Full waveform inversion in the frequency domain using direct iterative T-matrix methods

Morten Jakobsen and Bjørn Ursin 2015.

2.1 Lippmann-Schwinger and Dyson equations 表达扰动的方程

2.2 Matrix representation of L-S and Dyson equations

2.2.1 离散化

2.2.2 source-independent relations between wavefields and propagates

2.2.3 source-dependent ...

2.3 T-matrix 表达.

定义:

$\psi(x)$: 波场

$f(x)$: source density

$c(x)$: variable velocity. (同时 constant density)

$\psi^{(0)}(x)$: reference medium 下波场. 和 $\psi(x)$ 相同的作力

$G^{(0)}(x, x')$: reference medium 下的格林函数.

假设满足

Helmholtz equation:

$$L(x)\psi(x) = -f(x), \quad L(x) = \nabla^2 + \frac{w^2}{c^2(x)} \quad \cdots\cdots \text{①②}$$

define: Green function:

$$L(x)\, G(x, x') = -\delta(x - x') \quad \cdots\cdots \text{④}$$

则波场可表示为:

$$\psi(x) = \int dx'\, G(x, x')\, f(x') \quad \cdots\cdots \text{③}$$

定义扰动：

$$L(x)=L^{(0)}(x)+\delta L(x)\ ,\quad L^{(0)}(x)=\nabla^2+\frac{\omega^2}{c_0^2(x)}\quad \cdots\cdots ⑤⑥$$

$L^{(0)}$, c_0 是针对 reference medium. [并不一定均一]

$$\delta L(x)=\omega^2\left(\frac{1}{c(x)^2}-\frac{1}{c_0^2(x)}\right),\quad \cdots\cdots ⑦$$

$\delta L(x)$ 表征了在 x 处的不均一性引起的 scattering potential

则①变为：

$$\left[L^{(0)}(x)+\delta L(x)\right]\psi(x)=-f(x)$$

$$L^{(0)}(x)\psi(x)=-f(x)\underbrace{-\delta L(x)\psi(x)}_{\text{A virtual source}}\quad \cdots\cdots ⑧$$

类似于③④有：

$$\psi^{(0)}(x)=\int dx'\,G^{(0)}(x,x')f(x')\quad \cdots\cdots ⑩.$$

$$L^{(0)}(x)\,G^{(0)}(x,x')=-\delta(x-x')\quad \cdots\cdots ⑪$$

根据⑧和⑪有：

$$\psi(x)=\int dx'\,G^{(0)}(x,x')\left\{f(x')+\delta L(x')\psi(x')\right\}$$

⑧里介质是ref. $L^{(0)}(x)$
所以此处用 $G^{(0)}$ 而
非 G

即⑧的体力

$$=\int dx'\,G^{(0)}(x,x')f(x')+\int dx'\,G^{(0)}(x,x')\,\delta L(x')\psi(x')$$

$$=\psi^{(0)}(x)+\int dx'\,G^{(0)}(x,x')\,\delta L(x')\psi(x')\quad \cdots\cdots ⑨$$

下面对格林函数也做相似操作，

根据⑩有：

$$[L^{(0)}(x)+\delta L(x)]G(x,x')=-\delta(x-x')$$

$$L^{(0)}(x)G(x,x')=-\delta(x-x')-\delta L(x)G(x,x') \quad \cdots\cdots \text{A1}$$

则：

$$G(x,x')=\int dx''G^{(0)}(x,x'')\{\delta(x''-x')+\delta L(x'')G(x'',x')\}$$

A1方程令质 $L^{(0)}(x)$ 则其 Green function 为 $G^{(0)}$

A1 外体力项

$$=\int dx''G^{(0)}(x,x'')\delta(x''-x')+\int dx''G^{(0)}(x,x'')\delta L(x'')G(x'',x')$$

δ函数积分性质

$$=G^{(0)}(x,x')+\int dx''G^{(0)}(x,x'')\delta L(x'')G(x'',x') \quad \cdots\cdots ⑫$$

为了便于离散化，进行了如下操作：

define： $m(x)\equiv\dfrac{1}{C(x)^2}-\dfrac{1}{C^{(0)}(x)^2}$

$$\bar{G}^{(0)}(x,x')\equiv\omega^2G^{(0)}(x,x')$$

$\bar{V}(x_1,x_2)\equiv m(x_1)\delta(x_1-x_2)$，这里 x_1 和 x_2 不是分量的意思，

是两个变量矢量，类似于 x'，x''，只不过之前用了，再用 x''' 和 x'''' 不方便.

~~则：⑪⑫化为~~

注意：

$$m(x_1)\delta(x_1-x_2)=m(x_2)\delta(x_1-x_2),\quad \delta(x_1-x_2)=\delta(x_2-x_1)$$

对⑨把被积变量 x' 换成 x_1 有:

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + \int dx_1\, G^{(0)}(x, x_1)\, \delta L(x_1)\, \psi(x_1)$$

利用 δ 把 x_1 换成 x_2

$$= \psi^{(0)}(x) + \int dx_1 \int dx_2\, G^{(0)}(x, x_2)\, \delta L(x_2)\, \psi(x_2)\, \delta(x_1 - x_2)$$

$$= \psi^{(0)}(x) + \int dx_1 \int dx_2\, G^{(0)}(x, x_2)\, \omega^2\left(\frac{1}{c(x_2)^2} - \frac{1}{c_0(x_2)^2}\right) \psi(x_2)\, \delta(x_1 - x_2)$$

引入新定义

$$= \psi^{(0)}(x) + \int dx_1 \int dx_2\, \bar{G}^{(0)}(x, x_2)\, \bar{V}(x_1, x_2)\, \psi(x_2) \quad \cdots\cdots ⑬$$

对⑫也有:

$$\bar{G}(x, x') = \bar{G}^{(0)}(x, x') + \int dx_1 \int dx_2\, G^{(0)}(x, x_1)\, \cancel{\delta L(x)}\, \bar{V}(x_1, x_2)\, \bar{G}(x_2, x') \cdots ⑭$$

和 ψ. G 相关的⑨⑫分别叫: Lippmann-Schwinger and Dyson 方程.

下面开始离散化:

定义: 接收器的位置: x_r, $r = 1 \cdots N_r$

target volume Ω.

scattering potential δL is non-zero 的 N 个 grid blocks. block 的质心是 x_p, $p = 1 \cdots N$ 体积是 δV_p

n: 遍历空间中的点, 可能与接收器或散射体位置相同

首先: 对 $\delta(x_1 - x_2)$ 作数值近似:

$$\cancel{\delta(x_1 - x_2)} = \delta(x_p - x_q) = \frac{\delta_{pq}}{\delta V_p}, \quad \delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 1, & p = q \end{cases}$$

注意这里只用了微元体积分之一乘 δ_{pq} 作狄拉克函数!!

$$\begin{cases} G^{(0)}(x_p, x_q) \equiv G^{(0)}_{pq}, \quad p \neq q \\ \delta V_p G^{(0)}_{pp} \equiv \int_{\Omega_p} dx\, G^{(0)}(x_p, x) \end{cases}$$

， Ω_p 是单个block占据的以 x_p 为质心的区域 …… ㉑㉒

$$\bar{V}(x_p, x_q) \equiv \bar{V}_{pq} = m_p \frac{\delta_{pq}}{\delta V_p} \quad \cdots\cdots \quad ⑳$$

注意符号 δV 的"V"是体积
$\bar{V}(x_1, x_2)$ 和 $\bar{V}(x_p, x_q)$，$\bar{V}_{pq}$ 的"V"是指另一个物理量。

则⑬：

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + \int_\Omega dx_1 \int dx_2\, \bar{G}^{(0)}(x, x_1) \bar{V}(x_1, x_2) \psi(x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$\psi_n = \psi_n^{(0)} + \sum_{p=1}^{N} \delta V_p \sum_{q=1}^{N} \delta V_q \bar{G}^{(0)}_{np} \bar{V}_{pq} \psi_q \quad \cdots\cdots \quad ⑱$$

ψ_n：可遍历空间

$\sum_{p=1}^{N}$，$\sum_{q=1}^{N}$：只遍历 $\delta L(x) \neq 0$ 即有扰区域

同理⑭为：

$$\bar{G}_{mn} = G^{(0)}_{mn} + \sum_{p=1}^{N} \delta V_p \sum_{q=1}^{N} \delta V_q \bar{G}^{(0)}_{np} \bar{V}_{pq} \bar{G}_{qn} \quad \cdots\cdots \quad ⑲$$

为了简洁，定义：

$$V_{pq} = m_p \delta_{pq} \delta V_q = \bar{V}_{pq} \delta V_p \delta V_q \quad \cdots\cdots \quad ㉕$$

注意又出现了一个"V"的用法。

则⑱⑲可写作：

$$\begin{cases} \psi_n = \psi_n^{(0)} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \bar{G}^{(0)}_{np} V_{pq} \psi_q & \cdots\cdots \quad ㉓ \\ \bar{G}_{mn} = \bar{G}^{(0)}_{mn} + \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \bar{G}^{(0)}_{mp} V_{pq} \bar{G}_{qn} & \cdots\cdots \quad ㉔ \end{cases}$$

下面要区分 source-dependent 和 source-independent，主要是为了方便.

↓ eg: ⑩　　　↓ eg: ⑪⑨

因为，source-independent 和 ω^2 相关 eg: $\bar{G}^{(0)}(x,x') \equiv \omega^2 G^{(0)}(x,x')$

<u>对 source-independent:</u>

定义：R: receiver，V: discretized scattering

这样一来 ㉓ 就不用 "n" 了，遍历 R 即可，N 也即遍历散射体 V.

把求和转为矢量和矩阵即可：

eg: $A x = A_{ij} x_j$　　$\begin{array}{cc} & j \\ i & \square \end{array} \Big| j = \Big| i$　　i 行等式（遍历角标）　j 行相乘求和（哑指标）

也可遍历 V 接收，相当于散射到散射体内的波场.

则：㉓㉔ 化为：

$$\begin{cases} \psi_R = \psi_R^{(0)} + \bar{G}_{RV}^{(0)} V \psi_V & \cdots ㉖ \\ \psi_V = \psi_V^{(0)} + \bar{G}_{VV}^{(0)} V \psi_V & \cdots ㉗ \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{G}_{RV} = \bar{G}_{RV}^{(0)} + \bar{G}_{RV}^{(0)} V \bar{G}_{VV} & \cdots ㉘ \\ \bar{G}_{VV} = \bar{G}_{VV}^{(0)} + \bar{G}_{VV}^{(0)} V \bar{G}_{VV} & \cdots ㉙ \end{cases}$$

理解：㉔ 中 $\bar{G}_{mn}$ 的函义即 n 处到 m 处的波.

在此处为 V→R 或 V→V. mn 转为 RV（或 VV），右侧 pq 为哑指标，遍历散射体，此处用作 "V"

$\bar{G}_{VV}$ 的 V 不具有哑指标遍历求和函义，是一个双下标标签.

$\bar{G}_{VV}$：　$\begin{array}{cc} N\text{（遍历V）} & \\ \square & N\text{（遍历V）} \end{array}$

对Source-dependent relations between wavefields and propagators

有源 x_s，$s=1\cdots N_s$

ref medium 下的波场有:

$$\psi^{(0)}(x) = \int dx' G^{(0)}(x, x') f(x') \quad \cdots\cdots \text{ copy from } ⑩$$

离散有:

$$f(x) = \sum_{s=1}^{N_s} \bar{f}_s \delta(x - x_s)$$ ，$\bar{f}_s$ 和 ω 有关. 因 $f(x,t)$ 变到频率域了 $f(x,\omega)$

$$\psi_n^{(0)} = \sum_{s=1}^{N_s} G_{ns}^{(0)} \bar{f}_s \quad \cdots\cdots \text{ ㉛}$$

定义矢量 $\bar{\mathbb{f}}$，N_s 维，包含源分布的信息，根据㉛，P③有:

$$\begin{cases} \Psi_R^{(0)} = \mathbb{G}_{RS}^{(0)} \bar{\mathbb{f}} & \cdots\cdots ㉜ \\ \Psi_R = \mathbb{G}_{RS} \bar{\mathbb{f}} & \cdots\cdots ㉝ \end{cases}$$

代入 P_6 ㉖有:

$$\mathbb{G}_{RS} \bar{\mathbb{f}} = \mathbb{G}_{RS}^{(0)} \bar{\mathbb{f}} + \bar{\mathbb{G}}_{RV}^{(0)} \mathbb{V} \mathbb{G}_{VS} \bar{\mathbb{f}}$$

$$\underbrace{\mathbb{G}_{RS}}_{N_R \times N_S \text{ 维矩阵.}} = \mathbb{G}_{RS}^{(0)} + \bar{\mathbb{G}}_{RV}^{(0)} \mathbb{V} \mathbb{G}_{VS} \quad \cdots\cdots ㉞$$

同理，若不传到 R，传到 V 处，有:

$$\begin{cases} \Psi_V^{(0)} = \mathbb{G}_{VS}^{(0)} \bar{\mathbb{f}} & \cdots\cdots ㉟ \\ \Psi_V^{t} = \mathbb{G}_{VS} \bar{\mathbb{f}} & \cdots\cdots ㊱ \end{cases}$$

$$\underbrace{\mathbb{G}_{VS}}_{N \times N_S \text{ 维矩阵.}} = \mathbb{G}_{VS}^{(0)} + \bar{\mathbb{G}}_{VV}^{(0)} \mathbb{V} \mathbb{G}_{VS} \quad \cdots\cdots ㊲$$

T-matrix 方法：

定义：$\mathbb{V}\psi_v = \mathbb{T}\psi_v^{(0)}$

可见 $\mathbb{T}$ 一定程度上描述了 ref 波场和散射后的波场的关系。

对 source-independent：

代入 P6 ㉗ 化为：

$$\psi_v = \psi_v^{(0)} + \bar{G}_{vv}^{(0)}\mathbb{T}\psi_v^{(0)}$$

$$\mathbb{V}\psi_v = \mathbb{V}\psi_v^{(0)} + \mathbb{V}\bar{G}_{vv}^{(0)}\mathbb{T}\psi_v^{(0)} \quad \downarrow \text{同乘} \mathbb{V}$$

$$\mathbb{T}\psi_v^{(0)} = \mathbb{V}\psi_v^{(0)} + \mathbb{V}\bar{G}_{vv}^{(0)}\mathbb{T}\psi_v^{(0)} \quad \downarrow \text{用} \mathbb{T} \text{定义代入}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{V} + \mathbb{V}\bar{G}_{vv}^{(0)}\mathbb{T} \quad \cdots (42) \quad \downarrow \text{since } \psi_v^{(0)} \text{ is arbitrary. 因略去}$$

然后有：$\mathbb{T}\bar{G}_{vv}^{(0)} = \mathbb{V}\bar{G}_{vv}$?? 见 P9 补充

代入 P6 ㉘㉙ 有：

$$\begin{cases} \bar{G}_{Rv} = \bar{G}_{Rv}^{(0)} + \bar{G}_{Rv}^{(0)}\mathbb{T}\bar{G}_{vv}^{(0)} \\ \bar{G}_{vv} = \bar{G}_{vv}^{(0)} + \bar{G}_{vv}^{(0)}\mathbb{T}\bar{G}_{vv}^{(0)} \end{cases}$$

对 source-dependent：，代入 P7 ㉟㊱ 有：

$$\mathbb{V}(G_{vs}^{(0)}\bar{f}) = \mathbb{T}(G_{vs}^{(0)}\bar{f})$$

$$\mathbb{V}G_{vs} = \mathbb{T}G_{vs}^{(0)}$$

P7 ㉞㊲ 变为

$$\begin{cases} G_{RS} = G_{RS}^{(0)} + \bar{G}_{Rv}^{(0)}\mathbb{T}G_{vs}^{(0)} \\ G_{vs} = G_{vs}^{(0)} + \bar{G}_{vv}^{(0)}\mathbb{T}G_{vs}^{(0)} \end{cases}$$

至此，非均质下的格林函数表示全用 ref 的得到。下面就是求出 $\mathbb{T}$

由P8 (42)：$T = V + V\bar{G}^{(0)}_{vv} T$

得：$T = (I - V G^{(0)}_{vv})^{-1} V$

$\downarrow$

单位矩阵

~~若若"收敛"，则用Born序列求和收敛，则~~

$\cancel{T = V}$

若求逆太难，也可用Born求(42)：

$$T = V\sum_{n=0}^{\infty}(G^{(0)}_{vv}V)^n. \quad \text{前提是 } \|\bar{G}^{(0)}_{vv}V\|<1$$

补充证明 $T\bar{G}^{(0)}_{vv} = V\bar{G}_{vv}$

证：由P8 (42)同乘$G^{(0)}_{vv}$有：

$$TG^{(0)}_{vv} = VG^{(0)}_{vv} + VG^{(0)}_{vv}TG^{(0)}_{vv} \cdots\cdots (A2)$$

由P6 (29)同乘V有：

$$V\bar{G}_{vv} = VG^{(0)}_{vv} + VG^{(0)}_{vv}V\bar{G}_{vv} \cdots\cdots (A3)$$

(A2)-(A3)有：

$$(TG^{(0)}_{vv} - V\bar{G}_{vv}) = VG^{(0)}_{vv}(TG^{(0)}_{vv} - V\bar{G}_{vv})$$

要恒成立，则 $TG^{(0)}_{vv} - V\bar{G}_{vv} = 0$ □

注：想的是，如果 $TG^{(0)}_{vv} = V\bar{G}_{vv}$，会有什么结果，直接代入。

$TG^{(0)}_{vv} = VG^{(0)}_{vv} + VG^{(0)}_{vv}TG^{(0)}_{vv}$ （由定义乘$G^{(0)}_{vv}$构建）

$V\bar{G}_{vv} = VG^{(0)}_{vv} + VG^{(0)}_{vv}V\bar{G}_{vv}$ 假设已证了，

$\bar{G}_{vv} = G^{(0)}_{vv} + G^{(0)}_{vv}V\bar{G}_{vv}$ 这个式子前面已经有了P6 (29).

那么，从后倒上去，即能证明所需等式。