FFT笔记 24.12.17

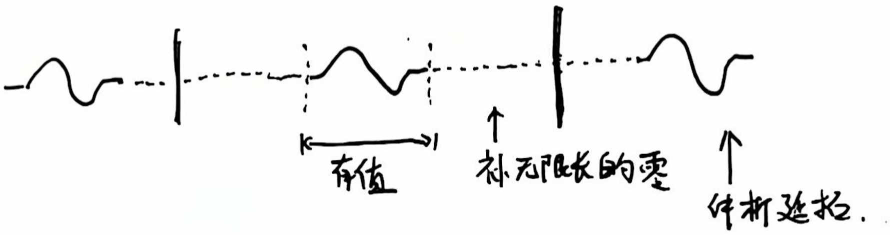
连续非周期函数的傅立叶变换:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

推导:

① $f(t)$ 定义在任意大区 $(-\frac{l}{2},\frac{l}{2})$ 上. $g(t)=\begin{cases} f(t), & t\in(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}) \\ 0, & t\notin(-\frac{l}{2},\frac{l}{2})\end{cases}$, 将 $g(t)$ 延展成

周期函数, $f(t)=\lim_{l\to\infty} g^l(t)$



② 用分析周期函数的方法分析.

平凡的FFT:

是基于周期函数的傅立叶变换的离散化、不是上文公式的离散化.

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{2n\pi t}{l}\right)$$

复数形式

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{2n\pi i t}{l}}$$

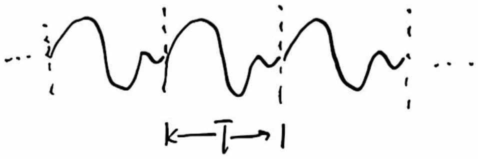
$$c_n=\frac{1}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}f(t)e^{-\frac{2n\pi i t}{l}}dt$$, 离散化 $l=Ndt$. $t=\overset{M}{k}dt$. 重新理一下角标.

$$\cancel{F_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_n e^{i2\pi kn/N}}$$

$$\cancel{f_n=\sum_{k=0}^{N_k-1}F_k e^{i2\pi kn/N}\ R(F_k)\cdot 2}$$

$$\begin{cases} F_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_n e^{-i2\pi kn/N} \\ f_n=\sum_{k=0}^{N_k-1}\mathrm{Re}\left(F_k e^{i2\pi kn/N}\right)\cdot 2\end{cases}$$

$c_n^*=c_{-n}$.



FFT是直接周期延拓，不补0，所以不taper的话就很多杂乱数据。

负频率：对FFT

$d\omega=\frac{2\pi}{T}$，分解成 $m\frac{2\pi}{T}$，$m=0\cdots+\infty$（一般取得越多，高频成分越丰富，还原度越高）

对实域信号 $f(t)$

$C_n^*=C_{-n}$（根据 C_n 表达式有）

则 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{2n\pi i t}{T}}$ 合成时，eg C_{n_0} 和 C_{-n_0} 成分相加时：

$$
\begin{aligned}
&C_{n_0}e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}+C_{-n_0}e^{-\frac{2n_0\pi i t}{T}}\\
&=C_{n_0}e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}+C_{n_0}^*\left(e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right)^*\\
&=C_{n_0}e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}+\left(C_{n_0}e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right)^*\\
&=2Re\left\{C_{n_0}e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right\}
\end{aligned}
$$

所以计算时可利用此性质只算实部即可 乘2.

相位是 F_k 的幅角

$$2Re\left\{C_{n_0}e^{\frac{2n_0\pi i t}{T}}\right\}=2Re\left(Ae^{i\phi_0}e^{\frac{in_0\pi t}{T}}\right)$$

$$=\underbrace{2A}_{\text{振幅}}\cos\left(\frac{2n_0\pi}{T}t+\underbrace{\phi_0}_{\text{相位}}\right)$$

总结：通俗

虚部被抵消了，实部扩大2倍成了振幅，实虚部结合有了相位。

eg：$2\sin t$ 和 $2\sin(t+1)$ 相位差1

理论公式 非周…变换 的

虚部和负频率:

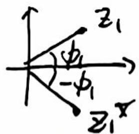
补充:

① $z_1^* z_2^* = (z_1 z_2)^*$

理解1: $(A+Bi)^*(C+Di)^* = \cdots\cdots$ 暴力展开证明

理解2: $A_1e^{i\phi_1}\cdot A_2e^{i\phi_2} = A_1A_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$ 即振幅相积, 相位相加

$$A_1e^{-i\phi_1}\cdot A_2e^{-i\phi_2} = A_1A_2e^{i(-(\phi_1+\phi_2))} = (z_1z_2)^*$$



共轭即相位取相反数

② $(e^{i\phi})^* = e^{-i\phi}$

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(e^{-i\omega t})^* dt = F^*(\omega)$$

则合成回去时, f(t)为各成分相加, 每一成分都是~~虚~~复数. eg:

$F(\omega_0)e^{i\omega_0 t}$、$F(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$.

但加起来后为实数. 因:

$$A_0e^{i\omega_0 t}e^{i\phi_0} + A_0e^{-i\phi_0}e^{-i\omega_0 t} = \underbrace{2A_0}_{\text{振幅}}\cos(\omega_0 t + \underbrace{\phi_0}_{F(\omega)\text{的幅角}})$$

没有虚部了、

"只取实部"意味着相位全置0, 但振幅, 频率信息保留.