25.01.07 L1

FFT笔记：连续非周期的负频、振幅、相位

学自：邵陆兵 $P_{140} \sim P_{143}$.

非周期函数的傅立叶变换对：

形式1：

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{\infty} A(k)\cos kx \, dk + \int_0^{\infty} B(k)\sin kx \, dk \quad \text{合成} \\ A(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos kx \, dx \\ B(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin kx \, dx \end{cases} \quad \text{分解}$$

形式2：

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+ikx} \, dk \quad \text{合成} \\ F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad \text{分解} \end{cases}$$

两形式关系：

$$\begin{cases} \frac{A(k)+iB(k)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} \, dx \\ \frac{A(k)-iB(k)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx = \frac{1}{2\pi} F(k) \end{cases}$$

F(k)的R和I 实虚部和 A(k) B(k) 能对应上

振幅谱：$C(k) = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}$，$C(k) = \sqrt{R\left[\frac{F(k)}{\pi}\right]^2 + I\left[\frac{F(k)}{\pi}\right]^2}$

相位谱：$\Phi(k) = \arctan\frac{B(k)}{A(k)}$，$\Phi(k) = \arctan\frac{-I[F(k)]}{R[F(k)]}$

$f(x) = \int_0^{\infty} C(k)\cos(kx - \Phi(k)) \, dk$，振幅相位谱形式要与合成形式对应上，不能用 $\arctan\frac{B}{A}$ 配 $\sin(kx - \Phi(k))$ 来合成

注意 $k>0$!!! 无负数!!!

25.01.07

① 相位谱 $\arctan\frac{B(k)}{A(k)}$ or $\arctan\frac{A(k)}{B(k)}$?

$$f(x) = \int_0^\infty A(k)\cos kx\,dk + \int_0^\infty B(k)\sin kx\,dk$$

$$= \int_0^\infty C(k)\left[\cos kx\cos\Phi(k) + \sin kx\,dk\,\sin\Phi(k)\right]dk$$

⇑ cc+ss 的二倍角公式

$$= \int_0^\infty C(k)\cos(kx - \Phi(k))\,dk$$

⇑ cos 为基.

$$\Phi(k) = \arctan\frac{B(k)}{A(k)}$$

也可为 $f(x) = \int_0^\infty C(k)\left[\cos kx\sin\Phi(k) + \sin kx\cos\Phi(k)\right]dk$

⇑ cs + sc

$$= \int_0^\infty C(k)\sin(kx + \Phi(k))\,dk$$

⇑ sin 为基

$$\Phi(k) = \arctan\frac{A(k)}{B(k)}$$

⇑ 理所应当和上个 cos 为基的差了 $\frac{\pi}{2}$

$\arctan x \pm \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$\sin(x)$ 和 $\cos x$ 作基 也差 $\frac{\pi}{2}$

② $A(k) - iB(k) = \frac{1}{\pi}F(k)$ 如何得到?

把形式 1 里 $\cos kx$, $\sin kx$ 转成 e 指数形式，即可推出，略.