~~均一介质 2D 1D 3D 波动方程~~

~~Green function~~

位移场如何转到频域求导，与Green function相关

1. 矢量和标量表达：

$$U(k_1, k_2, k_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \; U(x_1, x_2, x_3)\, e^{-ik_1x_1} dx_1 \right) e^{-ik_2x_2} dx_2 \right) e^{-ik_3x_3} dx_3$$

"逐步分佈"

$$= \iiint u(x_1, x_2, x_3)\, e^{-i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)}\, dx_1 dx_2 dx_3 \; \cancel{dk_1 dk_2 dk_3}$$

矢量表达：

$$U(\mathbb{k}) = \iiint u(x)\, e^{-i\mathbb{k}x} \cdot d^3x$$

注意这里不是矢量的立方，而是dV，体积微元

一阶张量

输入矢量，反回标量

2. 求1阶导.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e_3}$$

$$\nabla U = \nabla \iiint u(x_1, x_2, x_3)\, e^{-i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)}\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= -ik_1\vec{e_1} \cdots + \cdots + \cdots$$

（错误!! 这里U(k₁ k₂ k₃) 和x都无关，如何求导！应基于反傅立叶变换求导）

正确：

$$\nabla U = \nabla \iiint U(k_1, k_2, k_3)\, e^{+i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)} \frac{1}{(2\pi)^3}\, dk_1 dk_2 dk_3$$

$$= \iiint U(k_1, k_2, k_3)\, e^{i(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)} \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot ik_1\vec{e_1}\, dk_1 dk_2 dk_3$$

$$+ \cdots ik_2\vec{e_2} \cdots + \cdots ik_3\vec{e_3} \cdots$$

注意不能把 $i k_1 \vec{e_1}$ 拿到积分外面去，这是一个被积变量.

则新的波动方程在波数一频率域为：

$$\iiint d\mathbb{k}^3 \int d\omega \left(\cdots\cdots \quad \right) = 0$$

$\uparrow$

$\omega, k, \tilde{u}(\omega, \mathbb{k})$ 都在里面，则可以拿掉积分号.

接上页：

$$\nabla U = \iiint U(k_1 k_2 k_3)\, e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)} \frac{1}{(2\pi)^3}\, i(k_1 \vec{e_1} + k_2 \vec{e_2} + k_3 \vec{e_3})\, dk_1 dk_2 dk_3$$

则其矢量式为：

$$\nabla U = \iiint U(\mathbb{k})\, e^{i \mathbb{k} x} \frac{1}{(2\pi)^3}\, i \mathbb{k}\, d\mathbb{k}^3$$

$\uparrow$

注意是 $dk_1 dk_2 dk_3$

同理：二阶导的标量展式为： $(ik_1)^2 + (ik_2)^2 + (ik_3)^2$

矢量式为： $(i\mathbb{k})^2$，

$\}$ 二者吻合.