Il concetto di autovalore è relativo alle sole matrici quadrate

Data $A \in Mat(n, n\ K)$ dove K può essere $\mathbb{R}, \mathbb{C} \dots$ $\lambda_0 \in K$ è un autovalore di A se esiste un vettore colonna non nullo $v \in K^n$ t.c $Av = \lambda_0 v$

v è un autovettore relativo all'autovalore λ_0

considerando uno scalare $\gamma \neq 0$ allora

$$\gamma(Av) = \gamma(\lambda_0 v) \iff A(\gamma v) = \lambda_0(\gamma v)$$

γv è un autovettore associato a λ_0

l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_0 \Rightarrow V_{\lambda_0} = \{v \in K^n \text{ tali che } Av = \lambda_0 v\}$

Nota!

$v_1, v_2, \dots v_k$ sono $k \leq n$ autovettori associati ad autovalori distinti di una matrice sono linearmente indipendenti

Eq caratteristica x identificare autovalori

$$\det(A - \lambda_0 Id_n) = 0$$

Scomposizione per matrici quadrate

$A = V \Sigma V^T$ — autovettori di A

$A w = \lambda w$ — autovettore di A

$w \neq 0$

autovalori di A

$$V = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ v_i & & & & \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

$v_i^T v_i = 1$

$v_i^T v_j = 0$

$i \neq j$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

Scomposizione per qualsiasi matrice mxm (SVD)

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$A = U \Sigma V^T$

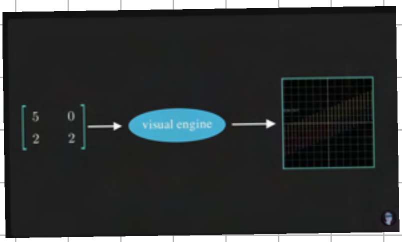
U autovettori di AA^T

V autovettori di $A^T A$

$\Sigma \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ & & \sigma_2 \end{bmatrix}$ contiene i valori singolari di A

Approfondimento sulla eigen decomposition

Concetto base: Il prodotto tra matrici e vettori ti genera una trasformazione lineare di quel vettore. (i vettori di base che ci descrivono lo spazio vettoriale vengono ruotati e stretchati seguendo A)



Detto ciò consideriamo l'effetto che hanno le matrici "famose"

Matrice identità

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scalar Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ allarga uniformemente lo spazio, i vettori, i punti

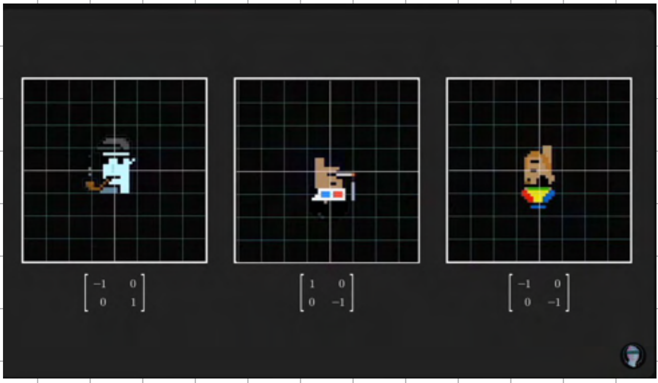
$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$ ci accorcia

I matrix, but off by one

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$ muove i dot sulla colonna y di un fattore k

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ muove i dot sulla colonna x di un fattore k

Nota: avere un elemento negativo ti provoca una reflection, scalato ma al contrario



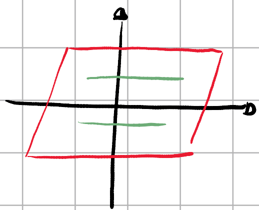
Matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

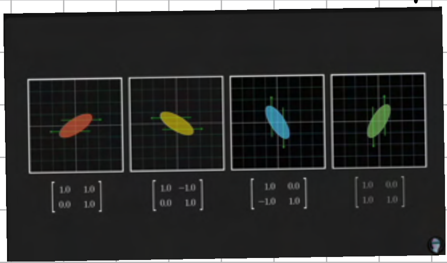
scala le coordinate x e y più volte di fattori rispettivamente n, m

Shear Matrix

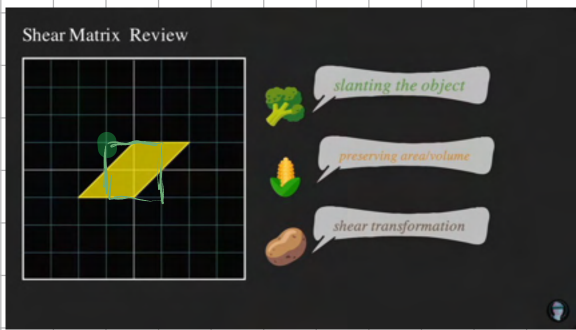
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



shiftano sull'asse x



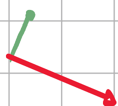
L'area interna è la stessa, quindi mantengono lo stesso determinante della matrice diagonale



Matrice Ortogonale

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

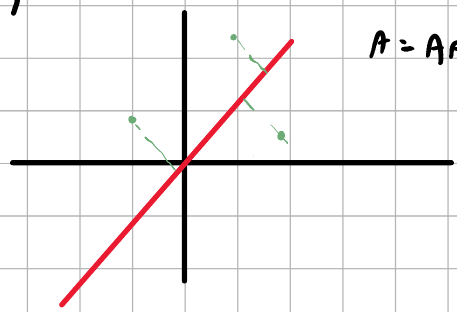
Tutti i vettori colonna sono unit vector e sono ortogonali



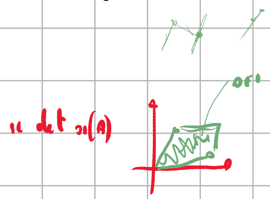
Ha l'effetto di una rotazione perfetta no scaling no shearing no reflection

Projection Matrix (si sposa con il concetto di sottospazio)

Ogni vettore si muove sul punto più vicino nel sottospazio (che ha dimensioni ridotte)

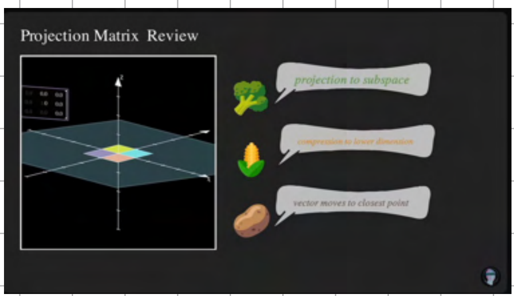


$A = \text{array}\left(\left[\begin{matrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{matrix}\right]\right)$ $\det(A) = 0.2 \cdot 0.8 - 0.4 \cdot 0.4 = 0$



è come schiacciare il tutto su una dimensione minore

i vettori di base sono spostati sulla stessa linea --



Inverse of a Matrix

Lo permette di trasformare al contrario la trasformazione lineare stessa.
Non tutte le matrici hanno un'inversa, non tutte le trasformazioni sono invertibili, es la projection matrix, se voglio tornare a prima avrò un errore.

Le matrici diagonali (scala gli assi) e ortogonali (ruota rigidamente) sono facili da interpretare e visualizzare
le matrici simmetriche applicano trasformazioni difficili da visualizzare ma se ti dicessi che non sono altro che la successione di 3 trasformazioni?? (semplici)

Una matrice è simmetrica se $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ $A = A^T$ $A_{ij} = A_{ji}$

Se una matrice è ortogonale, la sua trasposta è Q^{-1}

$Q^T = Q^{-1}$ (la sua trasposta è la rotazione inversa)

Come decompongo una matrice per avere trasformazioni più semplici che la descrivono?

$$[M] = [A_3][A_2][A_1]$$

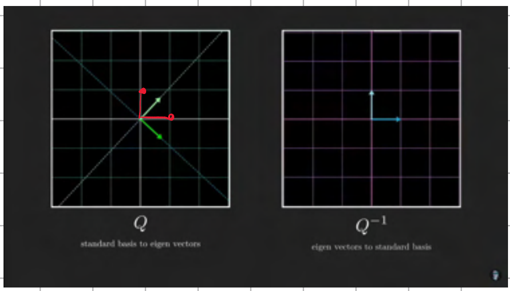
È qui che si usano gli autovettori e autovalori (i vettori che rimangono nella direzione originale e non si discostano dallo span, vengono solo stirati o allungati di un fattore λ detto autovalore)

Se A è simmetrica i suoi autovettori sono ortogonali

↓

Esiste quindi una matrice ortogonale in grado di ruotare i vettori di base a quelli ortogonali

↓



matrice simmetrica lineare

$$S = Q \Lambda Q^T$$

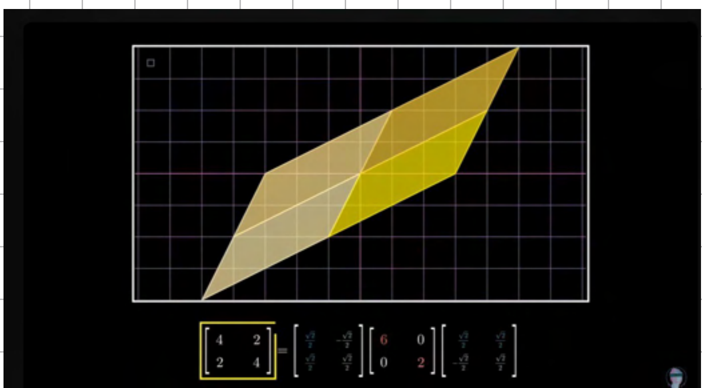
Q: ortogonale — rotation
Λ: diagonale — stretching
Q^T: ortogonale — rotation

$$[S] = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_2 \\ | & & | \end{bmatrix}}_{\text{autovettori}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\text{autovalori}} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_2 \\ | & & | \end{bmatrix}^T}_{\text{autovettori}}$$

$\Lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ scalo l'asse x di λ_1 e l'asse y di λ_2

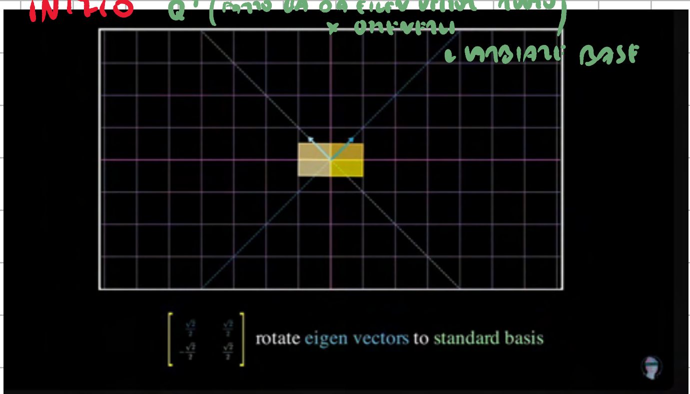
$Q \begin{bmatrix} | & | \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ | & | \end{bmatrix}$ ruota le basi standard $(x, y, z\ldots)$ x allinearsi agli autovettori

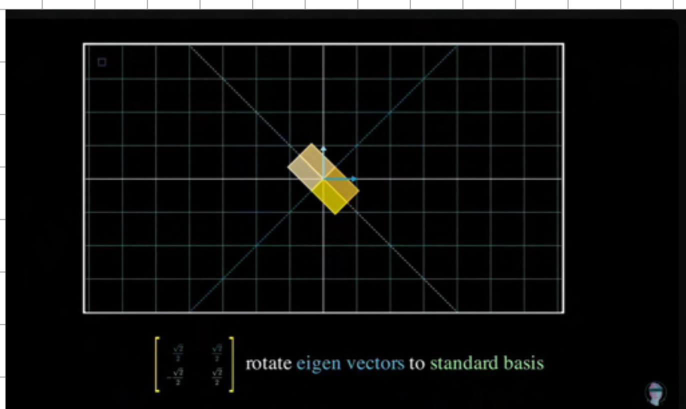
Q^T fa l'opposto — ruota gli autovettori sulle basi standard
$\shortparallel$
Q^{-1}

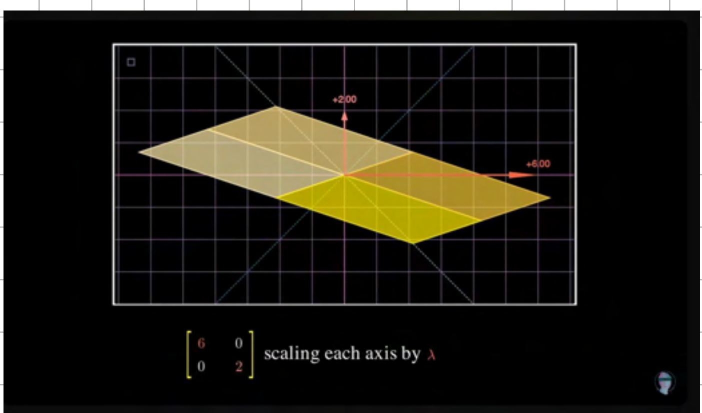


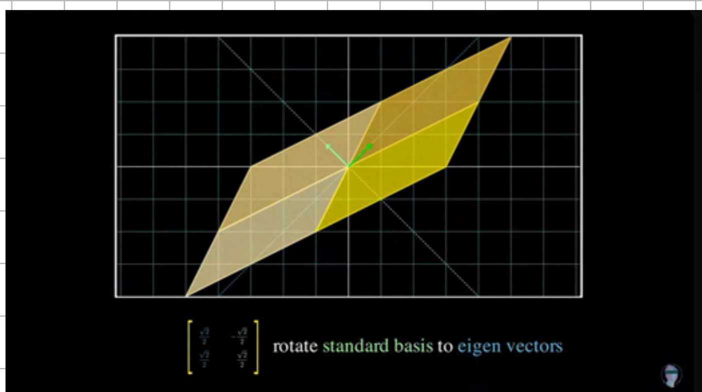
Applico direttamente A

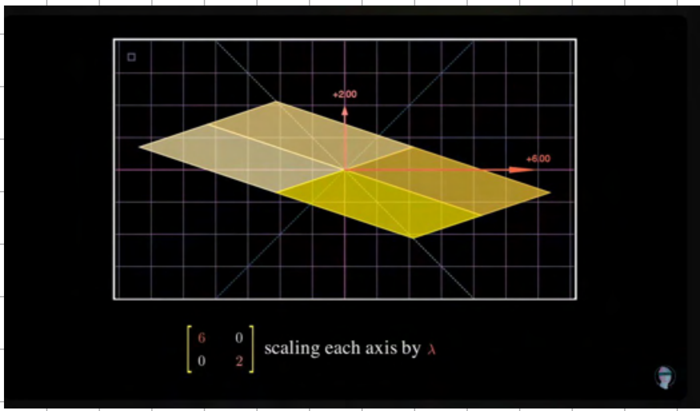
INIZIO Q^T (ruota già da eigen vector a standard) x orientarli e cambiare base









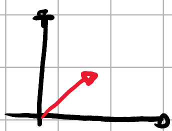


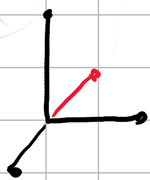
SVD (Singular Value Decomposition) se la matrice non è simmetrica e quadrata come faccio??

Tutte le matrici possono essere decomposte in 3 matrici di base $A = U \Sigma V^T$

Come visualizzo una matrice rettangolare?!

Considera 2 vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$





Sembrano simili ma appartengono a 2 mondi diversi, in $\mathbb{R}^2$ non ha idea dell'asse z questo perché ha 2 vettori di base.

Ma esiste un modo x permettere ai 2 mondi di comunicare: le matrici rettangolari

Se considero es $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Se moltiplico $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Trasformo la matrice da 3 dimensioni a 2

La matrice applica una trasformazione lineare da $\vec{\mathbb{R}^m}$ a $\vec{\mathbb{R}^n}$

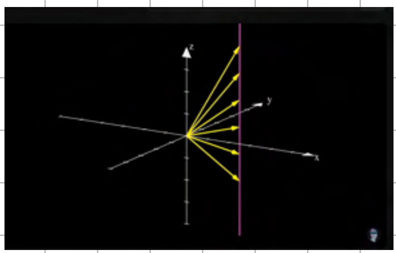
$\mathbb{R}^m \rightarrow \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{R}^n$

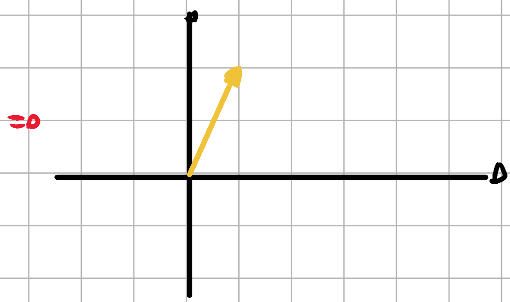
INIZIAMO DA $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ QUESTA È IL CANCELLA DIMENSIONI, LA FORMA PIÙ SEMPLICE DI TRASFORMAZIONE LINEARE TRASFORMA DA $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$

PRESERVANDO X e Y MA RIMUOVENDO Z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

QUESTO SIGNIFICA CHE TUTTI I VETTORI DI FORMA $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ z \end{bmatrix}$ SI TRASFORMANO IN $(1,2)$

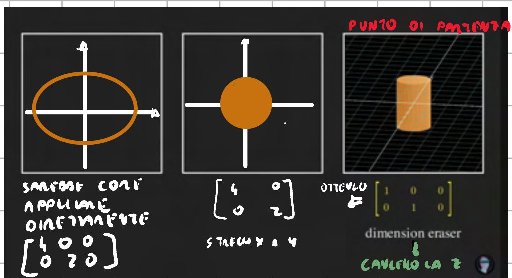




A SUA VOLTA ABBIAMO L'AGGIUNGI DIMENSIONI

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

POSSIAMO OVVIAMENTE APPLICARE LE TRASFORMAZIONI DIRETTAMENTE



AVEVAMO PARLATO PRECEDENTEMENTE DELLE MATRICI SIMMETRICHE e DELLA LORO IMPORTANZA, E SE TI DICESSI CHE $A \cdot A^T = S$ CONSIDERANDO $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$A \cdot A^T =$ MATRICE SIMMETRICA $S^{m \times m}$ $A^T A = S^{n \times n}$, È POSSIBILE RICAVARE MATRICI SIMMETRICHE DA MATRICI RETTANGOLARI SEMPRE

(RICORDA LA MATRICE DEGLI AUTOVETTORI DI UNA MATRICE SIMMETRICA È ORTOGONALE)

$A \cdot A^T = S_L$ $A^T \cdot A = S_R$

S_L HA v_1 v_2 — 2 AUTOVETTORI

LEFT SINGULAR VECTOR OF A

λ_1 λ_2

S_R HA v_1 v_2 v_3 — 3 AUTOVETTORI

RIGHT SINGULAR VECTOR OF A

λ_1 λ_2 $\lambda_3 = 0$

GLI AUTOVALORI ASSOCIATI A QUESTI AUTOVETTORI SONO SEMPRE $\lambda_i \geq 0$ POSITIVI

QUESTO PERCHÉ SONO PSD POSITIVE SEMI-DEFINITE

INOLTRE SE VADO AD ORDINARE GLI AUTOVETTORI DI ENTRAMBE DAL PIÙ GRANDE AL PIÙ PICCOLO QUESTI SI SOVRAPPONGONO

$\lambda_1 \geq \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_1$
$\lambda_2 = \lambda_2$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$
QUESTO È SEMPRE = A 0

NEL SENSO CHE GLI AUTOVALORI DI AA^T SONO SEMPRE UGUALI A QUELLI DI A^TA, ANCHE DI NUMERO, SE LE DUE MATRICI HANNO DIMENSIONI DIVERSE ALLORA QUELLA PIÙ GRANDE AVRÀ DEI λ PARI A 0

QUESTI AUTOVALORI λ_1 e λ_2 SONO DIRETTAMENTE COLLEGATI AD A INIZIALE | SE CONSIDERO

$\sqrt{\lambda_1}$ e $\sqrt{\lambda_2}$ SONO I SINGULAR VALUES DI A
$= \sigma_1$, $= \sigma_2$

SE $A^{m \times n}$ HA RANGO PIENO ($\text{rank}(A) = n$) ALLORA NESSUN VALORE SINGOLARE È 0

SE A HA RANGO $r < n$ ALLORA CI SONO ESATTAMENTE $n-r$ AUTOVALORI NULLI IN A^TA e ($m-r$ AUTOVALORI NULLI IN AA^T)

DETTO CIÒ QUALSIASI MATRICE PUÒ ESSERE DECOMPOSTA IN

$$A = U \Sigma V^T$$

U: ORTOGONALE, ROTATION
Σ: DIAGONALE, STRETCHING
V^T: ORTOGONALE, ROTATION

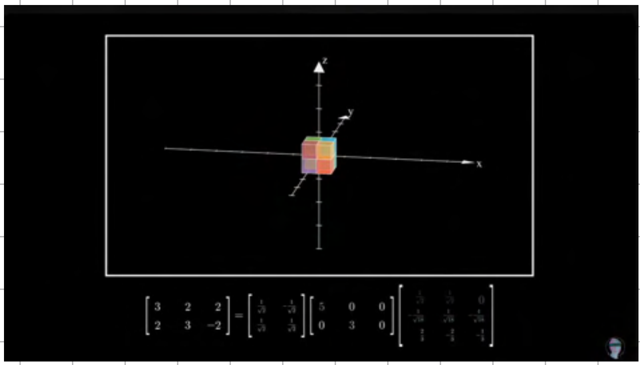
$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_2 \\ | & & | \end{bmatrix} \underset{2\times 3}{\overset{\Sigma}{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} - & \vec{v}_1 & - \\ - & \vec{v}_2 & - \\ - & \vec{v}_3 & - \end{bmatrix}$$

NORMALIZZATO AUTOVETTORI DI $S_L = AA^T$
POSTI IN ORDINE DECRESCENTE DEGLI AUTOVALORI

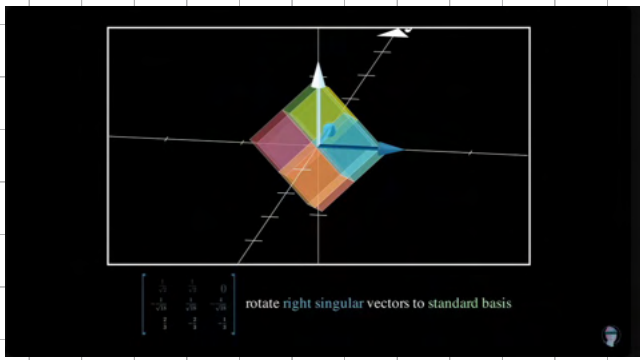
NORMALIZZATO VETTORI DI $AA^T = S_R$ MA TRASPOSTI S_R^T

Come visualizzo ciò

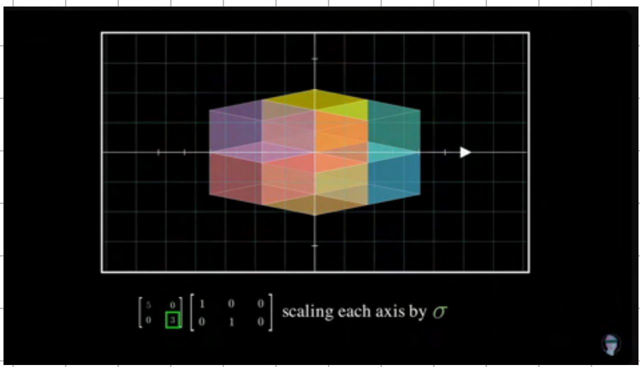
Inizio



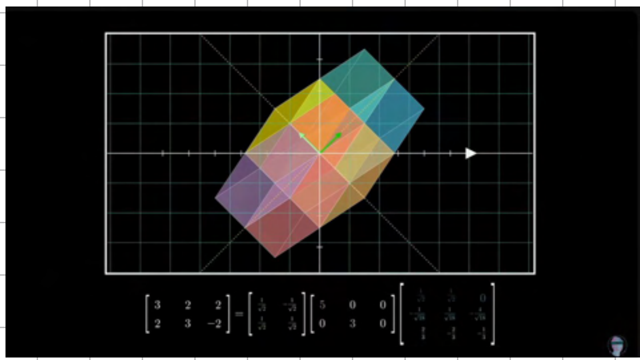
Lo effetto di una matrice ortogonale
ruoto il tutto facendo sì che gli
autovettori coincidano con gli assi



Il vettore con il più grande singular value
venga su x poi y... — così via



Poi cancello una dimensione, e scalo
le 2 rimanenti



A di partenza

ruoto le basi standard per
allinearsi agli autovettori,
cambio base.

DATO $x=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $u=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

• $y = u^T x = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}3 + \frac{1}{\sqrt{2}}4 = \frac{7}{\sqrt{2}}$ (PROIEZIONE DI x SU u)

RICOSTRUZIONE DEL PUNTO PROIETTATO $\hat{x}$ NELLO SPAZIO ORIGINALE

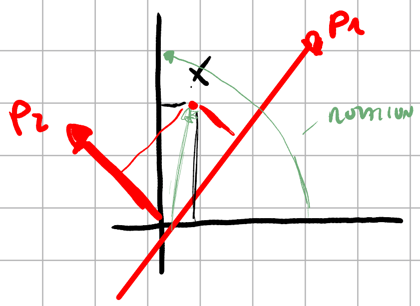
• $\hat{x} = yu = \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{7}{2}\end{bmatrix}$

HO UNA CORRISPONDENZA
PERFETTA SOLO SE U È FULL RANK
SE NON PERDO INFORMAZIONI

$X = \{ x_1 \ldots x_n)$ $\quad x_i \in R^n$ $\quad$ n DIMENSIONAL CAMPIONI

$y = f(x)$
$f(x) = p$

UN SOTTOSPAZIO
DI UNO SPAZIO PRINCIPALE
È POSSIBILE RAPPRESENTARLO
DANDO UNA NUOVA BASE
CHE RAPPRESENTA IL
SOTTOSPAZIO



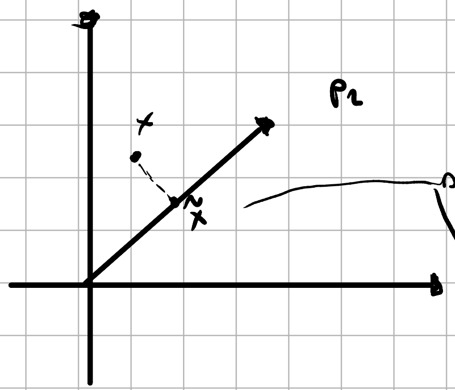
SE ABBIAMO UN SET DI VETTORI (P_1, P_2) CHE SONO ORTOGONALI
QUESTI RAPPRESENTANO UNA BASE
DEL NOSTRO SPAZIO ORIGINALE E
CI PERMETTONO DI RAPPRESENTARE I
PUNTI IN MANIERA DIVERSA
PROIETTANDOLI SULLA NUOVA BASE

LE COORDINATE DI X SARANNO $\begin{bmatrix}P_1^T x\\ P_2^T x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1\\ y_n\end{bmatrix}$

SE VOGLIAMO TORNARE ALLO SPAZIO ORIGINALE $\hat{x} = Py = P\underline{P^T x}$

QUELLO CHE FACCIAMO È TROVARE UNA MATRICE P BASE DI UN SOTTOSPAZIO, CON
UN NUMERO DI DIMENSIONI MINORE

$$y = \begin{bmatrix}P_1^T x\\ \vdots\\ P_m^T x\end{bmatrix} = P^T x$$



(SUB SPACE)
o $P_1^T x$

$\hat{x} = \sum_1 y_i P_i = PP^T x$

NON SARÀ PIÙ IL PUNTO ORIGINALE
PERCHÉ HO RIDOTTO LE DIMENSIONI

HA DIVERSE COORDINATE

* $y = U^T x$ - PUÒ ESSERE VISTO COME UNA ROTAZIONE DELL'ORIGINAL SAMPLE NELL'
ORIGINAL FRAME

Perché usi la matrice trasposta per tornare al sistema di prima???

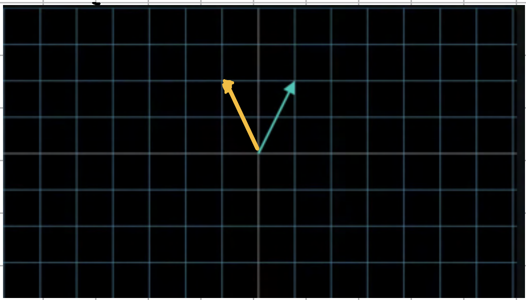
Il prodotto scalare tra due vettori $v \cdot x = v^T x$ può essere visto come il prodotto vettoriale rispetto alla sua trasposta $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$

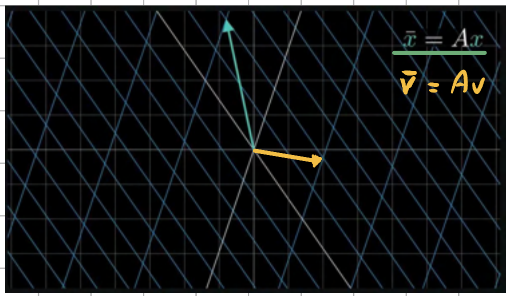
$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & bd \end{bmatrix}$$

Se la pensiamo geometricamente

partiamo da un vettore nello spazio

gli applichiamo una trasformazione moltiplicando per A





Facciamo la stessa cosa x un altro vettore v la cui trasposta è $\bar{v} = Av$

Se no facciamo il prodotto scalare tra v e x $v \cdot x$ e $\bar{v} \cdot \bar{x}$ dopo la trasformazione, il prodotto scalare si preserva?

Il numero è lo stesso o no?? Le linear trasformation preservano il prodotto scalare tra 2 trasformazioni? Non sempre

$$v \cdot x = v^T x \quad e \quad \bar{v}^T \bar{x}$$
$$\bar{v}^T \bar{x} = (Av)^T A x = v^T A^T A x$$

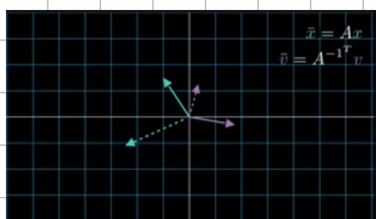
Se vogliamo che $v^T x = v^T A^T A x$, $A^T A = I$ ovvero $A^T = A^{-1}$ ovvero A deve essere ortogonale

Quindi le trasformazioni lineari preservano il prodotto scalare solo in casi specifici noti.

Il valore del prodotto scalare è $v \cdot x = \|v\| \|x\| \cos\theta$

La lunghezza e gli angoli tra i 2 cambiano applicando trasformazioni lineari, quindi il tutto è perfettamente logico

C'è un modo x preservare il dot product x preservare il prodotto scalare e renderlo uguale anche dopo la trasformazione?



Basta moltiplicare M per $(A^{-1})^T$ perché?

$\bar{x} = Ax \quad \bar{v} = Mv$

$v^T x = \bar{v}^T \bar{x} \Rightarrow v^T x = v^T M^T A x \Rightarrow (M^T) = (A^{-1}) \quad M = (A^{-1})^T$

Secondo l'SVD qualsiasi matrice $A = U\Sigma V^T$ è una composizione lineare di queste 3 matrici

Dato $\bar{x} = Ax$ e $\bar{v} = (A^{-1})^T v$

$$\bar{x} = U\Sigma V^T x \qquad \bar{v} = \left((U\Sigma V^T)^{-1}\right)^T v$$

$\overset{\text{x propr. delle matrici inverse}}{=}$

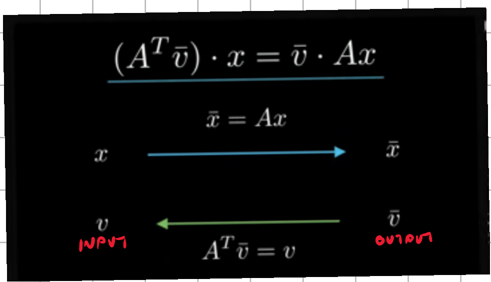
$$\left[\underbrace{(V^T)^{-1}}_{\text{matrici ortogonali}} \underbrace{\Sigma^{-1}}_{= \text{ matrice diagonale } = \Sigma} U^{-1}\right]^T v \overset{\text{x prop matrici trasposte}}{=} \left[(U^{-1})^T (\Sigma^{-1})^T \left((V^T)^{-1}\right)^T\right]^T v$$

$\overset{\text{prop matrici simmetriche e diagonali}}{=}$

$$\left[U \Sigma^{-1} V^T\right] v$$

Quindi x preservare il prodotto scalare bisogna moltiplicare x Σ^{-1}

Ma se A non è invertibile?? Non sta A^{-1}



Quindi ho che la trasformazione preserva il prodotto scalare se

$$\underbrace{(A^T\bar{v})}_{v}x = \bar{v}\underbrace{(Ax)}_{\bar{x}}$$

$$\bar{v} = (A^{-1})^T v$$
$$A^T\bar{v} = A^T(A^{-1})^T v = v$$

Se i vettori sono scalati linearmente rispetto ad un A qualsiasi di quel tipo

La trasposta è simile all'inversa? [non del tutto]

Dato A $\begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \\ - & - \end{bmatrix}$

$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ trasforma da 3 a 2

$A^T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ trasforma da 2 a 3

ma A non è invertibile perché tramite la trasformazione perdiamo le informazioni relative ad una coordinata (ma ha comunque una trasposta)

$$A = R_2 \Sigma R_1 \qquad A^{-1} = R_1^{-1} \Sigma^{-1} R_2^{-1}$$
$$(A^{-1})^T = R_2 \Sigma^{-1} R_1 \qquad A^T = R_1^T \Sigma^T R_2^T = R_1^{-1} \Sigma R_2^{-1}$$

è uguale ma c'è una perdita di informazioni della Σ

A^+ SI PUÒ USARE SEMPRE ANCHE QUANDO A NON È INVERTIBILE