

一. 前置知识:

$$1. \tau_{ij} = C_{ijkl} U_{k,l}$$

$$2. \rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ij,j}$$

$$3. \int_V (f - \rho \ddot{u}) \cdot v \, dv + \int_S T(u, m) \cdot v \, ds = \int_V (g - \rho \ddot{u}) \cdot u \, dv + \int_S T(v, m) \cdot u \, ds$$

进而针对方程:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{in} = \delta_{in} \delta(x-y) \delta(t-\tau) + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \frac{\partial G_{kn}}{\partial x_l}) \quad \text{注意正负号}$$

有: (Free boundary. 在 \$S\$ 上, \$G\$ 为 0)
余生的应力

$$U_n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V f_i(y, \tau) G_{ni}(x, t-\tau; y) \, dv + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_S G_{ni}(x, t-\tau; y) T_i(u(y, \tau), m) \, ds}_{\text{vanish. 为 0.}}$$

二. 散射波场

对参考均一介质有区域 \$V_0\$, 边界 \$S_0\$, 对应 \$\rho^0, C_{ijkl}^0, u^0\$ (体力为 0 时的波场)

扰动项带角标 "1", 扰动后为:

$$\rho = \rho^0 + \rho^1, \quad C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 + C_{ijkl}^1, \quad u = u^0 + u^1$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
 也即从 \$\rho\$ 到 \$\rho^0\$ 里的 \$\delta\rho, \delta C_{ijkl}, \delta S\$.

对体力为 0 时有 \$u^0\$ 满足方程. 相应地, 扰动后也满足方程.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijpq}^0 \frac{\partial u_p^0}{\partial x_q}) - \rho^0 \ddot{u}_i^0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} ((C_{ijpq}^0 + C_{ijpq}^1) \frac{\partial (u_p^0 + u_p^1)}{\partial x_q}) - (\rho^0 + \rho^1) (\ddot{u}_i^0 + \ddot{u}_i^1) = 0 \end{cases}$$

把后一式代入前一式有:

$$\text{"简. 8":} \quad \begin{cases} C^0 u^0 - \rho^0 \ddot{u}^0 = 0 \\ (C^0 + C^1)(u^0 + u^1) - (\rho^0 + \rho^1)(\ddot{u}^0 + \ddot{u}^1) = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{展开: } \underbrace{C^0 u^0 + C^0 u^1 + C^1 u^0 + C^1 u^1}_{\text{为 0. 3 个 } \tau_1} - \rho^0 \ddot{u}^0 - \rho^0 \ddot{u}^1 - \rho^1 \ddot{u}^0 - \rho^1 \ddot{u}^1 = 0$$

$$\text{剩下: } C^0 u^1 - \rho^0 \ddot{u}^1 + C^1(u^0 + u^1) - \rho^1(\ddot{u}^0 + \ddot{u}^1) = 0$$

有:
$$\rho^0 \ddot{u}_i = - \underbrace{\rho^i \ddot{u}_i + \frac{\partial}{\partial g_j} (C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial g_q}) + \frac{\partial}{\partial g_j} (C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial g_q})}_{\text{体力.}}$$

此方程介质为 ρ^0 , C_{ijpq} . 波场为 \ddot{u}_i 即: 只要施加一个特殊体力在均匀介质上, 传出的波场就相当于扰动后向介质中给出的波场, 而不用去计算非均匀介质下的波动方程, 但此体力不是显式可求的

根据格林函数, 且自由边界上应力变为0.

$$u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V dv \left[-\rho^i \ddot{u}_i(g, \tau) + \frac{\partial}{\partial g_j} (C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial g_q}) \right] G_{ij}(x, g, t-\tau)$$

对其中第二项分部积分:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial g_j} \text{Part 1} \cdot \text{Part 2} = \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial g_j} (\text{Part 1} \cdot \text{Part 2})}_{\text{散度定理转成面积分, 然后 vanish}} - \int_V \frac{\partial}{\partial g_j} \text{Part 2} \cdot \text{Part 1}$$

$$= - \int_V C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial g_q} \cdot \frac{\partial}{\partial g_j} G_{ij}(x, g, t-\tau)$$

$$\Rightarrow u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V dv \left[-\rho^i \ddot{u}_i(g, \tau) - C_{ijpq} \frac{\partial u_p}{\partial g_q} \frac{\partial}{\partial g_j} \right] G_{ij}(x, g, t-\tau)$$

“体力项”含有未知量 u , 依旧不可求.

用 Born / Fredet derivative 有, 把 u 换成 u^0

$$u_i(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V dv \left[-\rho^i \ddot{u}_i^0(g, \tau) - C_{ijpq} \frac{\partial u_p^0}{\partial g_q} \frac{\partial}{\partial g_j} \right] G_{ij}(x, g, t-\tau)$$

三. 波形成像

13

定义:

1. X : 最小二乘 misfit function
2. x_r : $r=1 \dots N$ 台站位置.
3. $d(x_r, t)$ 台站 r 接收到的三分量数据.
4. $s(x_r, t, m)$ 给定模型矢量 m 后的模拟波形.
5. $\|A\| = \sum_{ij} |A_{ij}|^2$ (可能是).

$$X(m) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_0^T \|s(x_r, t, m) - d(x_r, t)\|^2 dt$$

实际操作中如高、滤波、加权.

对 X 求 Fréchet 导:

图像化理解:

$$\frac{X(m + \delta m) - X(m)}{s(x_r, t, m + \delta m) - s(x_r, t, m)} = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{模} \\ \text{data} \end{array} \right)^{m + \delta m} - \left(\begin{array}{c} \text{Syn} \\ \text{data} \end{array} \right)^m}{\text{Syn} - \text{Syn}}$$

每一个时刻上一一对应操作. 相当于
每一时刻都是:

$$y = \frac{1}{2} x^2 \text{ 求导: } \delta y = x \delta x.$$

则 X 的 Fréchet 导为:

$$\delta X = \sum_{r=1}^N \int_0^T [s(x_r, t, m) - d(x_r, t)] \cdot \delta s(x_r, t, m) dt$$

其中 $\delta s(x_r, t, m)$ 即为波场 s 由于模型扰动 δm 产生的散射波场. 根据
P. 最后一式有:

$$\delta s(x_r, t, m) = - \int_0^t dt' \int_V d^3x' [\delta p(x') G_{ij}(x_r, x'; t-t') \partial_t s_j(x', t') + \delta G_{ijklm}(x') \partial_k G_{ij}(x_r, x'; t-t') \partial_l s_m(x', t')]$$

为
[注: G 里面为 x_r 处 r 处的 δs]

现在, 只要算出 δS , 算出 δX 就能知道模型修改的方向了。

14

$$\delta X = - \sum_{r=1}^R \int_0^T dt \int_0^t dt' \int_V d^3x' \left\{ \delta p G \dot{S} [S-d] + \delta c \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} [S-d] \right\} \quad (\text{简写})$$

↑
速度 C. 出 circle

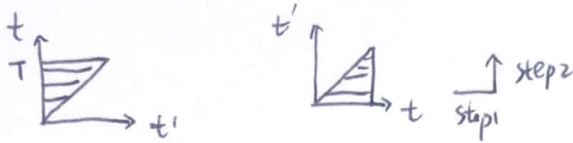
Adjoint:

交换积分顺序

格林函数:

$$\int_0^T dt \int_0^t dt' \rightarrow \int_0^T dt' \int_{t'}^T dt$$

$$G_{ik}(x'_i, x'_j; t-t') = G_{ji}(x'_j, x'_i; t-t')$$



$$\begin{aligned} \delta X = & - \int_V d^3x' \sum_{r=1}^R \int_0^T dt' \int_{t'}^T dt \left\{ \delta p(x') G_{ji}(x'_j, x_r; t-t') \partial_t^2 S_j(x', t') [S_i(x_r, t) - d_i(x_r, t)] \right. \\ & \left. + \delta (jklm)(x') \partial_k \left[G_{ji}(x'_j, x_r; t-t') \partial_l S_m(x', t') \right] \cdot [S_i - d_i] \right\} \end{aligned}$$

先看第一项: 包含 $\delta p, G, \partial_t S, [S-d]$ 其中 δp 和 $\partial_t S$ 可拿到 dt 积分之外, Σ 可拿到里面。

$$\text{则有 } \delta X_{part1} = - \int_V d^3x' \int_0^T dt' \delta p(x') \partial_t^2 S_j(x', t') \underbrace{\sum_{r=1}^R \int_{t'}^T dt G_{ji}(x'_j, x_r; t-t') [S_i(x_r, t) - d_i(x_r, t)]}_{\text{长得有点像格林函数和力的积分。}}$$

对后面部分进行分析: ① 改变积分上下限, 用换元 ② 引入 $\delta(x)$, 这样和傅力积分形式就一致了。

为: $\sum_{r=1}^R \int_0^{T-t'} G_{ji}(x'_j, x_r; t-t') dt$ 把 $t \rightarrow T-t$ [注: 也可用 $t \rightarrow t-t'$, 但没有 $-t'$ 就难以构成卷积项]

$$\sum_{r=1}^R \int_{T-t'}^0 d(T-t) G_{ji}(x'_j, x_r, T-t-t') [S_i(x_r, T-t) - d_i(x_r, T-t)]$$

$$= \sum_{r=1}^R \int_0^{T-t'} dt G_{ji}(x'_j, x_r, T-t-t') [S_i(x_r, T-t) - d_i(x_r, T-t)]$$

$$= \int_0^{T-t'} dt \int_V d^3x G_{ji}(x'_j, x, T-t-t') \underbrace{[S_i(x, T-t) - d_i(x, T-t)] \delta(x - x_r)}_{\text{定义为 } f_i^+(x, t)}$$

$$= \int_0^{T-t'} dt \int d^3x G_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', T-t'-t) f_i^+(\mathbf{x}, t) \quad (\text{有时间卷积: } t \text{ 类比 } t)$$

定义为 $\equiv S_j^+(\mathbf{x}', T-t')$

~~t~~ 类比 $T-t'$

和平常 $\int_0^t dt f(t-\tau) g(\tau)$ 一致。

有空间积分)

由此: 对 Part 1 X 有:

$$\delta X_{\text{part1}} = - \int_V d^3x' \int_0^T dt' \delta p(\mathbf{x}') \partial_{t'}^2 S_j(\mathbf{x}', t') S_j^+(\mathbf{x}', T-t')$$

$$= - \int_V d^3x' \delta \ln p(\mathbf{x}') \underbrace{\int_0^T dt' \rho(\mathbf{x}') \frac{\partial^2 S(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}}_{\text{此即 } K_p} S^+(\mathbf{x}', T-t')$$

带上负号 K_p 号

对 δX_{part2} δc_{jklm} 部分:

如果想用 δp 类似的思路. 建立 $\delta \ln c_{jklm}$ 就走偏了.

$$\text{因为: } \delta \ln c_{jklm} = \frac{\delta c_{jklm}}{c_{jklm}} = \frac{\dots}{\lambda \delta_{jk} \delta_{lm} + \nu (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl})}$$

这样反而更复杂了, 要避免分母大坑。

正确思路是直接把 δX_{part2} 部分的 δc_{jklm} 展开 K 和 ν .

$$\text{则 } K_{c_{jklm}} = - \int_0^T c_{jklm}(\mathbf{x}) \frac{\partial S_m(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} \frac{\partial S_j^+}{\partial x_k} dt = - \int_0^T c_{jklm}(\mathbf{x}) e_{ml}(\mathbf{x}, t) e_{jk}^+(\mathbf{x}, T-t) dt$$

$$\text{则 } \delta X_{\text{part2}} = - \int_V d^3x' \int_0^T dt' \left\{ \delta K \delta_{jk} \delta_{lm} - \frac{2\delta \nu}{3} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta \nu (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}) \right\}$$

$$\frac{\partial S_m(\mathbf{x}', t')}{\partial x'_l} \frac{\partial S_j^+(\mathbf{x}', T-t')}{\partial x_k}$$

for K :

$$- \delta_{jk} \delta_{lm} \frac{\partial S_m(\mathbf{x}', t')}{\partial x'_l} \frac{\partial S_j^+}{\partial x_k} = \nabla S(\mathbf{x}', t') \cdot \nabla S^+(\mathbf{x}', T-t')$$

$$\therefore K_K(\mathbf{x}) = - \int_0^T K(\mathbf{x}) [\nabla S(\mathbf{x}', T-t')] [\nabla \cdot S(\mathbf{x}, t)] dt$$

for ν :

16

$$\delta_\nu \left\{ \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \delta_{lm} \right\} \frac{\partial s_m(x', t')}{\partial x_l'} \frac{\partial s_j^+(x', T-t')}{\partial x_k}$$

$$= \delta_\nu \left\{ \frac{\partial s_k}{\partial x_j} \frac{\partial s_j^+}{\partial x_k} + \frac{\partial s_j}{\partial x_k} \frac{\partial s_j^+}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial s_l}{\partial x_l} \frac{\partial s_j^+}{\partial x_j} \right\}$$

补充: 对偏应变 e 和 v

$$e: v = (e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{mm}) (v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} v_{mm})$$

$$= e_{ij} v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ij} v_{mm} - \frac{1}{3} \delta_{ij} v_{ij} e_{mm} + \frac{1}{9} \delta_{ij} \delta_{ij} e_{mm} v_{mm}$$

$$= e_{ij} v_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ij} v_{mm} - \frac{1}{3} \delta_{ij} v_{ij} e_{mm} + \frac{1}{3} e_{mm} v_{mm}$$

$$= e_{ij} v_{ij} - \frac{1}{3} e_{ii} v_{mm}$$

$$e_{ij} v_{ij} = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji}) \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji}) \text{ 此处是位移}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{2} (v_{ij} v_{ij} + v_{ij} v_{ji})$$

即 for ν : 为

$$K_\nu(x) = - \int_0^T \gamma_\nu(x) \mathbb{D}^+(x, T-t) : \mathbb{D}(x, t) dt. \quad \mathbb{D} \text{ 为偏应变.}$$

注: $\delta s(m) + \delta m$ 是针对上一步 \hat{m} 的, 不一定是均一.

U^0, P^0, G_{ijkl} 配 G_{ij} . 但 G_{ij} 不一定有解析解, G_{ij} 只是一个中间步骤.

用来得到反传波场 s^+ . s^+ 可直接通过数值计算得到.