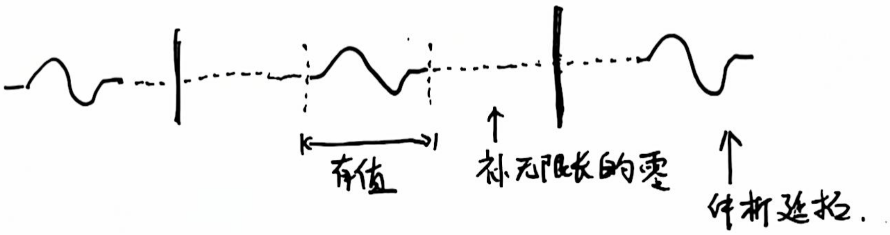
FFT笔记 24.12.17

连续非周期函数的傅立叶变换：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

推导：

① $f(t)$ 定义在任意大 $(-\frac{l}{2},\frac{l}{2})$ 上. $g(t)=\begin{cases} f(t), & t\in(-\frac{l}{2},\frac{l}{2})\\ 0, & t\notin(-\frac{l}{2},\frac{l}{2})\end{cases}$. 将$g(t)$延展成周期函数. $f(t)=\lim_{l\to\infty}g^l(t)$



② 用分析周期函数的方法分析.

平时用的FFT：

是基于周期函数的傅立叶变换的离散化、不是上文公式的离散化.

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{l}\right)$$

复数形式

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{2n\pi i t}{l}}$$

$$C_n=\frac{1}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f(t)e^{-\frac{2n\pi i t}{l}}dt$$，离散化 $l=Ndt$. $t=Mdt$. 重新理一下角标.

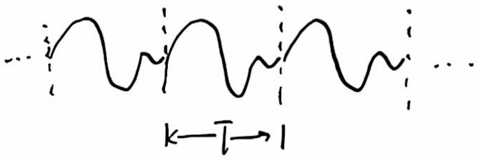
$$\cancel{F_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_n e^{i2\pi kn/N}}$$

$$\cancel{f_n=\sum_{K=0}^{N_k-1}F_k e^{i2\pi kn/N}R(F_k)\cdot 2}$$

$$F_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_n e^{-i2\pi kn/N}$$

$$f_n=\sum_{K=0}^{N_k-1}\mathrm{Re}\left(F_k e^{i2\pi kn/N}\right)\cdot 2$$

$$C_n^*=C_{-n}.$$



FFT是直接周期延拓，不补0。所以不taper的话就很多杂乱数据。

负频率：对FFT

$d\omega = \frac{2\pi}{T}$，分成 $m\frac{2\pi}{T}$，$m=0\cdots+\infty$（一般取得越多，高频成分越丰富，还原度越高）

对实域信号 $f(t)$

$C_n^* = C_{-n}$（根据 C_n 表达式有）

则 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2n\pi i t}{T}}$ 合成时，eg C_{n_0} 和 C_{-n_0} 成分相加时：

$$
\begin{aligned}
& C_{n_0} e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}} + C_{-n_0} e^{-\frac{2n_0\pi i t}{T}} \\
&= C_{n_0} e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}} + C_{n_0}^* \left(e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right)^* \\
&= C_{n_0} e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}} + \left(C_{n_0} e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right)^* \\
&= 2Re\left\{C_{n_0} e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right\}
\end{aligned}
$$

乘2.

所以计算时可利用此性质只算实部即可

相位是 F_k 的幅角

$$2Re\left\{C_{n_0} e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right\} = 2Re\left(Ae^{i\phi_0} e^{\frac{i n_0\pi t}{T}}\right)$$

$$= \underset{\text{振幅}}{\underline{2A}}\cos\left(\frac{2n_0\pi}{T}t + \underset{\text{相位}}{\underline{\phi_0}}\right)$$

总结：简要

虚部被抵消了，实部扩大2倍成了振幅，实虚部结合有了相位。

eg：$2\sin t$ 和 $2\sin(t+1)$ 相位差 1

理论公式非周……变换的
虚部和负频率:

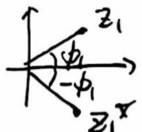
补充:

① $z_1^* z_2^* = (z_1 z_2)^*$

理解1: $(A+Bi)^*(C+Di)^* = \cdots\cdots$ 暴力展开证明

理解2: $A_1e^{i\phi_1}\cdot A_2e^{i\phi_2} = A_1A_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$ 即振幅变积, 相位相加

$$A_1e^{-i\phi_1}\cdot A_2e^{-i\phi_2} = A_1A_2e^{i(-(\phi_1+\phi_2))} = (z_1z_2)^*$$



共轭即相位取相反数

② $(e^{i\phi})^* = e^{-i\phi}$

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(e^{-i\omega t})^* dt = F^*(\omega)$$

则合成回去时, f(t)为各成分相加, 每一成分都是~~虚~~复数. eg:

$F(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$, $F(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$.

但加起上后为实数. 因:

$$A_0e^{i\omega_0 t}e^{i\phi_0} + A_0e^{-i\phi_0}e^{-i\omega_0 t} = 2\underbrace{A_0}_{\text{振幅}}\cos(\omega_0 t+\underbrace{\phi_0}_{F(\omega)\text{的幅角}})$$

没有虚部了.

"只取实部"意味着相位全置0, 但振幅, 频率信息保留.

对离散FFT(numpy)而言, 只取实部只丢失相位. 但是对连续非周期傅立叶变换(平时用的理论公式)而言, 振幅是实部和虚步共同组合起来的复数的模长, 不能只取实部

对于求解一个方程, 试探解是cos的时候, 直接带入cos求偏导很麻烦, 可以带入试探解e^ix,但是要注意, 这只是为了方便! 如果该方程是实数域的, 则需要在最后取实部, 把虚步扔掉