

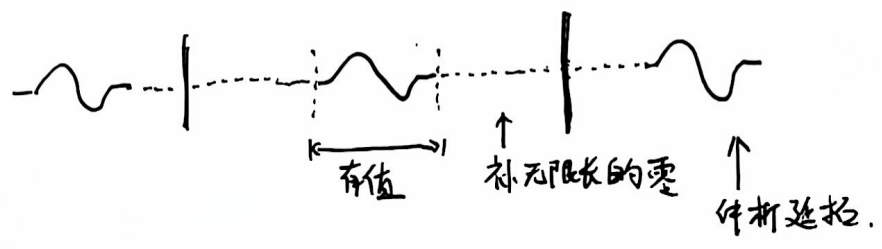
连续非周期函数的傅立叶变换:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

推导:

① $f(t)$ 定义在任意大 Δ 上. $g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}) \\ 0, & t \notin (-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}) \end{cases}$ 将 $g(t)$ 延展成

周期函数 $f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} g^L(t)$



② 用分母周期函数的方法分母.

平时间的 FFT:

是基于周期函数的傅立叶变换的离散化, 不是上文公式的离散化.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{l} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{l} \right)$$

复数形式

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi i n t}{l}}$$

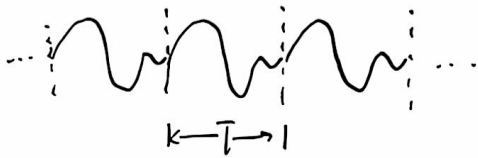
$C_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(t) e^{-\frac{2\pi i n t}{l}} dt$, 离散化 $l = N \Delta t$, $t = k \Delta t$. 重新归一化.

~~$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i 2\pi k n / N}$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i 2\pi k n / N} \quad R(F_k) \cdot 2$$~~

$$\begin{cases} F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i 2\pi k n / N} \\ f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i 2\pi k n / N} \cdot 2 \end{cases}$$

$C_n^* = C_{-n}$.



FFT 是直接周期延拓, 不补 0. 所以不 taper 的话就很多杂乱频谱.

负频率: 对 FFT

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, 分成 $m \frac{2\pi}{T}$, $m=0 \dots \infty$ (一般取得越多, 高频成分越丰富, 还原度越高)

对实域信号 $f(t)$

$$C_n^* = C_{-n} \text{ (根据 } C_n \text{ 表式有)}$$

例 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$ 合成时, eg C_{n_0} 和 C_{-n_0} 成分相加时:

$$\begin{aligned} & C_{n_0} e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}} + C_{-n_0} e^{-\frac{2\pi i n_0 t}{T}} \\ &= C_{n_0} e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}} + C_{n_0}^* (e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}})^* \\ &= C_{n_0} e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}} + (C_{n_0} e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}})^* \quad \text{乘 2.} \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{n_0} e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}} \right\} \end{aligned}$$

所以计算时可利用此性质只算实部即可

相位是 F_k 的幅角

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \left\{ C_{n_0} e^{\frac{2\pi i n_0 t}{T}} \right\} &= 2 \operatorname{Re} (A e^{i\phi_0} e^{i \frac{2\pi n_0 t}{T}}) \\ &= \underbrace{2A}_{\text{振幅}} \cos \left(\underbrace{\frac{2\pi n_0 t}{T}}_{\text{相位}} + \phi_0 \right) \end{aligned}$$

总结: 复数

虚部被加没了, 实部扩大 2 倍成了振幅. 实虚部结合有了 相位.

—

eg. $2 \sin t$ 和 $2 \sin(t+1)$
相位差 1

理论公式 非用... 变换的

虚部和负频率:

13

补充:

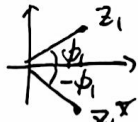
① $z_1^* z_2^* = (z_1 z_2)^*$

理由1: $(A+Bi)^*(C+Di)^* = \dots$ 暴力展开证明

理由2: $A_1 e^{i\phi_1} \cdot A_2 e^{i\phi_2} = A_1 A_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$ 即振幅变积, 相位相加



$$A_1 e^{-i\phi_1} \cdot A_2 e^{-i\phi_2} = A_1 A_2 e^{-i(\phi_1 + \phi_2)} = (z_1 z_2)^*$$



共轭即相位取相反数

② $(e^{i\phi})^* = e^{-i\phi}$

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (e^{-i\omega t})^* dt = F(\omega)^*$$

则合成回去时, $f(t)$ 为各成分相加, 每一成分却是虚数. eg:

$$F(\omega_0) e^{i\omega_0 t}, F(-\omega_0) e^{-i\omega_0 t}$$

但加上后为实数. 且:

$$A_0 e^{i\omega_0 t} e^{i\phi_0} + A_0 e^{-i\phi_0} e^{-i\omega_0 t} = \underbrace{2A_0}_{\text{振幅}} \cos(\omega_0 t + \underbrace{\phi_0}_{\text{F}(\omega) \text{ 的幅角}})$$

↑
没有虚部了.

“只取实部”意味着相位全置0, 但振幅, 频率信息保留.