FFT: sin 和 cos 的 FFT

25.01.07

δ(x) 的定义式

本文用到的FFT对为:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

对 $f(t)=\sin\omega_0 t$,

有: $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega_0 t\; e^{-i\omega t}\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2j}\,e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\omega_0-\omega)}\,dt+\frac{-1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(-\omega_0-\omega)}\,dt$$

⇓ 用到了δ的定义式
Dirac function

$$=-\pi i\left[\delta(\omega_0-\omega)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

振幅谱: $C(\omega)=\sqrt{R\left[\frac{F(\omega)}{\pi}\right]^2+I\left[\frac{F(\omega)}{\pi}\right]^2}$, 当ω取$\omega_0$, $-\omega_0$时均为1.

相位谱: $\Phi(\omega)=\arctan\frac{-I[F(\omega)]}{R[F(\omega)]}$. 当取$\omega_0$时: $\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$, $1\cdot\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})$

~~当取$-\omega_0$时 $\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$~~ $=\sin\omega_0 t$

注意:这里ω只能取正, 还原了!!
"相位谱里无负数", 和代码 原.
周期延拓的FFT不同.

类似有$\cos\omega_0 t$的, 则

$$\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} -i\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

δ(x) 定义

数学上有若干种:

1. $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{-4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$, $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

2. $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$, 适合数值计算

3. $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk$, 可用于求 $\sin\omega_0 t$, $e^{i\omega_0 t}$ 的FFT.

1. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cancel{\nabla^2(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}}$ $r\neq 0$时:

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot\frac{1}{r}) = 0$$

$$\int\nabla^2(\frac{1}{r})dV = \int\nabla\cdot(\nabla\frac{1}{r})\,dV = \oint(\nabla\frac{1}{r})\,d\vec{S} = -\oint\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{S} = -4\pi.$$

同: $\nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\vec{r})$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(\frac{x}{\varepsilon})^2+1}\,d(\frac{x}{\varepsilon}) \cancel{= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\tan\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-\infty}^{+\infty}} = 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\tan\frac{x}{\varepsilon}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

3. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_0^{\infty}e^{ik(x+i\eta)}dk + \int_{-\infty}^{0}e^{ik(x-i\eta)}dk\right)$$

证明合理,见背面.

$$= \lim_{\eta\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{x^2+\eta^2} = \delta(x)$$

上文已证.

$\int_{0^-}^{0^+} e^{ik(x+i\eta)}dk = 0$. 显然成立.

$\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{ik(x+i\eta)}dk$. 当$x\neq 0$. $x+i\eta\to x$.

若$M\eta\to 0$. 即η足够小. 则 $\int_0^M e^{ik(x+i\eta)}dk \to \int_0^M e^{ikx}dk$

但这证明也有不严谨处, 比如. $M\eta\to 0$ 为什么成立, 也可能趋于∞.