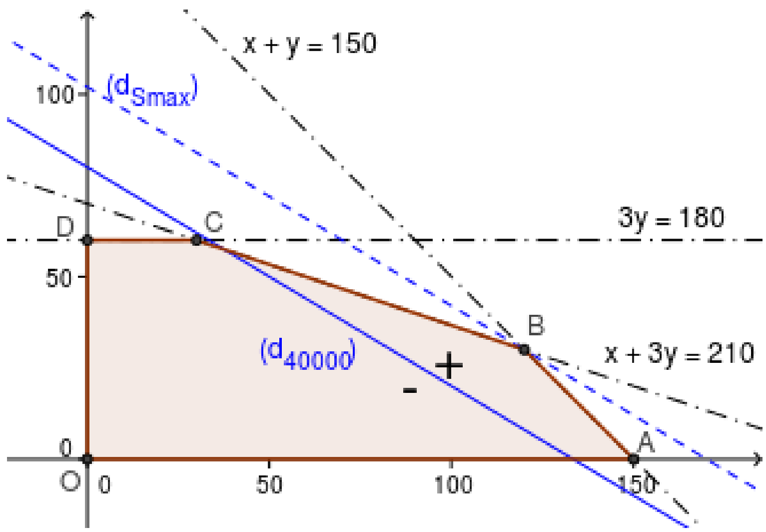
Optimisation continue - projet numéro 4



Encadré par : Hacène Ouzia

Membres du groupe :
Aurélien Abel
Fatine Bentires Alj
Harold Gallice
Boussad Merhane
Alexia Zounias-Sirabella

Table des matières

Première partie

Introduction au problème

Le but de ce projet est de résoudre le problème (P) suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j,\ \text{j} \in \{1, ..., n\}, \quad (46)$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i,\ \text{i} \in \{1, ..., m\}, \quad (47)$$

$$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij}, \forall i, j \quad (48)$$
$$y \in \{0, 1\}^{m\times n},\ x \geq 0 \quad (49)$$

où :
- $c = (c_{ij}), a = (a_{ij}) etm = (m_{ij})$ sont des matrices appartenant à $M_{m\times n}(\mathbb{R})$,
- $A = (A_j)$ et M = (M_i) sont deux vecteurs appartenant à $\mathbb{R}_m$ et $\mathbb{R}_n$, respectivement

Il s'agit d'un problème d'optimisation en variables entières. Ce problème est **NP-Difficile**, en général.

La *relaxation continue* (cf. introduction) du problème (P) est le problème *d'optimisation linéaire* suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j,\ \text{j} \in \{1,...,n\},$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i,\ \text{i} \in \{1,...,n\},$$

$$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij}, \forall i, j$$
$$y \in [0, 1]^{m\times n},\ x \geq 0$$

La solution optimale de cette relaxation continue n'est, en général, pas entière. En revanche, sa valeur est toujours un minorant de la valeur d'une solution optimale du problème en variables entières.

Considérons le problème (M) équivalent au problème (P) suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j,\ \text{j} \in \{1,...,n\}, \quad (50)$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ik} \leq M_i y_{ik},\ \forall\ \text{i,k} \quad (51)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_{ik} \leq M_i - M_i y_{ik},\ \forall\ \text{i,k}, \quad (52)$$

$$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij},\ \forall\ \text{i,j} \quad (53)$$
$$y \in \{0, 1\}^{m\times n},\ x \geq 0 \quad (54)$$

Ce modèle (M) s'obtient à partir du modèle (P) en multipliant les contraintes (47) par y_{ik} et 1 - y_{ik} et ce pour toutes les paires d'indices (i, k) que l'intérêt d'un tel modèle est dans sa relaxation continue. Cette manipulation est valide car y_{ik} et 1 - y_{ik} sont positives. Donc, l'ensemble des solutions réalisables du problème (P) n'est pas altéré. En revanche, le modèle (M) ainsi obtenu est plus difficile à résoudre que le modèle originel. Cette difficulté est essentiellement due aux nombres de variables et contraintes du nouveau modèle (M). Nous verrons que l'intérêt d'un tel modèle est dans sa relaxation continue.

Enfin, considérons une linéarisation possible du modèle (M). Cette linéarisation consiste : (i) à remplacer les termes non linéaires $x_{ij}yik$ par de nouvelles variables notées z^i_{jk} ; (ii) Puis, à ajouter des contraintes, dites valides, liant les nouvelles variables et les variables originelles. Nous considérerons seulement les contraintes suivantes :

$$z^i_{jk} \geq 0, \forall \text{ i,j,k,}$$
$$z^i_{jk} \leq y_{ij}, \forall \text{ i,j,k.}$$

La validité des deux premiers groupes de contraintes ci-dessus est claire.

Ainsi, le modèle linéarisé (que nous noterons (L)) du modèle (M) est le modèle suivant :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq A_j, \text{ j} \in \{1,...,\text{n}\}, \tag{55}$$
$$\sum_{j=1}^n z^j_{jk} \leq M_{ij}y_{ij}, \forall \text{ i,j,k} \tag{56}$$
$$\sum_{i=1}^n x_{ij} - \sum_{i=1}^n x_{ij}y_{ik} \leq M_i - M_iy_{ik}, \forall \text{ i,k,} \tag{57}$$

$$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_iy_{ij}, \forall \text{ i,j,} \tag{58}$$
$$z^i_{jk} \leq x_{ij} \ \forall \text{ i,j,k,} \tag{59}$$
$$y \in \{0,1\}^{m\times n}, \, x, z \geq 0. \tag{60}$$

Pour résoudre le problème, nous avons cherché un exemple qui s'y prête. Ainsi, il est possible de visualiser le problème (P) comme un ensemble d'usines de productions.

En effet, nous avons considéré le problème suivant :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq A_j, \text{ j} \in \{1, ..., n\},$$
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq M_i, \text{ i} \in \{1, ..., m\},$$

$$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_iy_{ij}, \forall i, j$$
$$y \in \{0,1\}^{m\times n}, \, x \geq 0$$

On modélise le problème comme un ensemble de $m \times n$ usines produisant des choses différentes (exemple : chocolat, caramel, etc ...) et on pose :

- x_{ij} : Production en kg de l'$usine_{ij}$ de sa spécialité
- a_{ij} : Coût fixe de l'$usine_{ij}$
- c_{ij} : Bénéfice ($c_{ij} \leq 0$) ou coût (($c_{ij} \geq 0$) de l'$usine_{ij}$ par kg produit
- y_{ij} : Vaut 0 si l'on décide de ne pas ouvrir l'$usine_{ij}$ et 1 sinon
- $max(0, m_{ij})$: Production minimale en kg de l'$usine_{ij}$

Ainsi, les contraintes sur la matrice x s'expliquent. En effet, la somme des éléments d'une ligne représente la production de chaque spécialité qui est majorée par M_i et la somme des éléments d'une colonne est la production des usines par région qui doit être plus grande que A_j pour la satisfaction des clients.

Quatre jeux de données nous sont fournis. Ils seront utilisés dans la suite du projet pour illustrer certaines questions théoriques.

Deuxième partie

Partie A : Résolution exacte

Les premières expériences suggérées dans cette première partie ont pour objectif de vérifier quelques propriétés théoriques liant les deux modèles (P) et (L). Ces expériences seront à effectuer sur quelques instances de petites tailles.

1. **Vérifier l'équivalence des deux modèles (L) et (P).**

Soit le modèle (P) suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j$, j $\in \{1, ..., n\}$,
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i$, i $\in \{1, ..., m\}$,

$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij}, \forall i, j$
$y \in \{0,1\}^{m\times n}$, $x \geq 0$

Passons du modèle (P) à sa relaxation dans un premier temps.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j$, j $\in$ {1,...,n},
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i$, i $\in$ {1,...,n},

$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij}, \forall i, j$
$y \in [0,1]^{m\times n}$, $x \geq 0$ $\Leftarrow$ y peut prendre plus de valeurs mais est toujours compris entre 0 et 1. Équivalent à $y \in \{0,1\}^{m\times n}$.

Puis de sa relaxation au modèle (M) dans un second temps.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$$

s.c

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j$, j $\in$ {1,...,n},
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ik} \leq M_i y_{ik}$, $\forall$ i,k, $\Leftarrow$ on multiplie à gauche et à droite par y_{ik}. Soit y_{ik}=0 auquel cas $x_{ij} = 0$. Soit $y_{ik} \neq 0$. Dans ce cas là il s'agit d'une constante, on le sort de la somme et on divise par y_{ik} à gauche et à droite.

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ - $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_{ik} \leq M_i - M_i y_{ik}$, $\forall$ i,k, $\Leftarrow$ Découle des deux inégalités : $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ik} \leq M_i y_{ik}$ et $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i$.

$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij}$, $\forall$ i,j
$y \in \{0,1\}^{m\times n}$, $x \geq 0$

Et enfin, de sa relaxation (M) au modèle linéarisé (L).

$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(a_{ij} + c_{ij}x_{ij})$

s.c

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq A_j$, j $\in$ {1,...,n},
$\sum_{j=1}^{n} z_{jk}^{j} \leq M_{ij}y_{ij}$, $\forall$ i,j,k $\Leftarrow$ Réécriture du problème. On remplace $x_{ij}y_{ik}$ par z_{jk}^{j}.

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ - $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}y_{ik} \leq M_i - M_i y_{ik}$, $\forall$ i,k,

$m_{ij}y_{ij} \leq x_{ij} \leq M_i y_{ij}$, $\forall$ i,j,
$z_{jk}^{i} \leq x_{ij}$ $\forall$ i,j,k, $\Leftarrow$ z_{jk}^{j}=$x_{ij}y_{ik}$ or $y \in \{0,1\}^{m\times n}$ donc $z_{jk}^{j} \leq x_{ij}$.
$y \in \{0,1\}^{m\times n}$, $x, z \geq 0$.

Ainsi, nous avons montré que les modèles sont équivalents.

2. **Vérifier que la valeur optimale de la relaxation continue du modèle (L) est au moins aussi bonne que la valeur optimale de la relaxation continue du problème originel (P).**

Les expériences suivantes ont pour objectif de comparer les performances (temps de calcul et valeur de la solution trouvée) de quelques solveurs pour résoudre les modèles (P), (L) et (M). Plus de détails vous seront donnés lors de la séance de suivi au sujet des solveurs choisis.

3. **Comparer les performances des solveurs intlinprog, cplex, gurobi et xpress sur les deux modèles (P) et (L). Pour ces expériences vous utiliserez AMPL (version commerciale de gmpl).**

4. **Comparer les performances des deux solveurs baron et knitro pour résoudre le modèle (M). Il s'agit d'un problème non linéaire en variables entières. Donc, un problème assez difficile.**

Troisième partie

Partie B : Résolution approchée

Pour cette partie, l'objectif est d'identifier un bonne méta-heuristique pour résoudre les problèmes (P) et (L). Une méta-heuristique sera qualifiée de bonne si elle retourne une solution réalisable de bonne valeur (pour le problème (P)) en un temps réduit.

5. **Comparer les performances des deux méta-heuristiques ga et patternsearch pour résoudre le problème (P).**

Quatrième partie

Partie C : Algorithme de sous gradient

Cinquième partie

Conclusion

Bibliographie

1. **Images**

   Logo Polytech SORBONNE.
   Available :

   IMAGE OPTIMISATION.
   https ://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/12/Optimisation
   Lineaire.svg/330px-OptimisationLineaire.svg.png

2. **Site Web**

3. **Livres**