilte ZV mit Parametern  $(m_1, \sigma_1^2), \dots, (m_n, \sigma_n^2)$ , dann ist

$$Z = m_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$$

eine normalverteilte ZV mit Parametern  $m = m_0 + \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_n m_n$  und  $\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_n^2$ .

- Sei  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  eine **standardnormalverteilte** Zufallsvariable. Dann gilt für  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$X = m + \sigma \cdot Z$$

## 3 Erwartungswert

### Erwartungswert - Diskrete ZV

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine diskrete Zufallsvariable,  $W_X := X(\Omega)$  und  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Falls die Summe wohldefiniert ist, gilt:

$$\mathbb{E}(\phi(X)) := \sum_{x \in W_X} \phi(x) \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Wenn  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ , kann man auch den Erwartungswert als

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

schreiben.

### Erwartungswert - Stetige ZV

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Zufallsvariable mit Dichte  $f$ . Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, sodass  $\phi(X)$  eine Zufallsvariable ist. Dann gilt

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx,$$

solange das Integral wohldefiniert ist.

Sei  $X$  eine stetige ZV mit  $X \geq 0$  f.s., dann gilt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx$$

### 3.1 Rechnen mit Erwartungswerten

#### Linearität des Erwartungswertes:

Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ZV mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ , Falls die Erwartungswerte wohldefiniert sind, gilt:

$$\mathbb{E}(\lambda \cdot X + Y) = \lambda \cdot \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Falls  $X, Y$  **unabhängig**, dann gilt auch:

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

Eine generellere Form wäre folgende Äquivalenz:

$X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig

$\iff$

Für jede  $\phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, beschränkt gilt

$$\mathbb{E}(\phi_1(X_1) \cdots \phi_n(X_n)) = \mathbb{E}(\phi_1(X_1)) \cdots \mathbb{E}(\phi_n(X_n))$$

### 3.2 Ungleichungen

#### Monotonie

Seien  $X, Y$  ZV mit  $X \leq Y$  f.s., dann gilt:

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$$

#### Markov Ungleichung

Sei  $X$  eine ZV und ferner  $g : X(\Omega) \rightarrow [0, +\infty)$  eine wachsende Funktion. Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  mit  $g(c) > 0$  gilt dann

$$\mathbb{P}(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{g(c)}$$

*Einfache Version:*

Sei  $X$  eine ZV mit  $X \geq 0$  f.s., dann gilt für jedes  $t > 0$ :

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

#### Chebyshev Ungleichung

Sei  $Y$  eine ZV mit endlicher Varianz. Für jedes  $b > 0$  gilt dann

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq b) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{b^2}$$

#### Jensen Ungleichung

Sei  $X$  eine ZV und  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion, dann gilt:

$$\phi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\phi(X))$$

### 3.3 Varianz

#### Varianz

Sei  $X$  eine ZV, sodass  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ . Die **Varianz** von  $X$  ist definiert durch

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}((X - m)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

wobei  $m = \mathbb{E}(X)$ . Dabei wird  $\sigma_X$  als **Standardabweichung** von  $X$  bezeichnet und beschreibt den Erwartungswert für die Distanz von  $X$  zu  $\mathbb{E}(X)$ .

1. Sei  $X$  ein ZV, sodass  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\text{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

2. Seien  $X_1, \dots, X_n$  paarweise unabhängig. Dann gilt

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

#### Kovarianz

Seien  $X, Y$  ZV mit  $\mathbb{E}(X^2) < \infty, \mathbb{E}(Y^2) < \infty$ . Wir definieren die **Kovarianz** zwischen  $X$  und  $Y$  durch

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

1.  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
2.  $X, Y$  unabhängig  $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$  (Die Umkehrung ist falsch!)
3.  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$

- Momenterzeugende Funktion:  $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ .
- Die  $k$ -te Ableitung ist das  $k$ -te Moment von  $X$ :  $m_k := \mathbb{E}(X^k)$ .
- Das  $k$ -te zentrale Moment von  $X$ :  $\mu_k := \mathbb{E}((X - \mu)^k)$ .
- Für  $X$  stetig gilt deshalb  $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$ .
- Das  $k$ -te empirische Moment der Realisierung  $(x_{1\dots n})$ :  $\hat{m}_k(x_{1\dots n}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$ .

### 3.4 Bedingter Erwartungswert

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable.

Für ein beliebiges  $B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(B) > 0$  definieren wir den **bedingten Erwartungswert**  $X$  bedingt durch  $B$  als

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | B) &= \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_B X)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x | B) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\} | B) \end{aligned}$$

#### Bedingter Erwartungswert als Zufallsvariable

Wir betrachten eine Partition  $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$  von  $\Omega$  ( $B_i$  sind disjunkt und nichtleer,  $I$  abzählbar).

Dann definieren wir die **Zufallsvariable**

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{B})(\omega) = \sum_{i \in I, \mathbb{P}(B_i) > 0} \mathbb{E}(X | B_i) \mathbb{1}_{B_i}(\omega)$$

1. **Intuition:** Die Information, die durch die Partition gegeben ist, ist dass eines der  $B_i$  eintreten wird. Bei der Realisierung durch das Eintreten des Elementarereignisses  $\omega$  wird  $\mathbb{E}(X | B)$  zu dem  $\mathbb{E}(X | B_i)$  realisiert, bei welchem  $\omega \in B_i$ .
2. **Bemerkung:** Das  $\mathcal{B}$  hat in der Vorlesung 2 verschiedene Bedeutungen. Es wird als Variable für sowohl die Borelsche  $\sigma$ -Algebra als auch die Partition von  $\Omega$  verwendet.

## 4 Mehrere Zufallsvariablen

Die **gemeinsame Verteilungsfunktion** von  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  (stetig oder diskret) ist die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ ,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto F(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

### 4.1 Diskreter Fall - Gewichtsfunktion

Für  $n$  diskrete ZV  $X_1, \dots, X_n$  definieren wir ihre **gemeinsame Gewichtsfunktion**  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  durch

$$p(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

Aus der gemeinsamen Gewichtsfunktion  $p$  bekommt man die gemeinsame Verteilungsfunktion mit

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \sum_{y_1 \leq x_1, \dots, y_n \leq x_n} \mathbb{P}(X_1 = y_1, \dots, X_n = y_n) \\ &= \sum_{y_1 \leq x_1, \dots, y_n \leq x_n} p(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Seien  $X_1, \dots, X_n$  **diskrete** Zufallsvariablen in  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sodass  $X_1 \in W_1, \dots, X_n \in W_n$  f.s. für  $W_1, \dots, W_n \subset \mathbb{R}$  endlich oder abzählbar.

Für  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig, ist  $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$  eine diskrete Zufallsvariable mit  $Z \in W = \phi(W_1 \times \dots \times W_n)$  f.s. .

Die Gewichtsfunktion von  $Z$  ist gegeben durch  $p_Z : W \rightarrow [0, 1]$ :

$$p_Z(t) := \mathbb{P}(Z = t) = \sum_{\substack{x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n \\ \phi(x_1, \dots, x_n) = t}} p(x_1, \dots, x_n)$$

1. Mit dem vorherigen Satz können wir aus der gemeinsamen Verteilung die **Randverteilung** einer Zufallsvariablen extrahieren (wegsummieren). Wir verwenden dafür einfach die Funktion

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

2. Der Erwartungswert des Bildes der Funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\mathbb{E}(\phi(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{x_1, \dots, x_n} \phi(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)$$

3. Wir haben eine Äquivalenz:

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig}$$

$$\iff$$

$$\forall x_1 \in W_1, \dots, x_n \in W_n$$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

## 4.2 Stetiger Fall - Gemeinsame Dichte

### Gemeinsame Dichte

Falls die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sich schreiben lässt als

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1$$

für eine Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , so heisst  $f(x_1, \dots, x_n)$  die **gemeinsame Dichte** von  $X_1, \dots, X_n$ .

1.  $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ , und  $= 0$  ausserhalb von  $\mathcal{W}(X_1, \dots, X_n)$ .
- 2.

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A) = \int \cdots \int_{(x_1, \dots, x_n) \in A} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

für  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  beliebig.

3. Haben  $X, Y$  die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F_{X,Y}$ , so ist  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq \infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y)$$

die Verteilungsfunktion der *Randverteilung* von  $X$ . Analoges gilt für  $F_Y$ .

4. Falls  $X, Y$  eine gemeinsame Dichte  $f(x, y)$  haben, so haben auch die Randverteilungen von  $X$  und  $Y$  Dichten  $f_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  und  $F_Y: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Die **Dichtefunktion** einer Randverteilung (Randdichte) entsteht aus der gemeinsamen Dichtefunktion durch "Wegintegrieren" der anderen Variable(n).

Wenn  $X_1, \dots, X_n$  stetige ZV mit Dichten  $f_1, \dots, f_n$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $X_1, \dots, X_n$  unabhängig
- $(X_1, \dots, X_n)$  ist stetig mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$$

- Für alle  $\phi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \phi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die stückweise stetig und beschränkt sind, gilt

$$\mathbb{E}(\phi_1(X_1) \cdot \dots \cdot \phi_n(X_n)) = \mathbb{E}(\phi_1(X_1)) \cdot \dots \cdot \mathbb{E}(\phi_n(X_n))$$

## 4.3 Transformation von Zufallsvariablen

### linearer Transformationssatz

Sei  $Z$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor und  $g: (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$  eine messbare Abbildung. Dann ist

$$H(\omega) = g(Z(\omega))$$

ein  $m$ -dimensionaler Zufallsvariable und ferner gilt

$$\mathbb{P}(H \in A) = \mathbb{P}(Z \in g^{-1}(A)).$$

Wenn  $g$  linear und umkehrbar (i.e.  $g(x) = m + Bx$  mit  $\det(B) \neq 0$ ) und unter Voraussetzung, dass die Verteilung von  $Z$  absolut stetig ist, dann ist  $H$  auch absolut stetig und es gilt:

$$f_H(x) = \frac{1}{|\det(B)|} f_Z(B^{-1}(x - m)).$$

### Beispielrechnung

$Z = (X, Y)$  2-dim Zufallsvektor. Wir wollen die Dichte von  $X + Y$  berechnen.

Man wäre versucht die Matrix  $B$  und den Vektor  $m$  wie folgt zu definieren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad m = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g((X, Y)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = X + Y$$

Dann wäre aber  $B$  (und somit  $g$ ) nicht invertierbar! Deshalb wollen wir  $B$  so wählen, dass  $g((X, Y)) = (X, X + Y)$ :

$$\begin{pmatrix} X \\ X + Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 1 \neq 0 \Rightarrow B \text{ invertierbar}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem linearen Transformationssatz gilt

$$f_{X, X+Y}(x, z) = \frac{1}{|\det(B)|} f_{X,Y} \left( B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$= 1 \cdot f_{X,Y} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$= f_{X,Y}(x, z - x)$$

Aus der gemeinsamen Dichte  $f_{X, X+Y}$  können wir die Dichte  $f_{X+Y}$  bestimmen.

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X, X+Y}(x, z) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x) dx$$

Falls  $X$  und  $Y$  unabhängig

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) dx$$

4

### 4.3.1 Charakterisierung der Dichte durch $\mathbb{E}$

Sei  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $X_1, \dots, X_n$  ZV mit gemeinsamer Dichte  $f$ . Dann lässt sich  $\mathbb{E}(Z)$  für die Zufallsvariable  $Z = \phi(X_1, \dots, X_n)$  mit

$$\mathbb{E}(Z) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x_1, \dots, x_n) \cdot f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

berechnen.

Dies reicht aber nicht, um die Dichte einer transformierten ZV zu berechnen. Mehrere Zufallsvariablen mit unterschiedlichen Dichten können den gleichen Erwartungswert haben.

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Abbildung, sodass  $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- $Z$  ist stetig mit Dichte  $f$
- Für jede stückweise stetige, beschränkte Abbildung  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}(\psi(Z)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) f(z) dz$$

### Beispielrechnung

Wir können diese Erkenntnis nutzen, um die Dichte einer transformierten Zufallsvariable zu berechnen.

Seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{für } x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Dichtefunktion  $f_V$  der Zufallsvariable  $V = XY$ .

Sei  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und beschränkt. Wir definieren  $\phi(x, y) = \psi(xy) = \psi(v)$  und berechnen

$$\mathbb{E}(\psi(V)) = \mathbb{E}(\phi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y) dx dy$$

$$= \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \psi(xy) \frac{1}{x^2 y^2} dx dy$$

Substitution  $v = xy, dv = y dx$

$$= \int_1^{\infty} \int_y^{\infty} \psi(v) \frac{1}{v^2} \frac{dv}{y} dy$$

$$A = \{(v, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y < \infty, y \leq v < \infty\}$$

$$= \{(v, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq v, 1 \leq v < \infty\}$$

Zeichnung hilft ;)

$$= \int_1^{\infty} \int_1^v \psi(v) \frac{1}{v^2 y} dy dv$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(v) \frac{\ln(v)}{v^2} dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v) \cdot \frac{\ln(v)}{v^2} \mathbb{1}_{v \in [1, \infty)} dv$$

$$\Rightarrow f_V(t) = \frac{\ln(v)}{v^2} \mathbb{1}_{v \in [1, \infty)}$$

### genereller Transformationssatz

Sei  $Z$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor mit Dichtefunktion  $f_Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung  $\phi^{-1}$ . Dann gilt für die Dichte  $f_U$  von  $U = \phi(Z)$ :

$$f_U(\vec{u}) = f_Z(\phi^{-1}(\vec{u})) \cdot |\det(J_{\phi^{-1}}(\vec{u}))|$$

**Beweisidee.** Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt

$$\int_A f_U(\vec{u}) d\vec{u} = \mathbb{P}(U \in A) = \mathbb{P}(Z \in \phi^{-1}(A)) = \int_{\phi^{-1}(A)} f_Z(\vec{z}) d\vec{z}$$

Aus der mehrdimensionalen Integralrechnung folgt dann

$$\int_{\phi^{-1}(A)} f_Z(\vec{z}) d\vec{z} = \int_A f_Z(\phi^{-1}(\vec{u})) \cdot |\det(J_{\phi^{-1}}(\vec{u}))| d\vec{u}$$

■

### Beispielrechnung

Wir haben  $Z = (X, Y)$ , wobei  $X, Y$  unabhängig und exponentialverteilt mit  $\lambda > 0$ . Berechne die Dichtefunktion  $f_U$  von

$$U := \frac{X}{X+Y}$$

Wir definieren  $\phi$ , so dass  $(U, Y) = \phi(X, Y)$ .

$$\phi(x, y) = \left( \frac{x}{x+y}, y \right) \text{ und } \phi^{-1}(u, y) = \left( \frac{uy}{1-u}, y \right)$$

Check:  $\phi^{-1}\left(\frac{x}{x+y}, y\right) = \left(\frac{\frac{x}{x+y}y}{1-\frac{x}{x+y}}, y\right) = \left(\frac{xy}{x+y-x}, y\right) = (x, y)$ .

We then have

$$\begin{aligned} \left| \det \left( J_{\phi^{-1}}(u, y) \right) \right| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{y}{1-u} + \frac{uy}{(1-u)^2} & 0 \\ \frac{u}{1-u} & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{y(1-u) + uy}{(1-u)^2} \right| = \left| \frac{y}{(1-u)^2} \right| \end{aligned}$$

Per genereller Transformationssatz gilt

$$\begin{aligned} f_{U,Y}(u, y) &= f_{X,Y} \left( \frac{uy}{1-u}, y \right) \left| \frac{y}{(1-u)^2} \right| \\ &= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda \left( \frac{uy}{1-u} + y \right)} \left| \frac{y}{(1-u)^2} \right| & \text{if } \frac{uy}{1-u} \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0 \cdot \left| \frac{y}{(1-u)^2} \right| & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,Y}(u, y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{(1-u)^2} e^{-\frac{\lambda}{1-u}y} y \mathbb{1}_{u \in [0,1]} dy \end{aligned}$$

per partielle Integration

$$= \mathbb{1}_{u \in [0,1]}$$

## 5 Konvergenz in Wahrscheinlichkeitsräumen

### Unabhängigkeit einer Folge und iid./uiv.

Eine Folge von ZV  $X_1, X_2, \dots$  ist unabhängig, wenn  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig ( $\forall n \in \mathbb{N}$ , nach der Definition in 2.1). Sie ist zudem **uiv./iid.**, falls  $F_{X_i} = F_{X_j}, \forall i, j \in \mathbb{N}$ .

In einem Wahrscheinlichkeitsraum können wir für eine Folge von Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$  und einer ZV  $Z$  zwischen 3 Arten von Konvergenz unterscheiden:

#### 1. schwache Konvergenz / Konvergenz in Verteilung

Wir definieren  $X_n \xrightarrow{d} Z$  ( $d$  for distribution) als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$$

für jede Stetigkeitsstelle  $x \in \mathbb{R}$  von  $F_Z$ .

#### 2. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

Wir definieren  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$  als

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - Z| > \varepsilon) = 0$$

#### 3. Fast-sichere Konvergenz

Wir definieren  $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Z$  als

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = Z(\omega)\}) = 1$$

Wir haben dann auch

$$X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Z \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z \implies X_n \xrightarrow{d} Z$$

Die Umkehrung der Implikationen gilt nicht, wie folgende Beispiele zeigen:

#### 1. $X_n \xrightarrow{d} Z \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$

Sei  $\Omega = \{0, 1\}$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}, \quad X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ 1 & \omega = 1 \end{cases}$$

und

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}, \quad Z(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 0 & \omega = 1 \end{cases}$$

Aus  $F_{X_n} = F_Z$  folgt direkt  $X_n \xrightarrow{d} Z$ .

Da aber  $|X_n(\omega) - Z(\omega)| = 1, \forall \omega \in \Omega$  und demzufolge  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - Z| > \epsilon) \not\rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , gilt

$$X_n \not\xrightarrow{\mathbb{P}} Z$$

#### 2. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} Z$

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $([0, 1], \mathcal{B}, \mathbb{P})$ . Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  sei  $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$  und  $j \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ , sodass  $n = 2^k + j$ .

Dann definieren wir

$$X_n(\omega) = \mathbb{1}_{\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]}(\omega).$$

und

$$Z(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega = [0, 1]$$

Zur Visualisierung würde die Folge so aussehen

$$X_1 = \mathbb{1}_{[0,1]}, X_2 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}]}, X_3 = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}, X_4 = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4}]} \text{ etc.}$$

Wir hätten dann

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - Z| > \varepsilon) = 0 \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$$

Aber für jedes  $\omega \in [0, 1]$  finden wir unendlich viele  $X_n$  mit  $X_n(\omega) = 1$  und deshalb

$$\mathbb{P}(\{\omega \in [0, 1] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = Z(\omega)\}) = 0 \implies X_n \not\xrightarrow{\text{f.s.}} Z$$

## 5.1 Gesetz der grossen Zahlen

### starkes Gesetz der grossen Zahlen

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von uiv. Zufallsvariablen. Sei  $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$  und  $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ . Für

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

gilt dann

$$\bar{X}_n \longrightarrow \mu \text{ f.s.}$$

Dies ist eine fast-sichere Konvergenz.

### schwaches Gesetz der grossen Zahlen

Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  und die gleiche Varianz  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$  haben. Sei

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dann konvergiert  $\bar{X}_n$  für  $n \rightarrow \infty$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0 \text{ i.e. } \bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

### Bemerkung:

Zur Erinnerung:

$$X_i, X_j \text{ unkorreliert} \iff \text{Cov}(X_i, X_j) = 0$$

Wir haben auch

$$X_i, X_j \text{ unabhängig} \implies X_i, X_j \text{ unkorreliert}$$



## 5.2 Zentraler Grenzwertsatz

### Zentraler Grenzwertsatz

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von iid. Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}(X_i) = \mu < \infty$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

also

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

### Bemerkungen:

Man verwendet auch oft die Form für  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$  als

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

beziehungsweise

$$S_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \text{ und } \bar{X}_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$$

### Beispielrechnung

Seien  $(X_i)_{i \geq 1}, (Y_i)_{i \geq 1}$  und  $(Z_i)_{i \geq 1}$  Folgen von iid. ZV mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

und analog für  $Y_1$  und  $Z_1$ . Wir definieren

$$S_n^{(x)} := \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_n^{(y)} := \sum_{i=1}^n Y_i, \quad S_n^{(z)} := \sum_{i=1}^n Z_i$$

Die Folge  $\left( (S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}) \right)_{n \geq 1}$  wird zufällige Irrfahrt in  $\mathbb{Z}^3$  genannt. Sei  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Zeige, dass

$$\mathbb{P} \left( \left\| (S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}) \right\|_2 \leq n^\alpha \right) \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei  $\|(x, y, z)\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  die euklidische Norm ist.

*Schritt 1:* Für alle  $\alpha > 1/2$  zeigen wir  $\mathbb{P}(|S_n^{(x)}| \leq n^\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Da  $\mathbb{E}(X_i) = 0$  und  $\text{Var}(X_i) = 1$  folgt für  $a \in \mathbb{R}$  beliebig per ZGS

$$\mathbb{P} \left( S_n^{(x)} \leq a\sqrt{n} \right) = \mathbb{P} \left( \frac{S_n^{(x)}}{\sqrt{n}} \leq a \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a)$$

und somit auch

$$\mathbb{P} \left( |S_n^{(x)}| \leq a\sqrt{n} \right) = \mathbb{P} \left( S_n^{(x)} \leq a\sqrt{n} \right) - \mathbb{P} \left( S_n^{(x)} \leq -a\sqrt{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1$$

Sei  $\alpha = 1/2 + \beta, \beta > 0$ . Dann instanzieren wir mit  $a = n^\beta$ .

$$\mathbb{P} \left( |S_n^{(x)}| \leq n^\alpha \right) = \mathbb{P} \left( |S_n^{(x)}| \leq n^{\beta} \sqrt{n} \right) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2\Phi(n^\beta) - 1) = 1$$

Dies gilt analog für  $S_n^{(y)}$  und  $S_n^{(z)}$ .

*Schritt 2:*  $\forall \alpha > 1/2, \mathbb{P} \left( \left\| (S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}) \right\|_2 \leq n^\alpha \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

Sei  $\alpha' \in (1/2, \alpha)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} & \left\{ |S_n^{(x)}| \leq n^{\alpha'} \wedge |S_n^{(y)}| \leq n^{\alpha'} \wedge |S_n^{(z)}| \leq n^{\alpha'} \right\} \\ & \subseteq \left\{ \left\| (S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}) \right\|_2 \leq \sqrt{3} \cdot n^{\alpha'} \right\} \end{aligned}$$

Da  $n^\alpha \geq \sqrt{3}n^{\alpha'}$  für grosse  $n$ , folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\| (S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}) \right\|_2 \leq n^\alpha \right) \\ & \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left\| (S_n^{(x)}, S_n^{(y)}, S_n^{(z)}) \right\|_2 \leq \sqrt{3} \cdot n^{\alpha'} \right) \\ & \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( |S_n^{(x)}| \leq n^{\alpha'}, |S_n^{(y)}| \leq n^{\alpha'}, |S_n^{(z)}| \leq n^{\alpha'} \right) = 1 \end{aligned}$$

## 6 Schätzer

Wir treffen folgende Annahmen:

- Parameterraum  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$
- Familie von Wahrscheinlichkeitsmassen  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ ; für jedes Element im Parameterraum existiert ein Modell / Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$ .
- Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$

Wir nennen die Gesamtheit der beobachteten Daten  $x_1, \dots, x_n$  (wobei  $x_i = X_i(\omega)$ ) und die ZV  $X_1, \dots, X_n$  Stichprobe.

Ein **Schätzer** ist eine Zufallsvariable  $T : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$  von der Form

$$T = t(X_1, \dots, X_n), \quad t : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

Ein Schätzer  $T$  ist **erwartungstreu**, falls für alle  $\theta \in \Theta$  gilt:

$$\mathbb{E}_\theta[T] = \theta$$

Sei  $\theta \in \Theta$  und  $T$  ein Schätzer. Der **Bias** (erwartete Schätzfehler) von  $T$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$  ist definiert als:

$$\mathbb{E}_\theta[T] - \theta$$

Der mittlere quadratische Schätzfehler (MSE) von  $T$  im Modell  $\mathbb{P}_\theta$  ist definiert als:

$$\begin{aligned} \text{MSE}_\theta[T] &= \mathbb{E}_\theta[(T - \theta)^2] \\ \text{MSE}_\theta[T] &= \text{Var}_\theta(T) + (\mathbb{E}_\theta[T] - \theta)^2 \end{aligned}$$

## 6.1 Maximum-Likelihood-Methode

### 6.1.1 Likelihood-Funktion, ML-Schätzer

Die Likelihood-Funktion ist definiert als

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} p(x_1, \dots, x_n; \theta) & (\text{diskret}) \\ f(x_1, \dots, x_n; \theta) & (\text{stetig}) \end{cases}$$

Für jedes  $x_1, \dots, x_n \in W$  sei  $t_{ML}(x_1, \dots, x_n)$  der Wert, welcher die Funktion  $\Theta \mapsto L(x_1, \dots, x_n; \theta)$  maximiert. Ein Maximum-Likelihood-Schätzer ist dann definiert als

$$T_{ML} = t_{ML}(X_1, \dots, X_n)$$

### 6.1.2 Anwendung der Methode

Die Maximum-Likelihood-Methode ist ein Weg, um systematisch einen Schätzer zu bestimmen.

1. Gemeinsame Dichte/Verteilung der ZV finden
2. Bestimme davon die Log-Likelihood-Funktion  $f(\theta) := \ln(L(x_1, \dots, x_n; \theta))$
3.  $f(\theta)$  nach  $\theta$  ableiten
4. Nullstelle von  $f'(\theta)$  finden
5.  $f''(\theta) < 0$  oder anderes Argument, dass wir das Maximum gefunden haben (evtl. Randstellen überprüfen!).

### Beispielrechnung mit Randstelle

Wir betrachten den Parameterraum  $\Theta = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  mit  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  und die Modellfamilie  $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ , wobei die ZV  $X_1, \dots, X_n$  iid. mit

$$f_{\theta_1, \theta_2}(x) = \begin{cases} \theta_2 e^{\theta_1 \theta_2 - \theta_2 x} & \text{falls } x \geq \theta_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme den ML-Schätzer für  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ :

Die Likelihood-Funktion ist

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2) &= \prod_{i=1}^n f_{\theta_1, \theta_2}(x_i) = \prod_{i=1}^n \theta_2 e^{\theta_1 \theta_2 - \theta_2 x_i} \mathbb{1}_{x_i \in [\theta_1, \infty)} \\ &= \theta_2^n \exp \left( n\theta_1 \theta_2 - \theta_2 \sum_{i=1}^n x_i \right) \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \in [\theta_1, \infty)} \\ &= \theta_2^n \exp \left( n\theta_1 \theta_2 - \theta_2 \sum_{i=1}^n x_i \right) \mathbb{1}_{\min(x_i) \geq \theta_1} \end{aligned}$$

Wenn wir davon jetzt die Log-Likelihood Funktion nehmen würden, und diese ableiten, kommen wir auf etwas undefiniertes. Das liegt daran, dass sobald  $\theta_1 > \min(x_i)$  gibt es einen Sprung zu 0.

Da  $\theta_2 > 0$  folgt

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2) > 0 \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \geq \theta_1$$

Um  $L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2)$  zu maximieren, schränken wir den Ursprungsraum mit  $\theta_1 \leq \min_{1 \leq i \leq n} (x_i)$  ein und bestimmen die Log-Likelihood Funktion als

$$f(\theta_1, \theta_2) = \log(L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2)) = n \log(\theta_2) + n\theta_1 \theta_2 - \theta_2 \sum_{i=1}^n x_i$$

Da  $\theta_2 > 0$  ist (unter der Einschränkung) die Log-Likelihood Funktion für  $\theta_1 = \min_{1 \leq i \leq n} (x_i)$  maximal (unabhängig von  $\theta_2$ ). Somit können wir  $\theta_1$  so fixieren und  $\log(L)$  separat nach  $\theta_2$  maximieren.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta \theta_2} &= \frac{n}{\theta_2} + n\theta_1 - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ n\theta_1 - \sum_{i=1}^n x_i &= -\frac{n}{\theta_2} \\ \theta_2 &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1} \end{aligned}$$

Überprüfen des kritischen Punktes:

$$\frac{\delta^2}{\delta^2 \theta_1^2} f\left(\theta_1, \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1}\right) = -\frac{n}{\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1\right)^2}$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_1\right)^2 < 0$$

Daraus erhalten wir die Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\theta_1$  und  $\theta_2$ :

$$T_1 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \text{ und } T_2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i - nT_1}$$

## 6.2 Momentenmethode /-schätzer:

1. Sei  $X_1, \dots, X_n$  iid. eine Stichprobe.
2. Sei  $\Theta$  ein  $m$ -dimensionaler Parameterraum.
3. Stelle für  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  ein Gleichungssystem auf, in dem das  $k$ -te empirische Moment dem  $k$ -ten Moment gleichgesetzt wird:  $\hat{m}_k(x_1, \dots, x_n) = g_k(\theta_1, \dots, \theta_m), k \in \{1, \dots, m\}$ .
4. Der Vektor  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_m)$  heisst Momentenschätzer des Parameters  $\theta$ .

## 7 Tests

Die **Nullhypothese**  $H_0$  und die **Alternativhypothese**  $H_A$  sind zwei Teilmengen  $\Theta_0 \subseteq \Theta, \Theta_A \subseteq \Theta$  wobei  $\Theta_0 \cap \Theta_A = \emptyset$ . Falls keine explizite Alternativhypothese spezifiziert ist, so hat man  $\Theta_A = \Theta \setminus \Theta_0$ . Eine Hypothese heisst *einfach*, falls die Teilmenge aus einem einzelnen Wert besteht; sonst *zusammengesetzt*.

### Definition Test

Ein Test ist ein Tupel  $(T, K)$ , wobei  $T$  eine ZV der Form  $T = t(X_1, \dots, X_n)$  und  $K \subseteq \mathbb{R}$  eine deterministische Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Wir nennen  $T$  die *Teststatistik* und  $K$  den *Verwerfungsbereich* oder kritischen Bereich.

Wir wollen nun anhand der Daten  $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  entscheiden, ob die Nullhypothese akzeptiert oder verworfen wird. Zuerst berechnen wir die Teststatistik  $T(\omega) = t(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$  und gehen dann wie folgt vor:

- Die Hypothese  $H_0$  wird *verworfen*, falls  $T(\omega) \in K$ .
- Die Hypothese  $H_0$  wird *akzeptiert*, falls  $T(\omega) \notin K$ .

Ein **Fehler 1. Art** ist, wenn  $H_0$  fälschlicherweise verworfen wird, obwohl sie richtig ist.

$$\mathbb{P}_\theta(T \in K), \quad \theta \in \Theta_0$$

Ein **Fehler 2. Art** ist, wenn  $H_0$  fälschlicherweise akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist.

$$\mathbb{P}_\theta(T \notin K) = 1 - \mathbb{P}_\theta(T \in K), \quad \theta \in \Theta_A$$

**Bemerkung:** Da  $T$  eine ZV und somit bezüglich dem Mass  $\mathbb{P}_\theta : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  messbar ist, gilt  $\{T \in K\} \in \mathcal{F}$  und somit ist  $\mathbb{P}_\theta(T \in K)$  wohldefiniert.

## 7.1 Signifikanzniveau und Macht

Ein Test hat Signifikanzniveau  $\alpha \in [0, 1]$  falls

$$\forall \theta \in \Theta_0 \quad \mathbb{P}_\theta(T \in K) \leq \alpha$$

Es ist meist unser primäres Ziel, die Fehler 1. Art zu minimieren. Das sekundäre Ziel ist, Fehler 2. Art zu vermeiden. Hierfür definieren wir die Macht eines Tests als Funktion:

$$\beta : \Theta_A \mapsto [0, 1], \quad \theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(T \in K)$$

Zu beachten ist, dass eine kleine Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art einem *grossen*  $\beta$  entspricht.

## 7.2 Konstruktion von Tests

Wir nehmen an, dass  $X_1, \dots, X_n$  diskret oder gemeinsam stetig unter  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  und  $\mathbb{P}_{\theta_A}$  sind, wobei  $\Theta_0 \cap \Theta_A = \emptyset$  einfach sind ( $\theta_0 \in \Theta_0 \wedge \theta_A \in \Theta_A$ ).

Der Likelihood-Quotient ist somit wohldefiniert:

$$R(x_1, \dots, x_n) = \frac{L(x_1, \dots, x_n; \theta_A)}{L(x_1, \dots, x_n; \theta_0)}$$

(Falls  $L(x_1, \dots, x_n; \theta_0) = 0$  setzen wir  $R(x_1, \dots, x_n) = +\infty$ .)

Für zusammengesetzte  $\Theta_0$  und  $\Theta_A$  können wir den verallg. Likelihood-Quotient definieren:

$$R(x_1, \dots, x_n) := \frac{\sup_{\theta \in \Theta_A} L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(x_1, \dots, x_n; \theta)}$$

Wenn  $R \gg 1$ , so gilt  $H_A > H_0$  und analog  $R \ll 1 \implies H_A < H_0$ .

Der **Likelihood-Quotient-Test (LQ-Test)** mit Parameter  $c \geq 0$  ist definiert durch:

$$T = R(X_1, \dots, X_n) \quad \text{und} \quad K = (c, \infty]$$

### Neyman-Pearson-Lemma

Der LQ-Test ist optimal, da jeder andere Test mit kleinerem (oder gleichem) Signifikanzniveau auch eine kleinere (oder gleiche) Macht hat.

## 7.3 Häufige Fälle

### Normalverteilt - $\mu$ unbekannt, $\sigma^2$ bekannt (z-Test)

Erwartungstreuer Schätzer:  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

Verteilung unter  $\mathbb{P}_\theta : \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

1. Modell  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$  iid. unter  $\mathbb{P}_\theta$
2. Hypothesen  $H_0 : \theta = \theta_0$  und  $H_A : \theta > \theta_0, H_A : \theta < \theta_0$  (einseitig) oder  $H_A : \theta \neq \theta_0$  (zweiseitig)
3. Test  $T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  unter  $\mathbb{P}_{\theta_0}$

4. Verwerfungsbereich  $K_> = (c_>, \infty), K_< = (-\infty, -c_<)$  oder  $K_\neq = (-\infty, -c_\neq) \cup (c_\neq, \infty)$
5. **Fall 1**  $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T \in K_>) = \mathbb{P}_{\theta_0}(T > c_>)$   
**Fall 2**  $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T \in K_<) = \mathbb{P}_{\theta_0}(T < -c_<) = 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}(T \leq c_<)$   
**Fall 3**  $\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T \in K_\neq) = \mathbb{P}_{\theta_0}(T < -c_\neq) + \mathbb{P}_{\theta_0}(T > c_\neq) = \mathbb{P}_{\theta_0}(T < -c_\neq) + 1 - \mathbb{P}_{\theta_0}(T \leq c_\neq)$

### Normalverteilt - $\mu, \sigma^2$ unbekannt (t-Test)

Wir definieren  $\vec{\theta} = (\mu, \sigma^2)$  und den Varianz-Schätzer  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ .

1. Modell  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$  iid. unter  $\mathbb{P}_{\vec{\theta}}$
2. Hypothesen:  $\Theta_0 = \{\mu_0\} \times (0, \infty)$ , für die Alternativhypothese gibt es wieder die drei Fälle mit  $\mu_A > \mu_0, \mu_A < \mu_0$  und  $\mu_A \neq \mu_0$ .
3. Teststatistik  $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$
4. Verwerfungsbereich:  $K_>, K_<$  oder  $K_\neq$
5. Für Signifikanzniveau  $\alpha$ , können wir die kritischen Werte als  $c_> = t_{n-1, 1-\alpha}, c_< = t_{n-1, 1-\alpha}$  und  $c_\neq = t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$  wählen. Hierbei bezeichnen wir mit  $t_{m, \gamma}$ , das  $\gamma$ -Quantil einer  $t_m$ -Verteilung (i.e. derjenige Wert  $z = t_{m, \gamma}$ , so dass für  $X \sim t_m$   $\mathbb{P}(X \leq z) = \gamma$  gilt).

### Gepaarter Zweistichprobentest: $\mu_X, \mu_Y$ , gleiche Varianz $\sigma^2$

Sei  $X_1, \dots, X_n$  iid.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  iid.  $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ , wobei  $X_i, Y_i$  unabhängig.

Dann ist für  $Z_i := X_i - Y_i$  die ZV  $Z_1, \dots, Z_n$  iid.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, 2\sigma^2)$ .

Für bekanntes  $\sigma$  können wir auf den  $Z_i$  dann den z-Test ausführen, wenn unbekannt dann der t-Test.

### Ungepaarter Zweistichprobentest: $\mu_X, \mu_Y$ , gleiche Varianz $\sigma^2$

Sei  $X_1, \dots, X_n$  iid.  $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_1, \dots, Y_m$  iid.  $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ , wobei  $m \neq n, X_1, \dots, X_n$  und  $Y_1, \dots, Y_m$  unabhängig.

1.  $\sigma^2$  **bekannt**. Dann haben wir folgende Teststatistik

$$T := \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ unter jedem } \mathbb{P}_\theta$$

Mit dem können wir dann den z-Test ausführen.

2.  $\sigma^2$  **unbekannt**. Empirische Varianzen der einzelnen beiden Datensätzen

$$S_X^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \text{ und } S_Y^2 := \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y}_m)^2$$

kombinieren wir zu einer empirischen Varianz

$$S^2 := \frac{1}{m+n-2} ((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)$$

Daraus die Teststatistik

$$T := \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (\mu_X - \mu_Y)}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2} \text{ unter jedem } \mathbb{P}_\theta$$

In diesem Fall machen wir damit ein t-Test.

## 7.4 p-Wert

Sei  $T = t(X_1, \dots, X_n)$  eine Teststatistik und  $(T, K_t)_{t \geq 0}$  eine Familie von Tests.

### Geordnete Teststatistik

Eine Familie von Tests heisst geordnet bzgl.  $T$  falls  $K_t \subset \mathbb{R}$  und  $s \leq t \implies K_t \subseteq K_s$ . Beispiele:

- $K_t = (t, \infty)$  (rechtsseitiger Test)
- $K_t = (-\infty, -t)$  (linksseitiger Test)
- $K_t = (-\infty, -t) \cup (t, \infty)$  (beidseitiger Test)

### Definition p-Wert

Sei  $H_0 : \theta = \theta_0$  eine einfache Nullhypothese. Sei  $(T, K_t)_{t \geq 0}$  eine geordnete Familie von Tests. Der  $p$ -Wert ist definiert als ZV  $G(\omega)$ , wobei

$$G : \Omega \mapsto [0, 1], \quad G(\omega) = \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K_{t(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))}]$$

**Intuitiv:** Wenn wir den Verwerfungsbereich mit dem realisierten Wert der Teststatistik bestimmen würden; was wäre das Signifikanzniveau (i.e. Fehler 1. Art)?

Der  $p$ -Wert hat folgende Eigenschaften:

1. Sei  $T$  stetig und  $K_t = (t, \infty)$ . Dann ist der  $p$ -Wert unter  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  auf  $[0, 1]$  gleichverteilt.
2. Für einen  $p$ -Wert  $\gamma$  gilt, dass alle Tests mit Signifikanzniveau  $\alpha > \gamma$  die Nullhypothese verwerfen.

Insgesamt gilt also:

kleiner  $p$ -Wert  $\implies H_0$  wird wahrscheinlich verworfen

## 8 Konfidenzintervalle

### Definition Konfidenzintervall

Sei  $\alpha \in [0, 1]$ . Ein Konfidenzintervall für  $\theta$  mit Niveau  $1 - \alpha$  ist ein Zufallsintervall  $I(\omega) = [A(\omega), B(\omega)]$ , sodass gilt

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{P}_\theta[A \leq \theta \leq B] \geq 1 - \alpha$$

wobei  $A$  und  $B$  Zufallsvariablen der Form  $A = a(X_1, \dots, X_n)$ ,  $B = b(X_1, \dots, X_n)$  mit  $a, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind.

Wenn wir einen Schätzer  $T = T_{ML} \sim \mathcal{N}(\theta, \text{Var}(X))$  haben, suchen wir ein Konfidenzintervall der Form

$$I = \left[ T - c\sqrt{\text{Var}(X)}, T + c\sqrt{\text{Var}(X)} \right]$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left( T - c\sqrt{\text{Var}(X)} \leq \theta \leq T + c\sqrt{\text{Var}(X)} \right) \\ &= \mathbb{P}_\theta(-c \leq Z \leq c) \\ &= \mathbb{P}_\theta(Z \leq c) - \mathbb{P}_\theta(Z < -c) \\ &= \mathbb{P}_\theta(Z \leq c) - (1 - \mathbb{P}_\theta(Z \leq c)) \\ &= 2\Phi(c) - 1 \end{aligned}$$

wobei  $Z = \frac{T - \theta}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ist.

## 8.1 Approximatives Konfidenzintervall

Wir können den zentralen Grenzwertsatz benutzen, um eine standardnormalverteilte ZV zu erhalten, und damit die Konfidenzintervalle zu bestimmen.

## 9 Aufgaben

### 9.1 Multiple Choice

Seien  $X, Y$  zwei ZV mit gemeinsamer Dichte  $f_{X,Y}$ . Welche Aussage ist korrekt?

- ✓  $X, Y$  sind immer stetig
- Die ZV sind nicht notwendigerweise stetig.

Sei  $Y$  eine stetige Zufallsvariable. Für alle  $s, t \in \mathbb{R}^+$ :

$$\exists \lambda > 0. Y \sim \text{Exp}(\lambda) \iff \mathbb{P}(Y > s) = \mathbb{P}(Y > s + t \mid Y > t)$$

- ✓ wahr.
- falsch.

### 9.2 Aufgaben Wahrscheinlichkeit

#### Dichte von $\max(X_1, X_2)$

Seien  $X_1, X_2 \sim \mathcal{U}[0, 1]$  unabhängige ZV und sei  $X = \max(X_1, X_2)$ . Berechne die Dichtefunktion von  $X$  und  $\mathbb{P}[X_1 \leq x \mid X \geq y]$ .

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}[\max(X_1, X_2) \leq t] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \leq t] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq t] = F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) \\ f_X(t) &= \frac{d}{dt} F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) = \frac{d}{dt} t^2 \cdot \mathbb{I}_{0 \leq t \leq 1} = 2t \cdot \mathbb{I}_{0 \leq t \leq 1} \end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit brauchen wir eine Fallunterscheidung:

1.  $x < 0$  oder  $1 < x$ :

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x \mid X \geq y) = 0 \text{ bzw. } 1$$

2.  $0 \leq x \leq y \leq 1$ :

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \geq y)}{\mathbb{P}(X \geq y)} = \frac{x(1-y)}{1-y^2}$$

3.  $0 \leq y \leq x \leq 1$ :

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 < y, X_2 \geq y) + \mathbb{P}(y \leq X_1 \leq x)}{\mathbb{P}(X \geq y)} = \frac{x-y^2}{1-y^2}$$

## Gemeinsame Dichte

Bestimme die gemeinsame Dichte von  $P \sim \mathcal{U}[0, 1]$  und  $H \sim \mathcal{U}[0, P]$ . Wir wissen:

$$f_P(p) = \mathbb{I}_{p \in [0, 1]} \quad f_{H|P}(h \mid p) = \frac{1}{p} \cdot \mathbb{I}_{h \in [0, p]}$$

Somit ist:

$$f_{P,H}(p, h) = f_P(p) \cdot f_{H|P}(h \mid p) = \frac{1}{p} \cdot \mathbb{I}_{0 \leq h \leq p \leq 1}$$

## Maximum und Minimum gleichverteilter ZVen

Seien  $U_1, U_2, U_3$  unabhängige,  $\mathcal{U}([0, 1])$ -verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen ZV  $L := \min(U_1, U_2, U_3)$  und  $M := \max(U_1, U_2, U_3)$ .

Zeige für beliebige  $\phi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und beschränkt, dass

$$\mathbb{E}(\phi(M) \cdot \psi(L)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(l) \cdot 6(m-l) \mathbb{I}_{0 \leq l \leq m \leq 1} dl dm$$

Wegen Unabhängigkeit ist die gemeinsame Dichte durch  $f(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{I}_{u_1 \in [0, 1]} \mathbb{I}_{u_2 \in [0, 1]} \mathbb{I}_{u_3 \in [0, 1]}$  bestimmt.

$$\mathbb{E}(\phi(M)\psi(L))$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^3} \phi(\max(u_1, u_2, u_3)) \psi(\min(u_1, u_2, u_3)) f(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi(\max(u_1, u_2, u_3)) \psi(\min(u_1, u_2, u_3)) du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

Wir zerteilen jetzt dieses Integral in 6 Cases mit Indikatorfunktionen (die einzelnen Integrale summiert ergeben das gesuchte Integral). Beispielrechnung mit  $\mathbb{I}_{u_1 \leq u_2 \leq u_3}$  (andere Fälle analog).

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi(\max(u_1, u_2, u_3)) \psi(\min(u_1, u_2, u_3)) \mathbb{I}_{u_1 \leq u_2 \leq u_3} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi(u_3) \psi(u_1) \mathbb{I}_{u_1 \leq u_2 \leq u_3} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 \phi(u_3) \left( \int_0^{u_3} \psi(u_1) \left( \int_{u_1}^{u_3} du_2 \right) du_1 \right) du_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \phi(u_3) \psi(u_1) (u_3 - u_1) \mathbb{I}_{u_1 \leq u_3} du_1 du_3 \end{aligned}$$

Die anderen 5 Fälle sind analog und deshalb folgt

$$\mathbb{E}(\phi(M) \cdot \psi(L)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(l) \cdot 6(m-l) \mathbb{I}_{0 \leq l \leq m \leq 1} dl dm$$



# 10 Tabellen & Diverses

## 10.1 Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$

### Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

- Meist gilt: Polynome ableiten ( $g(x)$ ), wo das Integral periodisch ist ( $\sin, \cos, e^x, \dots$ ) integrieren ( $f'(x)$ )
- Teils: mit 1 multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. im Fall von  $\int \log(x) dx$ )

### Substitution

Um  $\int_a^b f(g(x)) dx$  zu berechnen: Ersetze  $g(x)$  durch  $u$  und integriere  $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{du}{g'(x)}$ .

- $g'(x)$  muss sich herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ: unbestimmtes Integral berechnet werden und dann  $u$  wieder durch  $x$  substituieren.
- Man kann auch das Theorem in die andere Richtung anwenden:

$$\int_a^b f(u) du = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x))g'(x) dx$$

- Sei  $\overline{X}, Y$  kompakt,  $f: Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.  
Sei  $\gamma: \overline{X} \rightarrow Y$  mit  $\overline{X} = \overline{X}_0 \cup B, Y = Y_0 \cup C$  ( $B, C$  Rand von  $\overline{X}, Y$ ).  
Wenn  $\gamma: \overline{X}_0 \rightarrow Y_0$  bijektiv und  $C^1$  mit  $\det(J_\gamma(x)) \neq 0, \forall x \in \overline{X}_0$ , dann gilt

$$\int_Y f(y) dy = \int_{\overline{X}} f(\gamma(x)) |\det(J_\gamma(x))| dx$$

## 10.2 Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	$a^{kx}$	$ka^{kx} \ln(a)$
$\ln  x $	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2 \sin(x) \cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2 \sin(x) \cos(x)$
$-\ln  \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln  \sin(x) $	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	$e^{cx}$	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln  x  - 1)$	$\ln  x $	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1 - \ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln  x  - 1)$	$\log_a  x $	$\frac{1}{\ln(a)x}$

## 10.3 Weitere Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x^x \ (x > 0)$	$x^x \cdot (1 + \ln x)$

### Gamma-Verteilung

Die Gamma-Verteilung ist eine stetige Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha z^{\alpha-1} e^{-\lambda z} \text{ für } z \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0$$

1. Wir schreiben  $Z \sim Ga(\alpha, \lambda)$  für eine gamma-verteilte Zufallsvariable  $Z$  mit Parametern  $\alpha$  und  $\lambda$ .
2. Die Summe von  $n \in \mathbb{N}$  unabhängigen  $Exp(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen ist  $Ga(n, \lambda)$ -verteilt.
3. Die  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden ist  $Ga\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$ -verteilt.

Sei  $(X_i)_{i \geq 1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  iid. eine Folge von Zufallsvariablen.

1.  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$
2.  $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n X_i)^2 \sim \chi_1^2$
3.  $X_1^2 + X_2^2 \sim Exp(\frac{1}{2})$
4. Sei  $Y \sim \chi_m^2$  unabhängig von  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Dann gilt

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{1}{m} Y}} \sim t_m$$

5. Es gilt  $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m \sim \mathcal{N}(0, 1)$  verteilt, für endliche  $m$  ist  $t_m$  langschwänziger als  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Seien  $X_1, \dots, X_n$  iid.  $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Wir erinnern uns an die Notationen für Stichprobenmittel  $\overline{X}_n$  und Stichprobenvarianz  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ .

1.  $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \sim \chi_{n-1}^2$
2.  $\overline{X}_n$  und  $S^2$  sind unabhängig.
- 3.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} \sim t_{n-1}$$

## 10.4 MLE Schätzer

- $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$  iid.:  $T = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\overline{X}_n}$
- $X_1, \dots, X_n \sim Geo(\theta)$  iid.:  $T = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{1}{\overline{X}_n}$
- $X_1, \dots, X_n \sim Bin(N, \theta)$  iid.:  $T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$
- $X_1, \dots, X_n \sim P(\theta)$  iid.:  $T = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \overline{X}_n$
- $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{U}([\theta_1, \theta_2])$  iid.:  $T_{\theta_1} = \min(X_i), T_{\theta_2} = \max(X_i)$
- $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_1, \theta_2)$  iid.:  $T_{\theta_1} = \overline{X}_n, T_{\theta_2} = S^2$

## 10.5 Verteilungen

Verteilung	Parameter	$\mathbb{E}[X]$	$\text{Var}(X)$	$p_X(t)/f_X(t)$	$F_X(t)$
Gleichverteilung	$n$ : Anzahl Ereignisse $x_i$ : Ereignisse	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} (\sum_{i=1}^n x_i)^2$	$\frac{1}{n}$	$\frac{ \{k: x_k \leq t\} }{n}$
Bernoulli	$p$ : ErfolgsWK	$p$	$p \cdot (1-p)$	$p^t(1-p)^{1-t}$	$1-p$ für $0 \leq t < 1$
Binomial	$n$ : Anzahl Versuche $p$ : ErfolgsWK	$np$	$np(1-p)$	$\binom{n}{t} p^t(1-p)^{n-t}$	$\sum_{k=0}^t \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
Geometrisch	$p$ : ErfolgsWK $t$ : Anzahl Versuche	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p(1-p)^{t-1}$	$1-(1-p)^t$
Poisson	$\lambda$ : Erwartungswert und Varianz	$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda} \sum_{k=0}^t \frac{\lambda^k}{k!}$
Gleichverteilung	$[a, b]$ : Intervall	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$
Exponentialverteilung	$\lambda: \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$
Normalverteilung	$\sigma^2$ : Varianz $\mu: \mathbb{E}[X]$	$\mu$	$\sigma^2$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu}{\sigma})^2} dy$
$\chi^2$ -Verteilung	$n$ : Freiheitsgrad	$n$	$2n$	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$ für $t > 0$	$P\left(\frac{n}{2}, \frac{t}{2}\right)$
t-Verteilung	$n$ : Freiheitsgrad	$\begin{cases} 0 & n > 1 \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{n}{n-2} & n > 2 \\ \infty & 1 < n \leq 2 \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	I'd rather not

### Gamma-Funktion

$$\Gamma(v) := \int_0^\infty t^{v-1} e^{-t} dt, v \geq 0.$$

Es gilt  $\Gamma(n) = (n-1)!$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

### Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

### Cauchy Produkt

Falls  $\sum_{n=0}^\infty a_n$  und  $\sum_{n=0}^\infty b_n$  absolut konvergent, dann folgt

$$\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i+j=n} a_i b_j = \left( \sum_{n=0}^\infty a_n \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^\infty b_k \right)$$

## 11 Quellen

Dieses Cheatsheet wurde von vorherigen (Julian Steinmann, Danny Camenisch) inspiriert (vor allem Kapitel 6-10). Definitionen und Aufgaben stammen aus den Slides von Prof. Teichmann, dem Skript (M. Schweizer, 2021) und den Übungsserien vom Frühlingssemester 2023.