复变积分

摘自邵陆兵讲义

2025.01.16.

一、定义：

$$dz = dx + i\,dy$$

$$\int_A^B f(z)\,dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

二、柯西定理：

单通域：$\oint_l f(z)\,dz = 0$

复通域：

积分区域和方向.

$$\oint_{\text{外围道}} f(z)\,dz = \sum_{(i)\in\text{内围道}} \oint_{L_i} f(z)\,dz$$

三、一个重要积分：

$$\oint_l (z-a)^n\,dz = 0$$

仅当 $n=-1$ 且围道包含 $z=a$ 时，积分才非 0，且为 $2\pi i$

（可用 $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$，$dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ 代入求解）

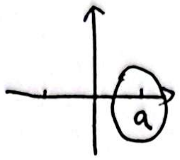
四、柯西公式：

1. 对任连续复变函数 $f(z)$，围道 l 围成了 $f(z)$ 的一个单通域 B 有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

a 是 B 中任意一点

实例：按以下路径述求积分：$I=\oint_l \frac{dz}{z^2-a^2}$，$a>0$



$$I=\oint_l \frac{\overbrace{\frac{1}{z+a}}^{f(z)}}{z-a}dz = 2\pi i\times \frac{1}{z+a}\Big|_{z=a} = \frac{\pi i}{a}$$

2. 导数形式：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

到下一章：复变级数 此处抽取洛朗级数的部分，编号用讲义中的章节编号

洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

收敛域为 $R_2<|z-z_0|<R_1$，$R_1=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$，$R_2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{-n-1}}{a_{-n}}\right|$，

如果$R_1<R_2$ ~~那~~ 则不存在绝对收敛的区域

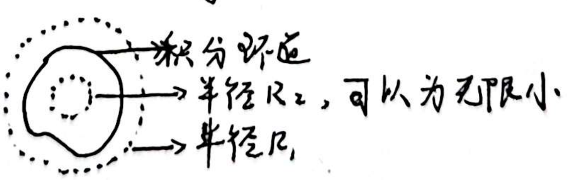
注意：z_0是级数的发散点，但不一定是和函数$f(z)$的发散点，

5.6.2 洛朗展开：

定理：若$f(z)$在以z_0为中心的环域$R_2<|z-z_0|<R_1$上解析，则对环域上作展开：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

C为绕环域一周的任意闭合通道. eg:



泰勒展开为洛朗展开一特例：

5.4.1 解析函数在单通域的泰勒展开：

定理：如果f(z)在以z_0为圆心的圆C内解析，则对C内任一点，
该复变函数可展开为幂级数：

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\varphi)}{(\varphi-z_0)^{k+1}}d\varphi=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

5.6.9 孤立奇点

$$f(z)=\underbrace{\cdots+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}}_{\text{主要部分或无限部分}}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots}_{\text{解析部分}}$$

留数

主要部分或无限部分
发散的主要供应项

解析部分

若负幂项为有限个，称该奇点为极点：

$$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+\underbrace{a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\cdots}_{\text{解析部分}}$$

$\lim_{z\to z_0}f(z)\to\infty$

则该极点为m阶极点，当m=1为单极点

6.1 留数定理

复变函数的围道积分等于$2\pi i$乘以围道中包围的所有奇点的留数和.

6.3 留数定理在积分中的应用

6.3.3 小圆弧引理

若 $z=b$ 是复变函数 $f(z)$ 的一个单极点，则在以 $z=b$ 为圆心，张角为 $\Delta\theta$，半径为 $\varepsilon\to0$ 的圆弧 C_ε 上积分等于：

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = i\Delta\theta\,\underbrace{\mathrm{Res}f(b)}_{z=b\text{处留数}}$$

6.3.4 大圆弧引理

如果复变函数在 $z\to\infty$ 的邻域内连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = K$，

则在以原点 $z=0$ 为圆心，半径为 $R\to\infty$，张角为 $\Delta\theta$ 的圆弧 C_R 上，

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = iK\Delta\theta$$

6.3.6 约旦引理

$f(z)$ 沿上半圆周 C_R：$z=Re^{i\theta}$，$(0<\theta<\pi,\ R\to\infty)$ 连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$.

对常数 $m>0$，有

$$I=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}\,dz=0$$

25.01.16

三种类型的积分可算：

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{R(\cos\theta, \sin\theta)}\, d\theta$$

↓

某一三角实函数，定义在 $[0, 2\pi]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx, \text{ 且 } \lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{imx}\, dx. \text{ 且 } \lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$