Date / /

帕塞瓦尔定理 Parseval's theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|G(\omega)|^2\,d\omega$$ ，也有 $$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{g(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,\overline{G(\omega)}\,d\omega$$

加杠是共轭

证明：

① $$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{i\omega t}\,dt\right\}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\,G^{*}(\omega)\,d\omega$$ 注：$*$ 和 — 上划线都表共轭.

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|^2\,d\omega$$

$|z_1|^2=z_1\cdot z_1^*$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$$\overline{\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}\,d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{g(t)}\cdot\overline{e^{-i\omega t}}\,d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

实数

② $$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{g(t)}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\right\}}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{G(\omega)}\,e^{-i\omega t}\,d\omega\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,\overline{G(\omega)}\,d\omega \qquad \square$$