МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Поиск с возвратом
Вариант 1р.

Студент гр. 3388 _____ Кулач Д.В.

Преподаватель _____ Жангиров Т.Р.

Санкт-Петербург
2025

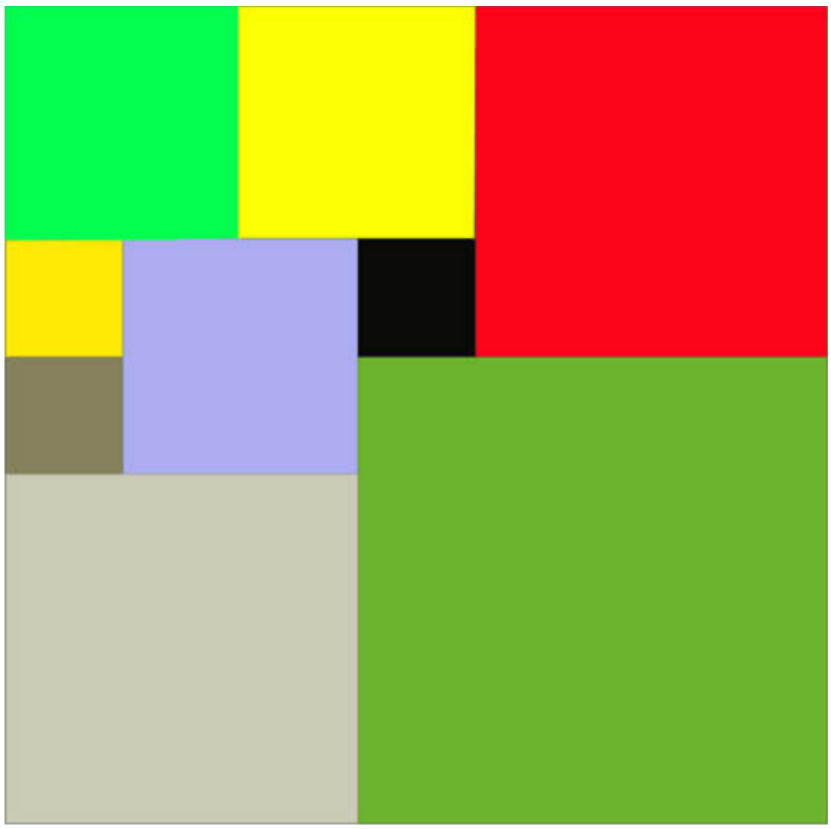
Цель работы.

Разработка и реализация эффективного алгоритма поиска с возвратом для решения задачи квадрирования квадрата при условии использования минимального общего количества квадратов.

Задание.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до $N - 1$, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N . Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \le N \le 20$).

Выходные данные

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить
столешницу(квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x,y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x,y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Описание алгоритма.

Алгоритм должен найти такое покрытие столешницы квадратами различных размеров, чтобы:

- Квадраты не пересекались между собой.
- Их объединение полностью покрывало область N * N.
- Количество использованных квадратов было минимальным.

Для этого используется комбинация предопределенных разбиений для специальных случаев и рекурсивного поиска с возвратом для общего случая, дополненная оптимизациями, сокращающими время выполнения.

Основные этапы алгоритма:

1. Обработка специальных случаев. Для некоторых значений N, кратных 2, 3 или 5, существуют заранее известные оптимальные различения, которые позволяют избежать полного рекурсивного поиска. Если N соответствует одному из этих условий, алгоритм возвращает существующее разбиение и завершает работу.
2. Инициализация. Для общего случая (когда N не кратно 2, 3 или 5):
   - Создается двумерный массив grid размером N * N, где изначально все клетки свободны.
   - Инициализируется переменная best_solution, которая хранит минимальное найденное количество квадратов (начальное значение — N * N, максимальное возможное).
   - Создается массив best_solution для хранения координат и размеров квадратов оптимального решения.
3. Начальное размещение. Чтобы уменьшить область поиска, алгоритм начинает с размещения трех крупных квадратов:
   - Первый квадрат размером maxW = (N + 1) / 2 размещается в позиции (0, 0).
   - Второй квадрат размером bigW = N - maxW — в позиции (0, maxW).
   - Третий квадрат размером bigW — в позиции (maxW, 0).

   Эти квадраты покрывают значительную часть столешницы, оставляя меньшую область для дальнейшего поиска.
4. Рекурсивный поиск с возвратом. Основная часть алгоритма — функция backtrack, которая рекурсивно заполняет оставшуюся площадь:
   - Входные параметры:
     - best_solution — текущее количество размещенных квадратов.
     - squares — массив текущих квадратов (координаты и размеры).

• remaining_area — оставшаяся незакрытая площадь.

• Процесс:

1. Если squares >= best_solution, ветвь обрезается, так как текущее решение не улучшит найденное.
2. Находится первая свободная клетка в grid.
3. Вычисляется максимальный размер квадрата, который можно разместить в этой клетке (не больше (N + 1) / 2 и ограниченный границами или занятыми клетками).
4. Для каждого размера (от большего к меньшему):
   • Проверяется, можно ли разместить квадрат этого размера без перекрытия и выхода за границы.
   • Если можно, квадрат размещается: обновляется grid, squares и remaining_area.
   • Рекурсивно вызывается backtrack для следующей свободной клетки.
   • После возврата квадрат удаляется (откат), чтобы попробовать другой размер.
5. Если remaining_area == 0 и squares < best_solution, решение сохраняется как новое оптимальное.

5. Используемые оптимизации:

• Специальные случаи: Использование предопределенных различений для N, кратных 2, 3 или 5.

• Начальные крупные квадраты: Уменьшают оставшуюся площадь поиска.

• Размещение от большего к меньшему: Позволяет быстрее покрывать большие области.

• Отсечение ветвей: Прекращение поиска, если текущее количество квадратов не улучшает минимум.

• Ограничение размера, Максимальный размер квадрата ограничен (N + 1) / 2.

• Учет оставшейся площади: Квадрат размещается, только если его площадь не превышает remaining_area.

• Быстрый поиск свободной клетки: Эффективно определяет следующую позицию.

Оценка сложности.

Временная сложность зависит от того, как алгоритм отрабатывает входные данные:

• Специальные случаи. Если N кратно 2, 3 или 5, алгоритм использует заранее известное разбиение и выполняется за константное время: O(1).

• Общий случай. В общем случае алгоритм использует рекурсивый поиск с возвратом, что приводит к более высокой сложности. В худшем случае алгоритм перебираем все возможные комбинации размещения квадратов в сетке N * N. На каждом шаге рекурсии:

• Алгоритм пытается разместить квадрат максимального возможного размера в первый свободной ячейке, уменьшая размер, если размещение невозможно.

• Число возможных размеров квадрата для каждой позиции ограничено O(N).

• Глубина рекурсии может достигать O(N^2), если вся столешница заполняется квадратами 1 * 1.

• На каждом уровне рекурсии количество вариантов выбора размера квадрата составляет O(N), а общее число шагов может быть экспоненциальным из-за ветвления.

• Формально, в худшем случае временная сложность достигает O(N^(N^2)), что является экспоненциальной зависимостью.

Сложность по памяти. Пространственная сложность определяется используемыми структурами данных и рекурсивным стеком:

1. Структуры данных:

• Массив grid размером N * N занимает O(N^2) памяти.

• Массивы squares и optimalSolution, хранящие информацию о размещенных квадратах, в худшем случае содержат до N^2 элементов (если вся сетка заполнена квадратами 1 * 1). Это также занимает O(N^2) памяти.

2. Рекурсивный стек:

• Глубина рекурсии в худшем случае достигает O(N^2).

• На каждом уровне рекурсии хранится константное количество данных, что дает дополнительную память O(N^2).

Общая память складывается из затрат на структуры данных и рекурсивный стек, что в сумме составляет O(N^2).

Тестирование.

Алгоритм был протестирован на различных наборах входных данных

Табл.1

Входные данные	Выходные данные
2	4 1 1 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1
11	11 1 1 6 1 7 5 7 1 5 6 7 3 6 10 2 7 6 1 8 6 1 8 10 1 8 11 1 9 6 3 9 9 3
15	6 1 1 10 1 11 5 6 11 5 11 1 5 11 6 5 11 11 5
37	15 1 1 19 1 20 18 20 1 18 19 20 2 19 22 5 19 27 11 20 19 1 21 19 3 24 19 8 30 27 3 30 30 8 32 19 6 32 25 1 32 26 1 33 25 5

Выводы.

В ходе выполнения лабораторной работы был реализован алгоритм поиска с возвратом для решения задачи квадрирования квадрата, так же проведено тестирование реализованного алгоритма.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Файл main.cpp

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <tuple>
#include <algorithm>

using namespace std;

bool can_place(const vector<vector<int>>& grid, int x, int y, int
size, int N) {
    if (x + size > N || y + size > N) return false;
    for (int i = x; i < x + size; i++)
        for (int j = y; j < y + size; j++)
            if (grid[i][j] != 0) return false;
    return true;
}

void place_square(vector<vector<int>>& grid, int x, int y, int
size, int label) {
    for (int i = x; i < x + size; i++)
        for (int j = y; j < y + size; j++)
            grid[i][j] = label;
}

pair<int,int> find_empty(const vector<vector<int>>& grid, int N) {
    for (int i = 0; i < N; i++)
        for (int j = 0; j < N; j++)
            if (grid[i][j] == 0) return {i, j};
    return {-1, -1};
}

void backtrack(vector<vector<int>>& grid,
vector<tuple<int,int,int>>& squares, int N,
               vector<tuple<int,int,int>>& best_solution, int
remaining_area) {

    if (!best_solution.empty() && squares.size() >=
best_solution.size())
        return;

    auto [x, y] = find_empty(grid, N);
    if (x == -1) {
        if (best_solution.empty() || squares.size() <
best_solution.size())
            best_solution = squares;
        return;
    }
```

```
    int max_size = min(N - x, N - y);
    int limit = N - (N + 1) / 2;
    if (max_size > limit)
        max_size = limit;

    for (int size = max_size; size >= 1; size--) {
        int area = size * size;
        if (area <= remaining_area && can_place(grid, x, y, size,
N)) {
            place_square(grid, x, y, size, squares.size() + 1);
            squares.emplace_back(x, y, size);
            backtrack(grid, squares, N, best_solution,
remaining_area - area);
            squares.pop_back();
            place_square(grid, x, y, size, 0);
        }
    }
}

vector<tuple<int,int,int>> squaring_the_square(int N) {
    vector<vector<int>> grid(N, vector<int>(N, 0));
    vector<tuple<int,int,int>> best_solution;

    if (N % 2 == 0) {
        best_solution = {{0, 0, N/2}, {N/2, 0, N/2}, {0, N/2, N/
2}, {N/2, N/2, N/2}};
        return best_solution;
    }
    if (N % 3 == 0) {
        int t2 = N*2/3, t1 = N/3;
        best_solution = {
            {0, 0, t2}, {0, t2, t1}, {t1, t2, t1},
            {t2, 0, t1}, {t2, t1, t1}, {t2, t2, t1}
        };
        return best_solution;
    }
    if (N % 5 == 0) {
        int t3 = N*3/5, t2 = N*2/5, t1 = N/5;
        best_solution = {
            {0, 0, t3}, {t3, 0, t2}, {t3, t2, t2}, {0, t3, t2},
            {t2, t3, t1}, {t2, 4*t1, t1}, {t3, 4*t1, t1}, {4*t1,
4*t1, t1}
        };
        return best_solution;
    }

    int maxW = (N + 1) / 2;
    int bigW = N - maxW;
    vector<tuple<int,int,int>> squares = {
        {0, 0, maxW},
        {0, maxW, bigW},
```

```
        {maxW, 0, bigW}
    };
    place_square(grid, 0, 0, maxW, 1);
    place_square(grid, 0, maxW, bigW, 2);
    place_square(grid, maxW, 0, bigW, 3);

    backtrack(grid, squares, N, best_solution, N*N);

    return best_solution;
}

int main() {
    int N; cin >> N;
    auto solution = squaring_the_square(N);

    cout << solution.size() << "\n";
    for (auto& [x, y, size] : solution)
        cout << x + 1 << " " << y + 1 << " " << size << "\n";

    return 0;
}
```