Classical FWI

Classical FWI

一、前置知识：

1. $\tau_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$

2. $\rho \ddot{u}_i = f_i + \tau_{ij,j}$

3. $\int_V (f - \rho\ddot{u})\cdot v\,dV + \int_S T(u,n)\cdot v\,dS = \int_V (g - \rho\ddot{v})\cdot u\,dV + \int_S T(v,n)\cdot u\,dS$

进而针对方程：

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{in} = \delta_{in}\delta(x-\xi)\delta(t-\tau) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial G_{kn}}{\partial x_l}\right)$$ 注意正负号

有：(Free boundary. 在S上. G 产生的应力 为0)

$$u_n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V f_i(\xi,\tau)\, G_{ni}(x, t-\tau; \xi)\, dV + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_S G_{ni}(x,t-\tau;\xi)\, T_i(u(\xi,\tau), n)\, dS}_{\text{vanish. 为0.}}$$

二、散射波场

对参考均一介质有区域 V_0，边界 S_0，对应 ρ^0, C^0_{ijkl}, u^0 (体力加时的波场)

扰动项带角标"1"，扰动后为：

$$\rho = \rho^0 + \rho^1, \quad C_{ijkl} = C^0_{ijkl} + C^1_{ijkl}, \quad u = u^0 + u^1$$

也即 Tromp 2005 里的 $\delta\rho$, δC_{ijkl}, δs.

对体力为0时，有 ~~u~~ u^0 满足方程，相应地，扰动后也满足方程.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(C^0_{ijpq}\dfrac{\partial u^0_p}{\partial x_q}\right) - \rho^0 \ddot{u}^0_i = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left((C^0_{ijpq} + C^1_{ijpq})\dfrac{\partial (u^0_p + u^1_p)}{\partial x_q}\right) - (\rho^0+\rho^1)(\ddot{u}^0_i + \ddot{u}^1_i) = 0 \end{cases}$$

把后一式代入前一式有：

"简写"：
$$\begin{cases} C^0 U^0 - \rho^0 \ddot{U}^0 = 0 \\ (C^0 + C^1)(U^0 + U^1) - (\rho^0+\rho^1)(\ddot{U}^0 + \ddot{U}^1) = 0. \end{cases}$$

二式展开：$\underline{C^0U^0} + C^0U^1 + C^1U^0 + C^1U^1 - \underline{\rho^0\ddot{U}^0} - \rho^0\ddot{U}^1 - \rho^1\ddot{U}^0 - \rho^1\ddot{U}^1 = 0$

为0，即式1

剩下：$C^0U^1 - \rho^0\ddot{U}^1 + C^1(U^0+U^1) - \rho^1(\ddot{U}^0 + \ddot{U}^1) = 0.$

有: $$\rho^0 \ddot{u}_i' = \underbrace{-\rho' \ddot{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijpq}' \frac{\partial u_p}{\partial x_q}\right)}_{\text{体力.}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijpq}^0 \frac{\partial u_p'}{\partial x_q}\right)$$

此方程介质为 ρ^0. C_{ijpq}^0. 波场为 $\ddot{u}_i'$ 即:只要施加一个特殊体力在均一介质上. 传出的波场就相当于扰动后的介质中给出的波场. 而不用去计算非均一介质下的波动方程. 但此体力不是显式可求的

根据格林函数. 且自由边界上应力/变为0.

$$u_i'(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V dv \left[-\rho' \ddot{u}_i(\xi,\tau) + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(C_{ijpq}' \frac{\partial u_p}{\partial \xi_q}\right)\right] G_{li}(x,\xi,t-\tau)$$

对其中第二项分部积分:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial} \text{Part1} \cdot \text{Part2} = \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial}(\text{Part1} \cdot \text{Part2})}_{\text{散度定理转成面积分、然后vanish}} - \int_V \frac{\partial}{\partial} \text{Part2} \cdot \text{Part1}$$

$$= -\int_V C_{ijpq}' \frac{\partial u_p}{\partial \xi_q} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} G_{li}(x,\xi,t-\tau)$$

则 $$u_i'(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V dv \left[-\rho' \ddot{u}_i(\xi,\tau) - C_{ijpq}' \frac{u_p}{\xi_q} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right] G_{li}(x,\xi,t-\tau)$$

"体力项"含有未知量 u, 依旧不可求.

用Born / Frechet deriative 有, 把 u 换成 u^0

$$u_i'(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_V dv \left[-\rho' \ddot{u}_i^0(\xi,\tau) - C_{ijpq}' \frac{u_p^0}{\xi_q} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right] G_{li}(x,\xi,t-\tau)$$

三、波形成像

定义:

1. χ : 最小二乘 misfit function
2. x_r : $r=1\dots N$ 台站位置.
3. $d(x_r, t)$ 台站 r 接收到的三分量数据.
4. $s(x_r, t, m)$ 给定模型矢量 m 后的模拟波形.
5. $\|A\| = \sum_{ij} |A_{ij}|^2$ (可能是).

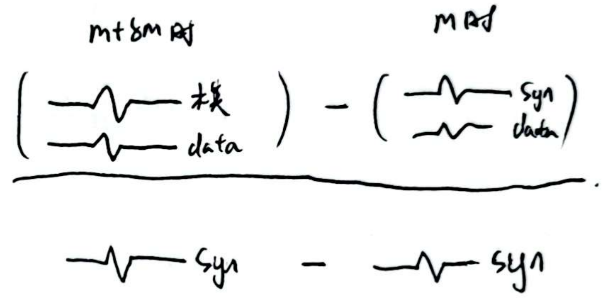
$$\chi(m) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\int_0^T \| s(x_r, t, m) - d(x_r, t)\|^2 dt$$

实际操作中加窗、滤波、加权.

对 χ 求 Fréchet 导:

图像化理解:

$$\frac{\chi(m+\delta m) - \chi(m)}{s(x_r, t, m+\delta m) - s(x_r, t, m)} =$$



每一个时刻上一一对应操作, 相当于每一时刻都是:

$y = \frac{1}{2}x^2$ 求导: $\delta y = x\,\delta x$.

则 χ 的 Fréchet 导为:

$$\delta\chi = \sum_{r=1}^{N}\int_0^T [s(x_r, t, m) - d(x_r, t)]\cdot \delta s(x_r, t, m)\, dt$$

其中 $\delta s(x_r, t, m)$ 即为波场 s 由于模型扰动 δm 产生的散射波场. 根据 P2 最后一式有:

$$\delta s(x_r, t, m) = -\int_0^t dt' \int_V d^3x' \, [\delta\rho(x') G_{ij}(x_r, x'; t-t')\, \partial_{t'}^2 s_j(x', t') + \delta c_{jklm}(x')\, \partial'_k G_{ij}(x_r, x'; t-t')\, \partial'_l s_m(x', t')]$$

[注: G 里面为 x_r, 表为 r 处的 δs]

现在，只需算出δS，算出δX就能知道模型修改的方向了。

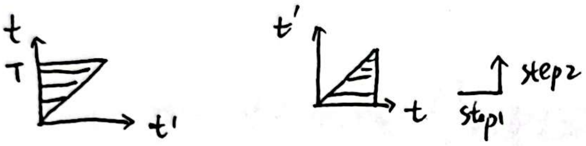
$$\delta X = -\sum_r \int_0^T dt \int_0^t dt' \int_V d^3x' \left\{ \delta\rho\, G\, \ddot{s}\, [s-d] + \delta c \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}[s-d] \right\} \quad (简写)$$

波速度C，即C_{ijkl}

Adjoint：

交换积分顺序

$$\int_0^T dt \int_0^t dt' \longrightarrow \int_0^T dt' \int_{t'}^T dt$$



格林函数：

$$G_{ik}(x_r, x'; t-t') = G_{ki}(x', x_r; t-t')$$

$$则\ \delta X = -\int_V d^3x' \sum_r \int_0^T dt' \int_{t'}^T dt \Big\{ \delta\rho(x') G_{ji}(x', x_r; t-t')\, \partial_{t'}^2 s_j(x', t')\, [s_i(x_r, t) - d_i(x_r, t)]$$

$$+ \delta C_{jklm}(x')\, \partial_k' \cancel{G_{ji}(x', x_r; t-t')\, \partial_k'}\, G_{ji}(x', x; t-t')\, \partial_l' s_m(x', t') \cdot [s_i - d_i] \Big\}$$

先看第一项：包含δρ，G，$\partial_t s$，[s-d]，其中δρ和$\partial_t s$可拿到dt积分之外，Σ可拿到里面。

$$则为\ \delta X_{part1} = -\int_V d^3x' \int_0^T dt'\, \delta\rho(x')\, \partial_{t'}^2 s_j(x', t')\, \underbrace{\sum_{r=1}\int_{t'}^T dt\, G_{ji}(x', x_r, t-t')[s_i(x_r, t) - d_i(x_r, t)]}_{长得有点像格林函数和外力的积分}$$

对后面部分进行分析：①改变积分上下限，用换元 ②引入δ(x)，这样和外力积分形式就一致了。

为：$\cancel{\sum_{r=1}\int_0^{T-t'} G_{ji}(x', x}$ 把 $t \to T-t$ [注：也可用 $t \to t-t'$，但没有"$-t'$"就难以构成卷积项]

$$\sum_{r=1}\int_{T-t'}^0 d(T-t)\, G_{ji}(x', x_r, T-t-t')[s_i(x_r, T-t) - d_i(x_r, T-t)]$$

$$= \sum_{r=1}\int_0^{T-t'} dt\, G_{ji}(x', x_r, T-t-t')[s_i(x_r, T-t) - d_i(x_r, T-t)]$$

$$= \int_0^{T-t'} dt \int d^3x\, G_{ji}(x', x, T-t'-t)\, \underbrace{\sum_r [s_i(x, T-t) - d_i(x, T-t)]\,\delta(x - x_r)}_{定义为\ f_i^{\dagger}(x, t)}$$

$$= \int_0^{T-t'} dt \int d^3x\, G_{ji}(x', x, T-t'-t) f_i^+(x, t)$$

(有时间卷积：

τ 变化 t

t 变化 $T-t'$

和平常 $\int_0^t d\tau f(t-\tau) g(\tau)$ 一致.

有空间积分)

$$\overset{\text{定义为}}{\equiv} S_j^+(x', T-t')$$

由此：对 Part1 χ 有：

$$\delta\chi_{part1} = -\int_V d^3x' \int_0^T dt'\, \delta\rho(x')\, \partial_{t'}^2 s_j(x', t')\, s_j^+(x', T-t').$$

$$= -\int_V d^3x\, \delta\ln\rho(x) \underbrace{\int_0^T dt'\, \rho(x') \frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t} s^+(x', T-t')}_{\text{此即 } K_\rho}.$$

带上负号 $\hat{K}_\rho$ 得

对 $\delta\chi$ Part δc_{jklm} 部分：

如果想用 $\delta\rho$ 类似的思路，建立 $\delta\ln c_{jklm}$ 就走偏了.

因为：$\delta\ln c_{jklm} = \dfrac{\delta c_{jklm}}{c_{jklm}} = \dfrac{\cdots}{\lambda\delta_{jk}\delta_{lm} + \mu(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})}$

这样反而更复杂了，要避免分母太大坨.

正确思路是直接把 $\delta\chi$ Part2 部分的 δc_{jklm} 展开 K 和 N.

则 $$K_{c_{jklm}} = -\int_0^T c_{jklm}(x) \frac{\partial s_m(x,t)}{\partial x_l} \frac{\partial s_j^+}{\partial x_k} dt = -\int_0^T c_{jklm}(x)\, \overset{e_{ml}(x,t)}{e_{ml}}\, e_{jk}^+(x, T-t)\, dt$$

同理 $$\delta\chi_{part2} = -\int_V d^3x' \int_{t'}^T dt' \left[\delta K\, \delta_{jk}\delta_{lm} - \frac{2\delta\mu}{3}\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta N(\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})\right] \frac{\partial s_m(x', t')}{\partial x_l'} \frac{\partial s_j^+(x', T-t')}{\partial x_k}$$

for K:

$$-\delta_{jk}\delta_{lm} \frac{\partial s_m(x', t')}{\partial x_l'} \frac{\partial s_j^+}{\partial x_k} = \nabla s(x', t') \cdot \nabla s^+(x', T-t')$$

$$\therefore K_K(x) = -\int_0^T K(x) [\nabla s(x', T-t)][\nabla \cdot s(x, t)]\, dt$$

for $\mathcal{N}$:

$$\delta\mathcal{N}\left\{\delta_{jl}\delta_{km}+\delta_{jm}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\delta_{lm}\right\}\frac{\partial s_m(x',t')}{\partial x_l'}\frac{\partial s_j^+(x',T-t')}{\partial x_k}$$

$$=\delta\mathcal{N}\left\{\frac{\partial s_k}{\partial x_j}\frac{\partial s_j^+}{\partial x_k}+\frac{\partial s_j}{\partial x_k}\frac{\partial s_j^+}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\frac{\partial s_l}{\partial x_l}\frac{\partial s_j^+}{\partial x_j}\right\}$$

补充：对偏应变 e 和 v

$$e:v=(e_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}e_{mm})(v_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}v_{nn})$$

$$=e_{ij}v_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ij}v_{nn}-\frac{1}{3}\delta_{ij}v_{ij}e_{mm}+\frac{1}{9}\delta_{ij}\delta_{ij}e_{mm}v_{nn}$$

$$=e_{ij}v_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ij}v_{nn}-\frac{1}{3}\delta_{ij}v_{ij}e_{mm}+\frac{1}{3}e_{mm}v_{nn}$$

$$=e_{ij}v_{ij}-\frac{1}{3}e_{ii}v_{nn}$$

$$e_{ij}v_{ij}=\frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i})\frac{1}{2}(V_{i,j}+U_{j,i})$$ 此处是位移

$$=\cdots$$

$$=\frac{1}{2}(U_{i,j}V_{i,j}+U_{i,j}V_{j,i})$$

则 for $\mathcal{N}$: 为

$$K_{\mathcal{N}}(x)=-\int_0^T 2\mathcal{N}(x)\,\mathbb{D}^+(x,T-t):\mathbb{D}(x,t)\,dt.$$ $\mathbb{D}$ 为偏应变.

注：$\delta s(m+\delta m)$ 是针对上一步 m（迭代的），不一定是均一.

U^0. C^0. C_{ijkl} 配 G_{ij}. 但 G_{ij} 不一定有解析解. G_{ij} 只是一个中间步骤.

用来得到反传波场 s^+. s^+ 可直接通过数值计算得到.