Fourier Acoustics 散射问题求解前补知识

24.03.31

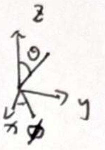
球谐函数

$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} P_{tt} = 0$.

将 $P(\vec{x},t) = B(\vec{x})T(t)$ 有: $T\nabla^2 B - \frac{B}{c^2}T_{tt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{T}{\frac{1}{c^2}T_{tt}} = \frac{1}{-k^2} \text{ 这样定义是为了量纲} \\ \frac{\nabla^2 B}{B} = \cancel{\frac{1}{k^2}} -k^2 \end{cases}$

则有 $\begin{cases} Tk^2 + \frac{1}{c^2}T_{tt} = 0 \cdots ① \boxed{\text{<6.11>}} \\ \nabla^2 B + k^2 B = 0 \cdots ② \end{cases}$

$B(\vec{x})$ 又分离为 $R(r)Y(\theta,\varphi)$, 将 ∇ 换到极坐标下:



$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)Y + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\cdot R + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\cdot R + k^2\cdot Y\cdot R = 0$$

乘 $\frac{r^2}{YR}$:

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)\frac{1}{R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{1}{Y} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\cdot\frac{1}{Y} + k^2r^2 = 0$$

k^2r^2 给R因为含r了.
不能给$Y(\theta,\varphi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)\frac{1}{R} + k^2r^2 = l(l+1) \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \boxed{\text{<6.10>}} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{1}{Y} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\frac{1}{Y} = -l(l+1) \cdots ④ \end{cases}$$

再将 Y 分离成 $\Phi(\phi)$ 和 $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\frac{1}{\Theta} + \underbrace{\frac{1}{\sin\theta^2}}_{\text{不属于}\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\cdot\frac{1}{\Phi} = -l(l+1)$$

$-l(l+1)$ 给 Θ, 因为下一步含θ了.

乘 $\sin\theta^2$

$$\Longrightarrow \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\frac{1}{\Theta} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\cdot\frac{1}{\Phi} = -l(l+1)\sin\theta^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\cdot\frac{1}{\Phi} = -m^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤ \boxed{\text{<6.8>}} \\ \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\frac{1}{\Theta} + l(l+1)\sin\theta^2 = m^2 \cdots ⑥ \boxed{\text{<6.9>}} \end{cases}$$

① ③ ⑤ ⑥ 即为 t, r, φ, θ 分离出的4个方程.

待解决2个问题：

1. $l(l+1)$ 为什么这么取. 因为分离变数法是可以任取常数的.

2. m^2 为什么这么取.

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \\[2ex]
\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \\[2ex]
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right) + k^2 R - \dfrac{l(l+1)}{r^2}R = 0 \\[2ex]
\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2T}{dt^2} + k^2 T = 0
\end{cases}
$$

1. 能在 $\nabla^2 P = 0$ 的方程中给出 $l(l+1)$ 为整数. $\nabla^2 P = \frac{1}{c^2}P_{tt}$ 还没想明白.

在 $\nabla^2 P = 0$ 中. 相当于此处第一步分离 t 的步骤不用做了、

$\nabla^2 B = 0$. (相当于在④中取 $k=0$)

那么：③式变为：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\cdot r^2\right)\frac{1}{R} = L. \quad L \text{为任意常数}.$$

代入 $R = r^k$ 的试探解有：

$k(k+1) = L$. 即 $L = k(k+1)$ 为这样一种常数形式时. 可使得 r^k 为关于 R 项方程的解.

那么：既然 L 可为任意常数来构建分离变数法. 何不取 $l(l+1)$.

如此 $k(k+1) = L$ 的解为 $\begin{cases} k = l \\ k = -l-1 \end{cases}$

方程通解为 $R(r) = C_1 r^l + \dfrac{C_2}{r^{l+1}}$ (2阶方程有2个常数)

2. 为什么是 m^2:

对方程：$\frac{d\Phi^2}{d\phi^2}+\lambda\Phi=0$.

$$\Phi=A_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\phi}+A_2 e^{\sqrt{-\lambda}\phi}$$

对于周期系统 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi+4\pi)\cdots$ 〈即.转一圈坐标回来,位移不变〉

只有 $\sqrt{\lambda}$ 为整数,才能使得此周期性成立.

故取 $\lambda=m^2$. $m=0.1.2.\cdots\cdots$

取0时 Φ 退化为常数 A_3

取 $-1,-2,-3\ldots$ 时 λ 的值与 $m=0.1.2.\cdots$ 一样,所以没有必要取负数.

$l(l+1)$, m^2 问题解决 □

连带勒让德:

取 $x=\cos\theta$. $x\in[-1,1]$ 代入含 Θ 的方程:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}=\frac{\partial\Theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{\partial\Theta}{\partial x}(-\sin\theta)\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{+\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}=-\frac{\partial\Theta}{\partial x}$$

则:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta^2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=\frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((1-x^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)$$

代入 Θ 方程有:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-2x\frac{\partial\Theta}{\partial x}+l(l+1)\Theta-\frac{m^2}{1-x^2}\Theta=0$$

$m=0$ 时此项退化为0. 即为勒让德方程.

$m=0$ 时即 $\Phi=A_3$ 取常数. 方程不随 ϕ 变化. 以 z 轴旋转对称.