PML 理论与实践

学于约25.04.0?

整理于25.04.10.

一、波动方程变式

$$\nabla\cdot(a\nabla u)=\frac{1}{b}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\ddot{u}}{b}$$ scalar wave equation

定义辅助函数$v(x,t)$对波动方程的2阶求导降阶：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=b\nabla\cdot v & ②\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t}=a\nabla u & ①\end{cases}$$

构建思路的猜测：

看到左边里面一大坨"$a\nabla u$"不如令其为v，看到右边2个$\frac{\partial}{\partial t}$，

那不如左边再加一个$\frac{\partial}{\partial t}$，相当于右约了一个$\frac{\partial}{\partial t}$

那干脆令为 $\frac{\partial v}{\partial t}=a\nabla u\cdots$①

代进去：

$$\nabla\cdot\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{b}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ 则有 $\nabla\cdot v=\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t}\cdots$②

①②也可整理为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & b\nabla\cdot\\ a\nabla & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

令$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$为$w$，$\begin{pmatrix} & b\nabla\cdot\\ a\nabla & \end{pmatrix}$为 linear operator $\hat{D}$

$\hat{D}$为 <u>anti-Hermitian operator</u> 时 $\frac{\partial w}{\partial t}=\hat{D}w$ 表现出波动方程性质

详见

Notes on the algebraic structure of wave equations

Steven G. Johnson

二、复数域

平面波中 $W(x,t)=\sum_{k,w} W_{k,w}\, e^{i(kx-wt)}$

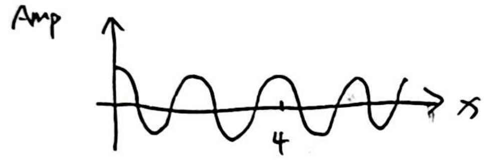
对指数做些操作，使弄出 e^{-x} 就能让波在接近边界时衰减掉了.

三、Analytic continuation
"持续"

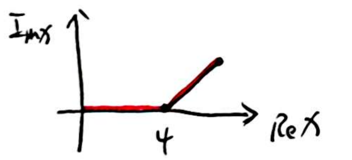
eg: 对一个一维问题，我们希望：$x<4$ 时，和正常情况一样，不受我们额外影响，对 $x>4$，波要吸收掉.

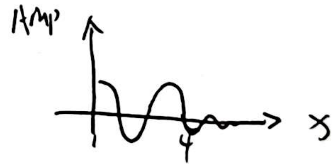
对 e^{ikx}

原本: $Re(e^{ikx}) = \cos kx$



若：将 x 在 $x>4$ 时加个虚部，$x<4$ 时不变，则 x 变为复数





波变成：

$$Re\left(e^{ik(Re\,x + Im\,x)}\right) = Re\left(e^{ik\,Im\,x}\, e^{ik\,Re\,x}\right)$$

$$= \underline{\underline{e^{-\gamma x}}} \cos kx$$

在 $x>4$ 时指数衰减

此处有隐含假设

1. x 只在波动方程中出现在这，在衰减区域 x-invariant
   即没有诸如 $C(x)$ 的量.

四. 反回实数域.

按照上文. $\tilde{x}(x) = x + i f(x)$, 定义新的复坐标, 使它和原 x 比起来多了个虚部.

按照上文假设. x 只出现在 $\frac{\partial}{\partial x}$ 里 (则在 ψ 里 x 只出现在 e 指数项中)

波动方程.

则 ~~$\frac{\partial}{\partial x}$ 换成 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$~~ $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}$ 可建立联系

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\frac{d\tilde{x}}{dx}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + i\frac{df(x)}{dx}\right)^{-1}$$

注 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 只在单变量下成立 $y = f(x)$ $x = g(y)$, 偏导不能乱倒数

叫作 ≠ Inverse function rule

则:

把全部 $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$ 换成 $\frac{\partial}{\partial x}$. $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$ 等于 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+i\frac{df(x)}{dx}}$

则解成为:

$$e^{ik(x+if(x))} = e^{ikx}\, e^{-kf(x)}$$

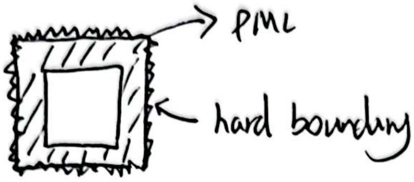
令 $\frac{df(x)}{dx} = \frac{\sigma_x(x)}{\omega}$ 则 $f(x) = \int^{x} \frac{\sigma_x(x)}{\omega}\, dx$

带个 ω 是为了和 k 的 ω 抵掉. 让PML衰减的程度和波的 ω 无关

最终衰减项为 $e^{-\frac{1}{c}\int^{x}\sigma_x(x)\,dx}$

$\sigma_x(x)$ 可定义在边界附近的阶跃(或更光滑的), 目的在不影响计算区域, 只衰减边界层

五. PML最外~~圈~~圈可以包一层固定边界 Dirichlet boundary condition



波打到最外面又反射 还要被PML再衰减一遍

六 1D example.

先写出变式 wave equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = b\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

转频域:

$$\begin{cases} -i\omega \hat{u} = b\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\[2ex] -i\omega \hat{v} = a\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x} \end{cases}$$

加PML:

$$\begin{cases} -i\omega \hat{u} = b\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial x}\dfrac{1}{1+i\frac{\sigma}{\omega}} \\[2ex] -i\omega \hat{v} = a\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x}\dfrac{1}{1+i\frac{\sigma}{\omega}} \end{cases}$$

整理

$$\begin{cases} -i\omega \hat{u} + \sigma\hat{u} = b\dfrac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\[2ex] -i\omega \hat{v} + \sigma\hat{v} = a\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial x} \end{cases}$$

转回时域

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \cancel{+\sigma} = b\dfrac{\partial v}{\partial x} - \sigma u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = a\dfrac{\partial u}{\partial x} - \sigma v \end{cases}$$

2D 波动方程实践

没能直接看懂 x,y 方向都加 PML 的推导. 但找到了现成公式

是一个降阶后的方程组.

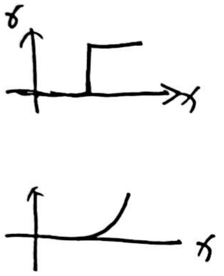
于是先尝试用 FEM 求一个无 PML 的降阶后的简单方程组. 但失败了.

遂放弃 PML 实践应用

(具体内容见 PPT: Introduction to PML in time domain

Alexander Thomann ETH)

注意 $\sigma(x)$ 选取. 平滑些更好



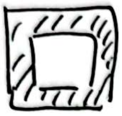
PML 边界层亦有反射

直接用 $\alpha\frac{\partial u}{\partial t}$ 加 damping 不行. 边界上反射太强 (衰减系数引起的散射现象. 在 kernel 研究中已证实)

上述 PPT 中有现成矩形框 PML 公式.

需要可前往查阅. 只把主要部分摘录如下:

① 四边都吸收



$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial u^x}{\partial t} + \sigma_x(x)\, u^x\right) - \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \\ \mu^{-1}\left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + \sigma_x(x)\, V_x\right) - \frac{\partial}{\partial x}(u^x + u^y) = 0 \\ \rho\left(\frac{\partial u^y}{\partial t} + \sigma_y(y)\, u^y\right) - \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \\ \mu^{-1}\left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + \sigma_y(y)\, V_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}(u^x + u^y) = 0 \end{cases}$$

若令 $\sigma_x(x) = \sigma_y(y) = 0$，可以还原成 $\rho u_{tt} - \nabla(\mu \nabla u) = 0$

这个方程组

1. 设立了~~辅助~~辅助函数 V_x V_y

2. 把 $u = u^x + u^y$ 拆开了，但注意，u^x 和 u^y 没有明确物理意义，非 x/y 方向位移，这里 u 是标量场.

对上面个方程组还原以说明理解过程，试图消掉辅助函数 $V_x V_y$.
简单起见设 $\mu = \rho = 1$. $\sigma_x(x)$ 记作 σ_x. $\sigma_y(y)$ 记作 σ_y，注意 $u^x + u^y = u$

对①和②有.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^x}{\partial t} + \sigma_x u^x - \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + \sigma_x V_x = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

对①求 $\frac{\partial}{\partial t}$ 对②求 $\frac{\partial}{\partial x}$，把②代入①有

$$\frac{\partial^2 u^x}{\partial t^2} + \sigma_x \frac{\partial u^x}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma_x V_x)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

③和④同理

$$\frac{\partial^2 u^y}{\partial t^2} + \sigma_y \frac{\partial u^y}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma_y V_y)}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

④+⑤有:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u + \boxed{\sigma_x \frac{\partial u^x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial u^y}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x V_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y V_y}{\partial y}} = 0$$

PML的显式表达，可见和直接加 $\alpha \frac{\partial u}{\partial t}$ 差别很大. 它考虑了 $\frac{\partial}{\partial t}$ ~~和~~ $\frac{\partial}{\partial x}$ 两方向处理不同