张量. 2024.11.16 张量. Tromp

V3 - 1

## 一、线性泛函.

$f(x) \xrightarrow{\text{output}}$ 标量

任一线性泛函都存在represent vector $\mathbf{f}$ 使得，$f(x) = \mathbf{f} \cdot x$

### 2. 求分量:

$\mathbf{f}$ 的分量 $f_i = \mathbf{f} \cdot \hat{x}_i$，根据 $f(x) = \mathbf{f} \cdot x$，有 $f(\hat{x}_i) = \cancel{\mathbf{f} \cdot \hat{x}_i}\ \mathbf{f} \cdot \hat{x}_i$

即: $f_i = f(\hat{x}_i)$「注意两个 $f$ 含义不同. 前者为向量分量. 后者为函数名」

### 3. 合成1分体.

$$\mathbf{f} = f_i \hat{x}_i$$

( 1. 基: $\hat{x}_i$

## 二. 二重线性泛函

$f(x, x) \xrightarrow{\text{output}}$ 标量.

~~“书上没有 represent tensor 的说法，”但我认为可以这么说：下~~

1. 基: $\hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2}$ 有9个: $\hat{x}_1 \hat{x}_1$, $\hat{x}_1 \hat{x}_2$, $\hat{x}_1 \hat{x}_3$, ⋯, $\hat{x}_3 \hat{x}_3$ (并矢)

2. 求分量.

$$T_{i_1 i_2} = T(\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2})$$

~~好比~~

3. 合成分体:

$$T = T_{i_1 i_2} \hat{x}_{i_1} \hat{x}_{i_2}$$

二重线性泛函如何作用于矢量输入：

① 线性泛函很简单：$f(x) \longrightarrow f\cdot x$

$\uparrow$

$x$

但. $T(\quad) \longrightarrow \underbrace{T\cdot xy}_{\text{矛盾}}$ 是错的.

$\uparrow$

$x, y$

应该理解为：

挨个投喂. 先放 $x$, 得到低一阶的tensor. 再投一个.
得到更低阶的. 直到投完, 返回 0阶 tensor, 即标量.

② ~~eg~~: 对二重：~~$T(u,v)$~~

$T(\quad) \longrightarrow u\cdot T\cdot v$ 此为标量.

$\uparrow$ $\Uparrow$

$u, v$ 注意这里不是 function. 而是 represent.

$T = T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$

(2.1) ~~作为算~~ 当输入一个. 返回一阶张量(即矢量)时. 2阶 Tensor.
便作为了一种"线性算子"

$T(v) = T\cdot v$

分量:

$T(\hat{x}_i) = T_{ji}\hat{x}_j$

基: $\cancel{\hat{x}_j}$ $\hat{x}_i\hat{x}_j$ Tensor 的基

按分作用 ~~按第2个作用~~

作为算子作用在一个矢量上: $\vec{u} = T(\vec{v})$, 即: $u_i = T_{ij}v_j$

若 le represent vector 的写法

$$\begin{cases} T(\hat{x}_i) = T\cdot\hat{x}_i \\ T(\vec{v}) = T\cdot\vec{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{\mathrm{trace}(TP) = T_{ik}P_{ki}} \\ \cancel{(uf)\cdot(gv) = u(f\cdot g)v} \end{cases}$$

三. 高阶线性泛函 也即q阶张量

$q$

$T(\underbrace{\cdots}_{q个矢量入口}) \longrightarrow$ 标量. $T(\underbrace{\quad\quad}_{输入p个}) \longrightarrow p-q$ 阶张量.

基: $\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_q}$

分量: $T_{i_1\cdots i_q} = T(\hat{x}_{i_1},\cdots,\hat{x}_{i_q})$

分解/合成. $T = T_{i_1\cdots i_q}\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_q}$

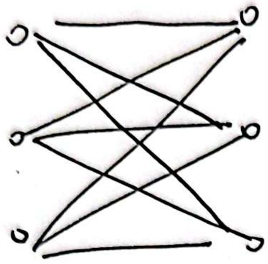
注意不是function!!

[注 合成/分解前后对同一输入的返回值相同

$T(u_1,\cdots,u_q) = T_{i_1\cdots i_q}\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_q}(u_1,\cdots,u_q)$]

并矢张量：<三维内>

vector 1　　vector 2　　新的<由3×3排列组合得到>



记作 $\vec{a}\vec{b}$ 或 $\vec{a}\otimes\vec{b}$

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_1b_2 & \cdots & \cdots \\ a_1b_3 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

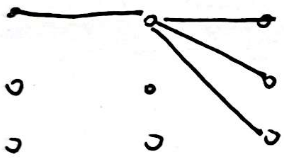
不要看成1个矩阵，要看成9个基乘9个系数。

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1\underbrace{\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1}_{} + a_1b_2\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2\cdots$$

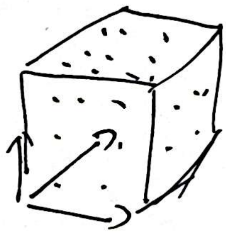
每一组个基都是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 一个张量

3个高阶并矢：

vector 1　v2　v3　　新的(3×3×3个)



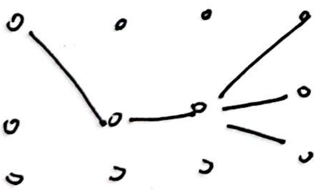
eg: 对 $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ 只有角标分别1.2.3的位置为1，其余为0。



3×3×3 立方体。
仅(1.2.3)位置是1，其余为0。

4个并矢：

新的(3×3×3×3)



(四维方块)
和vector的维不一样)

eg:

$$\begin{bmatrix} a & x \\ x & x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab_1 & ab_2 & \cdot & \cdot \\ ab_3 & ab_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

2阶　　2阶

遍历理解
排列组合.

4阶. 2维.

$$\begin{bmatrix} a & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab_1 & ab_2 & ab_3 & \cdots \\ ab_4 & ab_5 & ab_6 & \cdots \\ ab_7 & ab_8 & ab_9 & \cdots \\ \cdots & & & \cdots \end{bmatrix} \cdots$$

2阶　　2阶

$9\times 9=81$ 个 $C_{ijkl}$

4阶. 3维.

$\hat{x}_{i_1}\cdots\hat{x}_{i_q}$ : q阶张量的基
为q阶并矢量.

对二阶三维张量有:

$$T = T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$$

$$trT = T_{ii} = T(\hat{x}_i, \hat{x}_i)$$

对更高阶:

$$(TP)_{i_1\cdots i_q j_1\cdots j_p} = T_{i_1\cdots i_q}P_{j_1\cdots j_p}$$

$T\otimes P$

$\therefore$

$$tr_{rs}(TP) = T(\cdots x_{i_m}\cdots)P(\cdots x_{j_n}\cdots)$$

r个　　s个

也可能 r s 同在 T 或 P 里.

一些计算:

$$T(\hat{x}_i) = T\cdot\hat{x}_i = T_{lm}\hat{x}_l\hat{x}_m\cdot\hat{x}_i = T_{lm}\hat{x}_l\delta_{mi} = T_{li}\hat{x}_i$$

$$\vec{u} = T(\vec{v}) = T\cdot\vec{v} = (T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j)\cdot(V_m\hat{x}_m) = T_{ij}V_j\hat{x}_i$$ ，则 $u_i = T_{ij}V_j$

$$tr_{23}(TP) = tr_{23}\left(T(\hat{x}_i,\hat{x}_j)P(\hat{x}_k,\hat{x}_l)\right)$$
$$= T(\hat{x}_i,\hat{x}_m)P(\hat{x}_m,\hat{x}_l)$$
$$= T_{im}P_{ml}$$

$(uf)\cdot(gv) = u(f\cdot g)v$ 因为 $P\cdot T = tr_{23}(PT)$，中间2项的通过求和
那不就是内积。

$$u\cdot T = T^T\cdot u = T^T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j\cdot u_k\hat{e}_k = T^T_{ij}\hat{e}_i u_j$$

$$\therefore (u\cdot T)\cdot v = T^T_{ij}u_jv_i = T_{ji}u_jv_i$$

$$u\cdot(T\cdot v) = u\cdot(T_{ij}e_ie_jv_j) = T_{ij}V_ju_i$$

$\therefore (u\cdot T)\cdot v = u\cdot(T\cdot v)$，并不能算张量和矢量间的计算

$u_i = T_{ij}V_j$ 也可用矩阵来理解 $\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$

证：$u\times vw = (u\times v)w$

先看 $\vec{a}\times A$，矢量叉乘矩阵，

$\underbrace{\vec{a}_{\times,i}} = \vec{a}\times\vec{e}_i$ = 某个矢量，i 取 1.2.3. 组合成矩阵

a 叉乘的 i 分量

$$\vec{a}_{\times,i} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}\times\vec{e}_1$ $\vec{a}\times\vec{e}_2$ $\vec{a}\times\vec{e}_3$

$\because U\times T = U_k\hat{e}_k \times T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = U_kT_{ij}(\hat{e}_k\times\hat{e}_i)\hat{e}_j = U_kT_{ij}\varepsilon_{mki}\underline{\hat{e}_m\hat{e}_j}$ 基.

$\therefore P = U\times T$ 时 $P_{mj} = U_kT_{ij}\varepsilon_{mki}$

算子乘积.

$\psi\chi(\vec{u}) = \psi(\chi(\vec{u}))$

算子张量:

$T_{i_1\cdots i_{p-q}} = T_{i_1\cdots i_{p-q}j_1\cdots j_q}\,\xi_{j_1\cdots j_q}$

p-q阶张量　　p阶张量　　q阶张量.

一般q阶的tr和转置. 二阶的tr和转置.

18

二阶单位张量 $I_{ij}=\delta_{ij}$

$$\Lambda_{ijk}=\varepsilon_{ijk}$$

$$\mathbf{\Lambda}=\Lambda_{ijk}\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_k$$

并矢: $\underbrace{\vec{a}\vec{b}}_{\text{不是直接乘}}=\underbrace{a_ib_j}_{\text{直接乘, 且不是相加!!}}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$

是9个等式!!

各向同性张量:

$$a\mathbf{II}+b\,\mathbf{II}_{23}(\mathbf{II})+c\,\mathbf{II}_{24}(\mathbf{II})$$

$$=a\delta_{ij}\delta_{kl}+b\delta_{ik}\delta_{jl}+c\delta_{il}\delta_{jk}$$

$\delta_{ij}\delta_{kl}$的2和3号角标交换位置.

楔形算子:

$$\Lambda\mathbb{T}=\Lambda_{ijk}T_{mn}$$

$$\mathrm{tr}_{23}\mathrm{tr}_{35}(\Lambda\mathbb{T})=\mathrm{tr}_{23}(\Lambda_{ijp}T_{mp})$$

p不是哑角标了、ijm成新的1.2.3号位

$$=\Lambda_{iqp}T_{qp}$$

$$=\varepsilon_{iqp}T_{qp}$$

$$\Lambda(\mathbf{f}\mathbf{g})=\cancel{\Lambda}\,\varepsilon_{ijk}(\mathbf{f}\mathbf{g})_{jk}\vec{e}_i$$

$$=\varepsilon_{ijk}f_jg_k\vec{e}_i$$

$$=\mathbf{f}\times\mathbf{g}$$

注:

$$\underbrace{(\mathbb{T}\mathbb{P})_{i_1\cdots i_q j_1\cdots j_p}}_{\text{并后的分量}}=\underbrace{T_{i_1\cdots i_q}P_{j_1\cdots j_p}}_{\text{并矢前的2个张量对应的分量相乘}}$$

eg: $(\vec{a}\vec{b})_{13}=a_1\cdot b_3$