Les astuces de Mançois Froulin

EPL MP*1
1er juillet 2025

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre générale

Table des matières

1.1 Points méthode

Montrer un non-isomorphisme

- Pour montrer que deux groupes sont isomorphes, il suffit d'exhiber un isomorphisme entre eux.
- Pour montrer qu'ils ne sont pas isomorphes, on exhibe une propriété liée à la loi de groupe qui est vraie pour l'un et pas pour l'autre (commutativité, ou ordre de certains éléments par exemple).

Montrer le caractère générateur d'une partie d'un groupe

Pour montrer qu'une partie de G est génératrice de G, il suffit de montrer que l'on peut obtenir, par produit et passage à l'inverse à partir de ses éléments, tous les éléments d'une partie que l'on sait génératrice.

1.2 Astuces

Recettes du sous-...

Pour montrer qu'un ensemble est un sous-groupe, sous-anneau, sous-corps, sous-espace vectoriel, toujours s'assurer qu'il est non vide en justifiant qu'il contient 0 (neutre pour la loi principale !) voire 1 (pour un anneau ou un corps).

Recette du sous-... : remarque

Pour montrer qu'un ensemble est un sous-groupe, un rapport de jury (XENS-A-2020) décrète que la méthode "montrer que $x-y \in H$" est convenable si la vérification est triviale ou découle des théorèmes généraux. Si c'est plus délicat, il vaut mieux distinguer la stabilité de la loi interne de l'existence d'un inverse.

Condition nécessaire pour que le groupe quotient soit un groupe

Quand on a un groupe G et un sous-groupe H, pour que G/H soit un groupe, il faut que H soit distingué. En quotientant ainsi, on réduit le cardinal du groupe à étudier.

Application. Peut donner des informations sur le cardinal du groupe de départ car une formule lie le cardinal du groupe quotient au cardinal du groupe (généralisation du théorème de Lagrange).

Sous-groupe fini de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et projecteur

Si G est un sous-groupe fini de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$M = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} A$$

est un projecteur.

Démonstration. En effet, en élevant au carré et en utilisant que pour $A \in G$ fixé l'application de G dans G qui à B associe AB est une bijection (injective et égalité de cardinaux), on obtient le résultat par changement de variables.

□

Étude d'éléments particuliers via une fonction

En algèbre générale, quand on cherche un élément particulier, poser une application f telle que ce que l'on cherche soit un antécédent par f et montrer qu'il existe (par exemple montrer que f est surjective, potentiellement en commençant par l'injectivité pour établir la bijectivité !).

Application. Si on cherche les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on s'intéresse à $x \mapsto x^2$.

Application. Si on cherche un inverse pour tout élément non nul a dans un anneau commutatif, on montre que $x \mapsto ax$ est surjective. Il en résulte que tout anneau commutatif fini et intègre est un corps.

Un lemme

Si G est un groupe et si a et b sont deux éléments qui commutent d'ordres respectifs p et q avec $p \wedge q = 1$, alors ab est d'ordre pq.

Démonstration. Notons $w(ab)$ l'ordre de ab. $(ab)^{pq} = a^{pq}b^{pq} = e$ car a et b commutent donc $w(ab) \mid pq$. De plus puisque $(ab)^{w(ab)} = e$, il vient $a^{w(ab)} = b^{-w(ab)}$ et $a^{w(ab)q} = b^{-w(ab)q} = e$ d'où $p \mid w(ab)q$ (p est l'ordre de a). Puisque $p \wedge q = 1$, il vient $p \mid w(ab)$. De même, on montre que $q \mid w(ab)$. Ainsi $pq \mid w(ab)$ puisque p et q sont premiers entre eux. pq et $w(ab)$ étant associés et positifs, il sont égaux. $\square$

Théorème de Cauchy

Si G est un groupe fini d'ordre n et si p est un diviseur premier de n, alors G possède un élément d'ordre p.

Démonstration. Il y a deux démonstrations possibles : l'une, plus simple, dans le cas d'un groupe abélien, et l'autre dans le cas général, mais plus difficile. $\square$

Lemme des bergers généralisé

Si E et F sont des ensembles finis, et $f : E \to F$, alors on a la formule :

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{y \in F} \mathrm{Card}\left(f^{-1}(\{y\})\right)$$

Démonstration. En effet, l'unicité de l'image nous fournit l'union disjointe

$$E = \bigsqcup_{y \in f(E)} f^{-1}(\{y\})$$

et on peut prendre F tout entier car si y n'est pas dans $f(E)$, son image réciproque est vide. On obtient la relation en passant aux cardinaux. $\square$

Application. On retrouve le lemme de bergers. : si tout élément de F possède p antécédents, alors $\mathrm{Card}(E) = p\mathrm{Card}(F)$.

Application. En particulier, si f est un morphisme de groupes, on a l'égalité

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f)) \times \mathrm{Card}(\mathrm{Ker}(f))$$

Équation aux classes (HP)

Penser à utiliser l'équation aux classes :

$$ACOMPLETER$$

Pour la démontrer, A COMPLETER

Théorème de factorisation (HP)

A COMPLETER

Démonstration. A FAIRE □

Utilisation des idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Pour faire un usage intéressant du théorème de structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$, ne pas oublier de vérifier que l'idéal n'est pas réduit à $\{0\}$.

Théorème de Lagrange (HP)

Si H est un sous-groupe de G, alors $\mathrm{Card}(H)$ divise $\mathrm{Card}(G)$.

Démonstration. Considérer la relation d'équivalence définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H$$

Les classes d'équivalence sont toutes de cardinal $\mathrm{Card}(H)$. □

Un sous-groupe fini strict est au moins deux fois moins gros

Si H est un sous-groupe strict du groupe G fini, alors $2 \times \mathrm{Card}(H) \leqslant \mathrm{Card}(G)$.

Démonstration. Cela est une conséquence immédiate du théorème de Lagrange. □

Application. Dans $\mathcal{S}_n$, il n'y a pas de sous-groupe strict contenant strictement $\mathcal{A}_n$, puisque celui-ci a déjà pour cardinal la moitié de celui-ci de $\mathcal{S}_n$.

Autour des corps finis contenant $\mathbb{F}_p$

On considère $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q contenant $\mathbb{F}_p$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$q = p^n$$

En effet, on peut munir naturellement $\mathbb{K}$ d'une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. De plus, $\mathbb{K}$ est fini, donc admet une famille $\mathbb{F}_p$-génératrice finie, donc $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$. Ainsi, $\mathbb{K}$ est isomorphe à un certain $\mathbb{F}_p^n$ et le résultat suit par égalité de cardinaux (bijectivité). Ensuite, on a :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ x^q = x$$

En effet, si $x = 0$, c'est immédiat. Sinon, $x \in \mathbb{K}^*$, qui est un groupe de cardinal $q-1$. Donc $x^{q-1} = 1$ et $x^p = x$. Ensuite, l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x^p \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}$. En effet, c'est un morphisme additif en utilisant le fait que p divise toujours $\binom{p}{k}$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Puis $\mathbb{K}$ est commutatif (on peut prendre cela comme définition d'un corps, mais de toute façon, le théorème de Wedderburn affirme que tout corps fini est commutatif), donc φ est un morphisme multiplicatif. Enfin, c'est un morphisme de corps, donc il est injectif puis bijectif par égalité de cardinaux. Enfin, on peut montrer que $\mathbb{K}^*$ est cyclique.

Caractéristique d'un corps

Pour $\mathbb{K}$ un corps, on note

$$j : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ n & \longmapsto & n.1_{\mathbb{K}} \end{array}$$

C'est un morphisme donc son noyau est un idéal de $\mathbb{Z}$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(j) = n\mathbb{Z}$.

- Si $n = 0$, alors $\mathbb{K}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$. On prolonge j de manière naturelle à $\mathbb{Q}$. Cette définition est bien consistante (le prouver à la main). Il est clair que ce prolongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$ est injectif, ce qui fournit le résultat annoncé.
- Si $n \geqslant 1$, alors n est un nombre premier et $\mathbb{K}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En effet, en raisonnant par l'absurde, l'intégrité de $\mathbb{K}$ couplée à la minimalité de n impose le fait que n soit premier. Si $\bar{k} = \bar{l}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $n \mid k - l$ si bien que $j(k-l) = 0$ car $j(n) = 0$. On "prolonge" ainsi sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et le prolongement est injectif, ce qui fournit le résultat.

L'entier n est appelé **caractéristique du corps** $\mathbb{K}$.

Remarque. Un corps infini peut très bien être de caractéristique finie. Par exemple, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(X)$ avec p premier est infini (clairement, puisqu'il contient les monômes) et pourtant, il est de caractéristique

p (cela s'hérite du fait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est de caractéristique p).

1.3 Exercices classiques

1.3.1 Groupes

Centre d'un groupe

Soit G un groupe. On note $Z(G)$ le centre de G défini par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ xy = yx\}$$

et, pour $x \in G$, on note :

$$C(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupes de G.
2. Caractériser, à l'aide de $C(x)$, l'appartenance de x à $Z(G)$.

◦

Dans un groupe, montrer que si $(ab)^n = e$, alors $(ba)^n = e$.

Groupes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication et qui, munie de la multiplication induite, est un groupe.

1. Le groupe G est-il nécessairement un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
2. Montrer l'existence d'une unique matrice de projecteur dans G. On note r son rang.
3. $\star$ Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{GL}_r(\mathbb{K})$.

Inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Ce groupe est-il cyclique ?

CNS sur la cyclicité du produit

Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux groupes cycliques G et H pour que le groupe produit $G \times H$ soit cyclique.

Groupe des caractères

Soit G un groupe cyclique d'ordre n. Déterminer $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Montrer que $(\hat{G}, \times)$ est cyclique.

Racines n-èmes de l'unité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-èmes de l'unité. Déterminer $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}_m\mathbb{U}_n$ pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Automorphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

1. Déterminer les automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier.
2. En admettant que $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ est premier pour q premier, déterminer l'ensemble des morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ pour p et q premiers.

Δ Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$: HP à connaître

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$, soit denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Si $H = \{0\}$, alors il est bien de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a = 0$. Sinon, il contient un réel non nul, et quitte à passer à l'opposé, il contient un réel strictement positif. Donc $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, et il admet une borne inférieure a.

- Supposons que $a \in H$, et montrons alors que $H = a\mathbb{Z}$.
  D'une part, on a $< a >= a\mathbb{Z} \subset H$ par définition du sous-groupe engendré. Réciproquement, soit $x \in H$. Comme $a \in \mathbb{R}_+^*$, on peut considérer $q = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $r = x - aq$. Alors, d'après la première inclusion, $r \in H$, et comme $r \in [0, a[$, on a $r = 0$ par minimalité de a. Donc $x = aq \in a\mathbb{Z}$.
- Supposons que $a \notin H \cap \mathbb{R}_+^*$., et montrons alors que H est dense dans $\mathbb{R}$.
  Donnons-nous un intervalle $]x, y[$ de largeur $\varepsilon = y - x > 0$.
  - Montrons qu'on peut trouver un $h \in]0, \varepsilon[$ dans H. Prenons dans $H \cap \mathbb{R}_+^*$ un h_1 tel que $h_1 \in [a, a+\varepsilon[$. Comme $a \notin H \cap \mathbb{R}_+^*$, on a même $h_1 \in]a, a+\varepsilon[$. Par le même raisonnement, prenons dans H un $h_2 \in]a, h_1[$. il suffit alors de poser $h = h_1 - h_2$.
  - Ensuite, posons $q = \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$. Alors qh appartient à H et il vérifie $x < qh < y$.
- Enfin, aucun $H = a\mathbb{Z}$ ne peut être dense dans $\mathbb{R}$ (il s'agit bien d'un "soit/soit"). En effet :
  - Si $a = 0$, alors l'intervalle $]0, 1[$ ne contient aucun élément de H.
  - Si $a > 0$, alors l'intervalle $]0, a[$ ne contient aucun élément de H.

Ainsi, la preuve est achevée. $\square$

$\star$ Sous-groupes fermés de $\mathbb{C}^*$

Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ qui sont fermés dans $\mathbb{C}$. On pourra utiliser librement le résultat classique sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$.

Vers les équations de Pell-Fermat

Soit $G = \left\{x + y\sqrt{2} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \;:\; x^2 - 2y^2 = 1\right\}$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
2. $\star$ Montrer que G est monogène.

Une propriété sur les cardinaux de parties d'un groupe

Soit A et B deux parties d'un groupe fini G telles que $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$. Montrer que $G = AB$ avec

$$AB = \{ab \mid (a, b) \in A \times B\}$$

Indication. *Pour l'inclusion directe, se donner $x \in G$ puis on pourra montrer que $A^{-1}x \cap B \neq \emptyset$.*

Indication. *Relativement à l'indication qui précède, on pourra observer que $A \cap B \neq \emptyset$ puis remarquer que $Card(A^{-1}x) = Card(A)$.*

Démonstration. L'inclusion réciproque est immédiate par stabilité de G en tant que groupe. Passons à l'inclusion directe. Déjà, on peut remarquer que $A \cap B \neq \emptyset$: en effet, on a $A \cup B \subset G$ donc

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) \leqslant \mathrm{Card}(G)$$

Par hypothèse, il s'ensuit que

$$\mathrm{Card}(A \cap B) \geqslant \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(G) > 0$$

donc on a bien $A \cap B \neq \emptyset$. Soit désormais $x \in G$. L'application

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A^{-1}x \\ a & \longmapsto & a^{-1}x \end{array}$$

est bijective. En effet, elle est injective par régularité de x et surjective par définition. Ainsi, on a $\mathrm{Card}(A^{-1}x) = \mathrm{Card}(A)$. Ensuite, on a donc l'inégalité stricte $\mathrm{Card}(A^{-1}x) + \mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(G)$. Exactement de la même façon que dans notre remarque introductive, on montre que $A^{-1}x \cap B \neq \emptyset$. Ainsi, on peut fixer $b \in A^{-1}x \cap B$. On peut alors fixer $a \in A$ tel que $b = a^{-1}x$. On obtient donc $x = ab \in AB$, ce qui achève l'exercice. $\square$

Parties sans somme d'un groupe

Une partie A d'une groupe abélien $(G,+)$ est dite **sans somme** lorsque :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ x+y \notin A$$

1. Soit p un nombre premier congru à 2 modulo 3. On écrit $p = 3k+2$.
   - Montrer que l'ensemble C des classes modulo p des éléments de $[\![k+1, 2k+1]\!]$ est une partie sans somme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   - $\star$ Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un élément non nul t de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que
   $$\mathrm{Card}((tC) \cap A) \geqslant \frac{\mathrm{Card}(A)}{3}$$
   Indication : on pourra effectuer un raisonnement probabiliste.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
3. Déduire de ce qui précède que dans toute partie fini non vide A de $\mathbb{N}^*$, il existe une partie B de A sans somme et telle que $\mathrm{Card}(B) \geqslant \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{3}$.

$\Delta\star$ Une mesure de non commutativité

Soit G un groupe fini non abélien. Montrer que

$$\mathrm{Card}\left(\left\{(x,y) \in G^2 \ : \ xy = yx\right\}\right) \leqslant \frac{5}{8}\mathrm{Card}(G)^2$$

et que l'égalité a lieu pour le groupe diédral D_4. Indication : on pourra examiner la structure de $C(x) = \{y \in G \ : \ xy = yx\}$ pour un $x \in G$ bien choisi.

Δ Groupes ayant un nombre fini de sous-groupes

Caractériser les groupes qui n'ont qu'un nombre fini de sous-groupes.

Démonstration. Ce sont les groupes finis. Pour un tel groupe, tout élément est d'ordre fini, sinon il contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$, puis on passe par les sous-groupes monogènes. □

Groupes diédraux

Pour $n \geqslant 3$, on note D_n le groupes des isométries vectorielles du plan euclidien qui conservent un polygone régulier à n côtés et d'isobarycentre O.

1. Le groupe D_n est-il monogène ?
2. Montrer qu'il admet une partie génératrice à deux éléments.
3. Déterminer les classes de conjugaison des réflexions dans le groupe D_n.

⋆

Soit m et n dans $\mathbb{N}^*$. Déterminer tous les morphismes de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Produit semi-direct et cardinaux

Soit G un groupe fini ainsi que H et K des sous-groupes de G. On définit :

$$HK = \{hk \ \mid \ (h,k) \in H \times K\}$$

Montrer que $\mathrm{Card}(HK) \times \mathrm{Card}(H \cap K) = \mathrm{Card}(H) \times \mathrm{Card}(K)$. Attention : HK n'est pas un sous-groupe en général !

Démonstration. Considérer l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} H \times K & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & hk \end{array}$$

Remarquer que son image est exactement HK et observer que tout élément de HK admet exactement $\mathrm{Card}(H \cap K)$ antécédents. Conclure en utilisant le lemme des bergers. □

1.3.2 Ordre des éléments d'un groupe

○

Montrer que tout groupe fini d'ordre pair contient un élément $x \neq e$ tel que $x^2 = e$. Et pour les groupes d'ordre impair ?

Un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 est commutatif

Montrer qu'un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2 est commutatif.

Démonstration. Supposons

$$\forall x \in G, \ x^2 = e$$

Alors : $\forall x \in G, \ x = x^{-1}$. En appliquant ceci à xy, on obtient :

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

donc G est commutatif. □

Groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2

Soit G un groupe d'élément neutre e tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e$.

1. Δ Montrer que G est abélien.
2. Soit H un sous-groupe de G différent de G. Si x est un élément de G n'appartenant pas à H, montrer que $H \cup xH$ est un sous-groupe de G isomorphe à $H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Si G est fini, que peut-on en déduire sur son cardinal et sa structure ?
4. Donner un exemple d'un tel groupe infini.

Petit théorème de Fermat sur les groupes : cas commutatif

Soit G un groupe commutatif fini de cardinal $|G|$ et d'élément neutre e. Soit $x \in G$. En calculant $\displaystyle\prod_{g \in G} (xg)$ de deux façons différentes, montrer que $x^{|G|} = e$.

Démonstration. Déjà, remarquons que c'est la commutativité de G qui nous autorise à définir ce produit correctement. Notons-le P dans la suite.

- D'une part, par commutativité, on a $P = x^{|G|} \displaystyle\prod_{g \in G} g$.
- D'autre part, l'application

$$f_x : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & xg \end{array}$$

  est une bijection. En effet, elle est injective par régularité de x dans G, et elle est surjective car pour atteindre un élément g de G, il suffit de prendre comme antécédent $x^{-1}g$. On peut donc effectuer un changement de variable qui prouve que $P = \displaystyle\prod_{g \in G} g$.
- Enfin, en égalisant ces deux expressions de P et par régularité de $\displaystyle\prod_{g \in G} g$, on obtient bien que $x^{|G|} = e$.

□

Δ Petit théorème de Fermat pour les groupes : cas général

Soit G un groupe fini (non nécessairement commutatif) de cardinal $|G|$ et d'élément neutre e. Soit $x \in G$. On souhaite montrer que $x^{|G|} = e$.

1. Justifier l'existence de $p = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = e\}$.
2. Montrer que $\langle x \rangle = \left\{x^0,\ \ldots, x^{p-1}\right\}$ et en déduire que $\mathrm{Card}(\langle x \rangle) = p$.
3. Conclure.

Démonstration. Pour la 1, utiliser le principe des tiroirs.Pour la 2, utiliser la caractérisation du sous-groupe engendré par un élément et une division euclidienne. Montrer que les x^k sont deux à deux distincts pour k variant entre 0 et $p-1$. Pour la 3, utiliser le théorème de Lagrange (à savoir redémontrer car HP) ou utiliser sa variante au programme

1. Considérons $f_x : \begin{array}{ccc} [\![1,\ |G|+1]\!] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & x^t \end{array}$. D'après le principe des tiroirs, f_x n'est pas injective. On peut donc fixer $1 \leqslant a, b \leqslant |G|+1$ tels que $a \neq b$ et $f_x(a) = f_x(b)$. On a alors $x^a = x^b$. Sans perte de généralité, quitte à échanger a et b, on peut supposer que $a < b$. On a alors $x^{b-a} = e$ et $b-a \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble que l'on considère est alors une partie de $\mathbb{N}$ non vide, donc son minimum existe.
2. L'inclusion réciproque est immédiate car $\langle x\rangle = \left\{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dans l'autre sens, soit $y \in \langle x\rangle$. Fixons $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x^k$. Effectuons la division euclidienne de k par p : $k = ap + b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in [\![0,\ p-1]\!]$. On a alors
$$y = x^{ap+b} = (x^p)^a x^b = e^a x^b = x^b$$
et obtient bien le résultat.

   Pour montrer que le cardinal de cet ensemble vaut p, il suffit de montrer que ses éléments sont deux à deux distincts. Soit $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant p-1$ tels que $x^m = x^n$. Raisonnons par l'absurde : supposons que $n-m \geqslant p$. Alors $n \geqslant p+m \leqslant p > p-1$ ce qui est absurde. Donc $0 \leqslant n-m < p$. Or, $x^{n-m} = e$ donc par minimalité de p, $n-m = 0$ puis $n = m$. Les éléments sont bien deux à deux distincts, donc on a bien $\mathrm{Card}(\langle x\rangle) = p$.
3. $\langle x\rangle$ est un sous-groupe de G, donc, d'après le théorème de Lagrange, son cardinal divise $|G|$. On peut donc fixer $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|G| = kp$. On a alors
$$x^{|G|} = x^{kp} = (x^p)^k = e^k = e$$

   Pour mémoire, si on considère un sous-groupe H quelconque de G fini, il faut considérer la relation d'équivalence $\forall (x,y) \in G^2,\ x \sim y \iff xy^{-1} \in H$. Toutes les classes ont même cardinal car ce sont les xH. Puisque les classes d'équivalences forment une partition, on obtient le théorème de Lagrange.

$\square$

Groupes d'ordre 6

Soit G un groupe d'ordre 6.

1. Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 3 et au moins un élément d'ordre 2.
2. Montrer que si G est commutatif, alors il est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. On suppose G non commutatif. On se donne dans G des éléments x et y d'ordre respectifs 3 et 2. Montrer que l'application
$$k \in \{0,1,2\} \mapsto x^k y x^{-k}$$
est injective. En déduire que G possède exactement trois éléments d'ordre 2, puis que G est isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_3$.

$\star$

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que G admet un sous-groupe d'ordre d si, et seulement si, $d \mid n$, et qu'il y a alors unicité d'un tel sous-groupe.
2. En déduire la formule d'Euler :
$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Exposant d'un groupe

Montrer que si deux éléments ont des ordres premiers entre eux, alors leur produit est d'ordre fini. En déduire que tout groupe fini admet un élément d'ordre le ppcm de tous les ordres de ses éléments.

Cyclicité

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que tout sous-groupe fini G de $\mathbb{K}^*$ est cyclique.

Remarque. En particulier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique lorsque p est premier.

$\Delta\star$ Lemme de Cauchy

Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $\mathrm{Card}(G)$. On introduit :

$$A = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \ : \ g_1 \cdots g_p = 1\}$$

1. Montrer que $(g_1, \dots, g_p) \mapsto (g_1, \dots, g_p, g_1)$ définit une permutation σ de A.
2. En considérant la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint, montrer que G possède un élément d'ordre p.

Cyclicité des groupes d'ordre pq

Soit p et q des nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe fini d'ordre pq est cyclique. Indication : utiliser le lemme de Cauchy.

Démonstration. Avec le lemme de Cauchy, on dispose de $x \in G$ d'ordre p et $y \in G$ d'ordre q. Comme p et q sont premiers entre eux car ce sont des nombres premiers distincts, on en déduit de façon assez classique que xy est d'ordre pq. Comme G possède un élément d'ordre son cardinal, G est cyclique. $\square$

1.3.3 Groupe symétrique

Conjugaison dans le groupe symétrique

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{S}(E)$ le groupe des permutations de E. On dit que deux éléments τ et τ' de $\mathcal{S}(E)$ sont conjugués s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$.

1. Montrer que deux cycles sont de même longueur si, et seulement s'ils sont conjugués.
2. Application : en considérant les transpositions, déterminer tous les morphismes de groupe de $\mathcal{S}([\![1, n]\!])$ dans $\mathcal{C}^*$.

Racine carré d'un n-cycle

Le cycle $(1\ 2\ \dots\ n)$ admet-il une racine carrée dans $\mathcal{S}_n$?

Un isomorphisme

Établir un isomorphisme entre le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathcal{S}_3$.

Sous-groupes transitifs de $\mathcal{S}_n$

Un sous groupe H de $\mathcal{S}_n$ est dit transitif lorsque

$$\forall (x, y) \in [\![1, n]\!]^2,\ \exists \sigma \in H,\ \sigma(x) = y$$

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. A quelle condition le groupe $\langle \sigma \rangle$ engendré par σ est-il transitif ?
2. On considère une variable aléatoire X_n de loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Calculer la probabilité p_n que le sous-groupe $\langle X_n \rangle$ engendré par X_n soit transitif.
3. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n de même loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$. On note q_n la probabilité que le sous-groupe $\langle X_n, Y_n \rangle$ engendré par X_n et Y_n soit transitif ; Montrer que
$$q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$\star\star$ Nombre minimal de transpositions pour engendrer $\mathcal{S}_n$

Déterminer le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendre le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

Démonstration. La réponse est $n + 1$. On dispose de pleins de telles familles qui engendrent. Pour montrer qu'il en faut au moins $n + 1$, utiliser des graphes. $\square$

Matrices de permutations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme injectif de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. $\star\star$ Soit σ et τ dans $\mathcal{S}_n$. Montrer que σ et τ sont conjuguées dans $\mathcal{S}_n$ si, et seulement si, les matrices P_σ et P_τ sont semblables. Indication : on pourra étudier le polynôme caractéristique de P_σ.

Nombre de permutations avec k cycles distincts

On note $u_{n,k}$ le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ avec k cycles distincts (un point fixe compte pour un cycle). On a la formule de récurrence :

$$u_{n+1,k+1} = u_{n,k} + n \times u_{n,k+1}$$

Démonstration. Le premier terme correspond au cas où $n+1$ est seul dans son cycle, et le deuxième aux cas où $n+1$ n'est pas seul dans son cycle. $\square$

1.3.4 Anneaux

Caractéristique d'un anneau

Soit A un anneau.

1. Montrer que $k \in \mathbb{Z} \mapsto k.1_A$ est l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A.
2. Montrer que le noyau de ce morphisme est de la forme $N\mathbb{Z}$ pour un unique $N \in \mathbb{N}$. N est alors appelé **caractéristique de l'anneau** A.
3. Que vaut N lorsque :
   - $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geqslant 2$;
   - $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$;
   - $A = \mathbb{R}$;
   - $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour $n \geqslant 2$.
4. Montrer que si A est un corps et $N \neq 0$, alors N est un nombre premier et

$$\forall (k,x) \in \mathbb{Z} \times A,\ k.x = 0 \iff (N \mid k \text{ ou } x = 0)$$

$\circ$

Un groupe multiplicatif inclus dans un anneau A est-il nécessairement un sous-groupe du groupe des inversibles de A ? Et si A est un corps ? intègre ?

⋆ Anneau noethérien

Soit A un anneau. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes.

1. Tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments.
2. Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire.
3. Toute famille non vide d'idéaux de A possède un élément maximal.

Lorsqu'un anneau vérifie l'une de ces trois conditions équivalentes, on dit que l'anneau est **noethérien**.

Remarque. On peut montrer qu'un anneau noethérien intègre est toujours un anneau factoriel, c'est-à-dire un anneau dans lequel a existence et unicité (à association près et à l'ordre des facteurs près) d'une décomposition en éléments irréductibles. Par exemple, tout anneau principal est noethérien puis factoriel, ce qui prouve par exemple de façon immédiate l'existence et l'unicité de la DFP dans $\mathbb{Z}$ et de la DFI dans $\mathbb{K}[X]$.

Idéaux premiers

Soit I un idéal d'un anneau A. On dit que I est premier lorsque :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ xy \in I \implies (x \in I \text{ ou } y \in I)$$

Montrer que l'anneau quotient A/I est intègre si, et seulement si, l'idéal I est premier.

Idéaux maximaux

Soit I un idéal d'un anneau A. On dit que I est maximal lorsque I est un idéal propre de A (inclus strictement dans A) et maximal au sens de l'inclusion. Montrer que l'anneau quotient A/I est un corps si, et seulement si, l'idéal I est maximal.

Un anneau intègre non principal et non factoriel

Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est un anneau intègre. Déterminer l'ensemble de ses unités. Montrer que

$$I = \{x + i\sqrt{5}y \ \mid (x,y) \in Z^2 \text{ et } 2 \mid (y-x)\}$$

est un idéal. En supposant que cet idéal soit principal, montrer que le coefficient vaut ± 2. En déduire une contradiction, et conclure que A n'est pas principal. En considérant 6, montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas principal.

∘ Nilradical

Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau commutatif A est un idéal de A.

Radical d'un idéal

Montrer que
$$\sqrt{I} = \{x \in A \ \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x^n \in I\}$$
est un idéal de A contenant I. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Idéal engendré par les produits

Soient I et J deux idéaux d'un anneau commutatif A.

1. Montrer que le plus petit idéal de A contenant tous les produits ab pour $(a, b) \in A \times B$ est
$$IJ = \left\{ x \in A \ \mid \ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists ((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in I^n \times J^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right\}$$
Le comparer à $I \cap J$.
2. $\star$ A-t-on toujours $IJ = \{ab \ \mid (a, b) \in I \times J\}$?

Idéaux maximaux dans un espace de fonctions

Montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ sont de la forme :
$$I_x = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \ \mid \ f(x) = 0 \right\}$$

Démonstration. Je crois (à vérifier) qu'on peut utiliser le théorème de Borel-Lebesgue. □

Une réciproque du théorème chinois

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que les anneaux $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$ sont isomorphes si, et seulement si, a et b sont premiers entre eux.

Détermination de morphismes

Déterminer les morphismes d'anneaux, pus les morphismes de groupes, de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Même question avec $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Nilpotence dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier naturel pour qu'il y ait des éléments nilpotents non nuls dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Anneau des entiers de Gauss

On pose $\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison.
2. Montrer qu'un élément u de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est inversible si, et seulement si, $|u| = 1$.
3. Expliciter les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Anneau des entiers d'Eisenstein

On pose $j = \exp(2i\pi/3)$ et $\mathbb{Z}[j] = \{x + jy \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison.
2. Montrer qu'un élément u de l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ est inversible si, et seulement si, $|u| = 1$.
3. Expliciter les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.

Anneau des nombres décimaux

Montrer que l'ensemble des nombres décimaux

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ 10^n x \in \mathbb{Z}\}$$

est un anneau principal.

Anneaux $\mathbb{Z}_p$

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des rationnels de la forme a/b avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $b \wedge p = 1$.

1. Vérifier que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Quels sont ses éléments inversibles ? Ses éléments irréductibles ?
3. Déterminer les idéaux de A. En déduire que $\mathbb{Z}_p$ est principal.

$\star$ Principalité des sous-anneaux de $\mathbb{Q}$

Montrer que tout sous-anneau A de $\mathbb{Q}$ est principal.

1.3.5 Corps

$\circ$

Quels sont les corps $\mathbb{K}$ tels que $\forall x \in \mathbb{K}^*,\ x^{-1} = x$?

△ Injectivité des morphismes de corps

Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Démonstration. Soit φ un morphisme du corps $\mathbb{K}$ vers le corps $\mathbb{L}$. Raisonnons par l'absurde : supposons que φ n'est pas injectif. On peut alors fixer $x \in \operatorname{Ker}(\varphi) \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$. Or, x est non nul, donc on a :

$$1_{\mathbb{L}} = \varphi(1_{\mathbb{K}}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = 0_{\mathbb{L}}$$

par propriétés des morphismes de corps ainsi que par absorbance. Or, nos corps sont toujours supposés non triviaux, donc ceci est **absurde**. Ainsi, φ est bien injectif, ce qui conclut. □

△ Structure de corps des anneaux intègres finis

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Démonstration. Donnons-nous un anneau intègre fini A et a un élément non nul de A. Considérons l'application

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$

Déjà, cette application est bien définie par stabilité de l'anneau par la deuxième loi. Ensuite, elle injective par intégrité de A. Enfin, elle est alors surjective par égalité de cardinaux. Donc on peut fixer un antécédent de 1_A par φ_a, ce qui montre que a est inversible. Ainsi, A est bien un corps car seule l'inversibilité des éléments non nuls manquait. □

Remarque. On peut montrer de même que toute algèbre intègre de dimension finie est un corps.

Idéaux d'un corps

Déterminer l'ensemble des idéaux d'un corps $\mathbb{K}$

Indication. *Que se passe-t-il si un élément non nul de* $\mathbb{K}$ *appartient à un idéal ?*

Démonstration. On raisonne classiquement par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Soit I un idéal de $\mathbb{K}$. L'idéal nul est évidemment solution, donc on peut désormais supposer que I n'est pas réduit au groupe trivial. Fixons $x \in I \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$. Puisque I est un idéal, $xx^{-1} = 1_{\mathbb{K}} \in I$. Par suite, pour tout $y \in \mathbb{K}$, $y \times 1_{\mathbb{K}} = y \in I$, donc $I = \mathbb{K}$.
- **Synthèse** : Réciproquement, $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et $\mathbb{K}$ sont bien des idéaux de $\mathbb{K}$, la vérification est immédiate.

□

Cardinal d'un corps fini

Démontrer que tout corps fini $\mathbb{K}$ est de cardinal p^n avec p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Considérer

$$\mathbb{L} = \{k\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

qui est un sous-corps de $\mathbb{K}$. Démontrer que sa caractéristique est un nombre premier. Enfin, voir $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{L}$-espace vectoriel et conclure par dimension. □

Éléments algébriques

Soit $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$. on dit que $x \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il admet un polynôme annulateur non nul, c'est-à-dire un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = 0$.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$, alors il existe un polynôme annulateur Π non nul de degré minimal et que celui-ci est irréductible. Montrer alors que $\mathbb{K}[x]$ est un corps de dimension $\deg(\Pi)$ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $x \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, $\mathbb{K}[x]$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.
3. $\star$ Montrer que l'ensemble des éléments algébriques sur $\mathbb{K}$ est un sous-corps de ł.
4. $\star\star$ Montrer que l'ensemble des nombres complexes algébriques sur le corps $\mathbb{Q}$ est un corps algébriquement clos, c'est-à-dire dans lequel tout polynôme est scindé. Est-il isomorphe à $\mathbb{C}$?

1.3.6 TD Châteaux

On notera la loi de groupe multiplicativement lorsque l'exercice ne traite que de groupes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. On désigne par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On rappelle que selon la définition du programme, tous les corps sont supposés commutatifs *a priori*.

Sous-groupes distingués et groupes quotients

Sous-groupes distingués et groupes quotients

Soit $g \in G$. On note σ_g l'automorphisme intérieur $x \mapsto gxg^{-1}$ de G.

1. Vérifier que σ_g est un automorphisme de G.
2. Vérifier que l'application $g \mapsto \sigma_g$ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$, dont le noyau est le centre de G.
3. On définit dans G la relation binaire $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff \exists g \in G,\ y = \sigma_g(x)$. On vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. La classe de x est appelée orbite de x, notée $\mathcal{O}_x$. A quelle condition l'orbite de x est-elle réduite au singleton $\{x\}$? Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On définit la relation binaire $\mathcal{R}_g$ par :
$$x\mathcal{R}_g y \iff x^{-1}y \in H$$
On définit de même la relation binaire $\mathcal{R}_d$ par $x\mathcal{R}_d y \iff xy^{-1} \in H$. On vérifie facilement que $\mathcal{R}_g$ est une relation d'équivalence et que la classe d'équivalence d'un élément x de G est égale à xH. On appelle indice de H dans G le nombre de classes d'équivalence selon $\mathcal{R}_g$ (s'il est fini). On le note $[G : H]$. De la même façon, $\mathcal{R}_d$ est aussi une relation d'équivalence et la classe d'équivalence de x selon $\mathcal{R}_d$ est égale à Hx. Si H est un sous-groupe de G, on dit que H est distingué dans G lorsque $\forall x \in H,\ \forall g \in G,\ gxg^{-1} \in H$. Si H est un sous-groupe distingué de G, les relations d'équivalence $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}_d$ coïncident, la classe d'équivalence étant xH. L'ensemble quotient est alors noté G/H. On montre alors aisément que la relation $\mathcal{R}_g$ est compatible avec la loi de G et la loi quotient muni G/H d'une structure de groupe, appelé groupe quotient de G par H. Si G est fini, le groupe quotient est d'ordre $|G|/|H|$.
4. Déterminer les sous-groupes distingués du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.

Actions de groupes et formule des classes

Actions de groupes

Soient E un ensemble et G un groupe. une action du groupe G sur l'ensemble E est une application

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

qui vérifie $\forall (g,g') \in G^2,\ \forall x \in E,\ (gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$ et $e \cdot x = x$. Cela revient à se donner pour tout $g \in G$ une permutation $\sigma_g : E \to E$ définie par $\sigma_g(x) = g \cdot x$, avec la propriété suivante : $\forall (g,g') \in G^2,\ \sigma_g \circ \sigma_{g'} = \sigma_{gg'}$ et $\sigma_e = \mathrm{Id}$. Si $x \in E$, on définit l'orbite de x comme étant $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \ \mid\ g \in G\}$.

1. Vérifier que l'application
$$\begin{array}{ccc} G^2 & \longrightarrow & G \\ (g,x) & \longmapsto & gx \end{array}$$
est une action de groupe, qu'on appelle action par translation.
2. Même question avec l'application
$$\begin{array}{ccc} G^2 & \longrightarrow & G \\ (g,x) & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$$
qu'on appelle action par automorphisme intérieur.
3. Vérifier que les orbites forment une partition de E.
4. Si $x \in E$, on définit le stabilisateur de x comme étant $\mathrm{Stab}_x = \{g \in G \ \mid\ g \cdot x = x\}$. Vérifier que Stab_x est un sous-groupe de G.
5. En appliquant le lemme des bergers, montrer que si G est fini, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\mathcal{O}_x)\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}_x)$.

Équation aux classes

On se donne une action du groupe G sur l'ensemble E. On pose $E_G = \{x \in E \mid \forall g \in G,\ g \cdot x = x\}$. Remarquons qu'alors : $x \in E_G \iff \mathcal{O}_x = \{x\}$.

1. Si G est fini, montrer que
$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_G) + \sum_{x \in A'} \mathrm{Card}(\mathcal{O}_\S)$$
où A' est un ensemble de représentants des orbites non réduites à un singleton.
2. Si E et G sont finis, en déduire l'équation aux classes :
$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E_G) + \sum_{x \in A'} \frac{\mathrm{Card}(\mathcal{O}_x)}{\mathrm{Card}(\mathrm{Stab}_x)}$$
3. Appliquer la formule précédente à l'action de G sur lui-même par automorphisme intérieur.
4. Pour $g \in G$, on pose $E_g = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$. On note r le nombre d'orbites de l'action de G sur E. Démontrer la formule de Burnside :
$$r = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(E_g)$$

Application aux p-groupes

Soit p un nombre premier.

1. Démontrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.
2. Démontrer que tout groupe d'ordre p^k pour $k \geqslant 3$ possède un centre non réduit à l'élément neutre.

Autour du théorème de Cauchy

Dans les exercices qui suivent, on se propose de démontrer le théorème de Cauchy : si G est un groupe fini de cardinal n et p est un nombre premier divisant n, alors G possède un élément d'ordre p.

Un lemme

On suppose G abélien. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs a et b premiers entre eux. Montrer que xy est d'ordre ab.

Preuve du théorème dans le cas abélien

Soit G un groupe fini abélien d'ordre n. Soit p un nombre premier divisant n. On note $x_1, \dots, x_n$ les éléments de G. Pour i variant de 1 à n, on note ω_i l'ordre de x_i. On définit l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/\omega_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\omega_n\mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) & \longmapsto & x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \end{array}$$

Justifier que f est bien définie et est un morphisme de groupes. En déduire que n divise $\prod_{i=1}^{n} \omega_i$ puis que p divise l'un des ω_i. Conclure.

Une première application

On suppose que G est un groupe abélien d'ordre $p_1 \cdots p_r$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts. Montrer qu G est cyclique.

Preuve du théorème dans le cas général

On ne suppose plus nécessairement G abélien. On pose $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in G_p \mid x_1 \cdots x_p = e\}$. On définit dans E la relation binaire $\mathcal{R}$ de la façon suivante :

$$(x_1, \dots, x_p)\mathcal{R}(y_1, \dots, y_p) \iff \exists k \in [\![0, p-1]\!], \begin{cases} \forall i \in [\![1, p-k]\!], \ y_i = x_{k+i} \\ \forall i \in [\![p-k+1, p]\!], \ y_i = x_{i-p+k} \end{cases}$$

1. Justifier que $\text{Card}(E) = n^{p-1}$.
2. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément $(e, \dots, e)$?
3. Soit $X \in E$. Prouver l'équivalence : $\text{Card}(\dot{X}) = 1 \iff \exists x \in G, \ X = (x, \dots, x)$ avec $x^p = e$. Montrer que si $\text{Card}(\dot{X}) \neq 1$, alors $\text{Card}(\dot{X}) = p$.
4. Soit $H = \{x \in G \mid x^p = e\}$. Déduire de ce qui précède que $\text{Card}(H)$ est un multiple de p.
5. Conclure.

Démonstration. Pour la 4, passer aux cardinaux le fait que les classes d'équivalence forment une partition. □

Une deuxième application

1. Démontrer que si p est premier, il existe deux structures de groupe d'ordre d'ordre p^2 : la structure cyclique et celle de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.
2. Démontrer que si p est premier, il existe deux structures de groupe d'ordre $2p$: la structure cyclique et celle du groupe diédral D_p.
3. Étudier les structures de groupe d'ordre 2024 et 2026.

Un théorème de Frobenius

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe fini de G. On note p le plus petit diviseur premier du cardinal de G. On suppose que H est d'indice fini p dans G, c'est-à-dire $\mathrm{Card}(G) = p \times \mathrm{Card}(H)$.

1. On note $(G/H)_g$ l'ensemble des classes à gauche selon H. Démontrer que l'application $(x, aH) \mapsto xaH$ est une action du groupe G sur $(G/H)_g$.
2. Démontrer que $\{\sigma_x \mid x \in G\}$ est de cardinal p.
3. En déduire que H est distingué dans G.

Théorème de l'élément primitif

Autour des ordres et une formule d'Euler

1. Soit $a \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que l'ordre de $\overline{a}$ dans le groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est égal à $\dfrac{n}{a \wedge n}$.
2. En regroupant les éléments selon leur ordre, démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Théorème de l'élément primitif

Soit $\mathbb{K}$ un corps et G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ de cardinal n.

1. Si d est un diviseur de n, on note $\psi(d)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d. Justifier que $n = \sum\limits_{d|n} \psi(d)$.
2. Soit d un diviseur de n. On suppose qu'il existe un élément de G d'ordre d. Justifier que le polynôme $X^d - 1$ possède exactement d racines dans $\mathbb{K}$. En déduire que G admet exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.
3. En utilisant les questions précédentes et l'exercice précédent, montrer que pour tout d diviseur de n, on a : $\psi(d) = \varphi(d)$. En déduire que G est cyclique.

Remarque. Ce résultat constitue le théorème de l'élément primitif. En l'appliquant au corps $\mathbb{K} =$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier et au groupe $G = \mathbb{K}^*$, on en déduit que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique. Un générateur de ce groupe s'appelle un élément primitif modulo p.

Détermination pratique d'éléments primitifs modulo p

Déterminer un élément primitif modulo p pour $p = 5$ puis pour $p = 7$.

Structure du groupe multiplicatif des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Un lemme utile

Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien. Soient x et y deux éléments de G d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Montrer que l'ordre de $x \cdot y$ est mn.

Structure des $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ pour p premier

Soit p un nombre premier différent de 2. On se place dans le groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$.

1. Montrer par récurrence que si k est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors

$$(1+p)^{p^{k-2}} \equiv 1 + p^{k-1} \ [p^k]$$

2. En déduire que

$$(1+p)^{p^{k-1}} \equiv 1 \ [p^k]$$

3. En déduire que $\overline{1+p}$ est d'ordre p^{n-1} dans G.
4. Quel est le cardinal de G ?
5. En utilisant un générateur du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ (dont l'existence est assurée par la partie précédente), montrer que G est cyclique.

Étude du cas particulier $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$

On suppose ici $p = 2$ et $n \geqslant 2$. On étudie donc le groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$.

1. Montrer que si k est un entier naturel, alors

$$5^{2^k} \equiv 1 + 2^{k+2} \; [2^{k+3}]$$

   Indication : on pourra procéder par récurrence.
2. En déduire que $\overline{5}$ est d'ordre 2^{n-2} dans G.
3. Montrer que $\overline{-1}$ n'appartient pas au groupe engendré par $\overline{5}$ dans G.
4. En déduire que, pour n supérieur ou égal à 3, G est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
5. En déduire que G n'est pas cyclique.

Dévissage de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

1. Soient G et G' deux groupes multiplicatifs cycliques d'ordre respectifs m et n. On munit $G \times G'$ de la structure de groupe produit. Montrer que $G \times G'$ est cyclique si, et seulement si, m et n sont premiers entre eux.
2. Si m et n sont deux entiers premiers entre eux, rappeler rapidement pourquoi les groupes multiplicatifs $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.
3. Soit $n \geqslant 2$ un entier que l'on décompose en facteurs premiers sous la forme $\prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$.

   Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à

$$\prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p_i^{a_i}\mathbb{Z})^\times$$

4. Démontrer que le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique si, et seulement si, $n = 2$, $n = 4$, $n = p^a$ ou $n = 2p^a$, où p est un nombre premier impair.

Construction de corps finis

Pour p premier, on notera $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Quotient de $\mathbb{K}[X]$ par un idéal principal

Soit $\mathbb{K}$ un corps et P un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$. On introduit sur $\mathbb{K}[X]$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $A\mathcal{R}B \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P = Q(A-B)$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}[X]$ compatible avec les lois $+$ et $\cdot$. On note $\overline{A}$ la classe d'équivalence du polynôme A, c'est-à-dire l'ensemble $A + P\mathbb{K}[X]$. On note $\mathbb{K}[X]/(P)$ l'ensemble quotient, dans lequel on définit naturellement les lois quotient. Ainsi, $\mathbb{K}[X]/(P)$ est muni d'une structure d'anneaux et la projection canonique est un morphisme d'anneaux.
2. Démontrer que l'application $j : \mathbb{K} \to \mathbb{K}[X]/(P)$ définie par $j(u) = \overline{u}$ est injective. Ce morphisme d'anneaux injectif permet d'identifier $\mathbb{K}$ et on image $j(\mathbb{K})$.
3. Démontrer que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps si, et seulement si, P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Indication : on pourra utiliser la réciproque de l'identité de Bézout.
   On supposera désormais que P est irréductible et on notera $\mathbb{K}'$ ce corps. j permet alors d'identifier $\mathbb{K}$ à un sous-corps de $\mathbb{K}'$. Ainsi, on peut abusivement considérer que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}'[X]$.
4. On pose $\alpha = \overline{X}$. Justifier que $P(\alpha) = 0$. On en déduit que le polynôme P, qui était irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, ne l'est plus dans $\mathbb{K}'[X]$ puisque α en est une racine.
5. En déduire que l'on peut construire une extension du corps $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un corps $\mathbb{L}$ contenant un sous-corps isomorphe à $\mathbb{K}$, dans laquelle tout polynôme est scindé.

Remarque. Une telle extension de corps est appelée corps de décomposition de P.

Nombre de polynômes irréductibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$

Soit p un nombre premier. On s'intéresse au polynômes irréductibles de l'anneau $\mathbb{F}_p[X]$. on note $m_r(p)$ le nombre de polynômes irréductibles unitaires de degré r dans $\mathbb{F}_p[X]$.

1. Démontrer que $m_1(p) = p$ et $m_2(p) = \dfrac{p(p-1)}{2}$. Indication : pour la deuxième égalité, on pourra dénombrer les polynômes réductibles de degré 2.
2. Démontrer que dans $\mathbb{F}_p[X]$, le polynôme $X^{p^n} - X$ est exactement le produit de tous les polynômes irréductibles unitaires dont le degré divise n. Vérifier ce résultat lorsque $p = 2$ et $n = 3$.
3. Déduire de la question précédente que $p^n = \displaystyle\sum_{r|n} r m_r(p)$.
4. En déduire l'encadrement suivant :
$$\frac{p^n - pE(n/2) + 1}{n} \leqslant m_n(p) \leqslant \frac{p^n}{n}$$
5. En déduire qu'il existe dans $\mathbb{F}_p[X]$ des polynômes irréductibles de tout degré.

Construction d'un corps fini de cardinal p^n

Soit p un nombre premier. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P un polynôme irréductible de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On construit comme dans la section précédente un corps $\mathbb{K}' = \mathbb{F}_p[X]/(P)$.

1. Si $k \in \mathbb{N}$, on note E_k l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ de degré inférieur ou égal à k. Montrer que l'application $s : E_{n-1} \to \mathbb{K}'$ définie par $s(A) = \overline{A}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. En déduire que le cardinal de $\mathbb{K}'$ est égal à p^n.
3. On choisit $p = 2$ et $P = X^2 + X + 1$. Vérifier que P est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. On note $\mathbb{F}_4$ le corps $\mathbb{F}_2[X]/(P)$. En notant $\alpha = \overline{A}$, montrer que $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$. Justifier que $\alpha^2 = \alpha + 1$. Dresser la table de multiplication de ce corps.
4. On choisit $p = 3$ et $P = X^2 + 1$. Justifier que P est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$. Donner la liste des 9 éléments du corps $\mathbb{F}_3[X]/(P)$ que l'on note $\mathbb{F}_9$. Indiquer comment construire la table de multiplication de ce corps.
5. Montrer que le cardinal d'un corps fini est nécessairement une puissance d'un nombre premier.

Remarque. On a montré que pour p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un corps de cardinal p^n. On peut prouver que ce corps de cardinal p^n est unique à isomorphisme près.

Chapitre 2

Arithmétique

Table des matières

2.1 Points méthode

Invariance des propriétés de divisibilité par association

En termes de divisibilité, deux éléments associés ont les mêmes propriétés.

Factorisation par un PGCD

Si d est un PGCD de a et b, on peut écrire $a = da'$ et $b = db'$, avec a' et b' premiers entre eux.

Choix de la forme de la décomposition en irréductibles

Dans la pratique, on écrit la décomposition en produit d'irréductibles d'un élément a non nul sous l'une des formes suivantes :

- $a = up_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ où u est une unité, $p_1, \ldots, p_k$ des éléments de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des entiers naturels non nuls ;
- $a = up_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ où u est une unité, $p_1, \ldots, p_k$ des éléments de $\mathcal{P}$ deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des entiers naturels éventuellement nuls.

Avec la forme étendue, on perd l'unicité, mais on peut utiliser les mêmes irréductibles pour plusieurs éléments de A.

2.2 Astuces

Travail sur des carrés

Quand on travaille sur des carrés, penser à regarde ce qu'il se passe modulo 4 et 8 : cela fait très bon ménage avec les carrés. Modulo 4, les carrés valent 0 ou 1, et modulo 9, ils valent 0, 1 ou 4.

Travail sur des cubes

Quand on travaille sur des cubes, penser à regarde ce qu'il se passe modulo 7 et 9 : cela fait très bon ménage avec les cubes. Modulo 7, les cubes valent 0, 1 ou 6, et modulo 9, ils valent 0, 1 ou 8.

Somme des chiffres et modulo 9

Un entier écrit en base 10 est toujours congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

Application. Somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

Nombres premiers entre $n+1$ et $2n$

Soit p un nombre premier entre $n+1$ et $2n$. Il est facile de montrer que $p \mid \binom{2n}{n}$ et on en déduit :

$$\prod_{\substack{n+1<p\leqslant 2n \\ p \text{ premier}}} p \,\Bigg|\, \binom{2n}{n}$$

Application. On en déduit notamment l'inégalité :

$$\prod_{\substack{n+1<p\leqslant 2n \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2n-1}{n} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = 2^{2n-2}$$

Cela peut servir (en partie) à démontrer le théorème de Tchebychev / postulat de Bertrand : il existe toujours un nombre premier entre $n+1$ et $2n$ dès que $n \geqslant 2$. Et sinon, *cf* Maths A 2024...

Pseudo-réciproque d'une divisibilité

Soit p premier. Si $(p^n - 1) \mid (p^m - 1)$, alors $n \mid m$.

Démonstration. Il faut appliquer simultanément l'algorithme de division euclidienne à $p^m - 1$ par $p^n - 1$ et à m par n. □

Décomposition d'un entier par les indicatrices d'Euler de ses diviseurs

On a la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Démonstration. Montrer l'égalité ensembliste suivante, et la passer aux cardinaux :

$$\left\{\frac{k}{n} | 1 \leqslant k \leqslant n\right\} = \bigsqcup_{d \mid n} \left\{\frac{k}{d} | k \wedge d = 1\right\}$$

□

Application. Calcul du déterminant de Smith.

Congruences de suites

Quand on doit prouver des congruences sur les termes de suites, où le modulo varie, du type

$$a_n \equiv b_n n \ [m_n n]$$

où $n \in \mathbb{N}$, il faut revenir aux entiers et faire une récurrence. De façon générale, si on travaille avec des congruences qui n'ont pas le même modulo, il faut revenir aux entiers !

"PGCD" d'une infinité d'entiers

Pour adapter le concept de PGCD pour une infinité d'entiers a_n, on observe l'idéal engendré par les a_n, ce qui permet en général de s'en sortir.

Équations de Pell-Fermat

Ce sont des équations de la forme $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Penser au conjugué algébrique et par conséquent se placer dans

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

On y définit le morphisme de conjugaison

$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

ainsi que le "module"

$$N : a + b\sqrt{2} \mapsto (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

Ce "module" est multiplicatif : $N(zz') = N(z)N(z')$. On se ramène donc à l'étude des inversibles.

Application. On peut faire cela de façon plus générale avec $a^2 - Kb^2$ si K n'est pas un carré (cela ajoute une dimension algébrique).

Une bijection utile

Avoir en tête la bijection suivante :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (m, n) & \longmapsto & (2m + 1)2^n \end{array}$$

Démonstration. En effet, on prouve qu'il s'agit d'une bijection en utilisant la valuation 2-adique. □

Application. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^{2^k}}{1 - z^{2^{k+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

On écrira le dénominateur comme la somme d'une famille, puis on appliquera le théorème sur les familles doubles. On conclura par changement d'indice avec la bijection sus-citée pour retrouver une série géométrique qui commence au rang 1.

2.3 Exercices classiques

2.3.1 Arithmétique des entiers

Formule d'Euler

Montrer la formule d'Euler :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Produits d'entiers successifs et carrés parfaits

Trouver les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n(n+1)$ soit un carré parfait, puis les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n(n+1)(n+2)$ soit un carré parfait.

Il y a de gros trous dans la liste !

Montrer qu'il existe des listes d'entiers consécutifs arbitrairement grandes ne contenant aucun nombre premier.

Démonstration. Considérer les nombres $n!+2$, $n!+3$, $\ldots$, $n!+n$. $\square$

Nombres premiers congrus à -1 modulo 4

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 4.

Carrés dans $\mathbb{F}_p$ et nombres premiers congrus à 1 modulo 4

Soit p un nombre premier impair.

1. Soit $a \in \mathbb{F}_p$ non nul. Montrer que $a^{(p-1)/2} = \pm 1$. Et si a est un carré dans $\mathbb{F}_p$?
2. Montrer que a est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si, et seulement si, $a^{(p-1)/2} = 1$. Indication : on pourra considérer le produit des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$ ainsi que les deux involutions $x \mapsto x^{-1}$ et $x \mapsto ax^{-1}$ de $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Sinon, on pourra aussi dénombrer les carrés de $\mathbb{F}_p$ à l'aide d'un morphisme.
3. En déduire que -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si, et seulement si, p est congru à 1 modulo 4.
4. Montrer qu'il existe une infinité de nombre premiers congrus à 1 modulo 4.

$\star$

Soit p un nombre premier impair et $a \in \mathbb{Z}$ non multiple de p. Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k^2 \equiv a[p]$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k^2 \equiv a[p^n]$. Généraliser à des polynômes autres que $X^2 - a$.

Une divisibilité étrange

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

Critères de divisibilité

Déterminer un critère de divisibilité par 31. Généraliser.

Une factorisation de Sophie Germain

Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $n^4 + 4$ est premier.

Démonstration. Écrire $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - (2n)^2$ puis factoriser et discuter. □

Une équation du second degré dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$

Trouver les racines modulo 143 de l'équation $x^2 + x + 11 = 0$.

Démonstration. Remarquer que $143 = 11 \times 13$ et utiliser le théorème chinois. □

Une non divisibilité

Montrer que 121 ne divise jamais $n^2 + 3n + 5$.

Étrange...

Déterminer la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

Démonstration. Passer modulo 9 pour obtenir la congruence modulo 9 du nombre cherché. Ensuite, majorer extrêmement brutalement les sommes des chiffres, ce qui fait énormément diminuer la valeur possible, puis conclure en observant que seule un valeur est possible dans l'encadrement finale avec la congruence modulo 9. □

△ Théorème de Wilson

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Montrer que n est premier si, et seulement si, $(n-1)! \equiv -1\ [n]$.

⋆

Soit p un nombre premier et $q \in \mathbb{N}^*$ premier avec p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n l'ordre de $\overline{q}$ dans le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(t_{n+1}/t_n)_{n\geqslant 1}$ est constante à partir d'un certain rang. Montrer que le résultat reste vrai sans supposer p premier.

Δ⋆ Formule de Legendre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Montrer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Démonstration. Voici une preuve très élégante due à François Moulin. On munit $\Omega = [\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme et on s'intéresse à la variable aléatoire v_p définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dispose alors de la formule :

$$\mathbb{E}(v_p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} v_p(k)$$

par la formule de transfert. Mais, par propriété de la valuation p-adique, on a alors :

$$\mathbb{E}(v_p) = \frac{1}{n} v_p(n!)$$

D'autre part, puisque la variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dispose aussi de la formule :

$$\mathbb{E}(v_p) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(v_p \geqslant i)$$

Or, puisque l'on a choisi la probabilité uniforme, il suffit alors de déterminer le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ dont la valuation p-adique est supérieure à i, c'est-à-dire le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ divisibles par p^i. Or, il y en a exactement $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(v_p) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

En égalisant les deux expressions différentes de $\mathbb{E}(v_p)$ et en multipliant par n, on obtient finalement :

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Il existe principalement deux autres preuves : la première, fondée sur le même principe du nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ divisibles par p^i suivie d'un télescopage, et une autre par récurrence en utilisant des propriétés de la partie entière. Néanmoins, la preuve proposée ici, très originale, a le mérite d'être très brève est assez simple. □

Convolution de Dirichlet

On note E l'espace des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On le munit de la loi $*$, dite convolution de Dirichlet, définie par :

$$\forall (f,g) \in E^2,\ \forall n \in^*,\ (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

1. Montrer que E est un monoïde commutatif de neutre $\varepsilon : n \mapsto \delta_{1,n}$.
2. Montrer que la convolution de deux fonctions arithmétiques multiplicatives est arithmétique multiplicative. On rappelle qu'une fonction f est arithmétique multiplicative si elle est définie sur $\mathbb{N}^*$, si $f(1) = 1$ et si $m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n)$.

Δ Fonction de Möbius

On définit la fonction de Möbius μ sur $\mathbb{N}^*$ de la façon suivante : à $n \in^*$, elle associe

- $(-1)^r$ si n est le produit d'exactement p nombres premiers deux à deux distincts ;
- 0 sinon.

1. Montrer que la fonction de Möbius est arithmétique multiplicative.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$$
3. En déduire, en utilisant l'exercice sur la convolution de Dirichlet, la formule d'inversion de Möbius :
$$\forall (f,g) \in E^2, \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ g(n) = \sum_{d|n} f(d)\right) \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)\right)$$

Remarque. En utilisant la formule d'Euler, on peut en déduire que que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$$

Autour du nombre de diviseurs et généralisation

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit σ_k sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\sigma_k : n \mapsto \sum_{d|n} d^k$$

où les d qui divisent n sont pris positifs.

1. Montrer que $\sigma_0(n)$ est le nombre de diviseurs de n.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que σ_k est une fonction arithmétique multiplicative.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier. Montrer que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N},\ \sigma_k(p^\alpha) = \sum_{i=0}^{\alpha} p^{ik}$$

4. Si $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ est la décomposition en facteurs premiers de n (les p_i sont deux à deux distincts), montrer que

$$\sigma_0(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i)$$

5. Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, sous les mêmes hypothèses qu'à la question précédente, montrer que

$$\sigma_k(n) = \sum_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{\alpha_i} p_i^{jk}$$

Démonstration.

1. Utiliser la définition et compter.
2. Utiliser le lemme de Gauss.
3. Déterminer les diviseurs de p^α.
4. Utiliser la DFP pour trouver le nombre de diviseurs.
5. Utiliser les questions 2 et 3.

□

⋆ Méthode de l'hyperbole de Dirichlet

Si d est la fonction qui à k associe son nombre de diviseurs positifs, alors on a :

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = n \ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

$\star$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels p divise $P(n)$ pour au moins un entier $n \in \mathbb{Z}$. Indication : s'intéresser à $P(n+qP(n))$.

Démonstration. Utiliser l'indication et utiliser le fait que $b - a$ divise $P(b) - P(a)$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. $\square$

n ne divise pas $2^n - 1$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que n ne divise pas $2^n - 1$. Indication : on pourra considérer le plus petit diviseur premier de n.

Δ Nombres de Mersenne

1. Montrer : $a \mid n \implies 2^a - 1 \mid 2^n - 1$.
2. Condition nécessaire pour que 2^n soit premier.
3. Montrer que les diviseurs premiers de $2^p - 1$ avec p premier impair sont de la forme $2kp + 1$.
4. $2^{11} - 1$ est-il premier ?

2.3.2 TD Châteaux

Lemme de Wolstenholme

Soit p un nombre premier. On écrit le rationnel $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}$ sous forme irréductible $\dfrac{a}{b}$. Montrer que p^2 divise a. On s'intéressera au polynôme $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{p-1} (X - k)$ considéré dans $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{F}_p[X]$.

Chapitre 3

Espaces vectoriels, dualité

Table des matières

3.1 Points méthode

Familles génératrices

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, une famille $(y_j)_{j\in J}$ de E est génératrice de E si, et seulement si, tous les x_i sont combinaison linéaire des y_j.

Décomposition d'un polynôme en u

Pour décomposer $v = P(u) \in \mathbb{K}[u]$, on détermine le reste de la division euclidienne de P pa le polynôme minimale de u. Par exemple, pour calculer les puissances successives de u, on peut déterminer le reste de la divison euclidienne de X^p, avec $p \in \mathbb{N}$, par le polynôme minimal de u.

Application. Calcul d'exponentielles d'endomorphismes.

3.2 Astuces

Astuce fondamentale de François Moulin : version endomorphismes

Si on pense pouvoir faire un exercice en utilisant des endomorphismes, c'est qu'il faut utiliser des matrices carrées ! Du moins, il faut très rapidement passer du côté des matrices carrées et cela se déroule mieux en général. Évidemment, cela ne tient que pour quelque chose d'un peu abstrait.

Remarque. Attention, cette astuce et sa jumelle peuvent mener à des contradictions logiques majeures si on atteint le niveau de directement penser à changer de point de vue.

Application. Montrer que u est cyclique ssi $\forall\lambda,\ u-\lambda\mathrm{id}$ est cyclique. En effet, on a alors une matrice triangulaire supérieure avec uniquement des 1, ce qui est plutôt inversible donc on a bien une base. Remarquer qu'un sens se déduit de l'autre.

Base du sous-espace vectoriel engendré

Si A est une partie de E, alors on peut extraire de A une base de $\mathrm{Vect}(A)$.

Dimension 1 et homothétie

Une application linéaire dont l'espace de départ est de dimension un est nécessairement une homothétie.

Maximum de la dimension d'un SEV

Quand on cherche la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel V dont les vecteurs vérifient chacun une certaine propriété : on commence par majorer cette dimension, par exemple en exhibant un sous-espace A dont on connaît bien la dimension tel que $V \cap A = \{0\}$. On obtient donc

$$\dim(V) \leqslant \dim(E) - \dim(A)$$

Ensuite on exhibe un sous-espace V dont la dimension est précisément cette majoration, qui est donc atteinte !

Application. Dimension maximale d'un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ composé uniquement de matrices diagonalisables : penser au théorème spectral et s'intéresser à $A = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Application. Dimension maximale d'un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué de matrices nilpotentes ou quasi-nilpotentes : penser au fait qu'une matrice diagonalisable et nilpotente est nulle, et on peut prendre $A = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Condition suffisante de non-somme directe

Si on a deux sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 de dimensions finies a et b, sous-espaces d'un même espace de dimension finie $n < a + b$, alors

$$V_1 \cap V_2 \neq 0$$

et l'intersection contient un élément non nul.

Démonstration. On n'utilise pas la formule de Grassmann pour démontrer ceci, "la formule de Grassmann ne sert pas à ça" (François Moulin) : cette formule sert à calculer exactement la dimension d'une somme ou d'une intersection. □

Utilisation de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Bien penser au fait que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ peut être vu comme un espace vectoriel de dimension n.

Application. Un sous-groupe d'ordre pair $(\forall x,\ x^2 = e)$ est de cardinal 2^n pour un certain n. En effet, on peut le munir d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-ev, et il est alors de dimension finie car admet une famille génératrice finie. G est donc isomorphe à un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, ce qui conclut.

Image et noyau du carré

Soit E un EV et u un endomorphisme de E. alors :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0\} \\ \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u) = E \end{cases}$$

En dimension finie, ces deux conditions sont équivalentes à $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$.

Démonstration. Pour le prouver, utiliser des doubles inclusions à l'ancienne... □

Application. Ce résultat est notamment utile pour les exercices sur les matrices du type $A^2B = BA$ ou autres...

Bidual

Soit E un espace vectoriel. Pour $x \in E$, on définit la forme linéaire $\hat{x}$ sur E^* par $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccc} j: & E & \longrightarrow & (E^*)^* \\ & x & \longmapsto & \hat{x} \end{array}$$

est une application linéaire injective (l'injectivité utilise l'existence d'une base, et donc l'axiome du choix si on n'est pas en dimension finie). Par conséquent, si E est de dimension finie, j est un isomorphisme. Il y a donc un isomorphisme canonique entre E et son bidual en dimension finie.

Application (Base antéduale). Supposons E de dimension finie. Soit $\mathcal{L}$ une base de E^*. Posons $\mathcal{B}$ l'antécédent par j de sa base duale $\mathcal{L}^*$. Alors, $\mathcal{B}^* = \mathcal{L}$, on dit que $\mathcal{B}$ est la base antéduale de $\mathcal{L}$.

Orthogonalité

On considère E un espace vectoriel de dimension finie n.

- Soit A une partie de E. On appelle orthogonal de A la partie de E^* constituée des formes linéaires nulles sur A :

$$A^T = \{\varphi \in E^* \ : \ \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$$

- Soit B une partie de E^*. On appelle orthogonal de B l'intersection des noyaux des éléments de B :

$$B_T = \{x \in E \ : \ \forall \varphi \in B,\ \varphi(x) = 0\}$$

Il pourrait donc y avoir une ambiguïté sur l'orthogonal d'une partie de E^*, car on pourrait prendre la première ou la deuxième définition. Mais ces deux se correspondent par le biais de l'isomorphisme j entre E et son bidual $(E^*)^*$. On a des propriétés (décroissance, SEV, égal à celui de son Vect) entièrement identiques à celles des orthogonaux pour les espaces euclidiens. On a aussi les complémentarités des dimensions, et, en dimension finie, si on on applique successivement les deux orthogonaux pour un SEV, on retombe sur l'ensemble de départ.

Utilisation de la trace avec les projecteurs

Avec des projecteurs en dimension finie, penser à utiliser la trace : elle est égale au rang (donc est un entier), elle est linéaire, etc.

Trace dans $\mathbb{Z}$

En dimension finie, si on parle trace dans $\mathbb{Z}$, c'est qu'il y a une affaire de projecteurs et de symétries cachée.

Projecteurs et lemme des noyaux

Les projecteurs associés à la décomposition du lemme des noyaux sont des polynômes en u.

3.3 Exercices classiques

3.3.1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

△ Union finie de SEV stricts

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle.

1. Montrer que si F et G sont deux SEV stricts de E, alors il existe un vecteur de E n'appartenant ni à F ni à G.
2. $\star$ Et pour $n \geqslant 2$ SEV ?

Démonstration. Le premier cas se fait facilement, mais le deuxième est plus complexe.

1. Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, le résultat est immédiat. Sinon, on prend $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Alors $x+y$ ne peut pas être dans F sans quoi, par différence, y appartiendrait à F. De même, $x+y$ ne peut appartenir à G sans quoi, par différence, x appartiendrait à G. Donc $x+y$ n'appartient ni à F ni à G.
2. On se donne $F_1, \ldots, F_n$ des SEV stricts de E. Sans perte de généralité, quitta à supprimer certains F_i, on peut supposer qu'aucun F_i n'est pas inclus dans la réunion des autres F_j pour $j \neq i$. On prend alors pour tout i un $x_i \in F_i$ qui n'est dans aucun F_j pour $j \neq i$. On note D la droite affine passant par x_1 et x_2. Comme $x_2 \notin F_1$ et $x_1 \in F_1$, D ne rencontre F_1 qu'en x_1. Soit $i \geqslant 2$. Alors D n'est pas incluse dans F_i car D contient x_1 qui n'appartient pas à F_i. Donc $D \cap F_i$ est vide ou réduite à un singleton. Par conséquent, $D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$ est finie. Or, D est infinie car $\mathbb{K}$ est infini (car de caractéristique nulle). Donc $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ne recouvre pas E.

□

Intégrité affaiblie sur les formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g) \in (E^*)^2$ telles que

$$\forall x \in E,\ f(x)g(x) = 0$$

Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Démonstration. Raisonner par l'absurde en considérant deux éléments x et y qui n'annulent pas respectivement f et g puis considérer leur somme. Raisonnons par l'absurde et fixons $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$ et $y \in E$ tel que $g(y) \neq 0$. Alors, par hypothèse, on a $g(x) = 0$ et $f(y) = 0$ par intégrité de $\mathbb{K}$. Puis par hypothèse et en vertu de ce qui précède :

$$\begin{aligned} f(x+y)g(x+y) &= f(x)g(x) + f(x)g(y) + f(y)g(x) + f(y)g(y) \\ &= f(x)g(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$ donc $f(x)g(y) \neq 0$ par intégrité de $\mathbb{K}$, ce qui est **absurde**. Ainsi, $f = 0$ ou $g = 0$. $\square$

Liberté d'une famille de $\ln$

Montrer que la famille des

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+a) \end{array}$$

pour $a > 0$ est libre.

Démonstration. Prendre une combinaison linéaire nulle et dériver. Utiliser ensuite le fait que la famille des

$$\frac{1}{X+a}$$

pour $a > 0$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}(X)$ (théorème de décomposition en éléments simples). $\square$

⋆ Famille libres des espaces de dimension dénombrable

1. Soit E un espace vectoriel muni d'une base dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que toute famille libre de E est au plus dénombrable.
2. Les espaces vectoriels $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}(X)$ sont-ils isomorphes ?

Démonstration.

1. On considère $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre de E. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$$

Ensuite, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \{i \in I \mid x_i \in E_n\}$$

La liberté de $(x_i)_{i\in I}$ impose que chaque I_n est fini. or, on vérifie aisément que

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Donc, en tant que réunion au plus dénombrable d'ensembles finis, I est au plus dénombrable.

2. Par indénombrabilité de $\mathbb{R}$, la famille

$$\left(\frac{1}{X+a}\right)_{a\in\mathbb{R}}$$

est une famille libre (théorème de décomposition en éléments simples) indénombrable. Donc $\mathbb{C}[X]$ n'est pas de dimension dénombrable d'après la question précédente. Or, $\mathbb{C}[X]$ n'est clairement pas de dimension finie donc $\mathbb{C}[X]$ est de dimension indénombrable. Comme $\mathbb{C}[X]$ est de dimension dénombrable, on en déduit que $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ ne sont pas isomorphes.

$\square$

⋆⋆ Lemme de Dedekind

Soit G un groupe multiplicatif et Σ l'ensemble des morphismes de G dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Montrer que Σ est une famille libre de $\mathbb{C}^G$. Que peut-on en déduire sur $\mathrm{Card}(\Sigma)$ si G est fini ?

Démonstration. Procéder par récurrence sur le nombre de morphismes. Dans la récurrence, multiplier par le nouveau morphisme, mais utiliser aussi la nouvelle propriété de morphisme. On obtient :

$$\forall (g, g') \in G^2,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(g) \left[f_i(g') - f_0(g')\right] = 0$$

d'où on tire

$$\forall g' \in G,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[f_i(g') - f_0(g')\right] f_i = 0$$

Or, on a pris les f_i distincts, donc on peut trouver g' tel que $f_i(g') - f_0(g') \neq 0$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on se ramène à $\lambda_0 f_0 = 0$ ce qui est l'initialisation (immédiate en évaluant en e élément neutre de G). Lorsque G est fini, $\mathbb{C}^G$ est de dimension finie égale à $\mathrm{Card}(G)$ puisque $(x \mapsto \delta_{g,x})_{g \in G}$ en est une base par exemple. Donc on en déduit que

$$\mathrm{Card}(\Sigma) \leqslant \mathrm{Card}(G)$$

□

Famille de réels sur $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-ev

On considère $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. La famille $(\ln(n))_{n \geqslant 2}$ est-elle libre ?
2. La famille $(\ln(p))_{p \text{ premier}}$ est-elle libre ?

Démonstration.

1. La réponse est non puisque par exemple $\ln(4) = 2\ln(2)$ et 2 est non nul.
2. La réponse est oui. Écrire tous les scalaires de la relation de liaison sous forme irréductible et tout multiplier par le PPCM des scalaires. Séparer en les entiers positifs et négatifs. Passer à l'exponentielle et utiliser l'unicité de la DFP.

□

3.3.2 Dimension finie

Existence d'un supplémentaire commun en dimension finie

Soit E un espace de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

Démonstration. Voici une méthode qui est faisable en sup :il y en probablement des meilleures mais je n'ai que celle-là sous la main quand j'écris.
Considérer l'ensemble des dimensions des sous-espaces vectoriels de E qui sont à la fois en somme

directe avec F et G. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient 0 car l'espace nul est en somme directe avec tous les espaces. Cet ensemble est évidemment majoré par la dimension de E. Enfin, c'est une partie de $\mathbb{N}$, donc on peut lui fixer un plus grand élément et à cet élément on peut associer un sous-espaces vectoriel V qui le réalise. Il faut désormais montrer que V est un supplémentaire de F et de G. Pour cela, on raisonne par l'absurde en utilisant le fait que l'union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, l'un est inclus dans l'autre. Puis on utilise le lemme d'adjonction, et on montre que les sommes de F et G avec le nouvel ensemble obtenu sont directes. Ceci est alors absurde par maximalité de la dimension de V. □

△ Noyaux et images itérés

On considère E un EV de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$ On dispose de pleins de résultats intéressants (décomposition de Fitting, suites stationnaires, etc.) mais le résultat qui sert le plus souvent est la concavité de la suite des dimensions des noyaux itérés, *ie* la décroissance de la suite d'entiers :

$$(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))_{k\in\mathbb{N}}$$

Démonstration. On applique le théorème du rang aux restrictions de u à I_k et I_{k+1}. Cela donne :

$$\begin{cases} \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap I_k) \\ \dim(I_{k+1}) = \dim(I_{k+2}) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap I_{k+1}) \end{cases}$$

Et puisque $\mathrm{Ker}(u) \cap I_{k+1} \subset \mathrm{Ker}(u) \cap I_k$, on en déduit :

$$\dim(I_{k+1}) - \dim(I_{k+2}) \leqslant \dim(I_{k+1}) - \dim(I_k)$$

En appliquant le théorème du rang à u^k, u^{k+1} et u^{k+2}, on obtient finalement :

$$\dim(N_{k+2}) - \dim(N_{k+1}) \leqslant \dim(N_{k+1}) - \dim(N_k)$$

□

Application. Sert à démontrer des résultats sur les images itérées d'un endomorphisme nilpotent d'indice maximal.

⋆ Dimension et surcorps : multiplicativité des degrés

Soit $\mathbb{L}$ un surcorps de $\mathbb{K}$ de dimension p sur $\mathbb{K}$. Soit E un $\mathbb{L}$-espace vectoriel (qui est donc aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel). Montrer que E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, E est de dimension finie sur $\mathbb{L}$. Donner alors une relation entre ces deux dimensions.

Démonstration. Un exemple non trivial de tels corps peut être donné par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Dans le sens direct, une base de E comme $\mathbb{K}$-ev est alors génératrice d E en tant que $\mathbb{L}$-ev car tout scalaire de $\mathbb{K}$ est un scalaire de $\mathbb{L}$. Donc OK. Réciproquement, il faut multiplier une base de E en tant que $\mathbb{L}$-ev par une base de $\mathbb{L}$ en tant que $\mathbb{K}$-ev. On vérifie alors qu'on obtient une base de E en tant que $\mathbb{K}$-ev. On en déduit alors que :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \times \dim_{\mathbb{L}}(E)$$

□

⋆ Propriété analogue à la dimension

Soit E un espace de dimension finie $n \geqslant 2$. On note

$$\mathcal{A} = \{F \text{ sev de } E\}$$

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (V, W) \in \mathcal{A}^2,\ f(V + W) = f(V) + f(W) - f(V \cap W)$$

Démonstration. On peut déjà remarquer que la fonction dimension fonctionne d'après la formule de Grassmann. On raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse** : Soit f qui convienne. Dans un premier temps, on montre que toutes les droites vectorielles (c'est-à-dire les espaces vectoriels de dimension 1) ont la même image par f. Soit D_1 et D_2 deux droites vectorielles. On peut leur fixer un supplémentaire commun H (cf. exercice qui précède). On obtient alors immédiatement en utilisant l'hypothèse sur f avec $H \oplus D_1 = H \oplus D_2 = E$ que $f(D_1) = f(D_2)$ Posons désormais a l'image d'une droite vectorielle quelconque par f et b l'image de l'espace nul par f. Montrons par récurrence finie sur la dimension des sous-espaces qu'on a $f = (a_b)\dim + b$.
  - Initialisations (rang 0 et 1) : Immédiat par définition de a et b.
  - Hérédité : Soit $n \geqslant m \geqslant 2$ tel que pour tout $k \leqslant m - 1$, on ait l'égalité souhaitée pour les sous-espaces de dimension k. Soit F un sous-espace de E de dimension m. On peut fixer x un élément non nul de F et considérer D la droite vectoriel engendrée par x. On peut alors fixer H un hyperplan de F tel que $F = H \oplus D$. On a alors par hypothèse de récurrence :

  $$\begin{aligned} f(F) &= f(H) + f(D) - f(\{0_E\}) \\ &= (a - b)(m - 1) + b + a - b \\ &= (a - b)m + b \\ &= (a - b)\dim(F) + b \end{aligned}$$

  ce qui achève la récurrence. Ainsi, si f convient, alors il existe des constantes réelles λ et μ telles que $f = \lambda \dim + \mu$.
- **Synthèse** : Réciproquement, on vérifie immédiatement qu'une telle fonction convient.

□

3.3.3 Sommes, supplémentaires

△ Tous les supplémentaires d'un même SEV sont isomorphes

Soit F un SEV de E. Montrer que tous les supplémentaires de F dans E sont isomorphes.

Démonstration. On fixe G un supplémentaire de F dans E et on se donne H un supplémentaire de F dans E quelconque. On note p le projecteur sur G parallèlement à F. Puisque H est un supplémentaire de $F = \mathrm{Ker}(p)$, alors H et $G = \mathrm{Im}(p)$ sont isomorphes en vertu du théorème du rang géométrique. □

⋆ Supplémentaire commun à un nombre fini de SEV de même dimension

Montrer que m SEV $F_1, \ldots, F_m$ de même dimension k de E de dimension finie n admettent un supplémentaire commun.

Démonstration. Procéder par récurrence descendante sur k. Pour l'initialisation, prendre pour supplémentaire $\{0\}$. Pour l'hérédité, considérer un vecteur y qui n'appartient par à la réunion des F_i (possible d'après un exercice précédent), puis ajouter aux F_i la droite $\mathbb{K}y$. Appliquer l'hypothèse de récurrence aux $F_i \oplus \mathbb{K}y$ et conclure par associativité de la somme directe. □

3.3.4 Applications linéaires

CNS pour avoir égalité entre Ker(u) et Im(u)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$?

Démonstration. D'après le théorème du rang, il est nécessaire que $\dim(E)$ soit pair. Réciproquement, prendre une base de taille paire puis envoyer les impairs sur 0 et les pairs sur l'impair qui précède. □

△ Inégalité de Frobenius

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w \in \mathcal{L}(G, H)$ où E, F, G et H sont de dimension finie. Montrer que

$$\mathrm{rg}(v \circ u) + \mathrm{rg}(w \circ v) \leqslant \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(w \circ v \circ u)$$

Démonstration. Appliquer le théorème du rang aux restrictions de w à $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(v \circ u)$ puis sommer les deux relations obtenues. Observer ensuite que

$$\mathrm{Ker}(w_{|\mathrm{Im}(v\circ u)}) \subset \mathrm{Ker}(w_{|\mathrm{Im}(v)})$$

□

Application. Permet de retrouver la concavité de la suite des noyaux itérés en dimension finie.

△ Un classique sur la commutation et les polynômes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $\big(u^k(a)\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ soit une base de E.

1. Donner un exemple d'un tel endomorphisme.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v$. Montrer que v est un polynôme en u.

Démonstration. 1. Tout endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence maximal convient. On peut en expliciter un en envoyant tous les vecteurs d'une base sur le suivant, et en envoyant le dernier sur 0.

2. On peut écrire :
$$v(a) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k(a)$$
On montre alors que
$$v = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k$$
en montrant que ces deux applications linéaires coïncident sur la base $\left(u^k(a)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ grâce à la commutation.

□

△ CNS pour que le rang de la somme soit la somme des rangs

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer l'équivalence entre les deux conditions suivantes :

1. $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$
2. $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v) = E$

Démonstration. Utiliser l'inégalité
$$\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim\left(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)\right) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$
C'est moche comme tout, mais ça se fait. Dans le sens direct, on obtiendra
$$\dim(\mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)) \geqslant \dim(E)$$
Dans le sens réciproque, on montrera que
$$\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$$
L'inclusion réciproque viendra du fait que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. On conclura en utilisant la formule de Grassmann. □

△ Un lemme pour la dualité en dimension quelconque

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque. Une famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ de formes linéaires sur E est libre si, et seulement si, l'application linéaire :
$$\begin{array}{rccl} v: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)) \end{array}$$
est surjective. Ce résultat est extrêmement utile pour l'étude de la dualité en dimension infinie.

Démonstration. Si v est surjective, on fixe des x_j tels que $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ puis on utilise la caractérisation des familles libres. Pour l'autre sens, on raisonne par contraposée. Si v n'est pas surjective, son image est incluse dans un hyperplan H de $\mathbb{K}^p$. On fixe une équation $\sum a_i y_i = 0$ de cette hyperplan (avec $(a_1, \ldots, a_p) \neq (0, \ldots, 0)$). Alors, on a la relation de liaison $\sum a_i \varphi_i = 0$, si bien que la famille est liée. □

3.3.5 Théorèmes de factorisation

$\Delta\star$ Indépendance des formes linéaires

Soit $(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ des formes linéaires sur E (de dimension quelconque). Alors, on a le théorème d'indépendance des formes linéaires :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

Démonstration. Le sens réciproque est trivial. Pour le sens direct, se réduire au cas d'une famille libre de formes linéaires puis utiliser le lemme pour la dualité en dimension quelconque (exercice précédent). □

3.3.6 Projecteurs

CNS de commutation avec un projecteur

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Montrer qu'un endomorphisme u de E commute avec p si, et seulement si, il laisse stable le noyau et l'image de p.

Démonstration. En réalité, il s'agit là de résultats de réduction. Le sens direct est immédiat (c'est même du cours en réduction). Réciproquement, décomposer $x \in E$ sur $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ en $x = a + b$ et calculer $u(p(x))$ et $p(u(x))$. On obtient dans les deux cas $u(b)$. □

Nouveau projecteur

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$. Montrer que

$$r = p + q - p \circ q$$

est un projecteur. Montrer que

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \\ \mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \end{cases}$$

Démonstration. Calculer r^2 et utiliser le fait que $q \circ p = 0$. On trouve bien $r^2 = r$. Montrer ensuite à la main toutes les inclusions qu'il faut (c'est long et embêtant). □

⋆ CNS pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit $p_1, \ldots, p_r$ des projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $p = p_1 + \ldots + p_r$ est un projecteur si, et seulement si,

$$\forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$$

On montrera que l'image de p est la somme directe des images des p_i.

Démonstration. Le sens réciproque est immédiat. pour le sens direct, utiliser la trace (qui est égale au rang pour des projecteurs), ce qui permet d'obtenir par linéarité de la trace :

$$\mathrm{rg}(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rg}(p_i)$$

On en déduit que les images des p_i sont en somme directe et que

$$\mathrm{Im}(p) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(p_i)$$

On remarque ensuite grâce à cette égalité que $p \circ p_i = p_i$ et on écrit pour tout $x \in E$, par définition de p :

$$p_i(x) = p_i(x) + \sum_{j \neq i} \underbrace{p_j \circ p_i(x)}_{\in \mathrm{Im}(p_j)}$$

Puisque la somme est directe, on en déduit que $p_j \circ p_i(x) = 0$ et donc $p_j \circ p_i = 0$, ceci valant pour tout $x \in E$. □

△ Une somme irrationnelle de projecteurs

Soit p, q et r trois projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r = 0$. Montrer que $q = r = 0$.

Démonstration. En dimension finie, la trace d'un projecteur est égale à son rang. On passe à la trace. Tout revient alors à prouver que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est $\mathbb{Q}$-libre. Pour cela, élever une relation de liaison au carré et utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel (savoir redémontrer ce fait rapidement avec des valuations 2-adiques). □

⋆⋆ Somme nulle de trois projecteurs

Soit p, q et r trois projecteurs d'un espace vectoriel E sur un corps de caractéristique différente de 2 et de 3. On suppose que $p + q + r = 0$. Montrer que $p = q = r = 0$.

Démonstration. Premièrement, on montre que

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Im}(r) = \{0\}$$

en utilisant le fait que la caractéristique est différente de 3. Ensuite, on prouve que

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)$$

en utilisant le fait que la caractéristique est différente de 2. On a de même les inclusions symétriques. On en déduit que

$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Im}(r) = \{0\}$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(r)$. Alors $p(x) = q(-x) \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ donc

$$\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(q)$$

On a de même les inclusions symétriques, dont on déduit :

$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(r)$$

Enfin, soit $x \in E$ qu'on décompose comme $a_1 + b_1$ selon p, $a_2 + b_2$ selon q et $a_3 + b_3$ selon r. On a alors $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ par hypothèse donc $3.x = b_1 + b_2 + b_3$. L'égalité des noyaux fournit alors :

$$3.p(x) = 3.q(x) = 3.r(x) = 0$$

On conclut en utilisant le fait que E n'est pas de caractéristique 3. □

3.3.7 TD Châteaux

Extensions algébriques de $\mathbb{Q}$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{Q}[X]\}$ et $\mathcal{I}_\alpha = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$, on définira $\mathbb{K}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{I}_\alpha$ de même.

1. Justifier que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est la plus petite $\mathbb{Q}$-algèbre contenant α.
2. Vérifier que $\mathcal{I}_\alpha$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
   Un nombre complexe est dit algébrique sur $\mathbb{Q}$ lorsque $\mathcal{I}_\alpha$ n'est pas réduit à $\{0\}$, autrement dit lorsque α est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
3. Si α est algébrique, vérifier qu'il existe un unique polynôme unitaire $M_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\mathcal{I}_\alpha = M_\alpha \mathbb{Q}[X]$. Le polynôme M_α est appelé polynôme minimal de α.
4. On suppose α algébrique.
   a. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension égale au degré de M_α.
   b. Montrer que le polynôme M_α est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et en déduire que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.

Exemples

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique et calculer son polynôme minimal.
2. $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ est-il rationnel ? algébrique ?
3. Soit $P = X^3 - X - 1$. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et qu'il a une unique racine réelle a. Déterminer la dimension et une base de $\mathbb{Q}[a]$.

Théorème de la base télescopique

Soit $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$ trois corps commutatifs tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$. Démontrer que si $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathbb{M}$ est de dimension finie sur $\mathbb{L}$, alors $\mathbb{M}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et on a la formule de multiplicativité des degrés :

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{M}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \times \dim_{\mathbb{L}}(\mathbb{M})$$

Un exemple d'extension algébrique

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}][\sqrt{3}]$.

1. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique et déterminer son polynôme minimal.
2. Montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
3. Montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$.
4. Déterminer les automorphismes de corps de $\mathbb{K}$.

Une autre exemple

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[j, \sqrt{2}]$. Par une démarche analogue à celle de l'exercice précédent, montrer que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[j + \sqrt{2}]$ puis déterminer le polynôme minimal de $j + \sqrt{2}$.

Structure de l'ensemble des nombres algébriques

1. Montrer que α est algébrique si, et seulement s'il existe un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$ contenant α et de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.
2. En déduire que si α et β sont algébriques, alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques.
3. En déduire que l'ensemble des nombres algébriques $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
4. Montrer que $\mathbb{A}$ est algbériquement clos, c'est-à-dire que tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{A}$ est scindé sur $\mathbb{A}$.

Avec des polynômes cyclotomiques

Soit p un nombre premier. On admet que le polynôme $\Phi_p = X^{p-1} + \ldots + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}\left[\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right]$ sur $\mathbb{Q}$.

Groupe de Galois

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{L}$ un surcorps de $\mathbb{K}$. On note $\mathrm{Gal}(\mathbb{L} \mid \mathbb{K})$ l'ensemble des automorphismes du corps $\mathbb{L}$ dont la restriction à $\mathbb{K}$ est l'identité.

1. Montrer que $\mathrm{Gal}(\mathbb{L} \mid \mathbb{K})$ muni de la loi $\circ$ est un groupe, appelé groupe de Galois de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$.
2. Déterminer ce groupe de Galois lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{L}$ est l'une des extensions suivantes :
   a. $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$;
   b. $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[i\sqrt{2}]$;
   c. $\mathbb{L} = \mathbb{Q}\left[\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)\right]$ où p est un nombre premier.

Chapitre 4

Polynômes, fractions rationnelles

Table des matières

4.1 Points méthode

4.2 Astuces

Structure de corps de $\mathbb{K}(X)$

Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}(X)$ en est un aussi.

Une méthode pour montrer qu'un polynôme est scindé à racines simples

Pour montrer qu'un polynôme est scindé à racines simples, on peut considérer ses racines de multiplicité impaire et montrer que la multiplicité vaut 1, puis montrer qu'il n'y a pas de racine de multiplicité paire.

Différentes formes d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Il y a deux façons complètement différentes de voir un polynôme de $\mathbb{C}[X]$:

- son écriture développée avec des coefficients ;
- sa forme factorisée avec le coefficients dominant et les racines.

Il faut impérativement jongler entre ces deux visions, cela permet d'avoir de nouveaux angles d'attaque.

Calcul d'un produit fini ou plus généralement d'une somme de produits finis

Penser à utiliser les formules de Viète pour les racines d'un polynôme pour calculer des produits finis ou des sommes de produits finis. Cela n'a d'intérêt que si le polynôme en question est simple.

Application. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Pour cela, considérer les racines du polynôme

$$\frac{(X+1)^n - 1}{X}$$

Coefficients inversés

L'opération pour inverser les coefficients d'un polynôme P est

$$X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

En jouant avec le forme factorisée, on remarque qu'inverser l'ordre des coefficients du polynôme revient à inverser ses racines.

Remarque. L'application :

$$P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

est une symétrie de $\mathbb{K}_n[X]$.

Méthode de travail dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$

Soit p un nombre premier. Pour travailler dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on utilise des propriétés d'arithmétique pour montrer un résultat sur les entiers n modulo p, et on en déduit le résultat souhaité sur les polynômes (on remplace successivement X par tous les entiers modulo p et on vérifie que c'est toujours vrai).

Application. D'après le petit théorème de Fermat, on a :

$$\forall x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ x^p = x$$

On en déduit, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$:

$$X^p - X = \overline{0} = X(X - \overline{1}) \times \ldots \times (X - \overline{p-1})$$

Ainsi, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est diagonalisable si, et seulement si, $A^p = A$ car elle est diagonalisable si, et seulement si, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples. (**VERIFIER CE RESULTAT**)

Racines dans $\mathbb{Q}$ ou non

Si on veut étudier le caractère rationnel des racines de

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$$

avec $a_n \neq 0$, on suppose que $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$ est racine de P. On écrit alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = P(\alpha) = 0$$

On multiplie alors par q^n puis on utilise la divisibilité par p et le lemme de Gauss. Par exemple, une telle racine rationnelle doit vérifier :

$$\begin{cases} p \mid a_0 \\ q \mid a_n \end{cases}$$

Application. Pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on peut montrer que $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ en prouvant qu'il n'admet pas de racine rationnelle avec la méthode précédent. En effet, on rappelle qu'un **polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible si, et seulement si, il n'admet pas de racine dans le corps de base, et ce quel que soit le corps considéré**.

Application. Permet de deviner que $1/2$ peut être racine de $1 - X - X^2 - 2^3$, ce qu'il faut ensuite vérifier.

Utilisation de la forme P'/P

Si $P = \prod (X - \lambda)^\alpha$, alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum \frac{\alpha}{X - \lambda}$$

Cette formule peut permettre d'évaluer rapidement $P'(x)$. On peut d'ailleurs encore dériver pour obtenir une expression plus sale avec P''. Dans les cas où P est assez simple, cette méthode aide grandement.

Application. Preuve du théorème de Gauss-Lucas.

Application. Polynômes de Hilbert : $P = \binom{X}{n} = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$

Application. En probabilités, sert pour calculer l'espérance et la variance à partir de la fonction génératrice.

Travail avec des fractions rationnelles

Quand on travaille avec des fractions rationnelles, essayer de se ramener le plus vite possible à des polynômes, sur lesquels on a plus de propriétés. Notamment, si on a

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$$

avec A et B des polynômes, il faut souvent commencer par écrire $A(X) = F(X)B(X)$ et éventuellement utiliser l'expression des coefficients d'un produit de Cauchy.

Polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z},\ b-a \mid P(b) - P(a)$$

Démonstration. Utiliser la factorisation de Bernoulli. □

4.3 Exercices classiques

4.3.1 Algèbre des polynômes

⋆ Une équation polynomiale

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$.

Une équation polynomiale

Déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2) = P(X)^2 + 1$.

Polynômes positifs

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$. Indication : on pourra commencer par remarquer que l'ensemble des polynômes qui sont somme de deux carrés est stable par multiplication.

$\star\star$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(x) > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(1+X)^N P$ soit à coefficients positifs.

Δ

1. $\circ$ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
3. $\star\star$ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

$\star$ Que des 1 en base 10

On note A l'ensemble des entiers naturels ne s'écrivant en base 10 qu'avec des 1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ stabilisant A.

Un polynôme toujours positif

Soit P un polynôme de degré n positif sur tout $\mathbb{R}$. Montrer que $Q = P + P' + \ldots + P^{(n)}$ est positif sur tout $\mathbb{R}$.

Démonstration. Dériver $e^{-x}Q(x)$ en remarquant que $Q' - Q = P$. Utiliser un argument de limite en $+\infty$ pour conclure. $\square$

4.3.2 Relations coefficients-racines

Système d'équations *via* les polynômes

Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=6 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases}$$

CNS pour qu'une racine soit somme des autres

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q,r) \in \mathbb{C}^3$ pour que l'une des racines du polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$ soit la somme des deux autres.

⋆ CNS pour que les racines forment un triangle équilatéral

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q,r) \in \mathbb{C}^3$ pour que les racines du polynôme $X^3 + pX^2 + qX + r$ forment un triangle équilatéral (éventuellement réduit à un point).

⋆ CNS pour que les racines forment un parallélogramme

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p,q,r,s) \in \mathbb{C}^4$ pour que les racines du polynôme $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + s$ forment un parallélogramme (éventuellement plat).

⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer qu'elles appartiennent à l'intervalle

$$\left[\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1}a_2}, \frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1}a_2}\right]$$

4.3.3 Racines complexes

△ CNS pour être scindé sur $\mathbb{R}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. Alors, P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$$

Démonstration. On procède par double implication :

- Sens direct : si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on écrit

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

  Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{n} |z - \lambda_k| \geqslant \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z - \lambda_k)| = \prod_{k=1}^{n} |\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|^n$$

- Sens réciproque : notons λ_k les racines *a priori* complexes de P après l'avoir scindé sur $\mathbb{C}$. On a alors :

$$|\mathrm{Im}(\lambda_k)|^n \leqslant |P(\lambda_k)| = 0$$

  Puisque $n \geqslant 1$, on en déduit que $\mathrm{Im}(\lambda_k) = 0$ et donc que $\lambda_k \in \mathbb{R}$, si bien que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

$\square$

Des décompositions

On pose $P = (X+1)^7 - X^7 - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $P(j)$ et en déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de

$$\frac{(X^3-1)^4}{P^2}$$

Pas de racine multiple

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On considère le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Le polynôme P admet-il une racine multiple ?

Démonstration. La réponse est non. Pour le prouver, raisonner par l'absurde et considérer une racine multiple z de P. Par caractérisation de la multiplicité des racines, z est racine de P'. Or, on a immédiatement :

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$$

En soustrayant les égalités $P(z) = 0$ et $P'(z) = 0$, on obtient que $\dfrac{z^n}{n!} = 0$. Par intégrité de $\mathbb{C}$, $z = 0$. Or, z n'est clairement pas racine de P car $P(0) = 1$. Donc 0 n'est même pas racine mais est racine multiple, ce qui est **absurde**. Ainsi, pas de racine multiple pour P. On remarquera que cet exercice fonctionne car $n \geq 2$ donc $n - 1 \geq 1$ donc on a le "droit" à P' quand on applique la caractérisation de la multiplicité des racines. $\square$

$\Delta\star$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^n = e^{2ina}$.
2. En déduire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

$\star\star$ Un produit moche

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(5 - 4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Une équation polynomiale

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X+1)P(X) = P(X^2)$.

Démonstration. S'intéresser aux racines potentielles de ce polynôme. Elle doivent être nulles ou de module 1, puis on peut même prouver que ce doivent des racines de l'unité particulières. □

⋆

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'on peut écrire $P = P_1 + P_2$ avec les P_i de degré n et de racines complexes de module inférieur à 1.
2. ⋆⋆ Montrer que l'on peut écrire $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ avec les P_i de degré n et de racines complexes de module 1. Indication : on pourra utiliser l'application

$$z \mapsto \frac{z-u}{1-z\overline{u}}$$

lorsque $|u| < 1$.

Un lemme

Pour une fraction rationnelle non nulle $F \in \mathbb{R}(X)$, on note $n(F)$ le nombre de ses racines (distinctes), et $p(F)$ le nombre de ses pôles.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $n(P) + n(P-1) > \deg(P)$.
2. ⋆ Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ non constante. Montrer que $n(F) + n(F-1) + p(F) > a$, où a désigne le degré du numérateur de F dans son écriture sous forme irréductible.

Applications de l'exercice précédent

1. Soit P et Q deux polynômes non constants dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^{-1}(\{0\}) = Q^{-1}(\{0\})$ et $P^{-1}(\{1\}) = Q^{-1}(\{1\})$. Montrer que $P = Q$.
2. Théorème de Mason : soit A, B et C trois polynômes non nuls premiers entre eux dans leur ensemble, non tous constants et tels que $A + B + C = 0$. On note n le maximum des degrés de A, B et C. Montrer que ABC possède au moins $n+1$ racines distinctes.
3. Soit $m \geqslant 3$ entier et $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$ un triplet de polynômes premiers entre eux dans leur ensemble tel que $A^m + B^m = C^m$. Montrer que A, B et C sont tous constants.

Autour de l'image de $\mathbb{U}$

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\mathbb{P}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ puis tels que $\mathbb{P}(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.
2. ⋆ Déterminer toutes les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ n'ayant pas de pôle dans $\mathbb{U}$ et telles que $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Contrôle du module d'une racine particulière

Soit $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs non tous nuls.

1. Montrer que $P = X^n - p_1 X^{n-1} - \cdots - p_n$ admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes non tous nuls, z_0 une racine de $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ et e la racine strictement positive du polynôme P où on a pris $p_i = |a_i|$ et P est défini dans la première question. Montrer que $|z_0| \leqslant e$.
3. Soit $b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs de somme inférieure ou égale à 1. Montrer que
$$|z_0| \leqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left| \frac{a_i}{b_i} \right|^{1/i}$$

Un polynôme scindé à racines simples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = nX^n - \sum_{k=0}^{n-1} X^k \in \mathbb{C}[X]$.

1. Soit z une racine de P distincte de 1. Montrer que $|z| < 1$.
2. Montrer que les racines de P sont simples.

⋆

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

1. Montrer que si $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$, alors toutes les racines complexes de P sont de module au moins 1. Indication : on pourra poser $\alpha_k = a_k - a_{k+1}$.
2. En déduire que si l'on suppose seulement les a_k strictement positifs, alors toute racine z de P vérifie :
$$\min_{0 \leqslant k < n} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leqslant |z| \leqslant \max_{0 \leqslant k < n} \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

⋆⋆

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $f : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta)$. On suppose $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f(\theta) = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k e^{ik\theta} \right|$$

$\star\star$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ dont toutes les racines ont une partie imaginaire strictement positive. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(a_k) X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Indication : comparer $|P(z)|$ et $|P(\overline{z})|$ pour z non réel.

Une CS d'irréductibilité

Soit $P = a_0 + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. On pose $M = \sup_{i \in [\![0, n-1]\!]} |a_i / a_n|$.

1. Montrer que toute racine de P est de module strictement inférieur à $M + 1$.
2. On suppose qu'il existe un entier naturel $k \geqslant M + 2$ tel que $P(k)$ soit premier. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

4.3.4 Racines réelles

Δ P scindé sur $\mathbb{R} \Longrightarrow P'$ scindé sur $\mathbb{R}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé.

1. Supposons que P est à racines simples. Montrer que P' est scindé.
2. Le résultat est-il toujours valable lorsque les racines de P ne sont plus nécessairement simples ?

Démonstration. Le maître mot : théorème de Rolle.

1. Ordonner les racines de P et utiliser le théorème de Rolle entre deux racines successives de P.

2. Réutiliser l'idée précédente en faisant attention à la multiplicité potentielle des racines. Le résultat reste valable.

$\square$

Comportement des racines de P'

1. Montrer que pour tout polynôme P réel de degré n à racines $a_1 < \ldots < a_n$, le polynôme P' a $n-1$ racines vérifiant $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:
$$n \prod_{j=1}^{a_i - b_j} = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j)$$
3. En déduire :
$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{n} \leqslant b_i \leqslant a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{n}$$

Δ

Montrer que $L_n = \left((X^2 - 1)\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Une suite de polynômes scindés

Montrer qu'il existe une suite $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Construire la suite par récurrence en prenant les coefficients suffisamment petits pour scinder encore sans trop modifier les racines. □

$\star$ Majoration du nombre de racines réelles distinctes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant exactement $p > 0$ coefficients non nuls.

1. Montrer que P admet au plus $2p - 1$ racines réelles distinctes.
2. Montrer que cette majoration est optimale pour tout p.

$\star$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $P' - \alpha P$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k P^{(k)}$.

4.3.5 Polynômes d'interpolation

Coefficients rationnels

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$. Montrer que P est à coefficients rationnels.

Démonstration. Considérer n le degré du polynôme puis utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange. associés à 1, ..., n. □

⋆

Soit d et n deux entiers tels que $d \geqslant n \geqslant 1$, et $F \in \mathbb{C}_n[X]$. On suppose qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{U}_{d+1}$ de cardinal $n+1$ tel que $\forall z \in A,\ |F(z)| \leqslant 1$. Montrer que

$$\max_{z \in \mathbb{U}} |F(z)| \leqslant 2^d$$

Interpolation

Soit n et k deux entiers naturels. On considère des réels $x_1, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et des réels $y_1, \ldots, y_n$ quelconques. Pour $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, on note $E_P = \{i \in [\![1, n]\!]\ :\ P(x_i) = y_i\}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k et n pour que, quel que soit $(y_1, \ldots, y_n)$, il existe $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $\mathrm{Card}(E_P) = n$. Y a-t-il alors unicité de P ?
2. On suppose $k < n$.
   a. Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $\mathrm{Card}(E_P) \geqslant \dfrac{n+k}{2}$.
   b. Montrer qu'il existe deux polynômes Q et R, avec $R \neq 0$, tels que
   $$\deg(Q) < \frac{n+k}{2},\ \deg(R) \leqslant \frac{n-k}{2} \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!],\ Q(x_i) - y_i R(x_i) = 0$$
   c. Montrer que s'il existe $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $\mathrm{Card}(E_P) \geqslant \dfrac{n+k}{2}$, alors $P = Q/R$.

⋆

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que $a_0 = 1$ et $P(\mathbb{U}_n) \subset \mathbb{R}_+$ où $\mathbb{U}_n$ désigne le groupe des racines n-èmes de l'unité. montrer que les a_j sont dans $\{-1, 0, 1\}$.

4.3.6 Fractions rationnelles

Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$

1. Soit Φ un endomorphisme de $\mathbb{K}(X)$. Montrer que $\Phi(X)$ est non nul et caractérise entièrement Φ.
2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. Montrer que $\Phi(X) = \dfrac{aX + b}{cX + d}$ définit un automorphisme de $\mathbb{K}(X)$.
3. $\star$ Montrer que tout automorphisme de $\mathbb{K}(X)$ est de cette forme.

Des sommes

Soit $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$, où les x_k sont deux à deux distincts dans $\mathbb{K}$. Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{P'(x_k)}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$ (en supposant que les x_k sont non nuls pour cette dernière).

$\star$ Inégalité de Bernstein

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $X^n + 1$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$

$$XP' = \frac{n}{2} P + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$$

2. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|Q\| = \sup_{z \in \mathbb{U}} |Q(z)|$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$,

$$\|P'\| \leqslant n \|P\|$$

Démonstration. Pour la première question, remarquer une linéarité en P pour se ramener à la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$. $\square$

Un calcul de somme par des fractions rationnelles

1. Soit $x_0, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^p}{\prod_{i \neq k}(x_k - x_i)}$$
en fonction de $p \in [\![0, n]\!]$.
2. $\star$ En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^p \binom{n}{k}$ pour $p \in [\![0, n]\!]$.

Inégalités sur les coefficients d'un polynôme scindé

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ scindé.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)P''(x) \leqslant P'(x)^2$.
2. En déduire : $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.
3. $\star$ Montrer plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ nP(x)P''(x) \leqslant (n-1)P'(x)^2$.

$\star$ Théorème de Jensen

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. On note $x_1, \dots, x_p$ les racines réelles de P et $z_1, \overline{z_1}, \dots, z_q, \overline{z_q}$ les racines de P dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Si $k \in [\![1, q]\!]$, on note D_k le disque de diamètre $[z_k, \overline{z_k}]$. Montrer que les racines non réelles de P' sont dans $D_1 \cup \ldots \cup D_p$.

$\star$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et $Q = 2XP' - nP$.

1. On suppose que les racines de P sont toutes dans $\mathbb{U}$. Montrer qu'il en est de même pour celles de Q.
2. Soit $R \in \mathbb{R}_+$. On suppose que toutes les racines de P sont de module R. Que dire de celles de Q ?

4.3.7 Arithmétique des polynômes

Restes de divisons euclidiennes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ distincts.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$

Démonstration. Quel est le degré du reste ? Utiliser des évaluations précises et/ou la dérivation suivie d'une évaluation. Ne pas tenter l'algorithme sur un polynôme quelconque dans un corps quelconque ! ! ! On va plutôt utiliser le fait que le reste est à chaque fois de la forme $\lambda X + \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

1. On peut fixer $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)(X-b)Q + (\lambda X + \mu)$. En évaluant en a et en b, on obtient $\lambda a + \mu = P(a)$ et $\lambda b + \mu = P(b)$. De simples combinaisons linéaires permettent de conclure.
2. Là encore, on peut fixer $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^2 Q + (\lambda X + \mu)$. Toutefois, on ne peut plus réaliser deux évaluations. Cependant, une évaluation en a fournit déjà

□

⋆⋆ Caractérisation d'un corps par la principalité de son anneau de polynômes

Soit A un anneau. Montrer que A est un corps si, et seulement si, $A[X]$ est principal.

Démonstration. Les sens direct est un théorème de cours. Réciproquement, supposons que $A[X]$ soit principal. Il ne nous reste plus qu'à montrer l'inversibilité des éléments non nuls. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. On considère I l'idéal engendré par a et X. Alors il existe $P \neq 0$ tel que $I = P \times A[X]$. Puisque $a \in I$, $P \mid a$ donc P constant et, abusivement, $P = p \in A$. De plus, puisque $X \in I$, on en déduit que $P \mid X$. Par conséquent, il existe $Q \in A[X]$, de coefficient dominant $q \in A$ tel que $PQ = X$. En passant aux coefficients dominants, on obtient $pq = 1$ et p est inversible. Or, de même, il existe b tel que $a = pb$. Or, P est constant et appartient à I, donc il existe $c \in A$ tel que $P = p = ac$. On en déduit que $p = pbc$ donc b et c sont inversibles. Par conséquent, $a = pb$ est inversible comme produit d'inversibles. □

Divisibilité et sur-corps

Soit $\mathbb{L}$ un sur-corps de $\mathbb{K}$ ainsi que A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, B divise A dans $\mathbb{L}[X]$.

Démonstration. Écrire les divisions euclidiennes de A par B dans $\mathbb{L}[X]$ et dans $\mathbb{K}[X]$ puis utiliser un argument d'unicité. □

Une division euclidienne

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{R}_[X]$ de $A_n = X^{n+1}\cos((n-1)a) - X^n \cos(na)$ par $B = X^2 - 2X\cos(a) + 1$.

⋆

Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1 \in \mathbb{K}[X]$ est-il divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$? On pourra commencer par $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Premiers entre eux et racines communes

1. Montrer que deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement s'ils n'ont pas de racine complexe commune.
2. Montrer que deux polynômes P et Q de $\mathbb{Q}[X]$ sont premiers entre eux si, et seulement s'ils n'ont pas de racine complexe commune.

$\star$ Racines de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$.

1. On suppose P irréductible sur $\mathbb{Q}$. Montrer que les racines complexes de P sont toutes simples. Indication : on pourra utiliser P'.
2. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5. Supposons que P admette une racine double a complexe. Montrer que P possède une racine dans $\mathbb{Q}$.
3. $\star\star$ On suppose que $P \neq 0$ a une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ d'ordre de multiplicité strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}\deg(P)$. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Démonstration.

1. Puisque P est irréductible, $P \wedge P' = 1$ puisque cette quantité doit être unitaire, diviser P et $\deg(P') < \deg(P)$. Par conséquent, $X - a$ ne divise pas P' est a est racine simple de P par théorème de cours.
2. Par contraposée de la question précédente, P n'est pas irréductible et on peut l'écrire sous la forme $P = QR$. SPG, on peut supposer P, Q et R unitaires. Si Q ou R est de degré 1, il n'y a rien à prouver, donc on peut supposer par l'absurde Q et R de degré supérieur à 1 et irréductibles. Ensuite, puisque $Q \neq R$ comme $\deg(P) = 5$, Q et R sont premiers entre eux car leur PGCD vaut 1, Q ou R. Mais si $\deg(Q) = 2$, comme Q et R sont irréductibles, d'après l'exercice précédent, on a nécessairement $Q(a) = R(a) = 0$ ce qui est absurde. Cela est aussi absurde si $\deg(Q) = 3$ car on a alors $\deg(R) = 2$.
3. Raisonner par l'absurde et utiliser la question 1.

$\square$

Δ

Déterminer les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui divisent leur polynôme dérivé.

Démonstration. Utiliser la DES de P'/P. Ce sont les $\lambda(X - z)^n$. $\square$

Composition et divisibilité

Soit $(A, B, P) \in \mathbb{K}[X]^3$ avec $\deg(P) \geqslant 1$. Montrer que $B \circ P$ divise $A \circ P$ si, et seulement si, B divise A.

Une implication

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux. Montrer que s'il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que P divise $R^3 - Q$, alors il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que P^2 divise $S^3 - Q$.

Résultant et application à l'intersection de courbes algébriques

1. Δ Soit P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs P et Q. On considère l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \\ (M, N) & \longmapsto & MQ + NP \end{array}$$

et l'on pose $\mathrm{Res}(P, Q)$ le déterminant de sa matrice dans les bases canoniques. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$.

2. $\star$ Soit R et S dans $\mathbb{C}[X, Y]$ et $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ : \ R(x, y) = S(x, y) = 0\right\}$. On pose

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}$$

Montrer que $\pi(\Omega)$ ou $\mathbb{C} \setminus \pi(\Omega)$ est fini.

Démonstration. Pour la première question, utiliser la linéarité de Φ et déterminer son noyau. On pourra se référer à la première pâle MP* 2024-2025. $\square$

Une amélioration de l'algorithme d'Euclide

Montrer que si A et B sont deux polynômes premiers entre eux et non tous deux constants, alors il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$ avec $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$, et que l'algorithme d'Euclide donne ce couple-là (à condition que ...).

Presque parties réelles et imaginaires

Soit P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P^2 = Q^2 + R^2$ et $Q \wedge R = 1$. Montrer qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 premiers entre eux tels que :

$$Q = \frac{P_1^2 + P_2^2}{2} \quad \text{et} \quad R = \frac{P_1^2 - P_2^2}{2i}$$

$\Delta\star$ Contenu d'un polynôme et applications

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. On note $c(P) = \mathrm{PGCD}(a_0, \ldots, a_n)$ le contenu de P.

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$. Indication : on pourra se ramener au cas où $c(P) = c(Q) = 1$.
2. Montrer que l'on peut prolonger la fonction c à $\mathbb{Q}[X]$ en conservant la propriété de la première question.
3. Application 1 : retrouver le fait que les racines rationnelles d'un polynôme unitaire à coefficients entiers sont entières.
4. Application 2 : soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ si, et seulement s'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ et $c(P) = 1$.
5. Application 3 : montrer que le polynôme minimal d'ne matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, est à coefficients entiers.

Démonstration. Pour la première question, on procède en deux étapes.

- Supposons $C(A) = C(B) = 1$. Par l'absurde, supposons $C(AB) \neq 1$. Prenons alors p un nombre premier qui divise $C(AB)$. Alors, en passant au quotient dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on a $\overline{0} = \overline{AB} = \overline{A} \times \overline{B}$. Puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est intègre donc $\overline{A} = \overline{0}$ ou $\overline{B} = \overline{0}$, et donc p divise $C(A)$ ou $C(B)$, ce qui est absurde. Donc $C(AB) = 1$.
- Dans le cas général, on écrit $A = C(A)A'$ et $B = C(B)B'$ avec $C(A') = C(B') = 1$ (en effet, $C(nP) = |n|C(P)$). Alors, par le cas précédent :

$$C(AB) = C\big(C(A)C(B)A'B'\big) = C(A)C(B)C(A'B') = C(A)C(B)$$

□

$\star$ Polynômes à valeurs dans les nombres premiers

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Trouver tous les polynômes $A \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ A(n) \in \mathcal{P}$.

Démonstration. Utiliser l'astuce classique pour les polynômes Q à coefficients dans $\mathbb{Z}$: pour tous a et b entiers, $b - a$ divise $Q(b) - Q(a)$. On montre par analyse-synthèse que seuls les polynômes constants égaux à des nombre premiers conviennent.

- **Analyse** : Soit A qui convienne et on pose $p = A(0)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En vertu de la remarque introductive, on sait que $np - 0$ divise $A(np) - A(0) = A(np) - p$. Ainsi, on peut fixer m dans $\mathbb{Z}$ tel que $A(np) - p = mnp$. Puis on obtient, $A(np) = (mn+1)p$ donc p divise $A(np)$. Or, $A(np) \in \mathcal{P}$, donc nécessairement, $A(np) = p$. La suite $(np)_{n\in\mathbb{N}}$ étant injective, A et le polynôme constant égal à p coïncident en une infinité de points et sont donc égaux.
- **Synthèse** : Réciproquement, pour tout nombre premier p, le polynôme contant égal à p convient.

□

$\Delta\star$ Lemme d'Eisenstein

Soit p un nombre premier et $P \in \mathbb{Z}[X]$ **unitaire** qu'on écrit sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Supposons que l'on ait :

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ p \mid a_k$;
- $p^2 \nmid a_0$.

Alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que P puisse s'écrire sous la forme $P = AB$ avec A et B des polynômes non constants à coefficients entiers. On passe au quotient et on se place dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ est un anneau intègre puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. Or, on a :

$$X^n = \overline{P} = \overline{A} \times \overline{B}$$

puisque p divise les coefficients de P qui ne correspondent pas au terme de degré N. Par conséquent, on a $\overline{A} = X^i$ et $\overline{B} = X^j$ avec $i + j = n$ ainsi que $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$. Ainsi, les coefficients de degré 0 de A et de B sont divisibles par p. Or, le coefficient de degré 0 de P est égal au produit de celui de A par celui de B. Par conséquent, $p^2 \mid a_0$, ce qui est absurde. $\square$

Une famille de polynômes irréductibles

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers deux à deux distincts. Montrer que le polynôme

$$P = (X - a_1) \times \cdots \times (X - a_n) - 1$$

est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Raisonner par l'absurde en écrivant $P = QR$. On a donc $R(a_i) = \pm 1$ et $Q(a_i) = \mp 1$ (signe opposé). Donc $Q + R$ possède n racines. Discuter ensuite sur les degrés et la limite en $+\infty$ pour conclure à une absurdité. $\square$

Polynômes cyclotomiques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine primitive n-ème de l'unité tout générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n$. On notera P_n l'ensemble des racines primitives n-ème de l'unité. Le n-ème polynôme cyclotomique est le polynôme :

$$\Phi_n = \prod_{x \in P_n} x$$

1. Quel est le degré de Φ_n ? Montrer que
$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_n$$
2. Montrer que Φ est à coefficients entiers.
3. $\star$ Montrer que si p est un nombre premier ne divisant pas n, alors Φ_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_p$.
4. $\star$ Soit $a \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier qui divise $\Phi_n(a)$ mais aucun des $\Phi_d(a)$ pour d diviseur strict de n. Montrer que $n \equiv 1\ [p]$.
5. Soit $k > n$ et p un diviseur de $\Phi_n(k!)$. Montrer que p est strictement supérieur à k et qu'il est premier avec n.
6. $\star\star$ Montrer que $p \equiv 1\ [n]$ et en déduire que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo n est infini.

4.3.8 TD Châteaux

Théorème de Gauss-Lucas et applications

1. Soit P un polynôme complexe non constant. Démontrer que les racines du polynôme P' sont situées dans l'enveloppe convexe des racines de P, c'est-à-dire sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P. Indication : on pourra considérer P'/P.
2. En déduire que si P est scindé dans $\mathbb{R}$, alors P' l'est également, puis que si toute racine de P est de partie réelle positive, alors il en va de même pour P'.

Invariance du PGCD selon le corps de base

Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que le PGCD de P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ est le même que dans $\mathbb{L}[X]$.
2. En déduire que si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement s'ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{L}[X]$.
3. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$. montrer que P n'a que des racines simples dans $\mathbb{L}$. Indication : on pourra considérer P' et $P \wedge P'$.

Chapitre 5

Matrices, déterminants

Table des matières

5.1 Points méthode

Multiplication par une matrice diagonale

Multiplier une matrice M à gauche par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes de M par les scalaires de la diagonale. Multiplier une matrice M à droite par une matrice diagonale revient à multiplier les colonnes par les scalaires de la diagonale.

Changement de base

En notant $P = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id})$, on a :

$$X = PX'$$

Si de plus on considère $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$ et $Q = M_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}')$, on a alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

Système linéaire et inverse (1)

Pour montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et calculer son inverse, on peut résoudre le système $AX = Y$ en le ramenant à un système triangulaire par l'algorithme du pivot de Gauss. L'expression de X en fonction de Y donne alors la matrice A^{-1}.

Système linéaire et inverse (2)

Si, quel que soit $Y \in \mathbb{K}^n$, le système carré $AX = Y$ entraîne une relation du type $X = \ldots$, alors A est inversible et l'expression de X en fonction de Y donne l'inverse de A.

Multiplication par une matrice diagonale par blocs

Multiplier une matrice par une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_n)$:

- à gauche revient à multiplier les lignes par les blocs diagonaux A_i ;
- à droite revient à multiplier les colonnes par les blocs diagonaux A_j.

5.2 Astuces

Astuce fondamentale de François Moulin : version matrices carrées

Si on pense pouvoir faire un exercice en utilisant des matrices carrées, c'est qu'il faut utiliser des endomorphismes ! Du moins, il faut très rapidement passer du côté des endomorphismes et cela se déroule mieux en général. Évidemment, cela ne tient que pour quelque chose d'un peu abstrait.

Remarque. Attention, cette astuce et sa jumelle peuvent mener à des contradictions logiques majeures si on atteint le niveau de directement penser à changer de point de vue.

Formules de changement de base

Bien connaître ses formules de changement de base.

Définition du déterminant

Bien se souvenir de la définition du déterminant par les formes n-linéaires alternées.

Idées pour les calculs de déterminant

Pour calculer un déterminant, on pourra :

1. Faire des combinaisons linéaires, même très originales ;
2. Se ramener à un déterminant par blocs ;
3. Développer par rapport aux lignes et aux colonnes ;
4. Utiliser la formule des signatures (uniquement pour des exercices théoriques !)

Autre méthode de calcul de déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice A un peu compliquée, essayer de l'écrire comme un produit $B \times C$ avec B et C des matrices dont le déterminant se calcule plus facilement. Le déterminant de A est alors le produit des deux déterminants.

Application. Calcul du déterminant de Smith.

Multilinéarité

Souvent, si on repère que toutes les colonnes s'écrivent à partir d'une seule et même colonne, utiliser la multilinéarité du déterminant peut être une bonne idée.

Application. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & & b_2 & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_n & b_n & \dots & b_n & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système de Cramer par les formules de Cramer

On considère le système de Cramer $AX = B$ avec $A = (C_1|\dots|C_n)$ une matrice inversible, B un vecteur colonne et X le vecteur des inconnues. L'unique solution est donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det(A)}$$

En pratique, il est **obligatoire** d'utiliser cette méthode pour les système 2×2 (et c'est même une CNS pour utiliser cette méthode d'après François Moulin).

Matrices de permutation

Penser aux matrices de permutations (*ie* les matrices qui codent une permutation de $\mathcal{S}_n$) : on peut les introduire pour créer des exemples et des contre-exemples. Bien penser à leur interprétation en termes de permutations d'une base.

Application. Fait partie de l'exercice pour montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ rencontre $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ dès que $n \geqslant 2$.

Application. Deux permutations sont conjuguées ssi les matrices de permutation associées sont semblables (dur).

Matrices extraites

Penser aux propriétés des déterminants extraits et des matrices extraites.

Application. Exercice des $2n+1$ cailloux

Coefficients -1 0 ou 1

Pour une matrice à coefficients valant -1, 0 ou 1, il est avantageux de plonger notre matrice dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, cela ne change pas la parité du déterminant. Ainsi, si on prouve dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que notre déterminant est non nul, il est non nul dans $\mathbb{Z}$ car impair et la matrice est inversible.

Application. Exercice des 2n+1 cailloux

Coefficients -1 ou 1

Pour une matrice à coefficients valant exclusivement -1 ou 1, penser à effectuer des transvections car $(\pm 1) \pm (\pm 1)$ vaut -2, 0 ou 2. On peut ensuite factoriser des 2 dans le déterminant.

Application. Si A a uniquement des coefficients valant -1 ou 1 et est de taille n, alors 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Matrices de rang 1

Si M est une matrice de rang 1, alors

$$M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$$

Pour cela, on montre qu'il existe deux vecteurs X et Y tels que $M = XY^T$ grâce à l'hypothèse de rang 1. En fait, plus généralement, il n'existe que deux types de matrices de rang 1 (à similitude près) : celles avec un λ en haut en $(1,1)$, ou celles avec un 1 en $(1,2)$.

Déterminant et trace

On se donne $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E de dimension n, ainsi que u un endomorphisme de E. Alors, pour tous $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, u(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathrm{Tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration. Pour montrer cela, il suffit de remarquer que le membre de gauche est une forme n-linéaire alternée, donc il est proportionnel au déterminant dans la base $\mathcal{B}$. Ensuite, il suffit d'évaluer sur la base pour montrer que cette constante vaut la trace de u (en développant les déterminants par multilinéarité après avoir décomposé les $u(x_j)$ sur la base $\mathcal{B}$). □

Application. Permet de montrer que le wronskien vérifie une certaine équation différentielle et d'en obtenir une formule (*cf* exercices classiques d'équations différentielles).

Exercices du type

Pour des exercices du type "$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ et $A^2 = B^2$" ou encore "$A^2B = A$, réfléchir sur les inclusions de noyaux et d'image, passer aux applications linéaires canoniquement associées puis manipuler des bases bien choisies.

CN d'inversibilité des matrices antisymétriques

Il n'existe pas de matrice antisymétrique inversible d'ordre impair.

Démonstration. Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ avec n impair, alors :

$$\det(M) = \det(M^T) = \det(-M) = (-1)^n \det(M) = -\det(M)$$

donc $\det(M) = 0$ et M est non inversible. □

5.3 Exercices classiques

5.3.1 Espaces vectoriels de matrices

SEV engendré par les matrices de projecteurs

Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices de projecteurs.

Démonstration. Les $E_{i,i}$ sont des matrices de projecteur. De plus, si $i \neq j$, $E_{i,i} + E_{i,j}$ est aussi une matrice de projecteur. Donc Les $E_{i,j}$ pour $i \neq j$ sont aussi dedans par différence. Le sous-espace vectoriel cherché est donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. □

△ Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un SEV $\mathcal{I}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\forall A \in \mathcal{I},\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM \in \mathcal{I} \ \text{ et } \ MA \in \mathcal{I}$$

1. Montrer qu'un idéal bilatère non nul contient une matrice de rang 1, puis qu'il contient toutes les matrices de rang 1.
2. Déterminer l'ensemble des idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est injectif.

Démonstration.

1. Il contient une matrice non nulle, et on se ramène au fait qu'il contient une matrice J_r. Ensuite, on peut faire des opérations élémentaires matriciellement pour se ramener à J_1. Puis cet idéal contient toute matrice de rang 1 en multipliant par des matrices inversibles à droite et à gauche. Donc il contient tous les $E_{i,i}$ et est alors égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Ce sont donc exactement $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.
3. Le noyau d'un tel morphisme est un idéal bilatère. Or, ce noyau n'est pas égal à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puisque l'image de I_n est I_n. Donc son noyau est $\{0\}$ et ce morphisme est bien injectif.

□

Commutant des matrices de rang 1

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.

Démonstration. Raisonner par analyse-synthèse. Remarquer qu'une telle matrice commute nécessairement avec les matrices élémentaires, donc avec tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On se ramène donc à déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est constitué des matrices scalaires. La synthèse est immédiate. □

5.3.2 Calcul matriciel, représentation matricielle

△ Puissances de la matrice des coefficients binomiaux

Calculer les puissances A^k de la matrice $A = \left(\binom{j}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour cela, on interprète cette matrice comme la matrice de l'endomorphisme

$$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$

dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent, la puissance k de A correspond à $P \mapsto P(X+k)$, que l'on sait très facilement calculer. □

△ Inverse de la matrice antédiagonale

Soient $a_1, \dots, a_n$ des complexes non nuls. Donner l'inverse de la matrice antédiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Démonstration. Son inverse est la matrice antédiagonale

$$B = \begin{pmatrix} (0) & & a_1^{-1} \\ & \iddots & \\ a_n^{-1} & & (0) \end{pmatrix}$$

On peut le vérifier par un calcul direct ou le voir en interprétant la matrice antédiagonale comme la matrice d'une inversion des vecteurs de la base, pondérée par les coefficients a_i. □

⋆ Nilpotence de combinaisons linéaires

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe au moins $n+1$ scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ pour lesquels $A + \lambda B$ test nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Démonstration. Remarquons que les $A + \lambda_i B$ sont nécessairement d'indice de nilpotence inférieure à n. On considère

$$P = (A + X.B)^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$$

On note $P_{i,j}$ le coefficient d'indices (i, j) de P. Alors tous les $P_{i,j}$ sont de degré au plus n et s'annulent en $n+1$ points distincts, donc tous les $P_{i,j}$ sont nuls. Donc P est la matrice nulle. En particulier, en substituant 0 à X, on en déduit que A est nilpotente. En factorisant de force dans $P(\lambda)$ par λ et puisqu'il y a une infinité de scalaires non nuls, on en que $\tilde{P} = (X.A + B)^n$ est aussi nul, donc que B est nilpotente. □

Penser aux images et noyaux

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de même rang telles que $A^2 B = A$. Montrer que $B^2 A = B$.

Démonstration. Traduire les hypothèses en termes d'applications linéaires. En déduire que $\mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(a)$ son supplémentaires, puis raisonner matriciellement. □

5.3.3 Rang, équivalence

Propriétés d'un morphisme multiplicatif sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible si, et seulement si, $f(A) \neq 0$. On pourra penser aux matrices nilpotentes.
2. Trouver tous les $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(M+X) = f(M) + f(X)$$

Démonstration. Déjà on remarque que $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. De même pour I_n. Or, il est impossible que $f(0) = 0$ sinon f serait constante égale à $f(0)$ car 0 est absorbant pour $\times$. De même, on a nécessairement $f(I_n) = 1$.

1. Dans le sens direct, c'est immédiat car alors $f(A)f(A^{-1}) = 1$ donc les deux sont non nuls. Dans le sens réciproque, on raisonne par contraposée. Si A est non inversible, A est équivalente à une matrice J_r avec $r < n$. Mais cette J_r est équivalente à une matrice B_r dont la diagonale supérieure ne contient que r 1 et des 0, qui est nilpotente. Par conséquent, $f(B_r)^n = 0$. Donc $f(A)^n = 0$ par commutativité de $\mathbb{C}$. Donc $f(A) = 0$.
2. Nécessairement, en écrivant $X = PJ_rQ$ et $M = P(I_n - J_r)Q$, on obtient par hypothèse $r = 0$ ou $r = n$, donc $X + 0$ ou $X \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Réciproquement, 0 convient, mais pour les matrices inversibles c'est pkus compliqué. I_n ne convient pas lorsque $n \geqslant 2$ (prendre $-E_{1,1}$) et si $n \geqslant 1$, on ne peut pas dire grand-chose.

□

5.3.4 Similitude

⋆ Similitude et surcorps

Montrer que si A est B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Même question (mais c'est plus dur) avec $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ un surcorps de $\mathbb{K}$ (on pourra commencer par le cas où $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$).

Démonstration. On commence par le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ qui est le cas "usuel".

- On fixe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PB = AP$. On écrit $P = P_1 + iP_2$ avec P_1 et P_2 à coefficients réels. On obtient alors :

$$\begin{cases} P_1B = AP_1 \\ P_2B = AP_2 \end{cases}$$

  Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $P_\lambda = P_1 + \lambda P_2$ et on veut montrer qu'il existe un λ réel tel que P_λ soit inversible. Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, le déterminant de P_λ, polynomial en λ, serait nul sur $\mathbb{R}$ qui est infini donc sur $\mathbb{C}$ ce qui est absurde car il n'est pas nul en i.

- On suppose $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) = n < +\infty$ et on écrit $P = l_1 P_1 + \ldots + l_n P_n$ avant de considérer
$$P = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$$
et φ qui à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ associe le déterminant de P. C'est un polynôme à n indéterminées. On montre alors par récurrence sur n que
$$\forall Q \in \mathbb{L}[X_1, \ldots, X_n],\ (\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ Q(x_1, \ldots, x_n) = 0) \implies Q = 0$$
OK pour l'initialisation, pour l'hérédité, on fixe $x_0 \in \mathbb{K}$ et par hypothèse de récurrence
$$Q(x_0, X_1, \ldots, X_n) = 0$$
Puis on a donc
$$Q(X_0, x_1, \ldots, x_n)$$
qui s'annule en une infinité de points (tous les x_0) donc $Q(X_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ quel que soit le $n - uplet$. On en déduit que $Q(X_0, \ldots, X_n)$ est le polynôme nul. Avec ce lemme, on conclut de même que dans le premier point.
- Dans le cas général, on considère $F = \mathrm{Vect}(P_{i,j})$ puis on utilise le cas précédent avec une base de F.

□

5.3.5 Trace

△ Représentation des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit ψ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \psi(M) = \mathrm{Tr(AM)}$$

Démonstration. Considérer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application
$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(AM) \end{array}$$
puis considérer
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ & A & \longmapsto & f_A \end{array}$$
Déjà, il est clair que les f_A sont bien des formes linéaires et que φ est bien définie et linéaire. De plus, on montre que φ est injective car si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AM) = 0$, alors en utilisant des matrices d'opérations élémentaires et en annulant certaines lignes ou colonnes, on montre que A est nulle. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il est plus rapide de le faire avec $M = A^T$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il est plus rapide de le faire avec $M = \overline{A}^T$ (cela correspond aux produits scalaires). Par égalité de dimension, φ est donc un isomorphisme, ce qui conclut. □

Application. Sert énormément pour des exercices qui traitent des hyperplans de matrices. Voici une liste non exhaustive : trouver toutes les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $f(AB) = f(A)f(B)$; montrer qu'un hyperplan contient une matrice inversible pour $n \geqslant 2$; montrer qu'il n'existe pas d'hyperplan stable par produit pour $n \geqslant 3$; détermination des hyperplans stables par conjugaison matricielle (PMP^{-1}).

$\star$ $H \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ pour $n \geqslant 2$

Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible pour $n > 1$

Démonstration. On prend la forme linéaire non nulle dont H est le noyau. On représente cette forme linéaire par $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ avec A non nulle. Par équivalence, on se ramène à chercher une matrice inversible N telle que $\mathrm{Tr}(J_r N) = 0$. On pourra considérer pour N la matrice du cycle $(1\ 2\ \dots\ n)$. □

5.3.6 Systèmes linéaires, opérations élémentaires

Matrices à diagonale dominante

Une matrice à diagonale dominante est inversible.

Démonstration. On raisonne par l'absurde en considérant un élément non nul X du noyau de A. On écrit la relation $AX = 0$ puis on s'intéresse à la ligne de l'égalité précédente qui correspond au x_i de module maximal non nul et on obtient une absurdité grâce au fait que la diagonale est dominante. □

Application. Disque de Gershgoring.

5.3.7 Déterminants

$\triangle$ Vers la densité des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps infini. Montrer qu'il existe une infinité de $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda I_n - A$ soit inversible.

Démonstration. L'application qui à λ associe le déterminant de $\lambda I_n - A$ est polynomiale en λ. Elle est non nulle car de degré $n \geqslant 1$ (sinon l'exercice n'a pas d'intérêt). donc elle possède un nombre fini de racines, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de λ tels que le déterminant de $\lambda I_n - 1$ soit non nul, *ie* que $\lambda I_n - A$ soit inversible. □

Déterminant de l'application transposition

Calculer le déterminant de l'endomorphisme qui à une matrice associe sa transposée.

Démonstration. L'essentiel est de mettre la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans le bon ordre. On met d'abord les $E_{i,i}$, puis on met ensemble les $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$. On trouve en calculant le déterminant par blocs dans cette base :

$$(-1)^{n(n-1)/2}$$

□

Vers les polynômes caractéristiques

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En effectuant dans les deux sens le produit par blocs entre les matrices :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ -A & I_p \end{pmatrix}$$

montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda^n \det(\lambda I_p - AB) = \lambda^p \det(\lambda I_n - BA)$$

Démonstration. Effectuer les deux produits par blocs. On trouve des matrices triangulaires par blocs. Calculer les deux déterminants, qui sont égaux par commutativité de $\mathbb{K}$. On trouve bien la formule demandée. □

Application. Permet de montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ en prenant $p = n$.

Une généralisation du déterminant 2×2

Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ tel que $CD = CD$. Montre que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$$

On pourra commencer par le cas où D est inversible.

Démonstration. Effecteur des transvections par blocs en multipliant :

- à droite par $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$
- à gauche par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$

puis calculer le déterminant obtenu. Dans le cas général, utiliser la densité des matrices inversibles (en considérant $D_X = D - X.I_n$ par exemple). □

Presque une identité remarquable et un déterminant 2×2 sans commutation

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que

$$\det(M) = \det(A + B)\det(A - B)$$

Démonstration. Effectuer les transvections par blocs suivantes :

- $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, codée par une multiplication à droite par

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$$

- puis $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ codée par une multiplication à gauche par

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$$

Calculer ensuite le déterminant des matrices obtenues. □

$\Delta\star$ Coefficients entiers et parité pour le déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ ayant tous les coefficients diagonaux impairs et tous les coefficients non diagonaux pairs. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Déjà, $\det(A) \in \mathbb{Z}$ et, si on note $\overline{A}$ la matrice des classes des coefficients de A dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la formule des signatures prouve que

$$\overline{\det(A)} = \det(\overline{A})$$

Or, $\overline{A} = I_n$ donc $\det(\overline{A}) = \overline{1}$. Par conséquent, $\det(A)$ est impair donc non nul donc A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

$\star$ Bizarre...

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$ et $AB - BA$ soit inversible. Montrer que n est un multiple de 6.

Démonstration. L'astuce est de calculer $(A + iB)(A - iB)$. L'hypothèse nous donne :

$$(A + iB)(A - iB) = (\sqrt{3} - i)(AB - BA) = 2e^{-i\pi/6}(AB - BA)$$

Or, la formule des signatures donne rapidement

$$\overline{\det(A + iB)} = \det(A - iB)$$

Par conséquent, $\det((A + iB)(A - iB)) \in \mathbb{R}$. Or,

$$\det((A + iB)(A - iB)) = 2^n e^{-in\pi/6} \underbrace{\det(AB - BA)}_{\in \mathbb{R}^*}$$

Par conséquent, $e^{-in\pi/6} \in \mathbb{R}$ donc 6 divise n. □

Déterminant et matrice de rang 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{Tr}(A)$$

Démonstration. Comme la matrice est de rang 1, elle possède une colonne non nulle et on peut exprimer toutes les autres colonnes en fonction de cette colonne principale. Alors, on peut développer le déterminant souhaité par multilinéarité, et à ce moment là, beaucoup de termes disparaissent par le caractère alterné du déterminant. Après quelques calculs, on obtient le résultat voulu. □

△ Un peu de matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que

$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \det(M) = \pm 1$$

où on a posé

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}),\ AB = I_n\}$$

Démonstration. Pour $\Longrightarrow$, utiliser le fait que le déterminant de M doit être une unité de $\mathbb{Z}$. Pour $\Longleftarrow$, utiliser la formule de la comatrice et le fait que le déterminant est polynomial. □

Déterminants en vrac

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $\det((i^j)_{1\leq i,j\leq n})$
2. $\det((\max(i,j))_{1\leq i,j\leq n})$

Démonstration. Représenter le début de la matrice peut aider...

1. Faire sortir un i de chaque ligne par multilinéarité. On obtient alors $n!$ fois un déterminant de Vandermonde qui vaut $\prod_{1\leq i<j\leq n}(j-i) = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(j-i) = \prod_{j=1}^{n-1} j!$. On en tire le résultat final :
$$\det((i^j)_{1\leq i,j\leq n}) = \prod_{k=1}^{n} k!$$
2. C'est surtout ici que la représentation de la matrice aide : la matrice est "en escalier". Cela peut aider à savoir quelles transvections faire. On pourra formaliser avec une récurrence si on le souhaite.

□

△⋆ Déterminant de Smith

Calculer le déterminant de Smith :

$$\det\,(i \wedge j)_{(1\leqslant i,j\leqslant n)}$$

Démonstration. Utiliser la formule

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Introduire la notation $\delta_{i|j}$ qui vaut 1 si i divise j et 0 sinon. Ainsi, on peut interpréter $i \wedge j$ comme le terme d'un produit matriciel. Dessiner les matrices correspondantes, dont on montre qu'elles sont triangulaires à cause des $\delta_{i|j}$. On obtient :

$$\det (i \wedge j)_{(1 \leqslant i,j \leqslant n)} = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$$

□

Δ⋆ Déterminant de Cauchy

Montrer par récurrence la formule

$$C_n = \frac{V(a_1, \dots, a_n)V(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}$$

C'est la formule du déterminant de Cauchy.

Démonstration. On multiplie toutes les colonnes par $a_n + b_j$, puis on soustrait la dernière colonne aux autres avant de factoriser les termes communs aux lignes et aux colonnes pour finalement développer par rapport à la dernière ligne. On obtient la relation de récurrence :

$$C_n = \frac{1}{a_n + b_n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(a_n - a_i)(b_n - b_i)}{(a_n + b_i)(a_i + b_n)} \right) C_{n-1}$$

□

⋆ Déterminant d'un produit de Kronecker

Pour $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule :

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m$$

Démonstration. En effet, on utilise la relation fonctionnelle $(AC) \otimes (BD) = (A \otimes B) \times (C \otimes D)$ avec des matrices identités. Le plus dur est alors de montrer que $A \otimes B$ est semblable à $B \otimes A$, ce qui permettra de conclure. Pour cela, prendre une base adaptée à la structure de produit tensoriel, et, au lieu de sommer d'abord sur les indices des premières composantes de cette famille produit tensoriel, sommer sur l'autre composante. Cela permet de passer de $A \otimes B$ à $B \otimes A$ en changeant de base, donc ces matrices sont semblables et ont le même déterminant. On conclut en appliquant ceci avec les matrices identités car le déterminant de $I \otimes B$ se calcule très bien comme déterminant diagonal par blocs. □

$\Delta\star$ Le problème des $2+1$ vaches/cailloux

Voici la généralisation du célèbre problème des 11 vaches. Soit $n \geq 2$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont tous les coefficients valent ± 1 sauf ceux sur la diagonale qui valent 0. Montrer que $\det(M) \neq 0$.
2. Soit un groupe de $2n+1$ vaches (ou cailloux, au choix) tel que dès que l'on retire une vache, on peut toujours former parmi les $2n$ restantes deux groupes de n vaches dont les sommes des poids des vaches par groupes sont égales. Montrer que toutes les vaches ont le même poids. Il est conseillé de traduire matriciellement le problème, la première question n'est pas là pour rien... On pourra montrer que l'image de la matrice considérée est de dimension $2n$.

Démonstration. Si on n'a pas de chance, c'est sans la première question !

1. Passer dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
2. Montrer que la matrice considérée est de rang supérieur à $2n$ en utilisant la question précédente, puis montrer que le noyau est de dimension supérieure ou égale à 1 car il contient le vecteur colonne composé uniquement de 1. Conclure en remarquant que le vecteur "poids des vaches" est dans le noyau. Il s'écrit donc comme une dilatation du vecteur colonne comportant uniquement des 1 : toutes les vaches ont donc le même poids.

$\square$

$\star\star$ Une somme étrange (pas classique du tout mais marrant)

Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\mathrm{inv}(\sigma)$ le nombre de points de $[\![1, n]\!]$ invariants par σ. Calculer :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\mathrm{inv}(\sigma)+1}$$

Démonstration. Écrire

$$\frac{1}{\mathrm{inv}(\sigma)+1} = \int_0^1 x^{\mathrm{inv}(\sigma)}\, dx$$

puis utiliser la linéarité de l'intégrale. S'intéresser au polynôme obtenu sous le symbole d'intégration. Interpréter ce polynôme comme un déterminant (suite de l'indication : celui de la matrice comportant des 1 partout et une diagonale de x). Calculer ensuite ce déterminant par opérations. $\square$

5.3.8 Comatrice

$\Delta\star$ Comatrice du produit

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$$

En déduire que si A et B commutent, alors $\mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B)$ commutent.

Démonstration. Commencer par le cas où les deux matrices sont inversibles. Le résultat s'obtient alors rapidement avec la formule des comatrices en fonction des déterminants et des transposées. Pour le cas général, utiliser la densité des matrices inversibles dans les matrices (définir les matrices $A_z = A + zI_n$ et $B_z = B + zI_n$) puis définir des polynômes coefficient par coefficient pour les matrices $\mathrm{Com}(A_z B_z)$ et $\mathrm{Com}(A_z) Com(B_z)$ et montrer qu'ils sont égaux car ils le sont en une infinité de points. Enfin, évaluer en 0 pour conclure. □

5.3.9 TD Châteaux

Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \varphi(AB) = \varphi(BA)$. montrer que φ est proportionnelle à la trace.
3. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3,\ \varphi(ABC) = \varphi(CBA)$. On suppose $n \geqslant 2$. Prouver que $\varphi = 0$.
4. On suppose que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence :
$$\mathrm{Tr}(M) = 0 \iff \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M = AB - BA$$
   Pour cela :
   a. Si $\mathrm{Tr}(M) = 0$ et $M \neq 0$, montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est $(0\ 1\ 0\ \ldots\ 0)^T$.
   b. En déduire que si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.
   c. Montrer l'implication attendue pour M de diagonale nulle (en cherchant A sous forme diagonale).
   d. Conclure.
5. Démontrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des matrices inversibles. Indication : on pourra utiliser la première question.

Transvections et dilatations

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme tel que $\mathrm{rg}(u-\mathrm{id}) = 1$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur a non nul et d'une forme linéaire l non nulle tels que $\forall x \in E,\ u(x) = x + l(x)a$. Que vaut $\det(u)$?
2. On suppose $l(a) = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. On dit que u est une transvection.
3. On suppose $l(a) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E. On dit alors que u est une dilatation.
4. On pose, pour i et j distincts compris entre 1 et n, et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de cette forme. On pose, pour $a \neq 0$, $D_a = I_n + (a-1)E_{n,n}$.
   a. Calculer $T_{i,j}(\lambda)T_{k,l}(\mu)$.
   b. Montrer que tout matrice inversible de déterminant 1 est produit de matrices appartenant à $\mathcal{T}$.
   c. Montrer que toute matrice inversible est produit de matrices de $\mathcal{T}$ et d'une matrice D_a.
5. Montrer que le groupe spécial linéaire $SL(E)$ est engendré par les transvections, puis que le groupe linéaire $GL(E)$ est engendré par les dilatations et les transvections.

Une application des transvections

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Montrer l'équivalence : $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f(A) \neq 0$.
2. Désormais, et ce pour toute la suite de l'exercice, on suppose que f est polynomiale par rapport aux coefficients de la matrice. Montrer que $f(T_{i,j}(\lambda)) = 1$ pour tous i et j distincts et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
3. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in \mathbb{K},\ f(D_a) = a^r$.
4. En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(A) = \det(A)^r$.

Théorème de Burnside

On dit qu'un groupe G est d'exposant fini lorsqu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $g \in G$, on ait $g^d = e$. Dans ce cas, on appelle exposant de G le plus petit entier naturel non nul d vérifiant cette propriété. On se propose ici de démontrer le théorème de Burnside : un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est fini si, et seulement s'il est d'exposant fini.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Tr}(A^k) = 0$. montrer que A est nilpotente.
2. Soit G un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$ constituée d'éléments de G. On définit f de G dans $\mathbb{C}^m$ par :
$$f(M) = (\mathrm{Tr}(MM_i))_{1 \leqslant i \leqslant m}$$
Démontrer que si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
3. En déduire que f est injective lorsque G est d'exposant fini.
4. Conclure.

Démonstration. 1. Classique : un déterminant de Vandermonde fait l'affaire.

2. Remarquons que (M_i) existe bel et bien par le théorème de la base extraite. Supposons $f(A) = f(B)$. Alors :
$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \mathrm{Tr}((A - B)M_i) = 0$$
On en déduit
$$\forall M \in \mathrm{Vect}(G),\ \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM)$$
On pose alors $U = AB^{-1} - I_n$. On procède par récurrence en remarquant que
$$U^{k+1} = AB^{-1}U^k - U^k$$
avec $B^{-1}U^k \in \mathrm{Vect}(G)$ donc on en déduit que $\mathrm{Tr}(U^k) = 0$ pour tout k et donc que U est nilpotente.
3. Il suffit de montrer que U est diagonalisable, et donc il suffit de montrer que AB^{-1} l'est. Supposons G d'exposant fini. Comme AB^{-1} est annulé par $X^d - 1$ (scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$) où d est l'exposant de G, on en déduit que AB^{-1} est diagonalisable puis que $U = 0$ et donc que f est injective.
4. Supposons toujours G d'exposant fini (le sens direct est immédiat). Comme les éléments de G sont tous annulés par $X^d - 1$, leurs valeurs propres sont toutes des éléments de $\mathbb{U}_d$ donc, comme les MM_i sont des éléments de G, f prend un nombre fini de valeurs (la trace est la somme des valeurs propres). Comme f est injective, on en déduit que G est fini.

□

Chapitre 6

Réduction

Table des matières

6.1 Points méthode

Équation aux éléments propres pour un endomorphisme

Pour rechercher les éléments propres d'un endomorphisme u (valeurs propres et sous-espaces propres associés), on peut résoudre l'équation $u(x) = \lambda x$, appelée équation aux éléments propres.

Équation aux éléments propres pour une matrice

Pour rechercher les éléments propres d'une matrice A, on peut résoudre l'équation $AX = \lambda X$, appelée équation aux éléments propres.

Polynôme caractéristique dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est :

$$X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$$

On utilise impérativement cette expression quand on travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Calcul alternatif

Parfois, il est plus intéressant de calculer $\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$ plutôt que $\det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$ (par exemple pour une matrice compagnon).

Importance d'un polynôme caractéristique factorisé

Puisque les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres, il est important d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concret cet objectif en calculant le déterminant de $A - \lambda I_n$ par opérations élémentaires afin (suivant les cas) :

- de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes ;
- de se ramener à une matrice triangulaire, au moins en partie.

On pourra notamment utiliser des combinaisons linéaires qui traduisant des relations de liaison entre les colonnes, ou encore passer à la transposée si ces relations de liaison sont sur les lignes.

Expression dans le cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $(E_1, \ldots, E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Si on pose p la matrices dont les colonnes sont $E_1, \ldots, E_n$, alors :

$$A = PDP^{-1} \text{ ou } D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

CS de diagonalisabilité

Pour montrer qu'une endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, ou une matrice de taille n, est diagonalisable, il suffit de montrer que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est supérieure ou égale à n.

Savoir si un endomorphisme est diagonalisable

Pour savoir si un endomorphisme u est diagonalisable, on peut calculer son polynôme caractéristique.

- S'il n'est pas scindé, alors u n'est pas diagonalisable.
- Sinon, pour toute valeur propre multiple, on compare $\dim(E\lambda(u))$ et $m(\lambda)$, par exemple en calculant le rang de $u - \lambda \mathrm{Id}_E$.

Processus de trigonalisation

Une base trigonalisation commençant par un vecteur propre, pour trigonaliser un endomorphisme u, on commence souvent par compléter un vecteur propre de u en une base de E, dans laquelle la matrice de u est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad L \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$$

Il suffit alors de montrer que l'on peut prendre A triangulaire supérieure pour conclure. Comme la matrice A n'est pas *a priori* la matrice d'un endomorphisme, on raisonne le plus souvent en trigonalisant la matrice A (ou alors on fait le terroriste en composant par une projection sur un hyperplan pour se ramener à un endomorphisme).

6.2 Astuces

6.2.1 Généralités

Projecteurs spectraux

Ce sont les projecteurs associés à la décomposition en sous-espaces propres

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$$

lorsque l'endomorphisme u est diagonalisable. On les note $p_1, \ldots, p_r$. On a $u = \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_r p_r$ et on peut montrer par caractérisation par les supplémentaires que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = \lambda_1^n p_1 + \ldots + \lambda_r^n p_r$$

Par linéarité, cette relation s'étend à tous les polynômes. Cela permet efficacement de calculer les puissances d'une matrice. Les polynômes spectraux sont des polynômes en u : on utilise la relation vraies sur tous les polynômes et on prend en particulier les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux valeurs propres distinctes.

Polynôme annulateur et matrice inversible

Si P est un polynôme annulant une matrice carrée A avec

$$P = \lambda \prod_j (X - x_j)$$

alors il existe un indice j tel que $A - x_j I$ soit non inversible. On regarde pour cela le déterminant de $P(A)$ et on utilise l'intégrité. Si P/λ est le polynôme minimal de A, c'est même vrai pour tout indice j !

Endomorphisme réel sur un espace de dimension impaire

Une matrice réelle ou un endomorphisme réel sur un espace de dimension finie impaire admet au moins une valeur propre réelle (car le polynôme caractéristique est de degré impair) donc un vecteur propre réel, et même au moins une valeur propre de multiplicité impaire.

Utilisation des polynômes interpolateurs de Lagrange

Si on a comme hypothèse un prédicat P qui vérifie une propriété du type :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(A^k)\ \ldots$$

il peut être fort utile de s'intéresser à des polynômes interpolateurs de Lagrange et utiliser de la linéarité.

Application. Une matrice carrée A vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(A^k) = 0$ est nilpotente. Remarquer que cela peut aussi se faire avec un déterminant de Vandermonde.

Utilisation de la linéarité

Si on dispose d'une hypothèse en :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \text{ Truc linéaire en } A$$

Alors on peut en déduire que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(A) = P(\text{Truc linéaire en } A)$$

car on a la coïncidence de deux applications linéaires sur la base canonique des polynômes. En particulier, il peut être utile de considérer ensuite le polynôme minimal ou le polynôme caractéristique.

Application. Si A est diagonalisable (resp. trigonalisable), alors $M \mapsto AM$ est diagonalisable (resp. trigonalisable).

Le polynôme minimal est irréductible sur une algèbre intègre

Si A est une algèbre intègre, le polynôme minimal d'un élément de A est nécessairement irréductible. Sinon, l'intégrité permettrait de contredire sa minimalité.

Application de la réduction en dimension infinie

Voici un des rares usages de la réduction en dimension infinie : on rappelle que si f est un endomorphisme, une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes est libre. Ceci peut notamment servir pour des fonctions où on pense à l'endomorphisme de dérivation, éventuellement itéré !

Application. La famille $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre car tous ses éléments sont des vecteurs propres de l'endomorphisme de dérivation de $\mathcal{C}^\infty$ associés à des valeurs propres distinctes.

Application. De même, la famille $(x \mapsto \sin(ax))_{a \in \mathbb{R}}$ est libre, mais on utilise ici l'endomorphisme de double dérivation $f \mapsto f''$.

Cotrigonalisation

Deux endomorphismes scindés qui commutent sont trigonalisables dans une même base. On a le même résultat pour une partie de $\mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes scindés qui commutent deux à deux.

Démonstration. Etapes de la démonstration :

1. Montrer que deux endomorphismes qui commutent admettent un vecteur propre commun (les sous-espaces propres sont stables).
2. Procéder par récurrence forte sur la dimension de l'espace. Soit tous les endomorphismes sont des homothéties, et c'est évident, soit il y en a un, qu'on note u, qui ne l'est pas. Il existe alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ tel que
$$\dim(E_\lambda) < \dim(E)$$
On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence avec $E = H \oplus E_\lambda$. En notant π la projection sur H parallèlement à E_λ, on se ramène à l'hypothèse de récurrence en considérant les $\tilde{v} = \pi \circ v_{|H}$.

Sinon, on peut remarquer que le résultat est clairement équivalent à sa version matricielle et utiliser des matrices pour l'hérédité, ce qui est plus claire que les projections. □

Codiagonalisation

Deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base. On a le même résultat pour une partie de $\mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux.

Démonstration. On procède de façon similaire à la démonstration de la cortigonalisation, mais l'hérédité est plus simple, il n'y a pas besoin de considérer une projection. □

Décomposition de Dunford (HP mais très utile)

Soit A une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors, il existe un unique couple de matrices (D, N) tel que D soit diagonalisable, N soit nilpotente, $DN = ND$ et on ait :

$$A = D + N$$

L'existence provient de la décomposition en sous-espaces caractéristiques.

Décomposition de Jordan (fortement HP)

6.2.2 Exponentielles de matrices

$\exp(A)$ est un polynôme en A

Montrons que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$. Les sommes partielles sont dans $\mathbb{K}[A]$. Or, $\mathbb{K}[A]$ est un SEV de dimension finie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc il est fermé. Par conséquent, $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$. Et par suite :

$$\exists P \in \mathbb{K}[X], \ \exp(A) = P(A)$$

Exponentielle d'une matrice diagonale

On a la formule :

$$\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_i)) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_i})$$

Démonstration. En effet, il suffit de passer par les sommes partielles et de passer à la limite. □

Exponentielle d'une matrice triangulaire

L'exponentielle d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les exponentielles des coefficients diagonaux de la matrice de départ.

Exponentielle et similitude

Si $A = P^{-1}BP$, alors

$$\exp(A) = P^{-1}\exp(B)P$$

Démonstration. On repasse par la définition avec les sommes partielles en utilisant le fait que $(P^{-1}BP)^k = P^{-1}B^kP$. La continuité de l'application de conjugaison par P permet de conclure. □

Déterminant d'une exponentielle de matrice

On a la formule :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(\exp(A)) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

Démonstration. En effet, cela est immédiat en trigonalisant A et en utilisant les deux points précédents. $\square$

Utilisation de la décomposition de Dunford

Quand on prend des exponentielles de matrices, notamment pour les équations différentielles, penser à utiliser la décomposition de Dunford (l'exponentielle d'une matrice diagonalisable s'exprime simplement, celle d'une matrice nilpotente est un polynôme en cette matrice).

Décomposition de Dunford de l'exponentielle

Soit A une matrice dont la décomposition de Dunford s'écrit $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente d'indice n et $DN = ND$. Alors, la décomposition de Dunford de $\exp(A)$ est :
$$\exp(A) = \exp(D) + \exp(D)NP(N)$$
où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{X^k}{(k+1)!}$. En effet, on a $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$, on sait que $\exp(D)$ est diagonalisable, et on sait que
$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = I + NP(N)$$
Par conséquent, comme $\exp(D)$ est un polynôme, elle commute avec N et $P(N)$, donc $\exp(D)NP(N)$ est nilpotente car N l'est. L'unicité de la décomposition de Dunford conclut.

Application. Si A une matrice complexe vérifie $\exp(2\pi A) = I$, alors A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{Z}$. En effet, avec $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A, celle de $2\pi A$ est $2\pi D + 2\pi N$ puis par unicité de la décomposition de Dunford de $\exp(2\pi A)$, on obtient :
$$\exp(2\pi D) = I \text{ et } \exp(2\pi D)2\pi NP(2\pi N) = 0$$
La première égalité fournit que pour toute valeur propre λ de A (*ie* de D), on a $e^{2\pi\lambda} = 1$ donc $\lambda \in i\mathbb{Z}$. Et, avec la deuxième, puisque $\exp(2\pi D)$ est inversible, $NP(2\pi N) = 0$. Or, $P(2\pi N)$ est aussi inversible (I plus une matrice nilpotente, télescopage), donc $N = 0$. Par conséquent, A est diagonalisable (car $A = D$) et $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{Z}$.

Exponentielle de matrices antisymétriques

L'exponentielle d'une matrice symétrique réelle est une matrice de rotation. En particulier, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Démonstration. Si $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(\exp(B)) = e^{\mathrm{Tr}(B)} = e^0 = 1$ et

$$\exp(B)\exp(B)^T = \exp(B)\exp(B^T) = \exp(B)\exp(-B) = \exp(0) = I_n$$

si bien que $B \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. De plus, si on considère A comme dans l'énoncé, on a :

$$A^{2k} = (-1)^k t^{2k} I_2 \quad \text{et} \quad A^{2k+1} = (-1)^k t^{2k+1} A$$

donc on obtient le résultat en appliquant la définition de l'exponentielle matricielle et en reconnaissant le développement en série entière du cosinus et du sinus. □

Utilisation de la dérivation

Quand on voit des exponentielles de matrices qui ne commutent pas, on peut introduire une fonction de la variable réelle et la dériver. En effet, puisque la dérivée de $t \mapsto e^{tA}$ est $t \mapsto Ae^{tA} = e^{tA}A$, on peut placer les matrices où on le souhaite. De façon générale, quand on dérive $t \mapsto e^{tA}$, toujours se demander où est-ce qu'il vaut mieux placer A.

Application. Si on considère $f : t \mapsto e^{itB}e^{-itA}$, alors on a :

$$f'(t) = ie^{itB}(B - A)e^{itA}$$

On peut alors intégrer, passer à la norme, utiliser des propriétés de développements asymptotiques, etc.

6.3 Exercices classiques

6.3.1 Éléments propres

⋆ Une forme linéaire pour les valeurs propres ?

Existe-t-il une forme linéaire Φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(A)$ soit une valeur propre de A ?

Norme d'algèbre et rayon spectral

Soit N une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A. Alors, $\rho(A) \leqslant N(A)$.

Démonstration. A COMPLETER □

6.3.2 Polynôme caractéristique

⋆ Matrices singulières et plans vectoriels

Montrer que tout plan vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 2)$ contient au moins une matrice singulière non nulle (une matrice singulière est une matrice non inversible).

Démonstration. On considère (A, B) une base d'un tel plan. Si B est singulière, OK. On peut donc supposer B inversible. Alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \det(A = \lambda B) = \underbrace{\det(B)}_{\neq 0}\underbrace{\det(\lambda I_n - B^{-1}A)}_{\text{de degré } n}$$

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\det(A + \lambda B) = 0$. Et $A + \lambda B \neq 0$ car $1 \neq 0$ et (A, B) est libre. Donc $A + \lambda B$ est bien une matrice singulière non nulle. □

⋆ $\det(A + N)$: commutation ; nilpotence et inversibilité

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Que dire de $\det(A + N)$ pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ commutant avec N ?

Démonstration. On commence par le cas simple où $A = I_n$. En trigonalisant N, $I_n + N$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale donc

$$\det(I_n + N) = 1 = \det(I_n)$$

Dans le cas général, on écrit

$$\det(A + N) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}N)$$

Or, A et N commutent, donc A^{-1} et N commutent et $A^{-1}N$ est nilpotente. D'après le cas précédent, on en déduit que

$$\det(A + N) = \det(A) \times 1 = \det(A)$$

□

$\det(A + N)$ avec commutation et nilpotence

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec N, alors $\det(A) = 0 \implies \det(A + N) = 0$ (voir l'exercice précédent).

Première méthode. Raisonnement par densité avec $A_\lambda = A - I\lambda$ qui est inversible au voisinage de 0 et commute avec N. On utilise l'exercice précédent et on conclut par continuité du déterminant ou polynomialité. □

Deuxième méthode (sans utiliser l'exercice précédent). On considère a et n les endomorphismes canoniquement associés. Alors par commutation $\mathrm{Ker}(a)$ est stable par n. Dans une base adaptée à $\mathrm{Ker}(a)$:

$$A = \begin{pmatrix} (0) & (*) \\ (0) & (*) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} P & (*) \\ (0) & (*) \end{pmatrix}$$

Donc

$$A + N = \begin{pmatrix} P & (*) \\ (0) & (*) \end{pmatrix}$$

Or, l'induit de n sur $\mathrm{Ker}(a)$ est aussi nilpotent et $\mathrm{Ker}(a)$ n'est pas l'espace nul donc P est non inversible. Un déterminant triangulaire par blocs conclut. □

Caractérisation des matrices nilpotentes

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(A^k) = 0$, alors A est nilpotente.

Démonstration. On trigonalise puis deux méthodes sont possibles : utiliser un déterminant de Vandermonde ou des polynômes interpolateurs de Lagrange. □

Remarque. Le résultat reste vrai si cette égalité n'est vrai que pour $k \in [\![1, n]\!]$. Cependant, cela est beaucoup difficile à démontrer puisque cela fait appel aux fonctions symétriques élémentaires et aux formules de Newton (*cf* le premier DM de l'année).

Remarque. L'idée de la démonstration avec les polynômes interpolateurs de Lagrange sert souvent lorsqu'on à un prédicat P avec une hypothèse en $\forall k,\ P(k)$.

△ Trace et nilpotence (version énervée du précédent)

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.
2. Montrer que A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$.
3. ⋆⋆ Montrer, plus généralement, que A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si, et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$.
4. Application : montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A^n) \neq 0$ est nécessairement diagonalisable.

Démonstration.
1. Dans le sens direct, trigonaliser A : toutes ses valeurs propres sont nulles et les traces des puissances valent des sommes de 0 donc 0. Dans le sens réciproque, on trigonalise A puis on fait apparaître une matrice de Vandermonde avec les puissances des valeurs propres distinctes, qui multipliée par le vecteur des valeurs propres multipliées par leurs multiplictés fait 0. On en déduit que la seule valeur propre est 0 ce qui conclut.

2. Dans le sens direct, A et B ont donc les même valeurs propres. On trigonalise et le résultat s'obtient facilement. Dans le sens réciproque, on note λ_i et μ_i les valeurs propres respectives de A et B comptées avec multiplicité. Par linéarité, on a l'égalité :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\mu_i)$$

car cette relation est linéaire en P et on a l'égalité sur la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ en traduisant l'hypothèse après trigonalisation. En utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la réunion des spectre de A et B, on trouve que tout élément de cette réunion à même multiplicité chez A et chez B. Donc A et B ont même polynôme caractéristique.

3. Le sens direct est toujours immédiat. Dans le sens réciproque, on cette fois seulement :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\mu_i)$$

et on veut montrer que

$$\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)$$

ce qui revient à une égalité des fonctions symétriques élémentaires. Or, on a l'égalité des sommes de Newton. Il suffit alors de prouver que les sommes de Newton et les fonctions symétriques élémentaires s'expriment les unes en fonction des autres. Cela se fait, mais c'est long et difficile. Se référer au premier DM de l'année.

4. On pose $x = \mathrm{Tr}(A^n) \neq 0$. On considère alors :

$$B = \frac{x}{\sqrt[n]{n}} \mathrm{Diag}(\omega, \dots, \omega^{n-1})$$

avec $\omega = e^{i2\pi/n}$. Alors les traces des k premières puissances de B sont égales aux traces de k premières puissances de A. Donc A et B ont même polynôme caractéristique. Or, B est diagonalisable, donc A aussi. Autre façon de faire : $X^n - \gamma^n = 0$. On considère C la matrice compagnon de ce polynôme, et C convient (ses puissances décalent les diagonales).

$\square$

⋆ Application de l'exercice précédent

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que A et $AB - BA$ commutent. Montrer en utilisant l'exercice précédent que $AB - BA$ est nilpotente.

Démonstration. Il suffit de montrer que les traces des puissances sont nulles. Or pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(AB - BA)^{k+1} &= (AB - BA)(AB - BA)^k \\ &= AB(AB - BA)^k - BA(AB - BA)^k \\ &= A\left[B(AB - BA)^k\right] - \left[B(AB - BA)^k\right] A\end{aligned}$$

par commutation. Donc $\mathrm{Tr}((AB - BA)^{k+1}) = 0$. Donc $AB - BA$ est nilpotente. $\square$

△ Degré du PGCD des polynômes caractéristiques

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r tel que $AX = XB$. Montrer que le PGCD de χ_A et χ_B est de degré au moins r.

Démonstration. Sr ramener à $X = J_r$ par équivalence. Ensuite, écrire A et B par blocs. La condition donne le fait que les blocs supérieures gauches de A et B sont égaux, que le bloc supérieure droit de B est nul et que le bloc inférieur gauche de A est nul. Donc le polynôme caractéristique du bloc supérieur gauche divise les polynômes caractéristiques de A et de B, donc leur PGCD. □

⋆ Polynôme caractéristique de $AM + B$ et nilpotence

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AM+B} = \chi AM$. Montrer que B est nilpotente. Montrer que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(BAM) = 0$$
En conclure que $BA = 0$.
2. Réciproquement, on suppose B nilpotente et $BA = 0$. Montrer que
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$$

Démonstration.

1. Pour montrer que B est nilpotente, prendre $M = 0$ et utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. Ensuite, en trigonalisant, on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}((AM + B)^k) = \mathrm{Tr}((AM)^k)$$
Or, comme B est nilpotente, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Tr}(B^k) = 0$$
Pour $k = 2$, on obtient :
$$\mathrm{Tr}((AM)^2) + \mathrm{Tr}(AMB) + \mathrm{Tr}(BAM) + \underbrace{\mathrm{Tr}(B^2)}_{=0} = \mathrm{Tr}((AM)^2)$$
donc $2\mathrm{Tr}(BAM) = 0$ et on conclut car $\mathbb{C}$ est de caractéristique nulle. Ensuite, c'est l'exercice classique : ici prendre $M = (\overline{BA})^T$ va plus vite.
2. Réciproquement, on calcule en utilisant le fait pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $B - \lambda I_n$ est inversible. Alors :
$$\begin{aligned}\det(\lambda I - B - AM) &= \lambda^n \det(I - (\lambda I - B)^{-1}AM)\\ &= \lambda^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}AM\right)\\ &= \det(\lambda I - AM)\end{aligned}$$
puisque $(\lambda I - B) = \lambda A$ par hypothèse donc
$$(\lambda I - B)^{-1}A = \frac{1}{\lambda}A$$

On conclut puisque $\mathbb{C}$ est infini.

□

Matrices de permutation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Définir, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, une matrice $P_\sigma \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que l'application $\sigma \mapsto P_\sigma$ soit un morphisme de groupes injectif.
2. Que représente $\mathrm{Tr}(P_\sigma)$ pour la permutation σ ?
3. Exprimer le polynôme caractéristique de P_σ en fonction de la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
4. $\star$ Montrer que deux permutations σ et τ sont conjuguées si, et seulement si, les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

6.3.3 Sous-espaces stables, commutants

Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent

En dimension finie égale à n, si u est nilpotent d'indice n, les sous-espaces stables par u sont exactement les $\mathrm{Ker}(u^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

Démonstration. En effet, soit F un sous-espace stable par u de dimension k. Alors $\chi_{u_F} = X^k$ donc $u_F^k = 0$ donc $F \subset \mathrm{Ker}(u^k)$, et on a l'égalité par dimension (en utilisant la concavité des noyaux itérés). □

$\star$ Endomorphismes cycliques

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que u est cyclique, *ie* qu'il existe un vecteur x de E tel que

$$E = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$$

Montrer que les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont en nombre fini et tous de la forme $\mathrm{Vect}\{u^k(y) \mid k \in \mathbb{N}\}$ avec $y \in E$.

Démonstration. S'intéresser à des polynômes annulateurs. □

$\star$ CNS de cyclicité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Démontrer qu'il existe un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E stables par f si, et seulement si, f est cyclique.

Δ Produit de n nilpotentes qui commutent

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux. Montre que $A_1 A_1 \cdots A_n = 0$.

Démonstration. Les noyaux sont stables par commutation. La nilpotence diminue strictement le rang à chaque nouvelle matrice. il est plus facile de le formaliser en termes d'applications linéaires (sinon, cela est rapide en les cotrigonalisant). □

$\star$ Bicommutant d'une matrice diagonalisable

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A. On pose

$$\mathcal{C}_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ \mid \ \forall N \in \mathcal{C}(A, \ MN = NM)\}$$

le bicommutant de A. Démontrer que si A est diagonalisable, alors :

$$\mathcal{C}_2(A) = \mathbb{C}[A]$$

Remarque. Ce résultat est vrai dans le cas général, mais sa démonstration est alors plus difficile et nécessite la décomposition de Frobenius.

6.3.4 Diagonalisation

Application du cours

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? A quelle condition la matrice $B = \begin{pmatrix} \lambda I_p & X \\ (0) & \mu I_q \end{pmatrix}$ avec $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- Elle est triangulaire supérieure donc son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = X(X-4)(X-7)(X-9)$$

Il est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

- Si $\lambda = \mu$, B est diagonalisable si, et seulement si, $X = 0$. Si $\lambda \neq \mu$, B est toujours diagonalisable (passer par la dimension des sous-espaces propres).

□

△ Une matrice tridiagonale symétrique

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A en utilisant une suite récurrente. On pourra commencer par chercher les valeurs propres réelles en les mettant sous la forme $2\cos(\theta)$ ou $\pm 2\cosh(\theta)$.
2. Déterminer une matrice de passage P convenable et son inverse (on pourra calculer $P^T P$).

Démonstration. Remarquons que la matrice est symétrique réelle donc orthodiagonalisable : ainsi, toutes ses valeurs propres sont réelles et on peut trouver une matrice de passage orthogonale, ce qui explique les indications.

1. L'équation aux éléments propres fournit la relation de récurrence linéaire suivante pour $AX = \lambda X$:
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k$$
Si $|\lambda| < 2$, on écrit $\lambda = 2\cos(\theta)$ et
$$\forall x \in [\![1, n]\!],\ x_k = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$$
Or, $x_0 = A = 0$ et
$$x_{n+1} = \underbrace{B}_{\neq 0}\sin((n+1)\theta) = 0$$
donc
$$\theta = \frac{l\pi}{n+1}$$
On a donc les vecteurs propres
$$X_k^{(l)} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{l\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{ln\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$$
et la matrice de passage
$$P = \left(\sin\left(\frac{kl\pi}{n+1}\right)\right)_{1 \leqslant k,l \leqslant n}$$
Ensuite, si $|\lambda| > 2$, on a une matrice à diagonale domianante donc inversible donc pas de valeur propre. Mais de toute façon, on a déjà n valeurs propres distinctes donc il n'y en a pas d'autre.

2. En calculant (formules de trigo et sommes géométriques d'exponentielles), on trouve $P^T P = \frac{n}{2} I_n$. On prend finalement
$$\tilde{P} = \sqrt{\frac{2}{n}} P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$
comme matrice de passage.

□

△ Une CNS de diagonalisabilité

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Démonstration. Dans le sens direct, si u est diagonalisable et F est stable par u, alors u_F est diagonalisable. on complète une base de diagonalisation deu_F avec des vecteurs propres de u pour obtenir un supplémentaire stable par u. Réciproquement, supposons que tout SEV stable par u admette un supplémentaire stable par u. On pose
$$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$
qui est un SEV stable par u. Alors il admet G un supplémentaire stable par u. Or, il ne peut y avoir de vecteurs propres dans G car ils sont tous dans F. Donc puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, $G = \{0\}$. Donc
$$E = F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$
et u est bien diagonalisable. □

△ Une CNS de diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$ qui abaisse les puissances

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M est diagonalisable si, et seulement si, M^p est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^p)$.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Dans le sens réciproque, s'intéresser à des supplémentaires du noyau. Sur celui-ci ; utiliser un polynôme annulateur □

⋆ Une extension algébrique de $\mathbb{Q}$

On pose $E = \mathbb{Q}[j, \sqrt[3]{2}]$ la plus petite $\mathbb{Q}$-algèbre contenant $\{j, \sqrt[3]{2}\}$.

1. Démontrer que E est de dimension 6 sur $\mathbb{Q}$ et en donner une base.
2. On considère $\varphi : x \mapsto jx$. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
3. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de φ.
4. φ est-il diagonalisable ?

⋆ Majoration des cardinaux des sous-groupes finis de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$

On pose $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}) = \left\{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \ : \ M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\right\}$.

1. Montrer d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ appartient à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ si, et seulement si, $\det(M) = \pm 1$.
2. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. On note ϕ la projection canonique de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que ϕ est un morphisme et que sa restriction a tout sous-groupe fini de l'ensemble de départ est injective.
3. Peut-on en déduire une majoration sur le cardinal de tels sous-groupes finis ?

⋆ Sous-groupes abéliens finis de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z})$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^n = I_2$.

1. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de module 1.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour le déterminant et la trace de A ?
3. Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $\forall A \in G,\ A^{12} = I_2$. En déduire que $\mathrm{Card}(G) \leqslant 12$.

⋆ CNS de commutation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence :

$$AB = BA \iff \forall t \in \mathbb{C},\ A + tB \text{ est diagonalisable}$$

Remarque. Le résultat reste vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et constitue le difficile théorème de Motzkin.

6.3.5 Trigonalisation, nilpotents

⋆ Utilisation d'une matrice compagnon

1. Soit $P = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k) \in \mathbb{Z}[X]$ avec $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, le polynôme $\prod_{k=1}^{n}(X - z_k^N)$ est aussi à coefficients entiers. Indication : considérer la matrice compagnon de P.
2. Application : montrer que si un polynôme à coefficients entiers a toutes ses racines complexes de module inférieur ou égal à 1, alors ses racines non nulles sont des racines de l'unité.

Démonstration. 1. On note M ma matrice compagnon de P qui est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Comme les racines du polynôme sont les valeurs propres de la matrice compagnon, M est semblable à $\tilde{M}$, triangulaire supérieure avec les z_k sur sa diagonale. Par conséquent, $M^N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux égaux aux z_k^N. L'égalité des polynômes caractéristiques fournit :

$$\prod_{k=1}^{n}(X - z_k^N) = \chi_{M^N} \in \mathbb{Z}[X]$$

donc on a bien le résultat.

2. Montrons qu'il existe un nombre fini de $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaires de degré n dont toutes les racines sont dans le disque unité. Pour cela, il suffit de borner les fonctions symétriques élémentaires σ_k car les coefficients viennent de ces fonctions. Or :

$$|\sigma_k| \leqslant \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \underbrace{|z_{i_1} \cdots z_{i_k}|}_{\leqslant 1} \leqslant \binom{n}{k}$$

Il y a donc un nombre fini de coefficients, donc un nombre fini de polynômes. Soit P correspondant à l'énoncé et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors la suite $(z_k^N)_{N\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans un ensemble fini donc le principe des tiroirs permet de conclure.

□

⋆ Théorème de Kronecker

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont toutes les valeurs propres sont non nulles et de module au plus 1.

1. Montrer que $\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{Tr}(A^k) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont de module 1, et que ce sont des racines de l'unité.
3. Exhiber $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'ensemble des valeurs propres est $\mathbb{U}_n$.

⋆ M semblable à $2M$

Déterminer les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont semblables à $2M$.

⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure, de diagonale $(1, 2, \ldots, n)$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

△ Dimension trop grande $\implies$ une nilpotente non nulle

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension strictement supérieure à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Montrer que V contient une matrice nilpotente non nulle.

Démonstration. Considérer l'intersection avec l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Cette intersection n'est pas réduite à l'espace nul car la somme des dimensions est strictement supérieure à n. Ainsi, V contient une matrice triangulaire supérieure stricte non nulle, donc une matrice nilpotente non nulle. □

Remarque. Dans ce genre d'exercices, toujours considérer une intersection avec un ensemble de matrices de référence possédant la propriété recherchée.

6.3.6 Polynômes d'endomorphismes

Utilisation d'un polynôme annulateur

Condition sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A + 5I_n = 0$?

Démonstration. Un polynôme annulateur a des racines complexes conjuguées non réelles et la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Les multiplicités en tant que valeurs propres des racines complexes sont égales à celles des conjuguées, donc la dimension est paire. Réciproquement, lorsque la dimension est paire, on construit un bloc 2×2 de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

qui convient : on peut le vérifier par le calcul ou plutôt (et c'est mieux) le voir comme la matrice compagnon du polynôme $X^2 + 2X + 5$. On généralise ensuite par blocs. □

⋆ Facteur irréductible du polynôme minimal

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant un polynôme minimal Π. Montrer que si Π admet u facteur irréductible P de degré p, alors E admet un sous-espace vectoriel de dimension p stable par u. On pourra prendre un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(P(u))$.

Démonstration. On écrit $\Pi = P \times Q$ avec $Q(u) \neq 0$ (par minimalité de Π) et P irréductible de degré p. On prend alors $x \in E$ non nul tel que $Q(u)(x) \neq 0$. On pose alors $y = Q(u)(x)$. On a donc $y \in \mathrm{Ker}(P(u))$. On considère alors

$$V = \mathrm{Vect}\{u^k(y) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

On souhaite montrer que V convient. On a alors $V \subset \mathrm{Ker}(P(u))$ car $y \in \mathrm{Ker}(P(u))$ et $P(u)$ commute avec tous les u^k. Montrons ensuite que la famille

$$(y, \dots, u^{p-1}(y))$$

est une base de V. Si on considère une relation de liaison

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(y) = 0$$

on pose $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$. Alors R annule u_V. Or, P annule u_V donc $\pi_{u_V} \mid P$. Comme P est irréductible, π_{u_V} vaut 1 ou P. Comme $\dim(V) \geqslant 1$, $\pi_{u_V} = P$. Mais comme R annule u_V et $\deg(R) < \deg(P)$, on en déduit que $R = 0$. Donc la famille

$$(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$$

est libre. Montrons le caractère générateur. On sait que

$$\dim(\mathbb{K}[u_V]) = \deg(\pi_{u_V}) = \deg(P) = p$$

et on sait aussi que

$$V = \mathbb{K}[u_V](y)$$

Il suffit alors de montrer que

$$\dim(\mathbb{K}[u_V](y)) = p = \dim(\mathbb{K}[u_V])$$

On considère alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[u_V] & \longrightarrow & V \\ v & \longmapsto & v(y) \end{array}$$

Elle est évidemment surjective. Montrons qu'elle est injective. Si $v(y) = 0$, alors pour tout $x \in V$, $v(x) = 0$ car v est un polynôme en u. Et v coïncide avec l'application nulle sur une base de V donc $v = 0$. □

Polynôme annulateur et similitude

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_3 = 0$ et $A \neq -I_3$. Montrer que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Remarquer que $P = X^3 + X^2 + X^1 + 1 = (X+1)(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de A. Donc le spectre de A est inclus dans $\{-1, i, -i\}$. Or, A est de taille 3 et réelle donc admet une valeur propre réelle, qui est nécessairement -1. Puis utiliser le lemme des noyaux et remarquer que $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ ne peut pas être de dimension 3 comme $A = -I_3$, donc $\mathrm{Ker}(A^2 + I_3)$ est de dimension 2. Et on prouve ensuite que la partie correspond à cet espace est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

△ Polynôme annulateur et rang

Montrer que toute matrice de rang r admet un polynôme annulateur de degré $r + 1$.

Démonstration. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice de rang r et χ le polynôme annulateur de l'induit de u sur son image. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et puisque le rang de la matrice est r, χ est de degré r. Puis :

$$\forall x,\ [\chi \times X](u)(x) = \chi(u(x)) = 0$$

car $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $X\chi$, qui est de degré $r + 1$, est un polynôme annulateur de u, et donc de la matrice. □

⋆ Réduction des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit p un nombre premier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

1. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A^p = A$.
2. Démontrer qu'il existe une matrice non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
3. Démontrer qu'il existe une matrice non trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

6.3.7 Sous-espaces caractéristiques

⋆ Multiplicité dans le polynôme minimal

Soit λ une valeur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note p la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de A, noté π_A. Montrer que

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}((A - \lambda I_n)^p) \oplus \mathrm{Im}((A - \lambda I_n)^p)$$

Démonstration. On pose :

$$P = \frac{\pi_A}{(X - \lambda)^p}$$

Par conséquent, on a $P \wedge (X - \lambda)^p = 1$. Comme π_A est annulateur de A, le lemme des noyaux fournit :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}((A - \lambda I_n)^p) \oplus \mathrm{Ker}(P(A))$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(P(A)) = \mathrm{Im}((A - \lambda I_n)^p)$. Or :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ P(A) \times (A - \lambda I_n)^p X = \pi_A(A) X = 0 \times X = 0$$

On a donc l'égalité ensembliste par inclusion (par ce qui précède) et par égalité de dimensions (grâce au théorème du rang et à l'égalité fournie par le lemme des noyaux). On a donc bien :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}((A - \lambda I_n)^p) \oplus \mathrm{Im}((A - \lambda I_n)^p)$$

□

△ Décomposition de Dunford

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé.

1. Montrer l'existence d'un couple (d, n) d'endomorphismes de E, avec d diagonalisable, n nilpotent et $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
2. Considérons un tel couple (d, n). Soit λ une valeur propre de F_λ le sous-espace caractéristique associé.
   - Vérifier que u, d et n stabilisent F_λ. On note u_λ, d_λ et n_λ les endomorphismes qu'ils induisent.
   - Montrer que $d_\lambda - \lambda \mathrm{Id}_{F_\lambda}$ est nilpotent et en déduire que $d_\lambda = \lambda \mathrm{Id}_{F_\lambda}$.
   - Montrer l'unicité de (d, n).

Démonstration. A connaitre absolument ! Sert dans un nombre incalculable d'exercices.

1. Utiliser la décomposition en sous-espaces caractéristiques et raisonner matriciellement. On a des blocs diagonaux qui commutent donc par blocs cela commute.
2.
   - C'est du cours que u le stabilise. d aussi en diagonalisant (à vérifier, je ne suis plus sûr). Et par différence, n aussi.
   - C'est $-n_\lambda$ qui est aussi nilpotent. Et $d_\lambda - \lambda \mathrm{Id}_{F_\lambda}$ est aussi diagonalisable. Et le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul.
   - On a donc montré que d est déterminé de manière unique par u. Donc, par différence, n est aussi déterminé de manière unique par u. Donc (d, n) est unique.

□

$\Delta\star$ Décomposition de Jordan

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et u un endomorphisme de E.

1. On suppose u nilpotent, d'indice de nilpotence p.
   - Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ soit libre. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ est stable par u. Donner la matrice M_p, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme induit par u sur F.
   - Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x)) \neq 0$. Montrer que
   $$G = \bigcap_{k=0}^{p-1} \mathrm{Ker}(\varphi \circ u^k)$$
   est stable par u et que $F \oplus G = E$.
   - Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme M_r.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs de la forme $\lambda I_r + M_r$. C'est ce qu'on appelle la forme de Jordan (elle est unique à permutations des blocs diagonaux près).
3. Application : montrer que toute matrice carrée complexe est semblable à sa transposée.

Démonstration. A connaître absolument !

1.
   - Prendre un vecteur tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$ (possible car p est l'indice de nilpotence). La famille est alors libre (classique, appliquer u^{p-1} à une relation de liaison, puis u^{p-1}, etc.). Vérifier que tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ s'envoient sur le suivant, sauf le dernier qui s'envoie sur 0. On a alors :
   $$M_p = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   - Prendre la base duale de $\mathcal{B}$ et le dernier vecteur de cette base duale. Idem, vérifier que chaque noyau s'envoie sur le suivant sauf le dernier. Montrer que la somme $F + G$ est directe, ce qui s'obtient facilement par définition de F et G. Il est claire que les $\varphi \circ u^k$

sont non nulles (considérer $u^{p-1-k}(x)$), donc G est l'intersection de p hyperplans donc est de dimension supérieure à $n-p$. Donc on a égalité des dimensions et on a bien la supplémentarité (pas besoin d'utiliser l'indépendance des formes linéaires commes ces racistes de MP*2).

- Procéder par récurrence en se plaçant sur l'induit de u sur G. La récurrence se termine nécessairement.

2. Utiliser la décomposition en sous-espaces caractéristiques pour avoir diagonalisable plus nilpotent, puis appliquer la première question au nilpotent.
3. Considérer la forme de Jordan. Ensuite, tout revient à montrer qu'une matrice M_p est semblable à sa transposée. Cela est le cas car cela correspond à un échange des vecteurs de la base.

□

⋆⋆ Décomposition de Jordan-Dunford multiplicative

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{GL}(E)$. Supposons χ_f scindé. Montrer qu'il existe un unique couple $(d,u) \in \mathcal{GL}(E)^2$ tel que :

- d est diagonalisable ;
- u est unipotent, *ie* il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(u-\mathrm{id})^m = 0$;
- $f = d \circ u = u \circ d$.

Montrer de plus que d et u sont des polynômes en f.

Existence. On écrit la décomposition de E en sous-espaces caractéristiques de f :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_{\lambda_i}$$

On note π_i la projection sur F_{λ_i} parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On pose alors

$$d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \pi_i$$

d est inversible, il suffit de considérer une base de trigonalisation associées à la décomposition en sous-espaces caractéristiques, et on voit alors que d est aussi diagonalisable. On pose ensuite :

$$u = d^{-1} \circ f$$

u est unipotente car dans cette base, sa matrice est triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur la diagonale. Puisque les π_i sont des polynômes en f, d l'est aussi. Comme $\mathbb{K}[d]$ est une algèbre et d est inversible, $d^{-1} \in \mathbb{K}[d]$ donc *a fortiori* $d^{-1} \in \mathbb{K}[f]$, et ainsi u est un polynôme en f. Par conséquent, u et d commutent et par construction $f = d \circ u$. □

Unicité. On considère un couple (d_1, u_1) qui vérifie les mêmes hypothèses. Alors u, u_1, d et d_1 commutent tous entre eux car ce sont des polynômes en f. On pose alors $g = u_1^{-1}u = d_1 d^{-1}$. g est alors diagonalisable car d_1 et d^{-1} sont codiagonalisables car commutent. Puis, u et u_1^{-1}

sont cotrigonalisables donc g est trigonalisable et ses valeurs propres sont les produits des valeurs propres de u et u_1^{-1}, donc 1. Donc g est unipotente. Comme le seul endomorphisme unipotent et diagonalisable est id (car $g - \mathrm{id}$ est nilpotent est diagonalisable donc nul), on en déduit que $g = \mathrm{id}$ donc $u = u_1$ et $d = d_1$. □

6.3.8 Coréduction

△ Vrai ou faux de coréduction

Vrai ou faux ?

- Deux endomorphismes diagonalisables sont codiagonalisables si, et seulement s'ils commutent.
- Deux endomorphismes trigonalisables sont cotrigonalisables si, et seulement s'ils commutent.

Démonstration.

- Vrai. Le sens réciproque est démontré dans la partie astuces. Pour le sens direct, codiagonaliser et vérifier la commutation sur les sous-espaces de la décomposition.
- Faux. Le sens réciproque est vrai et est démontré dans la partie astuces. Mais le sens direct est faux, car deux matrices triangulaires ne commutent pas nécessairement. On pourra prendre par exemple
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

⋆ $M \mapsto AM - MB$

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ un couple de matrices diagonalisables. Montrer que $\varphi : M \mapsto AM - MB$ est diagonalisable. Même question en remplaçant "diagonalisable(s)" par "trigonalisable(s)".

Démonstration. On pose $\varphi_A : M \mapsto AM$ et $\varphi_B : M \mapsto MB$. On vérifie par récurrence (en mettant à part le cas $k = 0$) que
$$\varphi_A^k = \varphi_(A^k)$$
Par linéarité, on en déduit que
$$\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$$
Or, A est annulée par un polynôme scindé à racines simples (car diagonalisable) et alors, comme $\varphi_0 = 0$, φ_A est aussi annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc est diagonalisable. De même pour B. Or, on voit que φ_A et φ_B par associativité du produit matriciel. Par conséquent, φ_A et φ_B sont codiagonalisables, donc $\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ est diagonalisable. Pour trigonalisable, il suffit de remplacer dans ce qui précède "diagonalisable" par "trigonalisable" et "scindé à racines simples" par scindé. □

Une CS de cotrigonalisabilité

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

Démonstration. On suppose B non nulle sinon cela n'a pas beaucoup d'intérêt. Alors $\mathrm{Im}(B)$ est stable par B donc il existe un vecteur propre de B dans $\mathrm{Im}(B)$ car $\mathrm{Im}(B)$ n'est pas l'espace nul. L'hypothèse $AB = 0$ fournit alors qu'un tel vecteur propre est aussi vecteur propre de A associé à la valeur propre 0. On a donc un vecteur propre commun à A et B. Puis récurrence comme d'habitude. □

Un exemple de cotrigonalisation

Soit E de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ ainsi que u, v et w trois endomorphismes de E vérifiant :

$$\begin{cases} uv - vu = w \\ uw = wu \\ vw = wv \end{cases}$$

1. Montrer que w est nilpotent.
2. Montrer que u, v et w ont un vecteur propre commun.
3. En déduire qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

△ Crochet de Lie et cotrigonalisation

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $AB - BA = \lambda A + \mu B$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On cherche à démontrer que A et B sont cotrigonalisables.

1. Traiter le cas $\lambda = \mu = 0$.
2. Lorsque $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, montrer que l'on peut se ramener au cas où $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, ce que l'on supposera dans la suite.
3. Montrer que A est nilpotente et que B stabilise un sous-espace vectoriel non trivial stable par A.
4. Conclure.

Démonstration.

1. Si $\lambda = \mu = 0$, A et B commutent donc sont cotrigonalisables (*cf* démonstration dans la partie astuces).
2. Sans perte de généralité, quitte à multiplier $AB - BA$ par -1 (ce qui revient à échanger les rôles de A et B mais ne change pas la non nullité du couple de scalaires), on peut supposer $\lambda \neq 0$. Puis, sans perte de généralité, quitte à prendre $\tilde{A} = \lambda A$, $\tilde{B} = \frac{1}{\lambda} B$, $\tilde{\mu} = \lambda\mu$ et $\tilde{\lambda} = 1$, on peut supposer $\lambda = 1$. Enfin, sans perte de généralité, quitte à prendre $\tilde{A} = A + \mu B$ et $\tilde{\mu} = 0$, on peut supposer $\mu = 0$. En effet, toutes les opérations précédentes n'influent pas sur la cotrigonalisabilité.

3. On suppose donc désormais $(\lambda, \mu) = (1, 0)$. On note :

$$f_B : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

   On constate alors que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_B(A^{k+1}) &= A^{k+1}B - BA^{k+1} \\ &= A(A^kB - BA^k) + (AB - BA)A^k \\ &= Af_B(A^k) + A^{k+1} \end{aligned}$$

   On en déduit par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f_B(A^k) = kA^k$$

   Or, on est en dimension finie, donc f_B ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres. Par conséquent, A^k est nulle au-delà d'un certain k. Donc A est nilpotente. On peut supposer A non nulle et $n \geqslant 2$, sinon le résultat est immédiat. Alors, le noyau de A est stable par B car $AB = BA + A$. Comme A est non nulle et nilpotente, le sous-espace $\mathrm{Ker}(A)$ convient.

4. On a donc une valeur propre commune sur ce sous-espace. puis récurrence comme d'habitude, en le faisant matriciellement et en termes d'endomorphismes en même temps pour éviter de se trimbaler des projections sur des hyperplans.

□

Remarque. On appelle crochet de Lie la quantité :

$$[A, B] = AB - BA$$

On peut munir des espaces d'une telle opération pour obtenir la structure d'algèbre de Lie.

⋆ Une égalité de traces

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA$, $A^n = B^n = I_n$ et $\mathrm{Tr}(AB) = n$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Démonstration. On les cotrigonalise dans $\mathbb{C}$. On note $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ leurs valeurs propres comptées avec multiplicité. L'hypothèse $A^n = B^n = I_n$ montre que les a_i et les b_i sont des racines n-èmes de l'unité. Par conséquent, les a_ib_i sont des complexes de module 1. On en déduit que

$$|\mathrm{Tr}(AB)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_ib_i| = n$$

Le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire fournit que tous les a_ib_i sont colinéaires. Et comme tous les a_ib_i sont de module 1, ils sont tous égaux car si deux sont opposés, la somme ne peut pas faire n. Et comme ils sont tous égaux, ils valent tous 1. Donc $b_i = \overline{a_i}$. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(B) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$$

Or, $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{R}$ puisque A est réelle. Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A)$$

□

⋆ ENS

1. Déterminer une famille libre d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux et de cardinal $1 + \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor$.
2. Montrer qu'une famille commutative d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.
3. Montrer que le cardinal d'une famille libre d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant deux à deux est majoré par $1 + \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor$.

⋆ ENS

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit A et H des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(V)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (M,N) \in A^2,\ MN - NM \in A \\ \forall X \in H,\ \forall M \in A,\ XM - MX \in H \end{cases}$$

1. Soit v un vecteur propre commun à tous les éléments de H. Montrer :

   $$\forall X \in H,\ \forall M \in A,\ v \in \mathrm{Ker}(XM - MX)$$

   Indication : considérer $W = \mathrm{Vect}\left\{M^k v \ \mid\ k \in \mathbb{N}\right\}$ et regarder a matrice d'un élément de H dans une bonne base de W.
2. On suppose que H est un hyperplan de A. Soit F un espace propre commun à tous les éléments de H. Montrer que F est un espace propre commun à tous les éléments de A.

Chapitre 7

Topologie des espaces vectoriels normés

Table des matières

7.1 Points méthode

Montrer une divergence

Pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit de montrer que la suite considérée possède au moins deux valeurs d'adhérence.

Montrer la convergence par une série télescopique

Pour montrer la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut penser à étudier éventuellement la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$.

Montrer une non domination de normes

Dans la pratique, pour montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2, on cherche souvent une suite qui, au choix :

- tend vers 0 pour N_2 mais pas pour N_1 ;
- est bornée pour N_2 mais qui ne l'est pas pour N_1.

Choix de la norme dans $\mathbb{K}^n$

Dans $\mathbb{K}^n$, on se demandera régulièrement quelle norme parmi la norme 1, la norme 2 et la norme infinie, est la plus adaptée à la situation.

Comparaison de normes

Comparer des normes N_1 et N_2 signifie déterminer si N_1 (respectivement N_2) est dominée par N_2 (respectivement N_1).

7.2 Astuces

Matrices utiles pour la conjugaison (important !)

Pour travailler sur les classes de conjugaison de matrices, il peut être utile de conjuguer par la matrice

$$Q_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

On conservera cette notation pour la suite. Notamment, si notre matrice est trigonalisable, cela est très pratique.

Application. Une matrice est nilpotente ssi la matrice nulle adhère à sa classe de similitude

Application. La classe de similitude d'une matrice diagonalisable est fermée.

Adhérence d'un SEV

L'adhérence d'un sev est un sev. Passer par une caractérisation séquentielle pour la partie linéarité.

Application. Un hyperplan est fermé ou dense : son adhérence est un sev donc est soit lui-même (fermé), soit égale à l'espace entier (dense).

Utilisation de l'équivalence des normes

Que ce soit sur les matrices, des endomorphismes d'un espace de dimension finie ou encore un $\mathbb{K}_n[X]$, penser à utiliser l'équivalence des normes pour choisir une norme pratique au vu de la situation.

Norme subordonnée à la norme 1

On note N la norme matricielle subordonnée à la norme 1. Alors :

$$N(M) = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}| \right)$$

On obtient l'inégalité assez facilement et il faut considérer un vecteur particulier pour l'égalité.

Application. Cette norme est sous-multiplicative et est liée directement aux coefficients de la matrice : si tous les coefficients sont majorés par ε en valeur absolue, alors la norme est majorée par $n\varepsilon$. C'est donc la norme à utiliser avec les matrices Q_ε.

7.3 Exercices classiques

7.3.1 Normes

Δ Norme de Frobenius

Montrer que $\|\cdot\| : A \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$$

Démonstration. Pour montrer que c'est une norme, on peut remarquer que c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour montrer la sous-multiplicativité, utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Remarque. Cette norme est appelée **norme de Frobenius**. On a la même sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec

$$A \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\overline{A}^T A\right)}$$

Impossible que la norme soit multiplicative

Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ \|AB\| = \|A\|\|B\|$$

Démonstration. Si $n = 1$, la réponse est oui, c'est le module. Mais dès que $n \geqslant 2$, cela n'est plus possible car il existe des matrices non nulles dont le produit est nul (prendre les matrices élémentaires $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$). $\square$

Comparaison de normes sur les polynômes

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les normes suivantes :

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_{-1}^{1} |P| \ ; \ \mathcal{N}_\infty(P) = \sup_{[-1,1]} |P| \ ; \ \|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ et } \|P\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

où $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

1. Comparer $\mathcal{N}_\infty$ et $\|\cdot\|_\infty$.
2. Comparer $\mathcal{N}_1$ et $\|\cdot\|_1$.

Démonstration. 1. • $\|\cdot\|_\infty$ ne domine pas $\mathcal{N}_\infty$. Il suffit de considérer

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$$

On a : $\mathcal{N}_\infty(P_n) \geqslant n = P(1)$ et $\|P_n\|_\infty = 1$

• $\mathcal{N}_\infty$ ne domine pas $\|\cdot\|_\infty$. il suffit de considérer

$$P_n = (1 - X^2)^n$$

On a : $\mathcal{N}_\infty(P_n) = 1$ mais $\|P_n\|_\infty \geqslant \binom{n}{1} = n$.

2. • $\mathcal{N}_1$ ne domine pas $\|\cdot\|_1$. Il suffit de considérer

$$P_n = X^n$$

On a : $\mathcal{N}_1(P_n) = \dfrac{2}{n+1} \to 0$ mais pourtant $\|P_n\|_1 = 1$.

• $\|\cdot\|_1$ domine $\mathcal{N}_1$. En effet, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |P(t)| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||t| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \\ &= \|P\|_1 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{N}_1(P) \leqslant 2\|P\|_1$, si bien que $\|\cdot\|_1$ domine $\mathcal{N}_1$.

$\square$

Caractérisation de l'égalité de normes par les sphères et les boules

Montrer que deux normes sur un même espace vectoriel E sont égales si, et seulement si, elles définissent la même sphère unité dans E. Même question avec la boule unité fermée, puis la boule unité ouvert, puis les sphères, boules fermée et ouvert de n'importe quel rayon.

Démonstration. Raisonner par homogénéité. □

7.3.2 Convexité

△ Stricte convexité de la boule unité

Soit E un espace vectoriel normé.

1. La boule unité fermée B est-elle strictement convexe, c'est-à-dire vérifie-t-elle pour tout $(x, y) \in B^2$ tel que $x \neq y$:

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \ \ \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1$$

2. Vérifier que la boule unité fermée est strictement convexe si la norme est euclidienne.

Démonstration. 1. Considérer la norme 1.

2. Raisonner par contraposée en utilisant le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

□

Convexes denses de $\mathbb{R}^d$

Déterminer les parties convexes denses de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. La réponse est $\mathbb{R}^d$. On peut raisonner par récurrence sur d. On peut ainsi passer par des hyperplans médiateurs et utiliser la convexité. Sinon, avec un dessin et avec les mains, on peut trianguler le point de $\mathbb{R}^d$ dont on veut montrer qu'il est dans l'ensemble puis utiliser la convexité. □

Convexité de l'adhérence et l'intérieur d'un convexe

Soit A un convexe.

1. Montrer que l'adhérence $\overline{A}$ de A est convexe.
2. Montrer que l'intérieur $\mathring{A}$ de A est convexe.
3. $\star$ Montrer que si a est adhérent à A et b intérieur à A, alors tous les points du segment $[a, b]$ différents de a sont intérieurs à A.
4. Montrer que $\mathring{\overline{A}} = \mathring{A}$. A quelle condition a-t-on $\overline{\mathring{A}} = \overline{A}$?

Démonstration. Faire des dessins !

1. Le faire par caractérisation séquentielle.

2. Prendre des petites boules autour de a et b et faire un couloir de boules autour du segment $[a, b]$.
3. Cette question est la plus difficile de l'exercice. Si $a \in A$, dessiner le cône qui joint a à une petite boule autour de b. Mettre une petite boule de rayon $r_c = tr_b$ où $c = (1-t)a + tb$. Si $a \notin A$, prendre $\tilde{a} = a + u$ qui est dans A avec $\|u\| \leqslant t \times r_b$ et essayer de faire pareil en prenant un $\tilde{c}$ et un cône, de sorte que c et $\tilde{c}$ soient proches.
4. Par croissance de l'intérieur, on a $\mathring{A} \subset \mathring{\overline{A}}$. Réciproquement, on suppose $\mathring{A}$ non vide et on prend $a \in \mathring{\overline{A}}$ et une boule autour de a dans $\overline{A}$. Ensuite, on montrer que la boule de rayon moitié est dans A en prenant des barycentres de $\tilde{a} \in \mathring{A}$ et $x \in \overline{A}$.

□

Δ⋆ Théorème de Gauss-Lucas

Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe de P lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$.

Démonstration. Scinder P sur $\mathbb{C}[X]$ et utiliser la formule de P'/P. Prendre ensuite une racine de P' non racine de P, la mettre dans la formule précédente et utiliser la formule de l'inverse d'un nombre complexe en fonction de son conjugué et de son module carré. Passer au conjugué. Éclater pour obtenir une combinaison convexe des racines de P, et vérifier que c'est bien un barycentre à coefficients positifs. □

7.3.3 Topologie

Δ Les hyperplans sont fermés ou denses

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé E. Montrer que H est fermé dans E ou dense dans E.

Démonstration. Utiliser l fait que l'adhérence d'un SEV est un SEV. Par croissance de l'adhérence, $\overline{H}$ est un SEV coincé entre H et E, donc c'est soit H, soit E, donc H est soit fermé dans E, soit dense dans E. □

$\mathbb{Z}$ est fermé

Montrer que $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle.

Démonstration. Voici trois méthodes différentes :

- voir $\mathbb{Z}$ comme le complémentaire de
$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$$
qui est ouvert comme union d'ouverts ;
- passer par une caractérisation séquentielle en utilisant le fait qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire ;

- voir $\mathbb{Z}$ comme l'image réciproque de $\{0\}$ par $x \mapsto \sin(\pi x)$ qui est continue.

$\square$

Parties discrètes

1. Soit $a > 0$ et A une partie d'un espace métrique E telle que

$$\forall (x, y) \in A,\ x \neq y \implies d(x, y) \geqslant a$$

Montrer que A est fermée.

2. Une partie discrète de E (*ie* une partie A de E telle qu'aucun point $a \in A$ ne soit adhérent à $A \setminus \{a\}$) est-elle fermée ?

Démonstration. 1. Passer par une caractérisation séquentielle. Une suite à valeur dans cet ensemble admettant une limite est nécessairement stationnaire donc la limite est dans A.

2. Considérer

$$\left\{ \frac{1}{2^n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

Cet ensemble est discret et 0 lui adhère mais ne lui appartient pas, donc cette partie n'est pas fermée.

$\square$

⋆ Adhérence et intérieur des suites presque nulles et stationnaires

Soit E l'espace vectoriel des suites complexes bornées muni de la norme N_∞. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble PN des suites presque nulles et de l'ensemble des suites stationnaires S.

Démonstration. PN et S sont des SEV stricts donc leur intérieur est vide (classique).

- On montre par double inclusion que l'adhérence de PN est C_0, l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Si (v_n) tend vers 0, on prend des suites qui ont les mêmes premiers termes puis qui sont stationnaires nulles. Réciproquement, il suffit de montrer que C_0 est fermé. C'est le noyau d'une forme linéaire continue (l'application limite qui est majorée par la norme infinie), puis on utilise un argument de double limite.
- On montre par double inclusion que l'adhérence de S est l'ensemble C des suites convergentes. On peut faire pareil dans le premier sens. Puis on montre encore par double limite que C est fermé.

$\square$

⋆ Familles libres à deux éléments

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'ensemble des couples (u, v) de vecteurs linéairement indépendants est un ouvert de E^2.

Démonstration. On montre par caractérisation séquentielle que son complémentaire F l'ensemble des couples de vecteurs liés est un fermé. Sans perte de généralité, on suppose $v_n \neq 0$ APCR puis on écrit $u_n + \lambda_n v_n = 0$ et alors $|\lambda_n|$ est bornée. On extrait et OK par unicité de la limite. □

Intersection finie d'ouverts denses

Une intersection finie d'ouverts denses est un ouvert dense.

Démonstration. Procéder par récurrence, il suffit donc de prouver que c'est le cas pour deux. On utilise la densité du premier pour obtenir une première intersection, puis appliquer la densité du second avec cette première intersection. □

Δ Sous-groupes de $\mathbb{R}$: à connaître !

Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain réel positif a.

Démonstration. Voir la preuve dans les exercices classique du chapitre d'algèbre générale. □

7.3.4 Suites, séries vectorielles

Δ⋆ Normes faisant converger (X^k) vers n'importe quel polynôme

Il existe des normes sur $\mathbb{R}[X]$ qui font converger la suite $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers n'importe quel polynôme.

Démonstration. Si on prend une base (Y_k), la norme

$$N\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Y_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k}$$

fait converger la suite (Y_k) vers 0. Et si on prend un polynôme P non nul, la famille $(Z_k) = (X^0, \ldots, X^{\deg(P)-1}, P, X^{\deg(P)+1}, \ldots)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Alors, la norme

$$N\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k Z_k\right) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq\deg(P)}}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k}$$

fait converger (X^k) vers P. □

Δ Algèbre normée de dimension finie et unités

Si $N(a) < 1$ (avec N une norme sous-multiplicative), alors $1 - a \in \mathcal{U}(A)$, d'inverse la somme de série des a^n

Démonstration. La série des a^n est absolument convergente donc convergente en dimension finie. On vérifie que c'est bien l'inverse par continuité du produit (bilinéarité en dimension finie). □

Application. L'ensemble des unités d'un telle algèbre est un ouvert : en effet, si $a \in \mathcal{U}(a)$, remarquer que $a + h = a(1 - (-a^{-1}h))$ et prendre h pour rentrer dans les hypothèses de norme strictement plus petite que 1.

Ouvert contenant les valeurs d'adhérence

Soit u une suite complexe bornée dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est noté A. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ incluant A. Montrer que $u_n \in U$ à partir d'un certain rang.

Démonstration. Raisonner par l'absurde et construire une nouvelle valeur d'adhérence qui n'est pas dans U. □

Valeurs d'adhérence d'une suite qui ralentit

Soit u une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle fermé.

Démonstration. Pour le caractère fermé, voir l'exercice suivant. Pour le caractère d'intervalle, revenir à la définition et utiliser le fait que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. □

Valeurs d'adhérence

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est

$$\mathrm{Adh}(u) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p | p \geqslant n\}}$$

C'est donc un fermé comme intersection de fermés.

Démonstration. C'est une simple réécriture de la définition des valeurs d'adhérence. □

Δ Suite réelle qui tend vers $+\infty$ en ralentissant

Soit (u_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$ et telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tende vers 0. Montrer que l'ensemble

$$\{u_p - u_q | (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Revenir à la définition. Par symétrie, il suffit de prouver le résultat sur $\mathbb{R}_+$. Ensuite, revenir à la définition et utiliser le fait que la suite doit avancer, mais doit aussi ralentir. □

Application. En particulier, cela fonctionne avec $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

7.3.5 Topologie et matrices

Ici, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on ne précisera pas la norme utilise par équivalence des normes en dimension finie.

Topologie des matrices nilpotentes

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. L'ensemble des matrices nilpotentes est-il un ouvert ? un fermé ?
2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des matrices nilpotentes d'indice $p \in [\![1, n]\!]$ donné.
3. $\star$ Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes d'indice n est un ouvert relatif de l'ensemble des matrices nilpotentes.
4. $\star$ Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices nilpotentes de rang r, pour n'importe quel $r \in [\![0, n-1]\!]$?

Démonstration. Les deux dernières questions sont plus difficiles. A faire... □

Δ Classes de similitude et matrices diagonalisables

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $S(A)$ la classe de similitude de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A diagonalisable. Caractériser $S(A)$ à l'aide du polynôme caractéristique et du polynôme minimal de A. En déduire qu'il est fermé.
2. $\star$ Montrer que si A n'est pas diagonalisable, il existe une matrice diagonalisable dans l'adhérence de $S(A)$.
3. Qu'en déduire ?

Démonstration.

1. On doit avoir $\pi_A = \pi_B$ et $\chi_A = \chi_B$. Utiliser ensuite la continuité de l'évaluation et du polynôme caractéristique.
2. On trigonalise A et il doit alors y avoir un coefficient non diagonal non nul. On utiliser alors les matrices Q_ε (voir la partie astuces) pour montrer qu'il existe une matrice diagonale dans l'adhérence classe de similitude.
3. On en déduit que la classe de similitude d'une matrice est fermée si, et seulement si, la matrice est diagonalisable.

□

$\star$ Caractérisation des suites des puissances bornées

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont simultanément réunies :

- Toute valeur propre de A est de module inférieur à 1.
- On a $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \lambda I_n)$ pour toute valeur propre λ de A de module 1.

Démonstration. On prend une norme sous-multiplicative pour le sens direct, puis on prend $Y \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda I_n)$. On écrit $Y = (A - \lambda I_n)X$. On montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k X = k\lambda^{k-1}Y + \lambda^k X$$

Puisque $(A^k X)$ doit être bornée donc on doit avoir $Y = 0$. La somme est directe puis le théorème du rang conclut. Réciproquement, on travaille matriciellement en construisant une base tel que la matrice de u l'endomorphisme canoniquement associé à A soit dans cette base diagonale par blocs avec des blocs scalaires et un blocs avec toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à A puis le résultat suit. ☐

$\Delta\star$ Nilpotence et classe de similitude

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est adhérente à la classe de similitude de A.

Démonstration. Dans le sens direct, trigonaliser pour obtenir une matrice triangulaire supérieure stricte puis utiliser les matrices Q_ε pour montrer que 0 adhère à la classe de similitude. Dans le sens réciproque, utiliser la continuité du polynôme caractéristique et le fait que le polynôme caractéristique est constant sur la classe de similitude. ☐

Intérieur et adhérence en fonction du rang

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, trouver l'intérieur et l'adhérence de :

1. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$;
2. l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à $p \in [\![0, n-1]\!]$;
3. l'ensemble des matrices de rang $p[\![0, n-1]\!]$.

Démonstration. A faire...

1. L'adhérence est $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout entier.

☐

Chapitre 8

Topologie et continuité

Table des matières

8.1 Points méthode

Continuité d'une fonction de plusieurs variables

La continuité d'une fonction de plusieurs variables ne se ramène **JAMAIS** uniquement à la continuité de fonctions d'une variable. On essaye alors d'utiliser les théorèmes généraux, et on effectue des majorations pour les prolongements par continuité.

Utilisation de la lipschitzianité

Pour montrer qu'une application est continue, on commence souvent par regarder si elle est lipschitzienne car si c'est le cas, c'est en général la manière la plus rapide de justifier la continuité.

Prouver une non continuité

Pour prouver qu'une application linéaire n'est pas continue, on peut prouver qu'elle n'est pas continue en 0. Comme $u(0) = 0$ par linéarité, il suffit d'exhiber une suite (x_n) tendant vers 0 mais telle que la suite $(u(x_n))$ ne tende pas vers 0. Sinon, on peut chercher une suite (x_n) telle que $(u(x_n))$ ne soit pas bornée.

Calcul d'une norme subordonnée

Pour montrer que la norme subordonnée de u vaut C, on commence généralement par montrer que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$, puis :

- si l'on y arrive, on exhiber un vecteur x non nul vérifiant $\|u(x)\| = C\|x\|$;
- sinon, on cherche une suite (x_n) de vecteurs non nuls telle que $\dfrac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \to C$.

8.2 Astuces

Exploitation de la propriété de continuité

Pour exploiter la propriété de continuité $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta,\ \ldots$, il peut être utile de prendre $\varepsilon = 1$ (voire 12).

Continuité du passage à l'inverse matriciel

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

est continue lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Démonstration. Utiliser la formule de la comatrice. La comatrice et le déterminant sont continus car polynomiaux. □

8.3 Exercices classiques

8.3.1 Fonctions d'une variable réelle

Fonction continue qui tend vers $+\infty$ en valeur absolue

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f|$ tende vers $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou f tend vers ∞ en $+\infty$. Et sans l'hypothèse de continuité ?

Démonstration. Utiliser la continuité et faire un dessin. Sans continuité, on peut construire un contre exemple facilement. ☐

⋆ La commutation donne un point fixe commun

Soit f et g deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les graphes de f et g se coupent.

Démonstration. On raisonne par l'absurde et, quitte à échanger f et g, d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) \geqslant f(x) + m$$

Par récurrence et grâce à la commutation, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ g^n(x) \geqslant f^n(x) + nm$$

(au sens de la composition itérée). Par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g^n(1) \geqslant nm$$

C'est absurde car le premier terme appartient toujours à $[0,1]$ et le deuxième diverge vers $+\infty$. ☐

△ Antécédents d'une fonction continue surjective

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que $f^{-1}(\{a\})$ est infini pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $f - a$, ce qui ne change par le résultat, on peut suppose $a = 0$. En raisonnant par l'absurde, si l'ensemble des zéros de f était fini, f serait de signe constant à partir d'un certain seuil, et ne pourrait donc pas être surjective car elle serait bornée avant d'après le théorème des bornes atteintes. C'est absurde. ☐

8.3.2 Continuité globale

Une continuité en deux variables qui se ramène à une continuité en une seule ? ? ?

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose $f(a,\cdot)$ et $f(\cdot,b)$ continues et monotones pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Faire un grand dessin. On prend r_0 pour la continuité en (a,b), r_1 pour la continuité de $f(\cdot,b)$ et r_2 pour celle de $f(a,\cdot)$ et le minimum de r_0, r_1 et r_2 convient par monotonies. ☐

Continuité du maximum et du minimum en plusieurs variables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les fonctions :

$$m : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \min(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{et} \quad M : (x_1,\ldots,x_n) \mapsto \max(x_1,\ldots,x_n)$$

sont continues.

Démonstration. On montre aisément que le minimum et le maximum sont associatifs au sens suivant :

$$\begin{cases} \min(x_0, x_1, \dots, x_n) = \min\left[x_0, \min(x_1, \dots, x_n)\right] \\ \max(x_0, x_1, \dots, x_n) = \max\left[x_0, \max(x_1, \dots, x_n)\right] \end{cases}$$

Par une récurrence immédiate, il suffit simplement de montrer la continuité des application :

$$\min : (x, y) \mapsto \min(x, y) \quad \text{et} \quad \max : (x, y) \mapsto \max(x, y)$$

Or, on sait que

$$\min(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|y-x|}{2} \quad \text{et} \quad \max(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|y-x|}{2}$$

On déduit de ces deux expressions que ces fonctions sont continues (caractère polynomial et composition avec la valeur absolue), ce qui conclut. □

Δ Prolongement continu en une fonction de deux variables

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. On note $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que la fonction :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \Delta & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \end{array}$$

est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Dans le sens direct, un tel prolongement est nécessairement un prolongement par la dérivée (en prenant une continuité partielle). puis la continuité selon Δ fournit la continuité de la dérivée. Dans le sens réciproque, considérer le seul prolongement possible, *ie* celui par la dérivée sur Δ. Utiliser ensuite l'**inégalité des accroissements finis** (la TAF est faux dans $\mathbb{C}$) pour prouver que ce prolongement est bien continu selon $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ (et il est continu selon Δ car f est de classe $\mathcal{C}^1$). On pourra utiliser le fait que

$$F(x, y) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))\, dt$$

Cela permet de condenser les deux informations en une seule fonction (cette astuce est utile dans le chapitre Intégrales à paramètres). □

Δ Uniforme continuité des fonctions continues admettant une limite finie

Montrer que toute application continue sur $\mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$ est uniformément continue.

Démonstration. Faire un dessin pour essayer de comprendre ce qui suit ! Prendre $\varepsilon > 0$ et appliquer la définition des limites avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour obtenir A (pour $-\infty$) et B (pour $+\infty$). Sans perte de généralité, on peut supposer $B \geqslant A + 2$. Ensuite, on applique le théorème de Heine à la restriction de la fonction au segment $[A-1, B+1]$ et sans perte de généralité, quitte à diminuer δ, on suppose $0 < \delta \leqslant 1/2$. On vérifie alors qu'un tel δ convient : avant $A-1$, pas de problème par définition de A et avec l'inégalité triangulaire, idem après $B+1$; ensuite, au niveau de $A-1$ et $B+1$, OK car on a supposé $\delta \leqslant 1/2$; entre $A-1$ et $B+1$, OK par le théorème de Heine. Et il n'y a pas d'autre cas puisqu'on a imposé $B \geqslant A+2$. □

△ Uniforme continuité des fonctions continues périodiques

Montrer que toute application continue périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Démonstration. Appliquer le théorème de Heine sur $[0, 2T]$ puis par périodicité on se ramène x et y dans $[0, 2T]$ en ajoutant des multiples de T. □

⋆⋆ Continuité du passage à l'inverse

Soit E la partie de $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{N}_\infty)$ constitué des fonctions strictement croissantes vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto f^{-1}$ est continue sur E.
2. φ est-elle uniformément continue sur E ?

Démonstration. Exercice très difficile. Merci Pierre pour les travaux.

1. On se donne f et g dans E. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty(g^{-1} - f^{-1}) &= \sup_{x \in [0,1]} |g^{-1}(x) - f^{-1}(x)| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |t - f^{-1}(g(t))| \\ &= \mathcal{N}_\infty(\mathrm{Id} - f^{-1} \circ g)\end{aligned}$$

   Or, f^{-1} est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$, et prenons alors $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |x-y| \leqslant \delta \implies |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leqslant \varepsilon$$

   Soit $t \in [0,1]$. On pose $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Alors, si $\mathcal{N}_\infty(g-f) \leqslant \delta$, on en déduit que

$$|t - f^{-1}(g(t))| = |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leqslant \varepsilon$$

   Par conséquent,

$$\mathcal{N}_\infty(\mathrm{Id} - f^{-1} \circ g) \leqslant \varepsilon$$

   puisque f est bijective.

2. On va montrer que f n'est pas uniformément continue. On considère f et g affine par morceaux vérifiant les conditions et telles que $f(1/2) = \alpha$ et $g(1/2) = \beta$. Alors :

$$\mathcal{N}_\infty(f - g) = |\alpha - \beta|$$

Et on vérifie en calculant les inverses que

$$\mathcal{N}_\infty(f^{-1} - g^{-1}) = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

On considère alors les suites $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $\beta_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ ainsi que les fonctions définies comme f et g précédemment. Alors $|\alpha_n - \beta_n| \to 0$ mais pourtant

$$\frac{1}{2} - \frac{\beta_n}{2\alpha_n} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} \neq 0$$

Donc φ n'est pas uniformément continue par négation de la caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité (déjà pas très au programme).

□

Fonction en escalier sur des fermés

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit F_0 et F_1 deux fermés disjoints non vides. En utilisant les fonction $x \mapsto d(x, F_i)$, trouver une fonction continue égale à 1 sur F_1 et nulle sur F_0.
2. Soit $F_1, \ldots, F_n$ des fermés deux à deux disjoints. Montrer qu'il existe, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, une fonction f continue telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in F_i,\ f(x) = a_i$$

Démonstration. Remarquer qu'on a une sorte d'interpolation de Lagrange à mener.

1. La fonction
$$f : x \mapsto \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_0) + d(x, F_1)}$$
convient. Si on pose
$$U_0 = f^{-1}\left(]-\infty; 1/4[\right) \quad \text{et} \quad U_2 = f^{-1}\left(]3/4; +\infty[\right)$$
on vérifie sans peine que $F_0 \subset U_0$ et $F_1 \subset U_1$ et que U_0 et U_1 sont des ouverts comme images réciproques d'ouverts.
2. On cherche à généraliser ce qui précède. La fonction
$$f : x \mapsto \frac{\sum_{i=1}^n a_i \prod_{j \neq i} d(x, F_i)}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} d(x, F_i)}$$
convient de même.

□

8.3.3 Applications linéaires continues

△ La dérivation n'est pas continue sur $\mathcal{C}^\infty$

Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ pour laquelle la dérivation soit continue.

Démonstration. Raisonner par l'absurde et considérer alors une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall f,\ \|D(f)\| \leqslant C\|f\|$$

Mais on connaît de beaux vecteurs propres de la dérivation : les fonctions exponentielles. Si on considère

$$f : x \mapsto e^{(C+1)x}$$

alors $D(f) = (C+1)f$ et f n'est pas la fonction nulle donc on a une absurdité. □

Remarque. Lorsqu'on travaille avec la dérivation sur $\mathcal{C}^\infty$, bien se souvenir qu'on a énormément de vecteurs propres.

⋆ Homéomorphismes entre les suites convergentes et les suites convergeant vers 0

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes et $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ constitué des suites convergeant vers 0. On les munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Construire un homéomorphisme linéaire de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie linéaire bijective de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$. On pourra s'intéresser aux boules sur $\mathcal{C}$ de centre e et $-e$ et de rayon 1, pù e est la suite constante $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Exercice difficile. Merci Tim pour la correction.

1. Si (u_n) a pour limite l, on note $f((u_n))$ la suite (v_n) telle que $v_0 = l$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_{n-1} - l$$

   Alors f est évidemment linéaire et sa bijection réciproque est donnée par la fonction qui à (v_n) associe la suite $(u_n) = (v_n + v_0)$. Les deux applications linéaires sont continues car on montre aisément que leurs normes triples sont toutes les deux inférieures à 2.

2. Cette question n'a pas de rapport avec la précédente. Notons que l'intersection des deux boules fermées de l'énoncé est réduite à la suite nulle. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une telle isométrie φ linéaire bijective de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_0$. Alors, puisque c'est une isométrie :

$$\varphi\left(B_f(e,1)\right) = B_f(\varphi(e),1)$$

   et de même pour l'autre boule. On prend alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\varphi(e)_{n_0}| \leqslant \frac{1}{2}$$

On définit alors la suite u par $u_n = 0$ si $n \neq n_0$ et $u_{n_0} = \dfrac{1}{2}$. Alors :

$$\|u - \varphi(e)\| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \|u + \varphi(e)\| \leqslant 1$$

Donc

$$\{(0)\} \subsetneq \varphi\left(B_f(-e,1)\right) \cap \varphi\left(B_f(e,1)\right)$$

ce qui est absurde.

□

8.3.4 Normes subordonnées

△ Crochet de Lie égal à l'identité

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel normé $E \neq \{0\}$ tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Calculer $f \circ g^n - g^n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que f et g ne peuvent pas être simultanément continues.
2. Donner deux bonnes raisons de la non-existence d'un tel couple (f, g) lorsque E est de dimension finie.

Démonstration. A mettre en regard du DM sur l'étude de ce crochet de Lie.

1. On remarque que

$$f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f = (f \circ g^n - g^n \circ f) \circ g + g^n \circ \underbrace{(f \circ g - g \circ f)}_{=\mathrm{Id}_E}$$

ce qui permet de montrer par une récurrence immédiate que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$$

En raisonnant par l'absurde et en supposant f et g continues, si on note N la norme subordonnée, on obtient :

$$nN(g^{n-1}) \leqslant 2N(f)N(g)N(g^{n-1})$$

Donc $N(g^{n-1}) = 0$ APCR sinon $2N(f)N(g)$ exploserait. Et si on suppose $g^n = 0$ pour $n \geqslant 1$, alors la première relation obtenue nous donne $g^{n-1} = 0$. Donc par récurrence $\mathrm{Id}_E = 0$, ce qui est absurde car $E \neq \{0\}$.

2. En dimension finie :
   - f et g sont linéaires donc continues, donc par contraposée de la première question, l'existence d'un tel couple est impossible ;
   - on aurait $\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$ donc $E \neq \{0\}$ ce qui n'est pas le cas ici.

□

Chapitre 9

Compacité, connexité par arcs

Table des matières

9.1 Points méthode

Montrer une non compacité

Une méthode classique pour montrer qu'une partie (non fermée bornée) est non compacte est d'essayer d'en exhiber une suite (u_n) vérifiant $\forall p \neq q,\ d(u_p, u_q) \geqslant \alpha$, où α est un réel strictement positif.

Montrer une convergence dans un compact

Pour montrer qu'une suite (u_n) à valeurs dans un compact converge vers l, on peut montrer que toute valeur d'adhérence de (u_n) est égale à l.

Utilisation des fonctions coordonnées

On considère f à valeurs dans un espace de dimension finie égale à n et f_i ses fonctions coordonnées dans une base de l'espace d'arrivée.

- f admet une limite finie en a adhérent à A si, et seulement si, f_i admet une limite finie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- f est continue sur A si, et seulement si, toutes les fonctions f_i sont continues sur A.
- On a le même résultat en remplaçant "continue" par "uniformément continue" ou "lipschitzienne".

9.2 Astuces

Montrer une connexité par arcs

On commence toujours par vérifier si l'ensemble n'est pas étoilé par rapport à un de ses points ou carrément convexe. Ensuite, on regarde s'il peut être interprété comme l'image d'un connexe par arcs par une application continue. Sinon, on revient à la définition et on improvise selon la situation (on peut utiliser des théorèmes de structure par exemple pour les matrices inversible).

Déterminer des composantes connexes par arcs / Montrer une non connexité par arcs

On exhibe une application continue adaptée aux objets considérés (le déterminant pour les matrices inversibles, la trace pour les projecteurs et les symétries). Si l'image de l'ensemble a plus de deux composantes connexes par arcs, alors l'ensemble de départ n'est pas connexe par arcs, et il a autant de composantes connexes par arcs qu'il y a de composantes connexes par arcs dans l'image.

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts

Les composantes connexes par arcs de cet ouvert sont des intervalles ouverts par résultat de cours. On cale alors un rationnel par composante connexe par arcs, ce qui prouve qu'il ya un nombre au plus dénombrable de composantes connexes par arcs.

Application. Cette méthode de caler un rationnel dans un sous-ensemble pour montrer qu'il y a un nombre au plus dénombrable de trucs est assez générale. Par exemple, cela permet de montrer qu'une fonction monotone admet un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité.

Extraction double

Si on dispose de deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs dans des compacts K_1 et K_2 et si on veut prendre une extraction qui converge pour les deux suites, il est plus rapide de considérer la suite $((u_n, v_n))$ à valeurs dans le compact $K_1 \times K_2$ que d'extraire de l'une, puis d'extraire de nouveau.

$\mathbb{C}$ privé d'une partie dénombrable

Si D est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$, alors $C \setminus D$ est connexe par arcs.

Démonstration. Démonstration (faire un dessin) : on se donne x et y des complexes de $\mathbb{C} \setminus D$ et on note Δ la médiatrice de $[x, y]$. Pour tout m, on définit p_m comme la concaténation du segment $[x, m]$ avec le segment $[m, y]$. Comme il y un un nombre indénombrable de p_m et que D est dénombrable, il existe un m_0 tel que p_{m_0} soit entièrement contenu dans $\mathbb{C} \setminus D$. Ainsi, $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe par arcs. □

Montrer une non compacité

Pour montrer qu'une partie n'est pas compacte ou créer une absurdité, on peut utiliser/créer une suite dont on ne pourra pas extraire une suite convergente : il s'agit d'une suite (u_n) telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m \neq n \implies d(u_m, u_n) \geqslant \varepsilon$$

Application. Permet de montrer la précompacité d'un ensemble compact (tout compact est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de même rayon pour un rayon strictement positif quelconque) $\rightarrow$ *cf* la partie exercices classiques.

9.3 Exercices classiques

9.3.1 Compacité : généralités

Δ Théorème des compacts emboîtés : HP mais à utiliser sans modération (démo rapide)

Une suite décroissante de compacts (K_n) tous non vides est d'intersection non vide.

Démonstration. En effet, prendre $\forall,\ x_n \in K_n$. Alors la suite (x_n) est à valeurs dans K_0 donc admet une valeur d'adhérence x. On montre que x appartient à tous les K_p. Si $n \geqslant p$, alors $x_{\varphi(n)} \in K_p$ car

$$\varphi(n) \geqslant \varphi(p) \geqslant p$$

donc par le caractère caractère fermé de K_p, $x \in K_p$. Donc x appartient à l'intersection des K_n, qui est donc non vide. □

Application. Premier théorème de Dini, variante dénombrable du point fixe de Kakutani

Suite bornée avec un nombre fini de valeurs d'adhérence qui ralentit

Soit (x_n) une suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie admettant un nombre fini de valeurs d'adhérence et telle que $x_{n+1} - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer qu'elle converge.

Démonstration. Cela revient à montrer qu'elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Par l'absurde, on suppose que la suite possède plus de deux valeurs d'adhérence. Alors, avec le fait qu'elle ralentit, on construit une nouvelle valeur d'adhérence entre les anciennes. Donc elle possède plus de valeurs d'adhérence que ce qu'elle n'en possède, c'est absurde. Donc la suite possède au plus une valeur d'adhérence. Mais elle est bornée en dimension finie, donc elle en possède au moins une. Donc elle en possède exactement une et converge. □

$\Delta\star$ Théorème de Riesz

Un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa sphère unité est compacte.

Démonstration. A COMPLETER (cf le cours) Il y a des lemmes à démontrer. □

$\star$ Application du théorème de Riesz

Y a-t-il des compacts d'intérieur non vide dans un espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Démonstration. Il n'y en a pas. En effet, s'il existe un compact d'intérieur non vide, on peut mettre une boule fermée non réduite à un singleton dedans, qui est donc compacte comme fermé dans un compact. Alors, la boule unité, qui se déduit de la boule précédente par similitude, est elle aussi compacte (la similitude en question est continue). Donc la boule unité est compacte, et donc la dimension est finie d'après le théorème de Riesz. □

Caractères ouvert de l'ensemble des familles libres à n éléments

Soit E un espace vectoriel normé. On note $l_n(E)$ l'ensemble des familles libres de E à n éléments. Montrer que $l_n(E)$ est un ouvert de E^n pour la norme produit.

Démonstration. Montrer que le complémentaire est fermé par caractérisation séquentielle en renormalisant la relation de liaison afin que tous les scalaires soient de valeur absolue inférieure à 1 et un soit égal à 1. Extraire car on est dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, puis utiliser un argument d'unicité de la limite. □

⋆ Demi-espaces fermés

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et de sphère unité S. Un demi-espace fermé est une partie de la forme $f \in (\mathbb{R}_+)$ où f est une forme linéaire non nulle. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des p-listes $(x_1, \ldots, x_p) \in S^p$ telles qu'aucun demi-espace fermé ne contienne tous les x_i est un ouvert de S^p.

Démonstration. On note A_p cet ensemble. On va montrer que $B_p = S^p \setminus A_p$ est fermé. On considère une suite $(u_n) = (u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(p)})$ à valeurs dans B qui converge vers $l = (l^{(1)}, \ldots, l^{(p)})$. On considère une suite de forme linéaires non nulles (f_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la tous les $u_n^{(i)}$ soient dans $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$. On considère (g_n) la suite des renormalisés des f_n. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ g_n(u_n^{(i)}) \leqslant 0$$

On extrait de (g_n) une limite g (E^* de dimension finie). On note

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, f) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Alors φ est bilinéaire donc continue (dimension finie). En particulier, par passage à la limite et continuité, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ g(l_i) \geqslant 0$$

Donc $l \in B_p$. Donc A_p est un ouvert. $\square$

△ Enveloppe convexe et théorème de Carathéodory

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note Δ_k l'ensemble des $(k+1)$-uplets de nombres réels positifs de somme 1 et étant donné un $(k+1)$-uplet $(p_0, \dots, p_k)$ d'éléments de E, on note :

$$H(p_0, \dots, p_k) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \Delta_k \right\}$$

Enfin, soit A une partie de E. On définit sont enveloppe convexe par :

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{(p_0, \dots, p_k) \in A^{k+1}} H(p_0, \dots, p_k)$$

1. montrer que $\mathrm{Conv}(A)$ est la plus petite partie convexe contenant A.
2. Soit $(p_0, \dots, p_k) \in E^{k+1}$. On suppose qu'il existe une relation de liaison non triviale $\sum_{i=0}^{k} \mu_i p_i = 0$ telle que $\sum_{i=0}^{k} \mu_i = 0$. Montrer alors que
$$H(p_0, \dots, p_k) = \bigcup_{i=0}^{k} H(p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k)$$
3. En déduire le **théorème de Carathéodory** : si A est une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, alors :
$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcup_{(p_0, \dots, p_k) \in A^{k+1}} H(p_0, \dots, p_k)$$
4. En deduire que si A est une partie compacte d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\mathrm{Conv}(A)$ est également compacte.

Démonstration. Faire les questions 2 et 3 plus proprement...

1. Comme d'habitude dans les propriétés de cours.
2. L'inclusion réciproque est immédiate. Pour l'inclusion directe, utiliser les hypothèse pour éliminer p_i si $\mu_i \neq 0$.
3. On a clairement $H(p_0) \subset H(p_0, p_1)$, etc. Et si $k \geqslant n+1$, on peut redescendre d'un étage car toute famille de plus de $n+1$ vecteurs est liée en dimension n. il faut alors bien utiliser la deuxième question.
4. Le théorème de Carathéodory permet d'écrire $\mathrm{Conv}(A)$ comme l'image directe de $A^{n+1} \times \Delta_n$ qui est compact comme produit de compacts (Δ_n est un fermé dans un compact). L'application en question est multilinéaire donc continue en dimension finie puis on a l'image d'un compact par une application continue.

□

Une utilisation d'un procédé diagonal

Soit E l'espace vectoriel des suites complexes bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. A tout $u = (u_n) \in E$, on associe :

$$A(u) = \{(x_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant |u_n|\}$$

1. Montrer que si $A(u)$ est compact, alors u tend vers 0.
2. $\star$ Montrer la réciproque. Indication : effectuer un procédé diagonal. Étant donnée une suite $(x^{(k)})$ d'éléments de $A(u)$, on pourra considérer des extractions φ_n telles que $\left(x^{((\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n)(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour tout n et pose $\psi(k) = (\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_k)(k)$.

Démonstration. Joli exercice !

1. On suppose $A(u)$ compact. On définit pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite $(u_n^{(p)})$ par $u_n^{(p)} = 0$ si $n < p$ et $u_n^{(p)} = u_n$ si $n \geqslant p$. La suite $(u^{(p)})$ appartient à $A(u)$, on extrait puis on montrer que la valeur d'adhérence est la suite nulle. On en déduit qu'il y a même convergence vers cette suite, puis on montre qu'alors u tend vers 0.

2. Effectuer le procédé diagonal et ne pas oublier cette méthode lorsque l'on travaille avec des suites de suites. Normalement, cela devrait bien se passer.

$\square$

$\Delta\star$ Théorème de Baire

Soit A une partie localement compacte d'un espace vectoriel normé (*ie* dans laquelle tout point possède un voisinage compact).

1. Soit (O_n) une suite d'ouverts de A, tous denses dans A. Montrer que

$$\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

est dense dans A. Est-il nécessairement ouvert ?

2. En déduire que si une suite (F_n) de fermés de A a une réunion d'intérieur non vide, alors l'un des F_n est d'intérieur non vide.

Démonstration. Exercice difficile.

1. Procéder par récurrence pour la densité en construisant une suite de boules autour du point recherché et utiliser la compacité locale. Aucune idée pour le caractère ouvert.

2. Passer au complémentaire pour se ramener à la première partie de la question précédente.

$\square$

Lemme de Croft

Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans un espace vectoriel normé qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{n \to +\infty} f(nx) = 0$$

1. On suppose f uniformément continue. Montrer qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.
2. $\star$ Montrer qu'il en est de même si l'on suppose seulement f continue. Indication : on pourra utiliser le théorème de Baire (exercice précédent) et

$$F_n = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \forall p \geqslant n, \ \|f(px)\| \geqslant \varepsilon\}$$

3. $\star$ Et sans hypothèse de continuité ? Indication : on pourra utiliser une base de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Démonstration. Les deux dernières questions sont difficiles. A faire... □

9.3.2 Compacité et fonctions

Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que toute application continue $f : E \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim_{\infty} f = +\infty$ admet un minimum sur E.
2. $\star\star$ En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss. Indication : pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, on pourra considérer $z \mapsto |P(z)|$.

Démonstration. La première question est classique, la deuxième est beaucoup plus difficile.

1. Pour la première, utiliser la définition de la limite pour pouvoir appliquer le théorème des bornes atteintes sur une un compact(en l'occurrence une boule fermée centrée en 0 par exemple).
2. Ensuite, suivre l'indication puis raisonner par l'absurde pour montrer que ce minimum vaut 0.

□

$\star$ Une caractérisation de la continuité par les compacts

Montrer qu'une application est continue si, et seulement si, sa restriction à tout compact est continue.

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Pour le sens réciproque, passer par une caractérisation séquentielle de la continuité. On utiliser ensuite le fait que si $x_n \to l$, alors l'ensemble

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$$

est compact puis le tour est joué. □

9.3.3 Compacité et points fixes

Δ Application contractante

Soit X une partie fermée non vide d'un espace vectoriel de dimension finie, $k \in [0, 1[$ et $f : X \to X$ une application k-lipschitzienne. Montrer que f possède un unique point fixe. Indication : on pourra, étant donné $x \in X$, considérer la série

$$\sum (f^{n+1}(x) - f^n(x))$$

Démonstration. Pour l'existence, cette série est absolument convergente ($O(k)$) donc convergente en dimension finie. Donc $f^n(x) \to l$. Mais par continuité, $f(l) = l$. Et comme x est fermé, $l \in X$. Pour l'unicité, deux candidats sont nécessairement égaux car l'application est contractante. □

$\Delta\star$ Théorème de Kakutani

Pour un compact convexe non vide K, une application linéaire continue qui stabilise K admet un point fixe.

Démonstration. Pour cela, introduire

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

qui stabilise aussi K par convexité. Alors $u(v_n(x)) - v_n(x)$ tend vers 0 avec $x \in K$ car K est non vide. Or, $v_n(x)$ admet une valeur d'adhérence, et on conclut que cette valeur d'adhérence est un point fixe de u par continuité. □

Application. Dans le cas où on a une famille d'endomorphismes qui commutent, on peut montrer qu'ils ont un point fixe commun. En effet, l'ensemble des points fixes de la première est alors convexe compact non vide et on recommence. En fonction du nombre d'applications dont on dispose, on peut conclure par récurrence si on en a un nombre fini, par les compacts emboîtés si on en a un nombre dénombrable, voire avec Borel-Lebesgue si on n'est pas dans les cas précédents.

Δ Application presque contractante

Soit A un compact non vide et $f : A \to A$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in A^2,\ d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe a. On pourra utiliser l'application $x \mapsto d(x, f(x))$.
2. On définit une suite (x_n) par $x_0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que (x_n) converge vers a.

Démonstration. Bien remarquer qu'ici l'application n'est pas contractante.

1. Pour l'existence, considérer le minimum de la fonction suggérée (on montre qu'elle est continue car elle est 2-lipschitzienne). On prend a en lequel le minimum est atteint. En raisonnant par l'absurde, si $a \neq f(a)$, alors $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$ ce qui est absurde par minimalité donc $a = f(a)$. Pour l'unicité, la contraposée de l'hypothèse sur f la fournit directement.
2. Ensuite, $(d(x_n, a))$ décroît donc converge car est minorée par 0. On note $l \geqslant 0$ sa limite. On raisonne par l'absurde en supposant $l > 0$. On extrait une sous-suite qui tend vers x. Alors $d(f(x), a) = l$ par continuité de f. Or, comme $x \neq a$, on a
$$l = d(f(x), a) = d(f(x), f(a)) < d(x, a) = l$$
ce qui est absurde. Donc $l = 0$ et toute valeur d'adhérence de (x_n) est égale à a, et on est dans un compact.

□

⋆ Un point fixe

Soit C une partie convexe compacte non vide et $f : C \to C$ 1-lipschitzienne. Montrer que f admet au moins un point fixe. On pourra commencer pa le cas où f est k-lipschitzienne avec $k < 1$.

Démonstration. Pour l'existence dans le cas où $k < 1$, se référer à l'exercice précédent. Ensuite, on peut fixer $a \in C$ et on considère :

$$f_n : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & \dfrac{a}{n+1} + \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) f(x) \end{array}$$

Ces fonctions sont bien définies par convexité et sont clairement toutes $1 - \dfrac{1}{n}$-lipschitziennes. Elles possèdent donc un point fixe par le cas précédent. On extrait de cette suite de points fixe une valeur d'adhérence, et on prouve aisément que cette valeur d'adhérence est un point fixe de f. □

9.3.4 Problèmes de recouvrement

△ Précompacité

Si A est compacte, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F de A telle que

$$A \subset \bigcup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$$

On dit que A est **précompacte**.

Démonstration. Raisonner par l'absurde et construire par récurrence une suite d'éléments qui sont deux à deux à distances au moins égale à ε. Cette suite ne peut pas admettre de valeur d'adhérence, ce qui est absurde. □

Application. Preuve du théorème de Borel-Lebesgue ; permet de faire des extractions diagonales.

$\Delta\star$ Théorème de Borel-Lebesgue

A est compacte si, et seulement si, de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini ouvert de A. On se propose de montrer en deux questions le sens direct, puis de montrer le sens réciproque. Soit A une partie compacte.

1. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de A recouvrant A. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\forall x \in A,\ \exists i \in I\ :\ B_o(x,\varepsilon) \subset O_i$$
2. Montrer que pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de A recouvrant A, il existe une partie finie J de I telle que $(O_j)_{j\in J}$ recouvre A. On pourra utiliser la précompacité de A (exercice précédent).
3. Montrer que la propriété de la deuxième question est suffisante pour que A soit compacte. On pourra utiliser le fait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (u_n) est $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k \mid k \geqslant n\}}$

Démonstration. 1. On raisonne par l'absurde avec $\varepsilon = 1/2^n$ et un x_n correspondant. On prend x une valeur d'adhérence de (x_n). Il existe i tel que $x \in O_i$. Mais alors, à partir d'un certain rang :
$$B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{2^{\varphi(n)}}\right) \subset O_i$$
ce qui est une contradiction.

2. On prend le $\varepsilon > 0$ obtenu à la première question et on lui applique la précompacité de A. On prend ensuite, par hypothèse sur ε, un ouvert pour chaque boule de rayon ε centrée sur un élément de F.

3. On suppose désormais que de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini par des ouverts. On prouve d'abord un lemme. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés tous non vides. Raisonnons par l'absurde et supposons
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$$
Alors
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{A \setminus F_n}_{:=O_n} = A$$
Alors, par hypothèse, il existe une sous-famille $(O_i)_{i\in I}$ finie telle que
$$\bigcup_{i\in I} O_i = A$$
Donc
$$F_{\max(I)} = \bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$$

ce qui est absurde. Ensuite, on se donne une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et on pose

$$F_n = \overline{\{u_k \mid k \geqslant n\}}$$

(F_n) est une suite décroissante de fermés tous non vide donc l'intersection de tous les F_n, qui vaut exactement l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est non vide. Donc (u_n) admet une valeur d'adhérence. Donc A est compacte.

□

Application. Lemme de Croft ; variante quelconque du point fixe de Kakutani.

Espaces séparables

Un espace vectoriel normé E est séparable s'il existe une partie dénombrable dense dans E.

1. Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.
2. Montrer que tout espace compact est séparable.
3. $\star$ Montrer que l'espace l^∞ des suites réelles bornées, muni de la norme infinie, n'est pas séparable.
4. $\star$ Montrer que l'espace C_0 des suites réelles de limite nulle, muni de la norme infinie, est séparable.

Démonstration. Les deux dernières questions sont difficiles.

1. Pour $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$ est dense dedans (un produit de parties denses est dense de le produit). Puis $\mathbb{C}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ et E de dimension finie est homéomorphe à $\mathbb{K}^{\dim(E)}$.
2. On suppose E compact. On prend E_n finie qui correspond à l'utilisation de la précompacité de E avec $\varepsilon = 1/2^n$. Alors
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$
est dénombrable comme union dénombrable de parties finies. En revenant à la définition avec les boules, on montre aisément que A est dense dans E.
3. Supposons l'existence de I indénombrable tel que
$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \implies d(x_i, x_j) \geqslant 1$$
et de $(u_j)_{j\in J}$ dense dans E. On montre alors que J est indénombrable. En effet, on considère
$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & J \\ & i & \longmapsto & \text{un } j \text{ tel que } d(x_i, x_j) \leqslant \frac{1}{4} \end{array}$$
Cette fonction est bien définie avec l'axiome du choix et elle est injective par hypothèse sur I, donc J est indénombrable. On a donc prouvé un résultat plus vaste. Par conséquent, en considérant les indicatrices de parties de $\mathbb{N}$ dans notre cas, on dispose d'un tel I indénombrable si bien que l^∞ n'est pas séparable.
4. Utiliser un argument diagonal.

□

9.3.5 Connexité par arcs

Vers la connexité

Soit A une partie non triviale d'un espace vectoriel normé E. Montrer que la frontière de A est non vide.

Démonstration. E est connexe par arcs donc connexe. Comme A est non triviale, ce n'est pas un ouvert-fermé et sa frontière est non vide. Voici une preuve plus "au programme" : on prend $a \in A$ et $b \in E \setminus A$ et on s'intéresse au segment $[a, b]$. On prend s la borne supérieure des t tels que la combinaison convexe $(1-t)a + tb$ soit dans A. On montre alors que $(1-s)a + sb$ appartient à la frontière de A. Mieux, on montre que la fonction indicatrice de A est continue (en montrant qu'elle continue en tout point de A comme A est ouvert, et qu'elle l'est en tout point de $E \setminus A$ comme cet ensemble est ouvert car A est fermé). On en déduit que cette indicatrice vaut constamment 0 ou constamment 1, donc que A est vide ou vaut E tout entier. ☐

⋆ Autour des intervalles

Montrer qu'un connexe par arcs qui contient au moins deux points distincts en contient une infinité non dénombrable.

Démonstration. Prendre a et b ces deux points distincts. Prendre un arc continu γ liant a à b. Se ramener à un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point qui est infini non dénombrable. ☐

△ Vers l'homologie

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont-ils homéomorphes ?

Démonstration. La réponse est non. Raisonner par l'absurde et considérer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme. Remarquer qu'en enlevant un point à $\mathbb{R}^2$, celui reste connexe par arcs alors que $\mathbb{R}$ ne le reste pas. Il y a alors un problème car l'image d'un connexe par arcs est un connexe par arcs, donc la restriction de f à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ne peut pas atteindre la moitié des réels, ce qui est absurde par surjectivité de f. ☐

Remarque. Il est possible de prouver que $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes dès que $m \neq n$. En revanche, nous ne disposons pas des bons outils pour le faire. Le bon outil est la notion de **simple connexité** et la théorie des l'homologie (lacets, groupes d'homotopie) qui permet de correctement formaliser les choses et de prouver ce résultat difficile. Pour plus de détail, aller dans une école où on "fait vraiment des maths" et "avec strictement plus d'une lettre". Merci François.

⋆ Complémentaires denses connexes par arcs

Existe-t-il dans $\mathbb{R}^3$ deux parties complémentaires denses et connexes par arcs ?

Démonstration. La réponse est oui. Prendre pour l'un des plans d'abscisses dans $\mathbb{Q}$ et l'autre des plans d'abscisses dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ puis percer toutes ces plans par deux droites orthogonales pour les rendre connexes par arcs. ☐

Remarque. On peut faire des même dans $\mathbb{R}^2$ en considérant des cercles concentriques de rayons rationnels et irrationnels percé par des demi-droites partant de l'origine.

9.3.6 Topologie et polynômes

Application du cours

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait :

$$|a_k| \leqslant M \int_0^1 |P(t)| \, dt$$

Démonstration. Utiliser l'équivalence des normes en dimension finie avec la norme infinie sur les coefficients et la norme un intégrale. □

⋆⋆ Un résultat sur la convergence de polynômes

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes unitaires de degré N convergeant dans $\mathbb{R}_N[X]$ vers un polynôme P unitaire de degré N. Montrer qu'il existe des suites complexes convergentes $a^{(1)}, \ldots, a^{(N)}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=1}^{N} (X - a_n^{(k)}) \quad \text{et} \quad P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lim a^{(k)})$$

Indication : construire d'abord une suite $a^{(1)}$ convenable, convergeant vers une racine fixée de P.

Démonstration. Exercice très difficile. A faire... □

⋆ Fractions rationnelles

Soit n et m deux entiers naturels et $g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On note $R_{m,n}$ l'ensemble des fonctions rationnelles de la forme $t \mapsto \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ avec $(P, Q) \in \mathbb{R}_m X \times \mathbb{R}_n[X]$ et Q sans zéro dans $[0, 1]$. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{array}{rcl} R_{m,n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ R & \longmapsto & \|R - f\|_\infty \end{array}$$

admet un minimum.

Démonstration. Exercice difficile. A faire... □

9.3.7 Topologie et matrices

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Presque sous-multiplicativité

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe M un réel positif tel que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \|AB\| \leqslant M\|A\|\|B\|$$

Démonstration. Le produit est bilinéaire. Or, il est continu car on est en dimension finie donc le critère de continuité des applications multilinéaires s'applique et fournit le résultat. □

Δ Compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ sont compacts.

Démonstration. Ce sont des fermés bornés en dimension finie, donc compacts. Le caractère fermé s'obtient car ce sont les images réciproques de fermés par des applications continues. Le caractère borné s'obtient en considérant les colonnes par exemple. En fonction de la norme choisie, les bornes peuvent varier. □

Application. La compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ permet de prolonger des théorèmes d'existence de plusieurs décompositions dans le chapitre d'espace euclidiens

Connexité par arcs des matrices nilpotentes et non inversibles

L'ensemble des matrices nilpotentes et des l'ensemble des matrices non inversibles sont connexes par arcs.

Démonstration. Ils sont étoilés par rapport à la matrice nulle. □

$\Delta\star$ Connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Démonstration. Pour deux matrices inversibles A et B à coefficients complexes, priver $\mathbb{C}$ de l'ensemble fini des racines de

$$\det((1-z)A + zB)$$

qui est polynomial en z, ce qui reste alors connexe par arcs. On relie alors nos matrices par un chemin continu. □

$\Delta\star$ Composantes connexes par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

En revanche, $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. Les composantes connexes par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices de déterminant strictement positif et les matrices de déterminant strictement négatif.

Démonstration. Pour la non connexité par arcs, son image par le déterminant (continu) possède deux composantes connexes par arcs, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Pour obtenir les composantes connexes par arcs, on peut appliquer un théorème de structure sur les matrices inversible (suite de transpositions avec une dilatation en dernier) et relier continument toutes ces matrices les unes aux autres. $\square$

Connexité par arcs des matrices symétriques et leurs variantes

$S_n(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.

Démonstration. Ils sont convexes. $\square$

$\star$ Matrices bistochastiques

L'ensemble des matrices bistochastiques, *ie* des matrices à coefficient positifs dont la somme des coefficients pour chaque ligne et chaque colonne fait 1, est une ensemble compact et convexe (donc *a fortiori* connexe par arcs).

Démonstration. Cet ensemble est fermé et borné en dimension finie donc compact. La convexité se vérifie à la main. $\square$

Application. Important : utilisation des matrices orthogonales et bistochastiques Se souvenir que si on a une matrice orthogonale, la matrice dont les coefficients sont les carrés des coefficients de la matrice orthogonale est bistochastique.

Matrices de rang fixé non plein

Soit $r \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang r $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Démonstration. On se donne $A = PJ_rQ$ et $A' = P'J_rQ'$. Il suffit simplement relier P et P' (de même pour Q) puis on utilise la bilinéarité (donc continuité en dimension finie) du produit. Pour cela, notons que cela ne change rien au problème de remplacer P par

$$P \times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \times J_r = J_r \times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = J_r$$

comme $r < n$. On peut donc sans perte de généralité supposer que $\det(P)$ et $\det(P')$ ont même signe. On utilise ensuite la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{GL}_n^-(\mathbb{R})$. □

△ Matrices de projecteurs

Déterminer les composantes connexes par arcs de l'ensemble des matrices $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $P^2 = P$ lorsque :

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2. $\star$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Démonstration. La deuxième question est censée être plus difficile (car l'argument utilisé dans la première ne fonctionnera plus *a priori*). Remarquons dans les deux cas que la trace, continue, est égale au rang sur ces matrices donc fournit au moins $n+1$ composantes connexes par arcs correspondant au moins aux rangs. Montrons que cela sont bien des composantes connexes par arcs. Remarquons que ce sont les ensembles

$$\{PJ_rQ \mid (P,Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\}$$

1. Dans $\mathbb{C}$, ce sont bien des connexes par arcs en utilisant la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et le fait que le produit est continu car bilinéaire en dimension finie.
2. Dans $\mathbb{R}$, cela peut paraître plus compliqué au premier abord, mais le résultat est presque inchangé. Si $r = n$, il y a désormais deux composantes connexes par arcs, $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Lorsque $r < n$, on peut multiplier J_r par

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

pour supposer que les déterminants des matrices inversibles ont même signe et se ramener à la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{GL}_n^-(\mathbb{R})$ comme dans l'exercice précédent.

□

Remarque. On a un exercice analogue avec les matrices de symétries.

Matrices cycliques

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **cyclique** s'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. $\star$ Montrer que l'ensemble des matrices cycliques est connexe par arcs.

Démonstration. La deuxième question est difficile.

1. Soit $C \in \mathbb{C}^n$. On note

$$\begin{array}{rccl} \det_X : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & M & \longmapsto & \det(X \mid MX \mid \ldots \mid M^{n-1}X) \end{array}$$

qui est continue par multilinéarité en dimension finie. Alors l'ensemble des matrices cycliques est

$$\bigcup_{X \in \mathbb{C}^n} \overset{-1}{\det_X}(\mathbb{C}^*)$$

C'est donc un ouvert comme union d'ouverts.

2. On considère M cyclique, X un vecteur cyclique associé et $\mathcal{B} = (X, MX, \ldots, M^{n-1}X)$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à M. Alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & a_n \end{pmatrix} = A(a_1, \ldots, a_n)$$

Or, toute matrice $A(x_1, \ldots, x_n)$ est cyclique. on considère alors :

$$\varphi(t) = A(ta_1, \ldots, ta_n)$$

qui est continue et relie $A(a_1, \ldots, a_n)$ à $A(0, \ldots, 0)$. On fait de même avec B cyclique et $\tilde{B}$. Puis on utilise la connexité par arcs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et la continuité du produit (bilinéaire en dimension finie). C'est donc un chemin "en 3 temps".

□

9.3.8 Topologie et réduction

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Matrices cycliques version réduction

Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les polynômes caractéristique et minimal sont égaux est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. Ce sont encore les matrices cycliques. A faire... □

Matrices diagonalisables et trigonalisables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $T_n(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ et $D'_n(\mathbb{K})$ les parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituées respectivement des matrices trigonalisables ; des matrices diagonalisables et des matrices diagonalisables avec n valeurs propres distinctes.

1. Intérieur et adhérence de $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Adhérence de $D_n(\mathbb{K})$ dans $T_n(\mathbb{K})$? Et pour $D'_n(\mathbb{K})$?
3. $\star$ Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $D_n(\mathbb{R})$ et de $T_n(\mathbb{R})$.
4. $\star$ Montrer que l'intérieur de $D_n(\mathbb{R})$ est $D'_n(\mathbb{R})$.
5. $\star\star$ Montrer que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D'_n(\mathbb{C})$.
6. Montrer que l'intérieur de $T_n(\mathbb{R})$ est $D'_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. La première question est une application immédiate du cours. Les question 3 et 4 sont difficiles. La question 5 est très difficile.

1. $T_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par théorème de cours.

□

$\star$ Dimension du commutant

Le commutant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable à n valeurs propres distinctes. montrer que son commutant $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(A)$ est de dimension n.
2. En déduire que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(A) \geqslant n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. on pourra utiliser la densité des matrices diagonalisables à n valeurs propres distinctes.
3. En déduire que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A) \geqslant n$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. A faire... □

Δ Racines de l'unité

Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour lesquelles il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_n$?

Démonstration. Il me semble qu'il s'agit de l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres dans le cercle unité. A vérifier et à faire... □

Classe de similitude compacte

Condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour que la classe de similitude soit compacte ?

Démonstration. La CNS est que A doit être scalaire. Cela est clairement suffisant. Dans l'autre sens, on suppose A non scalaire. Alors il est classique que A est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & (*) & \\ 1 & & \\ 0 & (*) & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

En agissant avec les matrices Q_ε, la classe de similitude de A n'est pas bornée donc n'est pas compacte. $\square$

Chapitre 10

Espaces euclidiens

Table des matières

10.1 Points méthode

Matrices orthogonalement semblables

Pour montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonalement semblables, on pourra montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice B.

10.2 Astuces

Stricte convexité de la sphère unité

Pour un EVN (donc pour un espace euclidien), la boule unité est strictement convexe (le faire par contraposée).

Application. Si $[u, v] \subset \mathcal{O}(E)$, alors $u = v$.

Un nouveau produit scalaire

Si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E, on peut définir un produit scalaire sur $E \times \mathbb{R}$ par :

$$\langle (x, \lambda), (y, \mu) \rangle := (x|y) + \lambda\mu$$

Application. Montrer que si $(x_i|x_j) = -1$ pour $i \neq j$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leqslant 1$$

On pourra utiliser l'inégalité de Bessel.

Une CS d'orthogonalité

Si $\|x\| = \|y\|$, alors $x + y \perp x - y$ (se voit bien graphiquement), le faire en développant le produit scalaire.

Application. Un endomorphisme qui conserve la norme est une constante fois un endomorphisme orthogonal : en effet, l'étude précédente montre dans une analyse qu'un tel endomorphisme est de norme constante sur les sphère, et on se ramène à un endomorphisme de norme 1 sur la sphère unité par homogénéité.

Une façon de montrer qu'un endomorphisme est nul

Dans un espace préhilbertien, pour montrer qu'un endomorphisme est nul, on peut montrer qu'il est à la fois symétrique et antisymétrique.

Obtenir une forme plus simple d'une forme linéaire

Pour "décomposer" une forme linéaire, on peut lui donner une nouvelle forme plus agréable, on introduit un produit scalaire et on s'assure d'être en dimension finie. On peut alors utiliser le théorème de représentation !

Utilisation d'un autre produit scalaire

De façon générale, introduire un produit scalaire bien choisi, même si ce peut être difficile, est souvent utile car on dispose alors de plus d'outils !

Utilisation du théorème de représentation

Si l'énoncé concerne en parallèle des formes linéaires et des espaces euclidiens, penser au théorème de représentation.

Symétrisation d'un problème avec des matrices symétriques définies positives

Lorsqu'on travaille avec des matrices symétriques réelles définies positives, on peut écrire $A = S^2$ avec $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour ensuite écrire :

$$A + B = S(I + S^{-1}BS^{-1})S$$

Cela permet notamment de passer au déterminant pour se ramener à un cas plus simple.

Prouver un résultat sur $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ par densité

Pour prouver un résultat dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, on peut commencer par le prouver dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ puis l'étendre par continuité puisque $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Le rayon spectral est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

On note ρ le rayon spectral. Il est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $\rho(A) = 0$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont nulles, donc $A = 0$. Puisque $\mathrm{Sp}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Sp}(A)$, on obtient immédiatement l'homogénéité. En utilisant la norme 2 canonique et le fait que le rayon spectral d'une matrice symétrique est le maximum de la quantité $|X^T AX|$ pour X de norme 1, on obtient l'inégalité triangulaire.

Matrices orthogonales et triangulaires

Ce sont les matrices avec uniquement des -1 ou des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Trigonalisation en base orthonormée

Si une matrice réelle est trigonalisable, alors elle est trigonalisable dans une base orthonormée, il suffit d'appliquer un processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la matrice de passage pour la trigonalisation.

Application. Pour une matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$ de valeurs propres λ_i, $A \in S_n(\mathbb{R})$ ssi

$$Tr\left(AA^T\right) = \sum_i \lambda_i^2$$

Le sens direct est immédiat avec le théorème spectral. Pour le sens réciproque, trigonaliser en base orthonormée.

Topologie de $S_n(\mathbb{R})$ $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$

$S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé relatif de $S_n(\mathbb{R})$ comme l'intersection des noyaux des applications

$$X \mapsto (X|MX)$$

pour $X \in \mathbb{R}^n$. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est connexe par arcs car convexe. L'adhérence de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$ est $S_n^+(\mathbb{R})$. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif de $S_n(\mathbb{R})$: en effet, on montre que son complémentaire dans $S_n(\mathbb{R})$ est fermé par caractérisation séquentielle et avec une suite de vecteurs de norme 1 (on utilise la compacité de la sphère unité de R^n).

10.3 Exercices classiques

10.3.1 Révisions sur les espaces préhilbertiens réels

Δ Matrices de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tout famille finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, on pose :

$$G(x_1, \ldots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gram}(x_1, \ldots, x_p) = \det G(x_1, \ldots, x_p)$$

1. Montrer que (x_i) est liée si, et seulement si, $\mathrm{Gram}(x_i) = 0$.
2. Montrer qu'ajouter à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres ne change pas le rang de $G(x_i)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg} G(x_i) = \mathrm{rg}(x_i)$.
4. On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$. Donner une relation entre $G(x_i)$, $G(e_i)$ et $M_{\mathcal{B}}(x_i)$.
5. Montrer que $G(x_i)$ est positive et en déduire que $\mathrm{Gram}(x_i) \geqslant 0$.
6. Si F est un sous-espace vectoriel dont y_1, ..., y_p est une base, on a la formule :

$$d(x, F)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(x, y_1, \ldots, y_p)}{\mathrm{Gram}(y_1, \ldots, y_p)}$$

7. Lorsque E est de dimension finie n, exprimer $\mathrm{Gram}(x_i)$ en fonction du produit mixte des vecteurs x_i pour une orientation quelconque de E.

Démonstration. Hyper classique ! Peut servir dans d'autres exercices.

1. Raisonner en termes de produit scalaire.
2. Faire des opérations élémentaires.
3. Utiliser la question précédente.
4. $G(x_i) = M^T G(e_i) M$ en faisant le calcul des coefficients en exprimant dans la base $\mathcal{B}$.
5. Calculer comme dans la question précédente.

6. Commencer par le cas où $x \in F^\perp$ puis utiliser la projection orthogonale qui s'exprime comme x plus une combinaison linéaire des y_i.
7. Le déterminant de Gram est le carré du produit mixte des vecteurs en utilisant la question 4.

$\square$

Utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 xf(x)\ dx = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)^2\ dx \geqslant 4$$

Démonstration. On veut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ici, il faut l'appliquer à $x \mapsto \left(x - \frac{1}{3}\right) f(x)$ et on tombe sur le bon résultat en calculant. Pour avoir l'idée, appliquer Cauchy-Schwarz avec

$$x \mapsto (\alpha x + \beta) f(x)$$

et chercher une condition suffisante pour obtenir le résultat. Ici, il suffit d'avoir $\alpha = 3\beta$. $\square$

Changement d'EPHR

Soit E un espace euclidien et $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de E tels que

$$\forall (i,j),\ i \neq j \implies (x_i \mid x_j) = -1$$

Montrer que

$$\sum_{i=1}^p \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leqslant 1$$

Quels sont les cas d'égalité ?

Démonstration. On crée un nouveau produit scalaire sur $E \times \mathbb{R}$ par :

$$\langle (x, \lambda), (y, \mu) \rangle := (x|y) + \lambda\mu$$

puis on applique l'inégalité de Bessel (inégalité liée à la projection sur un SEV) avec ce nouveau produit scalaire. Le cas d'égalité est une conséquence de l'inégalité de Bessel. $\square$

$\Delta\star$ CNS pour qu'un projecteur soit orthogonal

Un projecteur p d'un espace euclidien est orthogonal si, et seulement si,

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Démonstration. Pour le prouver, pour $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$, on étudie $t \mapsto \|tx + y\|^2$ qui admet un minimum en 0 et est dérivable en 0 ce qui donne la condition de nullité du produit scalaire. $\square$

Application. Si une composée de projecteurs orthogonaux est un projecteur, alors c'est un projecteur orthogonal.

Application : composée de projecteurs orthogonaux

Soit $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs orthogonaux d'un espace préhilbertien réel E.

1. $\star$ Montrer que si $p_1 \circ \cdots \circ p_n$ est un projecteur, alors c'est un projecteur orthogonal dont on déterminera l'image et le noyau.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que $p_1 \circ p_2$ est un projecteur (orthogonal d'après la question précédente) si, et seulement si, p_1 et p_2 commutent.

Démonstration. La première question est difficile.

1. Pour montrer que ce projecteur est orthogonal, c'est une simple application de l'exercice précédent. L'image est l'intersection des images et le noyau est la somme des noyaux. Pour l'image, on écrira les inégalités avec les normes en chaîne et on raisonnera par l'absurde puis par récurrence. Pour les noyaux, l'inclusion directe se fait par récurrence. l'inclusion réciproque se fait avec le lemme qui dit que l'orthogonal de la somme est l'intersection des orthogonaux, et on applique lemme aux orthogonaux des $\mathrm{Im}(p_i)$.
2. Passer à l'adjoint.

□

$\Delta\star$ Caractérisation des normes euclidiennes

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme N. Montrer que la norme N est euclidienne (*ie* dérive d'un produit scalaire) si, et seulement si, N vérifie l'identité du parallélogramme.

Démonstration. Le sens direct est un résultat de cours. Dans l'autre sens, remarquer qu'un tel produit scalaire est défini de manière unique par polarisation. Il faut alors montrer que ce "produit scalaire" (on n'a pas encore prouvé que c'en est un), en est réellement un. La symétrie et le caractère défini positif sont immédiats. Cependant, la bilinéarité pose problème. Commencer par la prouver sur les dyadiques, puis conclure par un argument de continuité. □

10.3.2 Matrices orthogonales

Matrices triangulaires orthogonales

Quelles sont les matrices triangulaires orthogonales ? Et combien y en a-t-il ?

Démonstration. On montre par récurrence que ce sont les matrices diagonales avec uniquement des -1 ou des 1 sur la diagonale. Il y en a donc 2^n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

Δ Orthotrigonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Démonstration. Trigonaliser A puisque son polynôme caractéristique est scindé, puis appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base de trigonalisation obtenue précédemment. ☐

△ Décomposition OT

Pour M une matrice inversible, il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure telles que

$$M = OT$$

avec unicité de plus si on impose que les coefficients diagonaux de T soient strictement positifs.

Remarque. L'existence reste vraie pour des matrices non inversibles avec la densité des matrices inversibles et la compacité de l'ensemble des matrices orthogonales.

Démonstration. Appliquer un processus de Gram-Schmidt aux colonnes de la matrice M, qui forment bien une base puisque la matrice M est inversible. ☐

Application. Inégalité de Hadamard :

$$|\det(M)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|$$

avec les C_j les colonnes de la matrice M. pour cela, reprendre la démonstration de la décomposition OT avec le processus de Gram-Schmidt.

Remarque. L'existence de la décomposition OT s'étend aux matrices non inversibles par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, on a de même une décomposition TO.

⋆ Endomorphisme de trace nulle

Pour u un endomorphisme de trace nulle, il existe un vecteur normé x tel que $(u(x)|x) = 0$.

Démonstration. En effet, pour une BON (e_k), on doit avoir $(u(e_i)|e_i) \geqslant 0$ et $(u(e_j)|e_j) \leqslant 0$ pour un i et un j. On fait alors tourner ces vecteurs (ou on les relie rectilignement mais il faut alors renormaliser après) et on utilise le théorème des valeurs intermédiaires. ☐

Application. Une matrice réelle de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle (récurrence).

10.3.3 Théorème de représentation de Riesz, adjoint

Représentation des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$$

Démonstration. Appliquer le théorème de représentation de Riesz avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

△ Endomorphisme toujours symétrique $u^* \circ u$

On a l'égalité $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u)$. En déduire, en dimension finie, l'égalité $\mathrm{Im}(u^* \circ u) = \mathrm{Im}(u^*)$.

Démonstration. L'inclusion directe est immédiate, et l'inclusion réciproque s'obtient en calculant $\|x\|^2$ avec la définition de l'adjoint. On en déduit l'égalité

$$\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(u^* \circ u)$$

avec l'inclusion réciproque immédiate et le théorème du rang (en dimension finie donc). □

Une équivalence avec l'adjoint

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$\big(u^2 = 0 \ \text{ et } \ u + u^* \in \mathcal{GL}(E)\big) \iff \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$$

Démonstration. On raisonne par double implication. Montrons un premier lemme. Supposons $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et montrons que

$$\mathrm{Ker}(u + u^*) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^*)$$

L'inclusion réciproque est immédiate. Dans l'autre sens, supposons $u(x) + u^*(x) = 0$. Alors $u^*(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(u^*(x)) = 0$. On en déduit que $(x \mid u(u^*(x))) = 0$. Puis par propriété de l'adjoint, $\|u^*(x)\| = 0$ donc $u^*(x) = 0$ et donc $u(x) = 0$, ce qui est bien la propriété recherchée.

- Sens direct : la première hypothèse fournit $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. La deuxième fournit $\mathrm{Ker}(u+u^*) = \{0\}$. Ensuite, prenons $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Par surjectivité de $u + u^*$, on peut écrire $x = u(y) + u^*(y)$. Or, $u(x) = 0$ et $u(x) = u(u^*(y))$ car $u^2 = 0$. On en déduit que $u^*(y) = 0$ donc que $x \in \mathrm{Im}(u)$.
- Sens réciproque : l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \in \mathrm{Ker}(u)$ fournit $u^2 = 0$ et le lemme donne que si $x \in \mathrm{Ker}(u+u^*)$, alors il existe y tel que $x = u(y)$. Or, $u^*(x) = 0$ donc $u^*(u(y)) = 0$ donc $u(y) = 0$ donc $x = 0$ donc $u + u^*$ est injective donc bijective en dimension finie.

□

Une CNS pour choisir l'image d'un vecteur par un endomorphisme et son adjoint

Soit $x - 0$ un vecteur non nul d'un espace euclidien E ainsi que a et b deux éléments de E. Donner une CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$.

Démonstration. Il est nécessaire que $(a \mid x_0) = (b \mid x_0)$ par définition de l'adjoint. Voyons en quoi cela est suffisant. Supposons dans un premier temps $\|x_0\| = 1$. On considère $\mathcal{B} = (x_0, e_2, \dots, e_n)$ une BON de E. Alors on regarde la matrice A qui a pour première ligne les $(b \mid b_j)$, pour première colonne les $(a \mid b_i)$ (bien définie car $(a \mid x_0) = (b \mid x_0)$) et des 0 partout ailleurs. On considère alors l'unique $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit A, qui convient. Dans le cas général, on considère u construit comme précédemment mais avec cette fois

$$\left(\frac{a}{\|x_0\|} \mid \frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = \left(\frac{b}{\|x_0\|} \mid \frac{x_0}{\|x_0\|}\right)$$

et alors par linéarité un tel u convient. □

CS de linéarité

Si

$$\forall x, y,\ (u(x)|y) = (x|v(y))$$

alors u et v sont linéaires.

Démonstration. Revenir à la définition et effectuer les calculs qui correspondraient à la linéarité. □

Application. Montre la linéarité de l'adjoint dans le théorème de représentation de Riesz

10.3.4 Endomorphismes autoadjoints, matrices symétriques réelles

△ Co-orthodiagonalisation

Une famille d'endomorphismes symétriques qui commutent deux à deux sont diagonalisables dans une même base orthonormée.

Démonstration. Récurrence sur la dimension, comme pour la co-diagonalisation, mais avec des bases orthonormées. □

Une algèbre de matrices symétriques

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont symétriques. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale/

Démonstration. Remarquer que puisque cette algèbre est stable par par produit, $(AB)^T = AB$ donc $BA = AB$ car A et B sont symétriques. Donc $\mathcal{A}$ est commutative. il suffit alors de co-orthodiagonaliser les éléments de A (se référer à l'exercice précédent). □

AA^T vs A^TA

AA^T et A^TA sont orthogonalement semblables.

Démonstration. Elles ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres comptées avec multiplicité (de façon générale, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, mais il y a peut être plus rapide ici). Elle sont donc orthogonalement semblables à une même matrice diagonale, donc sont semblables. □

⋆ Positivité de la trace du produit de matrices symétriques

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout matrice B symétrique positive, on ait $\mathrm{Tr}(AB) \geqslant 0$.

Démonstration. Raisonner par analyse-synthèse. Ce sont les matrices symétriques positives.

- Analyse : soit A une telle matrice. Sans perte de généralité, on remplace A par $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Avec
$$B = \mathrm{Diag}(0, \dots, 0, \underset{\text{position } i}{1}, 0, \dots, 0)$$
on a $\mathrm{Tr}(AB) = \lambda_i \geqslant 0$ donc A est symétrique positive.
- Synthèse : faire le calcul et cela devrait bien se passer.

Néanmoins, il est beaucoup plus rapide de passer par la pseudo réduction simultanée pour faire cet exercice. □

Une caractérisation des projecteurs orthogonaux

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ (f(x) \mid x) = 0$. montrer que $f = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\forall x \in E,\ (f(x) \mid x) = \|f(x)\|^2$. Montrer que f est un projecteur orthogonal.

Démonstration. Remarquer que pour la deuxième question, il suffira de prouver que f est un projecteur car par théorème de cours, un projecteur est orthogonal si, et seulement si, il est autoadjoint.

1. f est autoadjoint donc diagonalisable à valeurs propres réelles. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre. Comme $(f(x) \mid x) = 0$, on en déduit que $\lambda\|x\|^2 = 0$ donc que $\lambda = 0$ car x est non nul en tant que vecteur propre. Donc f est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont nulles donc $f = 0$.
2. On cherche à prouver que $f^2 = f$ en se ramenant à la question précédente. Remarquons que $g = f^2 - f$ est autoadjoint. Et
$$(g(x) \mid x) = (f^2(x) \mid x) - (f(x) \mid x) = (f(x) \mid f(x)) - \|f(x)\|^2 = 0$$
Donc $g = 0$ par la question précédente. Donc f est un projecteur. Donc f est un projecteur orthogonal car il est autoadjoint.

□

⋆ Propriété des endomorphismes de norme triple inférieure à 1

Soit u un endomorphisme de E euclidien de norme triple inférieure à 1. Alors :
$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$$

Démonstration. Exercice difficile. On peut construire

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k(x)$$

qui vaut x sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et tend vers 0 sur $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. Cela permet de montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$$

v_n tend alors vers la projection sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id})$. De plus, v_n est de norme triple inférieure à 1, donc la projection vers laquelle elle tend aussi. Cette projection est donc une projection orthogonale (*cf* une caractérisation de cette section), donc la somme directe prouvée précédemment est orthogonale. □

Remarque. Remarquer qu'on retrouve l'idée de moyenner les puissances qui est présente dans la preuve du théorème de Kakutani (exercice classique de compacité).

△ Réduction des endomorphismes antisymétriques

On dit que u est antisymétrique lorsque $\forall x,\ (u(x) \mid x) = 0$. Alors, la matrice d'un endomorphisme antisymétrique est diagonale par blocs, avec des blocs nuls ou des blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. On procède par récurrence en distinguant si on possède un plan stable ou une droite stable. On utilise le fait que $(u(x)|y) = -(x|u(y))$. □

⋆ Continuité de l'application racine carrée sur les matrices symétriques positives

Soit $M \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques à spectre inclus dans $[0, M]$ est un compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A \mapsto A^2$ est un homéomorphisme de l'ensemble des matrices symétriques positives dans lui-même.

Démonstration. La deuxième question est difficile.

1. Orthodiagonaliser, utiliser la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $[0, M]^n$ puis le fait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
2. Par théorème de cours HP, cette application est bijective. Elle est de plus continue car polynomiale. On veut montrer que sa réciproque est continue. On prend A_p qui tend vers A. On montre que toutes les valeurs d'adhérence de $(A_p^{1/2})$ sont nécessairement $A^{1/2}$ par unicité de la limite et compacité des ensembles mis en jeu (on a alors affaire à des fermés bornés car le spectre des matrices est borné) en utilisant la première question.

□

10.3.5 Endomorphismes autoadjoints positifs

$\Delta\star$ Racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif

On a :

$$\forall u \in S^+(E),\ \exists! v \in S^+(E),\ u = v^2$$

Démonstration. Pour l'existence, orthodiagonaliser et prendre les racines carrées des valeurs propres. Pour l'unicité, on peut montrer que tout candidat est nécessairement égal à notre candidat proposé dans l'existence. Pour cela, on remarque que toute racine carré commute avec l'endomorphisme de départ, puis on considère les endomorphismes induits sur les sous-espaces propres. Les induits des racines carrées sont aussi des endomorphismes symétriques positifs, et alors on ne peut avoir que le candidat proposé dans l'existence. □

Remarque. Souvent, seul l'existence est utile, et cela est pratique car elle se démontre très rapidement.

Remarque. On a évidemment l'équivalent matriciel.

Application. Pseudo-réduction simultanée ; décomposition polaire ; en général, elle permet de symétriser un problème en prenant multipliant par la racine carrée à gauche et à droite.

$\Delta\star$ Décomposition polaire

Pour une matrice inversible M :

$$\exists! O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \exists! S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ M = OS$$

Démonstration. Appliquer l'existence unicité de la racine carrée à $M^T M$. L'existence reste vraie pour une matrice non inversible en utilisant la densité des matrices inversibles et la compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. □

Application. Tout sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est égal à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Matrice extraite principale de taille maximale

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$. On note B la matrice extraite de A obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne.

1. Montrer que si A est positive, alors B l'est aussi.
2. En déduire que $\max \operatorname{Sp}(B) \leqslant \max \operatorname{Sp}(A)$ et $\min \operatorname{Sp}(A) \leqslant \min \operatorname{Sp}(B)$.

Démonstration. Exercice classique.

1. Écrire $(X \mid BX) = (Y \mid AY)$ où $Y = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Ajouter ou enlever à A les matrices $\min(\operatorname{Sp}(A))I_n$ et $\max(\operatorname{Sp}(A))I_n$ pour se ramener à la question précédente.

□

Matrice symétrique de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff r > \quad \text{et} \quad rt > s^2$$

Démonstration. Utiliser le fait que les valeurs propres sont les racines de

$$\chi_A = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det(A)$$

et traduire le fait que $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ sur les racines. □

⋆ Carrés qui commutent

Soit S et T symétriques positives telles que S^2 et T^2 commutent. Montrer que S et T commutent. Est-ce que la conclusion subsiste si l'on suppose seulement les matrices S et T symétriques ?

Démonstration. On peut les co-orthodiagonaliser puis utiliser l'unicité de la racine carré positive d'un endomorphisme positif en connaissant sa forme à partir de la matrice de départ (la racine carrée positive de S^2 est S par unicité). Aucune idée dans le cas général (ce serait étonnant que cela subsiste mais sait-on jamais...) □

⋆ AB diagonalisable

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que AB est diagonalisable. On pourra utiliser une racine carrée.
2. On suppose B positive et on note respectivement λ_A et λ_B les plus grands valeurs propres de A et B. Montrer que toute valeur propre de AB est inférieure ou égale à $\lambda_A \lambda_B$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai si l'on suppose seulement A et B positives.

Démonstration. Exercice difficile.

1. En effet, avec C la racine carrée de A (donc inversible), on écrit :

$$AB = C(CBC)C^{-1} = CP^T DPC^{-1}$$

avec le théorème spectral appliqué à B.

2. Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$(X \mid CBCX) = (CX \mid BCX) \leqslant \lambda_B \|CX\|^2 = \lambda_B (CX \mid CX) = \lambda_B (X \mid AX) \leqslant \lambda_A \lambda_B \|X\|^2$$

Pour un vecteur propre X de AB associé à la valeur propres λ, on obtient :

$$\lambda \|X\|^2 \leqslant \lambda_1 \lambda_B \|X\|^2$$

donc $\lambda \leqslant \lambda_A \lambda_B$.

3. On utilise le fait que la plus grande valeur propre vaut $\max_{\|X\|=1}(X \mid AX)$ puis on raisonne par densité et compacité de la sphère unité.

□

⋆ Ordre de Löwner

Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. on note $A \leqslant B$ pour signifier que $B - 1$ est positive.

1. On suppose B définie positive. Montrer que $A \leqslant B$ si, et seulement si, le spectre de $B \in A$ est majoré par 1.
2. On suppose A et B définies positives. montrer que $A \leqslant B \implies B^{-1} \leqslant A^{-1}$.
3. On suppose A et B définies positives. Montrer que $A \leqslant B \implies A^{1/2} \leqslant B^{1/2}$.

Démonstration. Exercice difficile. A faire... □

$\det(I_n + A^T A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + A^T A) > 0$.

Démonstration. Remarquer que $A^T A$ est symétrique positive. Donc $I_n + A^T A$ est semblable à

$$\mathrm{Diag}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n)$$

où $\forall i,\ \lambda_i \geqslant 0$. Donc

$$\det(I_n + A^T A) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) > 0$$

□

⋆⋆ Blocs principaux de matrices symétriques positives

Les blocs principaux d'une matrice symétrique positive (resp. strictement positive) sont positifs (resp.strictement positifs). Réciproquement, une matrice symétrique dont tous les blocs principaux ont des déterminants strictement positifs est définie positive. Le résultat est faux pour des déterminants positifs.

Démonstration. Pour la première affirmation, il suffit de compléter le vecteur par un vecteur avec des 0. Pour la deuxième, faire une récurrence et des produits par blocs assez moches. □

∆ ⋆⋆ Inégalités sur des déterminants (convexité ou sommes) dans $S_n^+(\mathbb{R})$

Soient A et B des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$. Alors on a :

$$\det(A + B) \geqslant \det(A) + \det(B)$$

et

$$\forall t \in [0, 1],\quad \sqrt[n]{\det((1-t)A + tB)} \geqslant (1-t)\sqrt[n]{\det(A)} + t\sqrt[n]{\det(B)}$$

Démonstration. Il y a deux méthodes :

- Commencer par le cas où $A = I_n$ en orthodiagonalisant B. Ensuite, passer au cas où $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ en prenant $C \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = C^2$ puis écrire :
$$A + B = C(I_n + C^{-1}BC^{-1})C$$
et remarquer qu'en ayant ainsi symétrisé la chose, $C \in BC^{-1} \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Ensuite, raisonner par densité pour le cas général.
- Utiliser la pseudo-réduction simultanée permet de griller des étapes dans la méthode précédente (mais ça coûte plus cher).

□

$\Delta\star$ Égalités de Courant-Fischer

On prend $u \in S(E)$ avec E euclidien de dimension n. On note $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. On note $\mathcal{F}_k$ l'ensemble des sev de E de dimension k. Alors

$$\lambda_k = \inf_{F \in \mathcal{F}_k} \sup_{x \in S \cap F} (x|u(x))$$

Démonstration. Pour cela, prendre une BON de dz de u et montrer que $S \cap F$ a une intersection avec $\mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$ non nulle (Grassmann) puis prendre un vecteur de norme 1 dedans, ce qui montre que tous les sup sont atteints. Pour le sens réciproque, s'intéresser à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et faire le produit scalaire (comme dans le cours). Pour montrer la deuxième égalité :

$$\lambda_{n+1-k} = \sup_{F \in \mathcal{F}_k} \inf_{x \in S \cap F} (x|u(x))$$

on peut appliquer la première égalité à $-u$, ce qui échange essentiellement les sup et les inf. □

Application. Inégalité d'entrelacement, inégalités de Weyl

Rayon spectral et norme d'opérateur

On considère E un espace euclidien muni d'une norme euclidienne $\|\cdot\|$ et N la norme d'opérateur associée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, dont on note $\rho(u)$ le rayon spectral, *ie* la valeur absolue de la plus grande valeur propre.

1. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $N(u) = \rho(u)$.
2. De façon générale, $N(u) = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.

Démonstration. On utilise le théorème spectral.

1. Considérer une base d'orthodiagonalisation, prendre la norme puis minorer les λ^2 par $\rho(u)^2$.
2. Utiliser le résultat précédent en remarquant que $u^* \circ u$ est symétrique (positif même) et utiliser le fait que
$$\|u(x)\|^2 = (u(x) \mid u(x)) = (x \mid u^* \circ u(x))$$

□

Inégalité de Kantorovitch

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, dont on note λ_m la plus petite valeur propre et λ_M la plus grande valeur propre. Montrer l'inégalité de Kantorovitch :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ (X^T A X)(X^T A^{-1} X) \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} + \sqrt{\frac{\lambda_m}{\lambda_M}}\right)^2 (X^T X)^2$$

Démonstration. Poser $a = \sqrt{\lambda_m \lambda_M}$ et étudier la fonction :

$$x \mapsto \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$, convexe et minorée par 2. Conclure avec l'inégalité arithmético-géométrique en écrivant $1 = a/a$ dans le membre de gauche. □

Matrice de Hilbert

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice de Hilbert

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est symétrique définie positive.

Démonstration. Le caractère symétrique ne pose pas de problème vu le caractère symétrique en i et j de la définition de H_n. Pour le caractère défini positif, remarquer que

$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt$$

Faire ensuite le calcul de $X^T H_n X$ pour obtenir une intégrale positif et utiliser le théorème "continue-positive" pour conclure. □

Vers les endomorphismes normaux

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. u commute avec u^* ;
2. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$;
3. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant \|u^*(x)\|$.

on appelle endomorphisme normal tout endomorphisme vérifiant ces trois conditions équivalentes.

Démonstration. On procède à des implications circulaires.

- 1 $\implies$ 2 : soit $x \in E$. On a :

$$\|u(x)\|2 = (u(x) \mid u(x)) = (x \mid u^* \circ u(x)) = (x \mid u \circ u^*(x)) = (u^*(x) \mid u^*(x)) = \|u^*(x)\|^2$$

donc par positivité, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$
- 2 $\implies$ 3 : immédiat
- 3 $\implies$ 1 : alors pour tout $x \in E$, par bilinéarité et symétrie :

$$\left(\underbrace{u^* \circ u - u \circ u^*}_{=v}(x) \mid x\right) \leqslant 0$$

Or, il est clair que $v^* = v$ donc on en déduit que $(v(x) \mid x) \geqslant 0$ et donc $(v(x) \mid x) = 0$. Puis comme v est diagonalisable, toutes ses valeurs propres sont nulles et $v = 0$ (se référer à un exercice de la partie précédente pour les détails). Donc u et u^* commutent.

□

⋆ Endomorphismes normaux

Dans un espace euclidien, un endomorphisme est dit normal lorsqu'il commute avec son adjoint. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice est dite normale lorsqu'elle commute avec sa transposée.

1. Donner des exemples d'endomorphismes normaux.
2. Déterminer les matrices normales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3. Soit u un endomorphisme normal et F un sous-espace vectoriel stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.
4. Démontrer que pour tout endomorphisme normal, il existe une base orthonormée dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{Diag}(a_1 R_{\theta_1}, \ldots, a_p R_{\theta_p}, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$$

où les R_θ sont des matrices de rotation. Retrouver le théorème spectral et le théorème de structure des isométries vectorielles.
5. Montre qu'un endomorphisme u est normal si, et seulement si, u^* est un polynôme en u.
6. Démontrer que le produit de deux matrices normales qui commutent est un matrice normale.

Démonstration. Cet exercice est fondamental car il généralise les notions du cours, et se généralise dans le cadre des espace hermitiens. Remarquons tout de suite qu'être normal pour un endomorphisme équivaut au fait que sa matrice soit normale dans n'importe quelle base.

1. Les endomorphismes symétriques et antisymétriques.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors M est normale si, et seulement si :

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\begin{cases} c = b \quad \text{ou} \quad c = -b \\ ab + cd = ac + bd \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} c = b \\ b(a+d) = b(a+d) \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} c = -b \\ b(a-d) = b(d-a) \end{cases}$$

Ce sont donc exactement les matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3. On écrit

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

la matrice de u dans une base adaptée à $F \oplus F^\perp$. Alors M^T est la matrice de u^* dans cette même base. Or, puisque u est normal, M et M^T commutent. Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} AA^T + BB^T & BD^T \\ DB^T & DD^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & A^T B \\ B^T A & B^T B + D^T D \end{pmatrix}$$

En particulier, $AA^T + BB^T = A^T A$ donc en passant à la trace, $\mathrm{Tr}(BB^T) = 0$. On en déduit que $B = 0$ en explicitant les coefficients de BB^T (classique). Ainsi, M est diagonale par blocs donc $F^\perp$ est stable par u.

4. Il s'agit d'une récurrence forte sur la dimension de l'espace comme dans le cours. L'initialisation est immédiate. Pour l'hérédité, on distingue deux cas et on utilise 3. :

   - si u possède une droite stable, on utilise 3. et on écrit sa matrice dans la base adaptée à la droite et son orthogonal. Cette matrice est diagonale par blocs d'après 3., et le bloc en bas à droite est aussi normal par un produit par blocs, et on conclut par hypothèse de récurrence.
   - sinon, u possède un plan stable, et on fait de même. On utilise alors la question 2 : si la matrice qui correspond au plan est symétrique, on prend une base orthonormée (on n'a pas forcément besoin du théorème spectral, on peut le faire à la main) et dans l'autre cas, on renormalise avec $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour faire apparaître une matrice de rotation. On conclut de même par hypothèse de récurrence.

   Remarquons que les λ sont les valeurs propres de u. Alors, pour une isométrie vectorielle, les valeurs propres valent 1 ou -1 et le déterminant vaut 1 donc les a valent 1. Pour les endomorphismes symétriques, les matrices de rotation doivent être symétriques donc diagonales et on obtient bien le théorème spectral.

5. Le sens réciproque est immédiat. Dans le sens direct, utiliser la question 4 est diagonaliser par blocs la matrice de u en base orthonormée puis utiliser une interpolation de Lagrange.

6. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. On note u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B. Alors u et v sont normaux et $uv = vu$. De plus,

par 5., il existe P et Q tels que $u^* = P(u)$ et $v^* = Q(v)$. Alors, il est clair que $uv^* = v^*u$, $u^*v = vu^*$ et $u^*v^* = v^*u^*$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(uv)(uv)^* &= (uv)(v^*u^*)\\ &= u(vv^*)u^*\\ &= u(v^*v)u^*\\ &= (uv^*)(vu^*)\\ &= (v^*u)(u^*v)\\ &= v^*(uu^*)v\\ &= v^*(u^*u)v\\ &= (v^*u^*)(uv)\\ &= (uv)^*(uv)\end{aligned}$$

donc uv est normal et par conséquent AB est normale.

□

10.3.6 Isométries vectorielles

Combinaison convexe d'isométries

Soit $(u,v) \in \mathcal{O}(E)^2$ et $\lambda \in]0,1[$. On suppose que $(1-\lambda)u + \lambda v \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $u = v$.

Démonstration. Soit $x \in S$ la sphère unité. Alors $u(x) \in S$ et $v(x) \in S$. Or, $(1-\lambda)u(x)+\lambda v(x) \in S$, donc par stricte convexité de la boule unité, $u(x) = v(x)$. Donc u et v coïncident sur S donc sur E tout entier par homogénéité. □

Diagonalisabilité des matrices orthogonales sur $\mathbb{C}$

Une matrice $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est-elle nécessairement diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Démonstration. Oui car elle est normale (commute avec sa transposée) donc est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. □

Une borne sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n$$

Démonstration. Notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| &= \left|\left(\sum u(e_i) \mid \sum e_i\right)\right| \\ &\leqslant \sqrt{\left(\sum u(e_i) \mid \sum u(e_i)\right)}\sqrt{\left(\sum e_i \mid \sum e_i\right)} \\ &= \sqrt{n}\sqrt{n} \\ &= n\end{aligned}$$

□

Autour des isométries et des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   - $\forall x \in E,\ (x \mid u(x)) = 0$;
   - $u^* = -u$
2. Montrer que deux quelconques des trois propositions suivantes impliquent la troisième :
   - u est une isométrie ;
   - $u^2 = -\mathrm{Id}_E$;
   - $\forall x \in E,\ (x \mid u(x)) = 0$

Démonstration. Cela se fait sans trop de problème.

1. Dans le sens direct, l'écrire pour $x + y$ et développer en réutilisant l'hypothèse pour x et y. Réciproquement, utiliser la définition de l'adjoint et le fait que $\mathbb{R}$ est de caractéristique nulle.
2. Cela se fait très bien. On pourra utiliser la première question.

□

$\Delta\star$ Un classique sur les isométries

Déterminer les endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien qui conservent l'orthogonalité.

Démonstration. Exercice classique difficile. On remarque que si x et y ont même norme, $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux. Cela prouve qu'une tel endomorphisme est constant ur la sphère unité, et donc que c'est k fois une isométrie. Réciproquement, cela est clairement suffisant. □

$\star$ Sous-groupe compact contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Soit G un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser la décomposition polaire.

Démonstration. On utilise la décomposition polaire pour prouver que la matrice diagonale est dedans. En prenant la suite des puissances de la matrice diagonale, on en déduit que celle-ci est nécessairement l'identité comme G est compact. Donc la matrice symétrique est l'identité et la matrice qu'on a considérée initialement est orthogonale. Et l'inclusion réciproque est donnée par hypothèse. □

⋆ Caractérisation des endomorphismes orthogonaux

Soit E un espace euclidien et $u : E \to E$ une fonction telle que

- $u(0) = 0$;
- $\forall (x, y) \in E^2,\ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$

Montrer que f est un endomorphisme orthogonal. On pourra d'abord montrer que f conserve le produit scalaire.

Démonstration. En utilisant le fait $u(0) = 0$, il est immédiat que f conserva la norme. Par polarisation, on en déduit que f conserve le produit scalaire. Ensuite, on note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Par conservation du produit scalaire, $u(e)$ est une base orthonormée de E. Ainsi :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{k=1}^{n} (u(x), u(e_k))\, u(e_k)$$

(expression dans une base orthonormée). Or, par conservation du produit scalaire :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{k=1}^{n} (x, e_i)\, u(e_i)$$

et cette dernière expression est linéaire en x par linéarité à gauche du produit scalaire, si bien que u est linéaire. Ainsi, u est linéaire et conserve la norme, donc $u \in \mathcal{O}(E)$. □

10.3.7 TD Châteaux

Décomposition polaire

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe un unique couple (U, S) où U orthogonale et S est symétrique définie positive tel que $A = US$.

Propriétés topologiques des matrices

1. Théorème de Jacobi-Sylvester : soi $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note Δ_k le déterminant de la matrice formée des k premières lignes et k premières colonnes de A. Démontrer que
$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \Delta_k > 0$$
On pourra procéder par récurrence pour l'implication réciproque.
2. En déduire que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bien définie, continue et bijective. montrer que sa bijection réciproque est continue.
4. Montrer que l'application $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bien définie, continue et surjective.
5. Justifier que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit G un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. indication : on pourra utiliser la décomposition polaire.
7. Démontrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Projecteurs orthogonaux

1. Soit p un projecteur de E. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
   (i) p est un projecteur orthogonal ;
   (ii) $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$;
   (iii) p est symétrique.
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
   a. Montrer que $p \circ q = 0 \implies q \circ p = 0$.
   b. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p et q commutent.
   c. Montrer que c'est le cas si les valeurs propres non nulles de $p + q$ sont supérieures à 1.
3. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
   a. Montrer que les valeurs propres de $p \circ q$ sont comprises entre 0 et 1.
   b. Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker} q \oplus (\mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p))$
   c. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable. Indication : on considérera $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Décomposition de Choleski et applications

1. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique sous la forme AA^T où A est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Indication : appliquer la décomposition QR à la racine carrée.
2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
   a. Montrer que pour tout i, $a_{i,i} \geqslant 0$.
   b. Montrer que $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Indication : utiliser la décomposition de Choleski.

   Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ s'écrivant par blocs

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}$$

   avec $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Montrer que $\det(B) > 0$, puis que $\det(A) \leqslant \det(B)\det(D)$. retrouver le résultat de la question précédente.

Chapitre 11

Inégalités : minorations et majorations

Table des matières

11.1 Astuces

Utilisation du binôme de Newton

Pour majorer ou minorer $(1+u)^n - 1$, penser au binôme de Newton et écrire :

$$(1+u)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k$$

Ensuite, majorer ou minorer en ne conservant que certains termes de la somme.

Minoration d'une somme géométrique

Pour $t \geqslant 0$, l'inégalité arithmético-géométrique permet d'obtenir l'inégalité :

$$\sum_{k=0}^{n} t^k \geqslant (n+1)t^{n/2}$$

En général, cette inégalité est très utile et permet parfois de conclure un exercice à elle seule.

Exponentielles négatives

Pour des exponentielles négatives, *ie* de la forme $e - ax$ avec $a > 0$, on peut obtenir des inégalités pour $x \geqslant 0$ *via* l'inégalité de Taylor-Lagrange puisque les dérivées n-èmes sont bornées.

Une inégalité utile

Se souvenir que pour deux f et g des fonctions croissantes, on a toujours l'inégalité :

$$\forall (x, y),\ (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geqslant 0$$

Application. Pour f et g croissantes continues par morceaux sur $[0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 f \times \int_0^1 g \leqslant \int_0^1 fg$$

On a un résultat analogue sur les espérances (qui permet d'ailleurs de démontrer le résultat précédent sur les intégrales en passant par les sommes de Riemann).

Inégalité de Jensen pour les espérances

Si X est une variable aléatoire discrète réelle d'espérance finie à valeurs dans un intervalle I et si est f est une fonction convexe sur I, alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$$

Démonstration. On sait alors que $\mathbb{E}[X] \in I$. Par conséquent, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(\mathbb{E}[X]) + C(x - \mathbb{E}[X])$$

Il suffit alors de composer par X et d'utiliser la croissance de l'espérance en utilisant le fait que $X - \mathbb{E}[X]$ est centrée. $\square$

Inégalité de Jensen pour les intégrales

Si $f : [a, b] \to I$ est continue par morceaux et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors :

$$\varphi\left(\int_a^b f\right) \leqslant \int_a^b \varphi \circ f$$

Démonstration. Passer par les sommes de Riemann et utiliser l'inégalité de Jensen dans les sommes de Riemann. Passer à la limite dans l'inégalité pour conclure. $\square$

Cosinus hyperbolique et exponentielle

En utilisant un développement en série entière et le fait que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (2k)! \geqslant 2^k k!$$

on peut montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \cosh(t) \leqslant e^{t^2/2}$$

Application. Cette inégalité est très utile en probabilités pour démontrer des inégalités de concentration à partir de l'inégalité de Markov.

Utilisation particulière de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

On peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec uniquement des 1 pour obtenir :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

1-lipschitzianité du sinus

On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$$

Pour le redémontrer rapidement, utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Inégalités de convexité

Pour les inégalités de convexités avec des fonctions usuelles, penser à faire un schéma pour faire apparaître les tangentes, mais aussi les cordes ! On obtient par exemple :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

$$\forall x \in [0,1],\ 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + (e-1)x$$

Racines n-èmes de produits de sommes

pour des inégalités faisant intervenir des racines n-èmes de produits de sommes, on peut utiliser le fait que la fonction

$$x \mapsto \ln(1+e^x)$$

est convexe sur $\mathbb{R}$ (le prouver en la dérivant deux fois). Cela permet notamment d'obtenir, pour a_i et b_i des réels positifs, l'inégalité :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} (a_i+b_i)}$$

Renormalisation

Lorsqu'on souhaite démontrer des inégalités assez complexes, penser à renormaliser pour obtenir une inégalité plus simple à démontrer.

Application. Inégalités de de Hölder et de Minkowski

Inégalité de Young

Soit $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ (on dit que les exposants p et q sont conjugués). Alors, on dispose de l'inégalité de Young :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Démonstration. Si $x=0$ ou $y=0$, le résultat est trivial. Supposons $x>0$ et $y>0$. Alors :

$$xy = \exp\left(\frac{p\ln(x)}{p} + \frac{q\ln(y)}{q}\right) \leqslant \frac{\exp(p\ln(x))}{p} + \frac{\exp(q\ln(y))}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

par convexité de la fonction exponentielle. □

Inégalité de Hölder

Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ainsi que $p>1$ et $q>1$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Alors, on dispose de l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration. Commencer par supposer les sommes du membre de droite égales à un, et le faire alors en sommant l'inégalité de Young. Dans le cas général, renormaliser par ces sommes pour se ramener au cas traité précédemment (sauf si les sommes sont nulles, mais alors c'est que tous les coefficients sont nuls et le cas est trivial). □

Application. En particulier, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsqu'on prend $p = q = 2$.

Inégalité de Minkowski

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ ainsi que $p \geqslant 1$. On dispose de l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration. Si $p = 1$, c'est l'inégalité triangulaire usuelle. Supposons $p > 1$ et remarquons alors que les exposants p et $q = \dfrac{p}{p-1}$ sont conjugués. Ensuite, écrire

$$|x + y|^p \leqslant (|x| + |y|) \times |x + y|^{p-1}$$

puis appliquer l'inégalité de Hölder. □

Inégalité de Young sur les intégrales

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathbb{C}^1$ bijective. Alors, on dispose de l'inégalité :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ xy \leqslant \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^y f^{-1}(t)\ dt$$

avec égalité si, et seulement si, $y = f(x)$.

Démonstration. Faire la différence des deux membres en fixant x (ou y, au choix). □

Inégalité de réordonnement

Soit $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ des réels. Alors :

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Démonstration. Procéder par récurrence sur n. Pour l'hérédité, isoler les termes d'indice $n + 1$ et appliquer l'hypothèse de récurrence avec une permutation et une transposition de $[\![1, n]\!]$. □

Convexité de la norme au carré

L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est convexe.

Démonstration. L'inégalité triangulaire et l'homogénéité donnent l'inégalité sans les carrés, puis on utilise la convexité de la fonction $x \mapsto x^2$. □

Utilisation des coordonnées polaires pour des fonctions de deux variables

Pour une fonction de deux variables réelles, pour chercher des *extrema*, des majorations ou des minoration s sur un cercle, on peut essayer de passer en coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ puis faire de la trigonométrie.

Log-convexité

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors $\ln\circ f$ est convexe si, et seulement si,

$$(f')^2 \leqslant f \times f''$$

Cette inégalité peut parfois découler de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en particulier lorsque f est une intégrale à paramètre. L'équivalence se prouve en dérivant deux fois $\ln\circ f$.

Application. Fonction Gamma.

11.2 Exercices classiques

Approximation rationnelle

Soit α un réel.

1. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors il existe un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que
$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$$
2. On suppose $\alpha \notin \mathbb{Q}$. En utilisant le principe des tiroirs sur les parties fractionnaires de $0, \alpha, \ldots, n\alpha$, montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qn}$$
En déduire la réciproque de la question précédente.
3. $\star$ On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$ est racine d'un polynôme P de degré n à coefficients entiers. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que
$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{\delta}{q^n}$$

Chapitre 12

Suites et séries numériques

Table des matières

12.1 Points méthode

Utilisation d'une série télescopique

Pour étudier la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut penser à étudier éventuellement la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$.

Règle $n^\alpha u_n$

On a les différents cas.

- Si $\exists \alpha > 1\ :\ n^\alpha u_n \to 0$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
- Si $\exists \alpha \leqslant 1\ :\ n^\alpha u_n \to +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.
- Si $\exists M \geqslant m > 0\ :\ m \leqslant n^\alpha u_n \leqslant M$, alors $\sum u_n$ est de même nature que $\sum n^{-\alpha}$.

Comparaison série/intégrale

Pour une comparaison série intégrale avec monotonie, on fait un dessin !

Équivalent d'un reste

Lorsque u_{n+1}/u_n admet une limite non nulle différente de 1, pour trouver un équivalent du reste, on peut sommer l'équivalent $u_{n+1} \sim l u_n$. Si (u_n) et positive sommable et vérifie ces conditions, on peut montrer alors que

$$R_n \sim \frac{u_n}{1-l}$$

Étude d'une suite récurrente

Dans l'ordre :

- Faire un dessin ;
- Trouver un intervalle stable ;
- Déterminer le signe de $f - \mathrm{id}$, la potentielle croissance de f (assure la monotonie de la suite) ou la potentielle décroissance de f (assure les monotonies de (u_{2n}) et (u_{2n+1})) ;
- Résoudre $f(x) = x$ et utiliser la continuité.

12.2 Astuces

Fonction de décalage

Quand on travaille sur des sommes avec des suites : parfois introduire le shift, à savoir l'application $(u_n)_{\in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et avec un peu de chance on pourra ensuite utiliser la formule du binôme de Newton sur les endomorphismes.

Étude de produits infinis

Pour l'étude d'un produit infini, on veut passer au logarithme mais il faut s'assurer que tous les facteurs sont strictement positifs avant. Sinon, on peut songer à les grouper : par exemple si les facteurs de $\prod_{k\geqslant 0} a_k$ sont tous strictement négatifs, alors on peut considérer

$$\sum_{k\geqslant 0} \ln(a_{2k}a_{2k+1})$$

Astuce pour ne pas s'embêter avec une somme

Quand on travaille avec $\sum_{k=1}^{n} a_k$, pour éviter d'avoir une discussion à faire, on peut décider de prendre $a_k = 0$ pour $k > n$ et travailler directement sur $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Conjugué algébrique et binôme de Newton

Quand on voit la suite $((1+\sqrt{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut penser à introduire $((1-\sqrt{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est le conjugué algébrique !). L'avantage est que le binôme de Newton assure que $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ est un entier ! Il faut penser à la même chose face à $(1+\sqrt{k})^n$ en général.

Application. Pour approfondir, on pourra remarquer que remplacer une suite géométrique de raison $1+\sqrt{2}$ par une suite géométrique de raison $1-\sqrt{2}$ permet de mieux contrôler : en effet, $|1-\sqrt{2}| < 1$ donc cette suite géométrique tend vers 0.

Utilisation d'un $\ln$

Pour montrer l'existence d'une limite d'une suite (u_n) ou d'une fonction f strictement positive, on peut montrer que la suite des logarithmes converge : on peut établir la convergence de $(\ln(u_n))_n$ ou bien de $\ln(f)$.

Application. Produits infinis typiquement, on ne peut pas faire autrement.

Utilisation des DL dans un cadre plus large

Si on a besoin de faire un développement limité pénible dans le cadre d'une preuve plus large, ne pas s'embêter à calculer les coefficients s'ils ne sont pas triviaux : on les note α, β, etc. pour faire les calculs et on les détermine après si besoin.

Utilisation des restes

Pour des séries dans lesquelles des restes (éventuellement d'autres séries !) interviennent dans le terme général, penser à utiliser le fait que $u_n = R_n - R_{n+1}$

Application. Nature des séries $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ lorsque $\sum u_n$ diverge en fonction de α, et un résultat avec des restes dans l'autre cas.

Amélioration du critère de divergence

Pour montrer que $\sum u_n$ diverge, on peut montrer qu'une tranche $\sum_{k=a(n)}^{b(n)} u_k$ ne converge pas vers zéro (par exemple en minorant le module ou la valeur absolue) quand $n \to +\infty$, en choisissant bien a et b telles que $a(n) \to +\infty$ et $b(n) \to +\infty$ avec $(b(n) - a(n))$ bornée. On étend ainsi le critère de divergence grossière, qui ne considère qu'un unique terme, pour considérer toute une tranche.

Pousser un développement asymptotique plus loin

Pour l'étude des suites implicites, idées pour obtenir un DL ou un DA à l'ordre suivant : par exemple pour

$$u_n = \alpha + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

il y a deux possibilités : on peut chercher un équivalent de $un - \alpha - \frac{1}{n}$ ou bien de $n(u_n - \alpha) - 1$. Penser aux deux et utiliser le plus simple !

Passer un équivalent au ln

Si (a_n) et (b_n) sont à valeurs strictement positives et tendent vers 0 ou $+\infty$, alors

$$a_n \sim b_n \Longrightarrow \ln(a_n) \sim \ln(b_n)$$

En effet, la différence est un $o(\ln(a_n))$.

Règle de Raabe-Duhamel (HP)

Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives vérifiant :

$$u_n = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a les résultats suivants :

- si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge ;
- si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge ;
- lorsque $\alpha = 1$, on ne peut pas conclure. Les séries de Bertrand couvrent tous les cas possibles.

Cela se prouve en comparant à $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour β entre 1 et α, en faisant le quotient de de deux termes consécutifs de (v_n) et avec la règle de d'Alembert.

Utilisation d'un développement asymptotique du terme général

Sommation par tranches

Transformation d'Abel

Utilisation d'une primitive

Technique de l'équation différentielle

Si notre suite est définie par récurrence, on peut essayer de trouver une équation différentielle discrète vérifiée par la suite. On intègre ensuite cette équation différentielle pour trouver la une expression approchée de ce que devrait être notre suite. On trouve ensuite un équivalent de la série télescopique associée, avant de somme les relations de comparaison. Auparavant, on aura étudié la monotonie de la suite ou sa convergence pour justifier les DL effectués plus tard. **Ainsi, pour déterminer cette équation différentielle, on doit effectuer des DL**.

Application. Voici un exemple expliqué : on prend $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Cette suite est bien définie et par concavité de ln elle décroît. Elle est minorée par 0 donc converge d'après le théorème de la limite monotone. cette limite est nécessairement 0, c'est le seul point fixe de $x \mapsto x - \ln(1+x)$. Ainsi :

$$u_{n+1} \approx u_n - \frac{u_n^2}{2}$$

Ainsi, (u_n) vérifie une quasi équation différentielle de la forme :

$$u' = -\frac{u^2}{2}$$

En intégrant, on obtient qu'on devrait avoir

$$\frac{1}{u} = \frac{x}{2}$$

On étudie alors la suite télescopique de $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ En effet, on a alors :

$$v_n = \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{1-\frac{u_n}{2}+o(u_n)} - 1\right) = \frac{1}{u_n}\left(1+\frac{u_n}{2}+o(u_n)-1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

En somme ensuite les relations de comparaison (ou on utilise le théorème de Cesaro) pour obtenir, après passage à l'inverse :

$$u_n \sim \frac{2}{n}$$

Application. Suite définies par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$ (très difficile, pour l'équation différentielle, connaître l'équivalent du dilogarithme avec la fonction de répartition des nombres premiers et l'équivalent de cette fonction de répartition en $x/\ln(x)$).

12.3 Exercice classiques

12.3.1 Suites

Valeurs d'adhérences et suite qui tend vers l'infini en ralentissant

Soit (u_n) une suite de réels tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ est le segment $[0, 1]$. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\exp(2i\pi u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Commencer par faire un dessin ! Puisque la différence tend vers 0, la suite va aller de plus en plus doucement, mais elle doit continuer à avancer pour tendre vers $+\infty$. Donc sa partie fractionnaire va toujours repasser à ε près d'un élément du segment. Cela se formalise correctement mais c'est plus clair avec les mains. On en déduit, en écrivant

$$\exp(2i\pi u_n) = \exp(2i\pi(u_n - \lfloor u_n \rfloor))$$

que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\exp(2i\pi u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $\mathbb{U}$ tout entier. □

Application. Cela montre par exemple que $\cos(\ln(n))$ n'admet pas de limite en $+\infty$, ce qui peut servir dans des déterminations de natures de séries.

Suites de Cauchy

Montrer qu'une suite réelle converge si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Démonstration. Le sens direct est immédiat en utilisant la définition de la limite et l'inégalité triangulaire. Pour le sens réciproque, on montre d'abord qu'une suite de Cauchy est bornée, puis qu'elle admet au plus une valeur d'adhérence. □

Une limite

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$$

Démonstration. Cette limite vaut
$$\int_0^1 x\sin(x)\ dx$$
En effet, il suffit de se ramener à
$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$
et d'utiliser le théorème sur les sommes de Riemann. Pour prouver qu'on peut s'y ramener légitimement, majorer l'erreur commise en remplaçant $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ par $\frac{k}{n^2}$. □

Δ⋆ Lemme de Fekete (ultra classique à connaître)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sous-additive, *ie* telle que $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ u_{p+q}\leqslant u_p+u_q$. Alors on a :
$$\frac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \text{où} \quad l=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n}\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$

Démonstration. On traite séparément plusieurs cas :

- si $l=0$, on passe par les ε en prenant n_0 tel que u_{n_0}/n_0 soit ε proche de l. On effectue alors une division euclidienne de n par n_0 et on majore par sous-additivité et une inégalité de partie entière.
- si $l\in\mathbb{R}$, on se ramène au cas précédent en posant $v_n=u_n-ln$ qui est tout aussi sous-additive.
- si $l=-\infty$, on utilise la même idée que dans le premier cas, mais il faut faire un peu plus attention car l'inégalité de partie entière s'inverse puisque la suite est à valeurs négatives APCR.

□

Application. Sert pas mal dans des exercices assez complexes de probabilités où on demande une limite de $\mathbb{P}(X=n)^{1/n}$ par exemple : en effet, si on peut passer au ln, il y a des chances que la nouvelle suite soit sous-additive.

Δ⋆ Formule d'inversion de Pascal

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Montrer la formule d'inversion de Pascal :
$$\forall p\in\mathbb{N},\ u_p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}v_k \iff \forall p\in\mathbb{N},\ v_p=(-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}u_k$$

Démonstration. On peut le faire :

- à la main, en remarquant que
$$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}=\binom{n}{i}0^{n-i}$$

en calculant le coefficient en x^{n-i} dans le DSE $\exp(x)\exp(-x) = 1$ ou bien en se ramenant à un binôme. Ensuite, intervertir les sommes et utiliser ce lemme pour prouver le résultat ;

- matriciellement ,en écrivant matriciellement la relation supposée, puis en inversant la matrice pour obtenir la relation voulue. Pour inverser la matrice, on remarquera que $X = X - 1 + 1$ et on utilisera le binôme de Newton (comme d'habitude pour une matrice dont les coefficients sont des coefficients binomiaux) ;
- par récurrence sur n ;
- avec des polynômes, ce qui ressemble à un mélange des deux premiers points.

□

12.3.2 Comparaison et convergence

Nature d'une série en fonction d'un paramètre réel

Nature de la série de terme général $\exp\left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - a\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$

Démonstration. Si $a \neq e$, on a divergence grossière. Dans le cas où $a = e$, un DL donne un équivalent en

$$\frac{3e}{2n}$$

donc la série diverge par comparaison avec la série harmonique. □

12.3.3 Séries à termes généraux positifs

Suites réelles décroissantes sommables

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante dont la série de terme général converge. Alors :

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Démonstration. En effet, on travaille sur une tranche de Cauchy de taille n et on utilise la décroissance de la suite. Cela donne le résultat pour $(2nu_{2n})$. On l'obtient alors facilement en majorant pour $((2n+1)u_{2n+1})$, et cela permet de conclure. □

△ Condensation

1. Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.
2. Retrouver la nature de :
   (a) $\sum \frac{1}{n^a}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}_+^*$;
   (b) $\sum \frac{1}{n^a \ln^b(n)}$ en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$

Démonstration. 1. Cela se fait bien. Prendre des tranches de tailles 2^n.

2. Appliquer le critère précédent permet de retrouver le comportement des séries de Riemann et de Bertrand très facilement.

□

Mieux que Stirling !

On fixe un réel positif x. Donner un équivalent de

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (x + k^2)$$

(on ne déterminera pas la constante multiplicative).

Démonstration. Diviser P_n par $(n!)^2$ puis passer au ln et le terme général de la série obtenu est équivalent à un $\frac{x}{k^2}$ donc la série converge. L'équivalent est donc

$$e^C (n!)^2$$

où C est la somme de la série convergente des $\ln\left(1 + \frac{x}{k^2}\right)$. □

Puissances de inverses des nombres premiers

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ pour que

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^\alpha}$$

soit une série convergente.

Démonstration. La CNS est $\alpha > 1$. Pour montrer que cela est suffisant, majorer par une série de Riemann convergente. Ensuite, si $\alpha = 1$, utiliser le fait que

$$\frac{1}{p} \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

De la sorte, développer le produit

$$\prod_{p \leqslant m} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

pour le minorer par la série harmonique et conclure à une divergence en prenant le ln. Lorsque $\alpha < 1$, utiliser le fait que

$$\frac{1}{p^\alpha} \geqslant \frac{1}{p}$$

□

Injection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction injective. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^2}$$

Démonstration. Cette série est divergente. On peut utiliser une inégalité de réordonnement pour minorer par le cas où f est l'identité. Sinon, utiliser un principe des tiroirs pour minorer f à partir d'un certain rang. □

12.3.4 Séries à termes généraux quelconques

Produit de Cauchy et Cesàro

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et soit (a,b) $\mathbb{C}^2$ tels que $a_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} b$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} ab$

Démonstration. Adapter la preuve de Cesàro vue en cours (oui, les ε sont de sortie...). Cette fois, il faut couper aux deux extrémités de la somme, on ne pourra contrôler que le milieu. □

Cesàro binomial

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente complexe de limite l. Montrer que

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

On pourra commencer par le cas où $l = 0$.

Démonstration. Adapter la preuve vue en classe de Cesàro vue en classe. Dans un premier temps, supposons que $l = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Longrightarrow |a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Fixons un tel rang. Aussi, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Longrightarrow \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n}{k} a_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

puisqu'on a une somme d'un nombre fini de termes qui sont tous dominés par n^{n_1}, donc ces termes sont tous négligeables devant 2^n. Fixons un tel rang. Ensuite, posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant n_0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| &\leqslant \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n}{k} a_k \right| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=n_1+1}^{n} \binom{n}{k} |a_k| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=n_1+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité.

Désormais, ne nous restreignons plus au cas $l = 0$. Il suffit alors d'appliquer le résultat qui précède à la suite $(a_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend bien vers 0. Une simple somme de limites permet alors de conclure. ☐

⋆ Une hypothèse logarithmique

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f'/f est définie au voisinage de $+\infty$ et tend vers une limite non nulle λ. Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.

Démonstration. Immédiatement penser à une dérivée de $\ln \circ |f|$. Utiliser une intégrale pour obtenir le comportement de $\ln \circ |f|$ et remonter à la série de terme général $f(n)$. ☐

Une nature de série

Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 5n + 3})$

Démonstration. Faire un développement asymptotique du terme général. ☐

Une deuxième nature de série

Nature de la série de terme général $u_n(-1)^n \dfrac{\cos(\sqrt{n})}{n}$

Démonstration. Poser $v_n = (-1)^n \dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{n}$. Montrer que la série de terme général $v_{2n} + v_{2n+1}$ converge en faisant un développement asymptotique. Cela donne le fait que les sommes partielles impaires convergent. Mais comme le terme général tend vers 0, les sommes partielles paires convergent vers la même limite donc OK. □

Une troisième nature de série

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$

Démonstration. Regrouper par paquets pour se débarrasser de la partie entière. □

Une quatrième nature de série

Nature des séries de termes général $\sin(\pi e n!)/n$ et $\sin(\pi e n!)$.

Démonstration. Les deux sont convergentes. Utiliser la stratégie habituelle en écrivant e comme la somme de la série des inverses des factorielles pour obtenir le terme général comme un $(-1)^{A_n}\sin(C_n)$. Dans le premier cas, le critère de Riemann suffit à conclure, mais dans le deuxième cas, il faut travailler un peu plus pour se ramener au critère des séries alternées. □

$\Delta\star$ Utilisation des stratégies intégrales

Nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{\sqrt{n}} \quad ; \quad v_n = \frac{\cos(\ln(n))}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$$

Démonstration.
- Pour la première, utiliser la stratégie de l'IPP pour trouver la bonne suite annexe à considérer : en l'occurrence, c'est $\dfrac{\sin(n\pi/2 - \pi/6)}{\sqrt{n}}$ puis faire un DL de la suite télescopique associée. On obtient finalement une convergence.
- Pour la deuxième, utiliser la stratégie de la primitive pour poser la bonne suite annexe qui est $\sin(\ln(n))$. On obtient finalement une divergence.
- Enfin, soit on reconnaît la partie imaginaire de l'exemple du cours (qui se fait avec une IPP), soit on fait l'IPP soi-même et on considère la suite annexe de terme général $\dfrac{\cos(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ dont on fait un DA de la série télescopique associée. On trouve finalement une convergence.

□

$\Delta\star$ Utilisation de développements asymptotiques

Nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n+(-1)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \sin\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

Démonstration. Pour la première, faire un développement asymptotique puis utiliser la stratégie de l'IPP. On trouve une convergence. Pour la deuxième, faire un développement asymptotique puis faire une stratégie de l'IPP, linéariser $\sin^3$ puis refaire une stratégie de l'IPP. On trouve une convergence. □

$\star$ Une dernière fois des intégrales

Nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Utiliser une primitive pour trouver la suite annexe $v_n = e^{i\sqrt{n}}$. Faire un développement asymptotique de $v_{n+1} - v_n$ pour tomber sur u_n, $e^{i\sqrt{n}}/n$ et un grand O de $n^{-3/2}$. Comme dans le cours, la série de terme général $e^{i\sqrt{n}}/n$, en faisant une intégration par parties pour obtenir la bonne suite annexe, converge. Or, (v_n) n'admet pas de limite (classique car la racine tend vers l'infini mais la différence de deux termes consécutifs tend vers 0). Par conséquent, comme la série des u_n possède la même nature que celle des $v_{n+1} - v_n$, la série de terme général u_n diverge. □

$\star\star$ Une caractérisation des fonctions localement linéaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout série réelle convergente $\sum u_n$, la série $\sum f(u_n)$ converge.

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0.
2. Montrer que f est impaire au voisinage de 0.
3. On veut montrer qu'il existe un intervalle ouvert $\mathcal{V}$ contenant 0 tel que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}^2,\ x+y \in \mathcal{V} \implies f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   En supposant ce résultat faux, montrer qu'il existe des suites (x_n) et (y_n) de limites nulles telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n+y_n) - f(x_n) - f(y_n) > 0$$

   et en déduire une contradiction en construisant une série dont les termes sont à choisir parmi les suites (x_n+y_n), (x_n) et (y_n).
4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert contenant 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathcal{V},\ f(x) = \lambda x$$

   .

Démonstration. 1. $\sum 0$ converge donc $\sum f(0)$ aussi donc $f(0) = 0$. Ensuite, on raisonne par l'absurde en construisant une suite (x_n) qui est un grand O de 2^{-n} telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ pour lequel $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x_n)| \geqslant \varepsilon$. On obtient alors la continuité en 0.

2. On raisonne par l'absurde en prenant à chaque fois $x_n \in \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right]$ tel que $f(-x_n) \neq f(x_n)$. Puis on construit une suite avec n_0 fois x_0 puis n_0 fois $-x_0$, etc. où $n_k|f(-x_k)+f(x_k)| \geqslant 1$. Une série de terme général cette suite converge, mais la série des images diverge par construction.
3. On construit la suite comme suggéré par l'énoncé, avec comme précédemment des valeurs plus petites que 2^{-n} en valeur absolue. On prend alors n_0 fois $x_0 + y_0$, puis n_0 fois $-x_0$ puis n_0 fois $-y_0$, etc. avec les n_k comme précédemment. On conclut de même à une absurdité.
4. C'est un exercice classique mais il faut ici faire attention au domaine de validité des résultats précédents. Cela ne change pas la méthode à appliquer et le résultat.

□

⋆⋆⋆ Théorème de Riemann

Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe σ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = x$$

Démonstration. Cet exercice est redoutable. Il me semble que l'idée est de prouver dans un premier temps qu'il y a nécessairement une infinité de termes strictement négatifs et une infinité de termes strictement positifs. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, on construit notre bijection de la façon suivante :

- tant que la somme partielle est inférieure à x, on pioche dans les termes strictement positifs et on prend ce terme comme étant le suivant pour notre bijection ;
- si la somme partielle dépasse strictement x, on pioche dans les termes strictement positifs.

Il faut alors prouver que la fonction obtenue est bien une bijection. L'injectivité est rapide, mais la surjectivité est plus embêtante (je crois qu'on peut raisonner par l'absurde). Enfin, il faut montrer que la série obtenue par réordonnement converge et est de somme x, ce qui se comprend bien, mais il me semble là encore qu'on peut le prouver en raisonnant par l'absurde. □

12.3.5 Comparaison série-intégrale

Équivalent de ζ en 1^+

Donner un équivalent en 1^+ de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Démonstration. Un comparaison série-intégrale (et le dessin qui s'impose avec) fournissent rapidement :

$$\zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

□

△ Sommes partielles et comparaison série-intégrale

Soit $\sum u_n$ une série divergente à terme général strictement positif. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

En déduire qu'il existe une série divergente $\sum v_n$ à terme général positif telle que $v_n = o(u_n)$.

Démonstration. Écrire

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha}$$

et interpréter ceci comme une intégrale. Remarquer ensuite que (S_n) est croissante et tend vers $+\infty$. Effectuer une comparaison série-intégrale avec une fonction puissance. Je crois (à vérifier, je ne suis pas sûr) que la limite de la convergence est autour de $\alpha = 1$. □

△ Restes et comparaison série-intégrale (dual du précédent)

Soit $\sum u_n$ une série convergente à terme général strictement positif. On pose

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série

$$\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$$

En déduire qu'il existe une série convergente $\sum v_n$ à terme général positif telle que $u_n = o(v_n)$.

Démonstration. Écrire

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n^\alpha}$$

et interpréter ceci comme une intégrale. Remarquer ensuite que (R_n) est décroissante et tend vers 0. Effectuer une comparaison série-intégrale avec une fonction puissance. Je crois (à vérifier, je ne suis pas sûr) que la limite de la convergence est autour de $\alpha = 1$. □

12.3.6 Recherche d'équivalents

⋆ Développement asymptotique

Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Donner un développement asymptotique à 2 termes puis à 3 termes de u_n.

Démonstration.

- Pour obtenir l'équivalent, faire une comparaison série-intégrale avec

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

qui est décroissante à partir de e. On obtient, en faisant un dessin (essentiel) et le calcul les intégrales, l'équivalent :

$$u_n \sim \frac{1}{2}\ln(n)^2$$

- Ensuite, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}\ln(n)^2$. On montre en faisant des DL que

$$v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc (v_n) converge vers une constante C.

- On pose $w_n = v_n - C$. Un calcul analogue donne

$$w_{n+1} - w_n \sim -\frac{1}{2} \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2}}_{\text{positif sommable}}$$

On somme les relations de comparaison (cas convergent) pour avoir

$$w_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n^2}$$

car $w_n \to 0$. Ensuite, on fait encore une comparaison série-intégrale suivie d'une IPP qui donne

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n^2} \sim \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}$$

On en déduit finalement le développement asymptotique :

$$u_n = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

□

12.3.7 Suites récurrentes

Une étude de suite récurrente

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Donner la limite de la suite (u_n) puis un équivalent de la suite (u_n).
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Démonstration. 1. On vérifie la stabilité, la décroissance et tout le bazar. Le théorème de la limite monotone et l'étude des points fixes d'une fonction bien choisie donne une limite $l = 0$. On applique ensuite la stratégie de l'équation différentielle et on pose la suite annexe $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. On obtient $v_{n+1} - v_n \equiv 1$ puis on somme les relations de comparaison, on télescope tout ça, on enlève ce qui ne sert à rien puis en repassant à l'inverse on trouve

$$u_n \sim \frac{1}{u_n}$$

2. On pose $w_n = v_n - n$: **TOUJOURS TRAVAILLER SUR LA SUITE ANNEXE QUI NOUS A PERMIS D'OBTENIR L'ÉQUIVALENT ET PAS DIRECTEMENT SUR L'ÉQUIVALENT**. On obtient

$$w_{n+1} - w_n \sim \frac{1}{n}$$

On somme les relations de comparaison pour obtenir $w_n \sim \ln(n)$. Ensuite, on fait un DL et on obtient

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

□

Une deuxième étude de suite récurrente

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par :

$$u_0 \in]0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim A2^{-n}$.
3. Trouver un équivalent de $u_n - A2^{-n}$.

Démonstration. 1. Vérifier la stabilité puis montrer la décroissance. La limite nulle vient facilement avec le théorème de la limite monotone et l'étude des points fixes.

2. On pose $v_n = \ln(2^n u_n)$. Alors

$$v_{n+1} - v_n \sim -\frac{u_n^2}{24}$$

Or, par récurrence, on prouve que $u_n = O(2^{-n})$. Donc

$$v_{n+1} - v_n = O(4^{-n})$$

donc v_n converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose alors $A = e^{\alpha}$.

3. On pose $w_n = 2^n u_n$. Alors

$$w_{n+1} - w_n s \sim 2^n \times 2 \times \frac{-u_n^3}{48} \sim -\frac{A^3}{24}\frac{1}{4^n}$$

où ce dernier équivalent est négatif sommable. On somme les relations de comparaison sur les restes ce qui donne, comme $w_n \to A$:

$$A - u_n 2^n \sim -\frac{A^3}{18 \times 4^n}$$

Par conséquent, on a :

$$u_n - A2^{-n} \sim \frac{A^3}{18} \times \frac{1}{8^n}$$

□

△ Une troisième étude de suite récurrente : un grand classique

Déterminer la limite et donner un équivalent des suites vérifiant la relation :

$$u_0 \in]0,\pi[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Démonstration. On trouve une limite nulle avec la méthode habituelle. La suite annexe à poser est

$$v_n = \frac{1}{u_n^2}$$

La différence $v_{n+1} - v_n$ tend vers $1/3$. En sommant les relations de comparaison, on trouve finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

□

⋆ Une quatrième étude de suite récurrente

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Étudier la limite de u. Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$u_n \sim a^{2^n}$$

Démonstration. On remarque par récurrence que $u_n \geqslant 2^n$ donne u tend vers l'infini (l'étude habituelle marche aussi). On pose ensuite

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$$

et on prie pour que tout se passe bien. Les calculs donnent

$$v_{n+1} - v_n \sim \frac{1}{2^{n+1}u_n^2}$$

donc (v_n) admet une limite K. En sommant les relations de comparaison, on trouve

$$v_n = K + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

On multiplie par 2^n et la différence des deux termes tendant vers 0, on peut passer l'équivalent à l'exponentielle et alors

$$u_n \sim a^{2^n}$$

avec $a = e^K > 0$. □

Une cinquième étude de suite récurrente avec lipschitzianité

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Soit (x_n) une suite d'éléments de $[0,1]$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$$

Montrer que la suite (x_n) converge.

Démonstration. On considère

$$g : x \mapsto \frac{x + f(x)}{2}$$

On a pour $x \leqslant y$:

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= \frac{y-x}{2} + \frac{f(y)-f(x)}{2} \\ &\geqslant \frac{y-x}{2} - \frac{1}{2}|f(y)-f(x)| \\ &\geqslant \frac{y-x}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{|y-x|}_{=y-x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc g est croissante, donc x_n est monotone (g stabilise aussi $[0,1]$). Or, (x_n) est bornée donc converge en vertu du théorème de la limite monotone. De plus, elle converge vers un point fixe de g, qui est aussi un point fixe de f (f est continue car lipschitzienne donc g est continue). □

Δ Un peu plus pour la route

Limite, équivalent puis développement asymptotique à deux termes des suites récurrentes définies par :

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \arctan(u_n)$

Démonstration. Utiliser la stratégie de l'équation différentielle pour obtenir les équivalents. □

$\star\star$ Le boss de fin

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$$

Déterminer un équivalent de u_n.

Démonstration. Déjà, on montre que $u_n \to +\infty$. Ensuite, cet exercice est infaisable si on ne trouve pas la suite annexe. On peut la chercher à tâtons ou mieux, tenter la stratégie de l'équation différentielle. Malheureusement, on se retrouve avec l'intégrale suivante :

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln(u)}$$

qui ne s'exprime pas à l'aide de fonctions et de radicaux simples (raison pour laquelle c'est une fonction spéciale à laquelle on donne le nom de **dilogarithme**). Or, le plot twist est que

$$\mathrm{Li}(x) \sim \pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

où π est la fonction de répartition des nombres premiers (ce n'est pas une blague). On pose donc

$$v_n = \frac{u_n}{\ln(u_n)}$$

On trouve

$$v_{n+1} - v_n \sim 1$$

donc on en déduit par sommation des relations de comparaison (cas divergent) que

$$v_n \sim n$$

En passant cette relation au ln, on trouve

$$\ln(u_n) - \underbrace{\ln(\ln(u_n))}_{=o(\ln(u_n))} = \ln(n) + o(\ln(n))$$

D'où $\ln(u_n) \sim \ln(n)$. or, $u_n \sim n\ln(u_n)$. Donc finalement :

$$u_n \sim n\ln(n)$$

□

12.3.8 TD Châteaux

Obtention d'équivalents de suites récurrentes

Soit $a > 0$ et $f : [0, a[\to [0, a[$ continue telle que $f(0) = 0$ et $\forall x > 0,\ 0 < f(x) < x$. On étudie la suite récurrente définie par $u_0 \in]0, a[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. On suppose que f admet au voisinage de 0 à droite une développement limité de la forme :
$$f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$$
avec $\lambda > 0$ et $\alpha > 1$. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\lambda(\alpha-1)n)^{1/(\alpha-1)}}$$
Etudier le cas particulier où f est deux fois dérivable en 0, $f'(0) = 1$ et $f''(0) < 0$.
3. On suppose que f admet un développement limité au voisinage de 0 à droite de la forme :
$$f(x) = \alpha x + O(x^2)$$
avec $0 < \alpha < 1$.
   a. On pose $v_n = \alpha^{-n} u_n$. Montrer que la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge.
   b. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C\alpha^n$.
4. On suppose que f admet un développement limité au voisinage de 0 à droite de la forme :
$$f(x) = \beta x^2 + O(x^3)$$
avec $0 < \beta$.
   a. Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{2^n}\right)$ converge vers une limite $l < 0$, puis que la suite $\ln(u_n) - l2^n$ converge.
   b. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exemples d'applications

1. En utilisant la deuxième question de l'exercice précédent, traiter les exemples suivants :
   a. $u_{n+1} = \sin(u_n)$ avec $0 < u_0 < \pi$;
   b. $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ avec $u_0 > 0$;
   c. $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ avec $u_0 > 0$.
2. En utilisant les troisième et quatrième questions de l'exercice précédent, traiter les exemples suivants :
   a. $u_{n+1} = \alpha \sin(u_n)$ avec $0 < \alpha < 1$ et $u_0 > 0$;
   b. $u_{n+1} = \sin^2(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$;
   c. $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} - 1$ avec $u_0 > 0$.

Suites telles que $u_{n+1} - u_n$ tende vers 0

1. Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un segment.
2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in [a, b]$. On suppose que $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0. Démontrer que la suite (u_n) converge.

Propriétés des produits infinis

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pose $P_n(u) = \prod_{k=1}^{n} u_k$. on dire que le produit $\prod u_n$ converge lorsque la suite (P_n) converge vers une limite non nulle, et on notera $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ cette limite.

1. Montrer que si le produit infini $\prod u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 1.
2. On suppose dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n < 1$. Démontrer que le produit infini $\prod(1-a_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge. Quelle est sa limite dans le cas contraire ?

   Désormais, on posera $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$ en supposant que la suite (a_n) tende vers 0 et ne prenne pas la valeur -1.
3. On suppose dans cette question que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n < 1$. Démontrer que le produit infini converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge. Quelle est sa limite dans le cas contraire ?
4. On suppose la suite (a_n) réelle et la série $\sum a_n$ convergente. Prouver que la série $\sum a_n^2$ et le produit infini $\prod(1+a_n)$ sont de même nature.
5. On suppose la suite (a_n) complexe. On dit que le produit infini est absolument convergent lorsque le produit infini $\prod(1+|a_n|)$ converge. Démontrer que tout produit infini absolument convergent est convergent.
6. On suppose la suite (a_n) complexe et les séries $\sum a_n$ est $\sum |a_n|^2$ convergentes. Démontrer que le produit infini converge. Indication : on établira le lemme suivant :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |e^z - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$$

   puis on vérifiera que le produit $\prod(1+a_n)e^{-a_n}$ est absolument convergent.

Exemples de produits infinis

1. Étudier la nature des produits suivants, et calculer le cas échéant la valeur du produit infini :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \quad ; \quad \prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) \ \text{ et } \ \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$
2. Étudier la nature des produits infinis suivants :
   a. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 2}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;
   b. $\displaystyle\prod_{n\geqslant 0}(1+P(n)z^n)$ où $P\in\mathbb{C}[X]$;
   c. $\prod_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)\right)^n$ pour $a>0$.
3. On pose $a_{2n-1}=-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $a_{2n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ pour $n\geqslant 2$. Démontrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ divergent, mais que le produit infini $\prod(1+a_n)$ converge.

Inégalités de Hölder et Minkowski

Si $p>1$, on note q l'exposant conjugué de p, tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Démontrer que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ xy\leqslant\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$
2. Démontrer l'inégalité de Hölder : pour tous $(x_1,\ldots,x_n)$ et tous $(y_1,\ldots,y_n)$ n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$, on a
$$\left|\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$
L'inégalité de Hölder est une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Démontrer l'inégalité de Minkowski : pour tous $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$, on a
$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$
4. En déduire que $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
5. Montrer que si $1\leqslant p<p'$, alors :
$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ n^{1/p-1/p'}\|x\|_p\leqslant\|x\|_{p'}\leqslant\|x\|_p$$

Espaces $l^p(\mathbb{K})$

Pour $p \geqslant 1$, on note $l^p(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum |u_n|^p$ converge. On notera alors : $\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$.

1. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, $l^p(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur cet espace.
2. Si $p < 1$, a-t-on encore une norme ?
3. Vérifier que $\|\cdot\|_p$ est préhilbertienne si, set seulement si, $p = 2$.
4. Vérifier que si $p < q$, alors $l^p(\mathbb{K}) \subset l^q(\mathbb{K})$ et que l'inclusion est stricte.
5. Si $p < q$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont-elles équivalentes sur $l^p(\mathbb{K})$?

Chapitre 13

Intégrales généralisées

Table des matières

13.1 Points méthode

Utilisation d'une série

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on a d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_{a}^{(N+1)a} f$$

Par conséquent, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge alors la série $\displaystyle\sum \int_{na}^{(n+1)a} f$ converge. Ainsi, on peut utilise la divergence d'une série pour prouver la divergence d'une intégrale. Attention, la réciproque est fausse.

Utilisation d'une primitive

Si F est une primitive de f, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si, et seulement si, F admet des limites finies en a et en b, et l'on a alors :

$$\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$$

quantité alors notée $[F(t)]_a^b$.

Utilisation d'une série pour une fonction positive

Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$. Puisqu'on a pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{(N+1)a} f$$

on obtient dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, par passage à la limite et positivité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{na}^{(n+1)a} f = \int_a^{+\infty} f$$

En particulier, la série $\displaystyle\sum \int_{na}^{(n+1)a} f$ et l'intégrale l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ont même nature.

Continue positive non nulle

Si f est une fonction continue positive et non nulle sur I, alors $\displaystyle\int_I f > 0$.

Comment étudier l'intégrabilité

Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, on peut s'intéresser au comportement asymptotique de f au voisinage des "bornes ouvertes" de I, puis utiliser le théorème de comparaison. En particulier, si l'intervalle I est ouvert, on étudiera séparément les deux bornes.

Intervalles bornés

On a les différents résultats.

- Si une fonction f est bornée au voisinage d'un point $b \in \mathbb{R}$, alors on a $f \underset{b}{=} O(1)$. La fonction constante égale à 1 étant intégrable sur tout intervalle borné, on en déduit que f est intégrable en b.
- En particulier, si $f \in \mathcal{CM}([a, b[, \mathbb{K})$ admet une limite finie en $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable.

Utilisation de l'intégration par parties et d'un passage à la limite

En pratique, on peut commencer par intégrer par parties sur les primitives, puis passer à la limite. Il y a deux buts possibles :

- justifier une convergence ;
- effectuer un calcul.

Intégration des relations de comparaison : comparaison des restes

On peut appliquer le théorème si la fonction à laquelle on compare est de signe constant et intégrable.

Intégration des relations de comparaison : comparaison des intégrales partielles

On peut appliquer le théorème si la fonction à laquelle on compare est de signe constant et non intégrable.

13.2 Astuces

Attention !

L'étude d'une intégrabilité commence par **CONTINUE PAR MORCEAUX SUR** ... et ensuite, discussion aux bornes.

Étude d'une intégrale semi-convergente

Pour des intégrales semi-convergentes, on effectue en général une intégration par parties pour transformer l'intégrale en faisant apparaître une intégrale absolument convergente. Sinon, on pourra effectuer un développement asymptotique de la fonction, le dernier terme écrit étant :

- ou bien une fonction intégrable ;
- ou bien de signe constant (dans le cas où la fonction est à valeurs réelles).

Intégration par parties itérée sur un segment

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ainsi que f et g de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b f^{(n)} g = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f^{(n-1-i)}(t) g^{(i)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f g^{(n)}$$

Cette formule n'est pas au programme, mais elle peut souvent s'avérer utile. Pour la démontrer, faire une récurrence et des IPP (évidemment...).

Application. Il est notamment pratique de connaître cette formule car dans des cas particuliers, on peut rapidement se perdre avec l'expression exacte des dérivées d'une fonction, alors que si on applique la formule directement, on peut ensuite remplacer par les dérivées que l'on connaît bien, notamment si g est la fonction exponentielle.

Application. Preuve de l'irrationalité de e : une grosse formule avec des IPP itérées traîne au milieu et on s'y perd vite...

Intégrations par parties

Dans les intégrations par parties, il faut parfois accepter de jouer avec des constantes d'intégration pour faire converger le crochet ou l'annuler.

Application. Voici un exemple classique :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$$

Changements de variable usuels

On a les changements usuels suivants :

- $1+t^2$: on pose $t = \tan(u)$;
- $\sqrt{t^2-1}$: on pose $t = \cosh(u)$;
- $\sqrt{1+t^2}$: on pose $t = \sinh(u)$.

Changement de variable autosimilaire

On pourra parfois utilise le changement de variable autosimilaire :

$$u = \frac{1-t}{1+t}$$

Il se comporte bien avec certaines fractions rationnelles.

Règles de Bioche

On considère $\displaystyle\int r(\sin(\theta), \cos(\theta), \tan(\theta))\ d\theta$ et on pose

$$R(\theta) = r(\sin(\theta), \cos(\theta), \tan(\theta))\ d\theta$$

Alors, si R est invariante par :

- $\theta \to -\theta$, on pose $u = \cos(\theta)$;
- $\theta \to \pi - \theta$, on pose $u = \sin(\theta)$;
- $\theta \to \pi + \theta$, on pose $u = \tan(\theta)$;
- deux des trois invariances précédentes, alors aussi par la troisième et on pose alors $u = \cos(2\theta)$;
- sinon, tant pis, on pose $u = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Le quatrième est le plus rapide de très loin, puis ce sont les 3 premiers, et enfin le dernier. Il existe un exemple pour lequel le quatrième changement de variable aboutit à un dénominateur de degré 2, de degré 4 pour les 3 premiers, et de degré 8 pour le dernier. On comprend la puissance de ces règles.

Application. Primitives de $1/\sin$, de $1/\cos$. Calculs d'intégrales dégueulasses de fractions rationnelles de sin, cos et tan en tout genre.

Application. Sert dans un exercice de séries entières où traîne une intégrale de

$$\frac{1}{1 + a\cos(t)}$$

Intégrale dans une intégrale

Quand on a une intégrale avec une autre intégrale dedans, du type

$$\int \ldots \left(\int_0^x \ldots du \right) dx$$

on fait une intégration par partie pour dériver $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ldots du$ et se débarrasser de cette intégrale.

Utilisation d'une équation différentielle

Pour trouver une expression plus simple d'une fonction du type $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ldots dt$, on peut la dériver et chercher à montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle que l'on résout ensuite.

13.3 Exercices classiques

13.3.1 Intégration sur un segment

$\Delta\star$ Formule de la moyenne

Soit f et g deux applications continues de $[a,b]$ avec $a<b$. On suppose que $\forall t\in[a,b],\ g(t)\geqslant 0$. Alors :

$$\exists c\in[a,b],\ \int_a^b f(t)g(t)\ dt = f(c)\int_a^b g(t)\ dt$$

Démonstration. f est continue sur le compact $[a,b]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(\alpha,\beta)\in[a,b]^2$ tel que :

$$\forall t\in[a,b],\ f(\alpha)\leqslant f(t)\leqslant f(\beta)$$

Par positivité de g, on a :

$$\forall t\in[a,b],\ f(\alpha)g(t)\leqslant f(t)g(t)\leqslant f(\beta)g(t)$$

Par croissance de l'intégrale et linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$f(\alpha)\int_a^b g(t)\ dt\leqslant\int_a^b f(t)g(t)\ dt\leqslant f(\beta)\int_a^b g(t)\ dt$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt=0$, alors il suffit de prendre $c=a$ car tous les termes de l'inégalité précédente sont nuls. Sinon, $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt>0$, si bien que l'encadrement obtenu précédemment se réécrit :

$$f(\alpha)\leqslant\frac{\int_a^b f(t)g(t)\ dt}{\int_a^b g(t)\ dt}\leqslant f(\beta)$$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure. □

Remarque. La preuve s'adapte dans le cas où g est négative.

Application. Permet de déduire l'égalité de Taylor-Lagrange de la formule de Taylor avec reste intégrale lorsque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Où sont les intégrales ?

Montrer que $2<\pi<4$.

Démonstration. On note $f:x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$. On remarque que sur sur le segment $[0,1]$, on a $\frac{1}{2}<f<1$. Il suffit alors d'intégrer sur ce segment avec la stricte croissance de l'intégrale, puis de multiplier le tout par 4. On peut aussi raisonner avec un quart de cercle ou un demi-cercle dans la plan, mais c'est alors un peu plus embêtant de justifier les inégalités. □

△ Avec la fonction réciproque

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_0^1 f + \int_0^1 f^{-1} = 1$$

Interpréter géométriquement.

Démonstration. Faire un changement de variable dans la deuxième. Le résultat se comprend bien car la courbe de la bijection réciproque est le symétrique de la courbe par rapport à la première bissectrice du repère. □

△ Théorème des moments

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \int_a^b t^i f(t)\ dt = 0$$

alors f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a,b[$.

Démonstration. A FAIRE □

⋆⋆ Difficile

Déterminer les polynômes P qui envoient $[0,1]$ dans lui-même et tels que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \int_0^1 f(P(t))\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt$$

Démonstration. Ce ne sont que X et $1-X$. Il faut (je crois) prendre des fonctions qui s'approchent de Diracs pour le prouver. □

13.3.2 Suites d'intégrales sur un segment

Une limite

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^{1/n}\ dx$$

Démonstration. Utiliser l'inégalité :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

pour se ramener à des intégrales de fonctions puissances. Calculer les intégrales qui encadrent et déterminer leur limite. Le théorème des gendarmes permet de conclure que la limite recherchée est $\dfrac{\pi}{2}$. □

△ Norme infinie

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+)$ avec $a < b$. Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \, dt \right)^{1/n}$$

Démonstration. Il s'agit de $\|f\|_\infty$. Il faut le faire par encadrement avec des ε. Un côté de l'inégalité est simple. Pour l'autre, s'approcher à η de là où on est à ε du maximum puis minorer brutalement le reste. On s'en sort. □

⋆ Lemme de Riemann-Lebesgue sur un segment

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ avec $a < b$.

1. Déterminer
$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} \, dt$$
On pourra commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis en escalier.
2. Que devient le résultat si on remplace $e^{i\lambda t}$ par $g(\lambda t)$ où g est une fonction continue périodique. On pourra commencer par le cas où g est de valeur moyenne nulle.

Démonstration.

1. Dans le cas $\mathcal{C}^1$, une IPP en primitivant l'exponentielle suffit. Le cas d'une constante est un cas particulier du cas $\mathcal{C}^1$. Dans le cas en escalier, on prend une subdivision adaptée pour se ramener à un nombre fini de fonctions en escalier. Dans le cas général, on peut approximer f par une fonction en escalier puis on travaille avec du ε.

2. Si g est continue périodique de valeur moyenne nulle, ses primitives sont aussi périodiques donc bornées et le résultat est le même que précédemment. Dans le cas général, on peut écrire $g = \langle g \rangle + g_0$ où g_0 est donc continue périodique de valeur moyenne nulle. La limite recherchée est donc
$$\langle g \rangle \int_a^b f(t) \, dt$$

□

⋆ Irrationalité de π

On se propose de montrer par l'absurde que π est irrationnel. Pour cela, on suppose $\pi = a/b$ avec a et b dans $\mathbb{N}^*$ et l'on pose

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \sin(x)\ dx$$

1. Montrer que (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que toutes les dérivées de $\dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$ sont entière en 0 puis en π
3. En déduire que I_n est un entier puis conclure.

Démonstration. Grand classique ! Pour les détails, voir la pâle de sup.

1. Majorer le numérateur par une constante à la puissance n. La factorielle l'emporte.
2. Remarquer qu'au-delà d'un certain degré, toutes les dérivées sont nulles. Pour les autres : remarquer que 0 est racine de multiplicité n donc les premières dérivées sont nulles. Pour π, remarquer que le polynôme est symétrique ($P(\pi - X) = P(X)$).
3. Faire des intégrations par parties successives (mieux vaut utiliser la formule de la partie astuces pour ne pas se perdre !). Ensuite, une suite d'entier qui tend vers 0 est stationnaire. Mais les fonctions qu'on intègre sont continues positives non identiquement nulles, donc cela est absurde.

□

13.3.3 Calcul intégral sur un intervalle quelconque

Convergence et calcul

Convergence et calcul éventuel des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\ dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1+x)}}$$

Démonstration. On commence par vérifier la continuité par morceaux sur ! Pour la première, une primitive fournit l'existence et le calcul (=1). Et on n'a pas de continuité par morceaux en 0 pour la deuxième et pas de prolongement possible (non bornée au voisinage de 0) donc l'intégrale n'existe pas. □

Avec du cosinus hyperbolique

Étant donné un réel α, convergence et calcul de

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\cosh(t) + \cosh(\alpha)}$$

Démonstration. On a continuité (par morceaux) sur $[0, +\infty[$ et un équivalent en $\frac{2}{e^t}$ en $+\infty$ donc l'intégrabilité et la convergence de l'intégrale quel que soit α. Ensuite, remplacer $\cosh(t)$ par des exponentielles et multiplier le dénominateur et le numérateur par e^t. Faire un changement de variable $u = e^t$. On obtient :

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{2\ du}{u^2 + 2u\cosh(\alpha) + 1}$$

Ensuite, distinguer si $\alpha = 0$ (on trouve 1) ou non : dans ce dernier cas, on trouve après factorisation et DES

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sinh(\alpha)} \ln\left(\frac{1 + e^\alpha}{1 + e^{-\alpha}}\right)$$

□

Partie fractionnaire et inverse

Montrer que la fonction f définie sur $]0, 1]$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$$

est intégrable et calculer son intégrale.

Démonstration. On a une continuité par morceaux due au caractère de partie fractionnaire. Ensuite, poser

$$u_k = \int_{1/(k+1)}^{1/k} f(t)\ dt$$

et considérer les sommes partielles. Calculer sur ces intervalles-là pour faire apparaître dans la somme partielle une série harmonique, puis utiliser le développement asymptotique habituel avec la constante d'Euler γ. Cela fournit la convergence et la valeur :

$$\int_0^1 f(t)\ dt = 1 - \gamma$$

□

Δ⋆ Intégrale de Dirichlet

Convergence et calcul de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\ dx$$

Démonstration. La convergence se fait bien. Ne pas oublier la continuité-par-morceaux-sur ! Montrer que cela ne change rien de transformer le sin en cos avec le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$.

Ensuite, calculer $2I$ et utiliser la propriété fonctionnelle du ln :

$$2I = -\frac{\pi \ln(2)}{2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\ dx}_{=J}$$

Or, un changement de variable $u = \dfrac{x}{2}$ puis un découpage en 2 et l'utilisation du fait que $\sin(\pi - u) = \sin(u)$ donnent $J = I$. Miraculeusement, cela se termine et on obtient alors :

$$I = -\frac{\pi \ln(2)}{2}$$

□

⋆ Beurk

Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\ dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2\ dt$.

Démonstration. Pour la première, on effectue le changement de variable $t = \tan(\theta)$ pour se ramener à -2 fois l'intégrale de Dirichlet. On obtient alors $\pi \ln(2)$. Pour la deuxième, même changement de variable puis 2 IPP pour se ramener encore une fois à -2 fois l'intégrale de Dirichlet. □

Remarque. Askip il est possible de le faire en utilisant l'exercice suivant.

Utilisation du changement de variable inverse

Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ dt = 0$ et calculer

$$J_a = \int_{1/a}^{a} \frac{\arctan(t)}{t}\ dt$$

pour $a > 0$.

Démonstration. Le changement de variable $u = 1/t$ donne $I = -I$ donc $I = 0$. Pour J_a, faire une IPP et on tombe sur une deuxième intégrale

$$\int_{1/a}^{a} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ dt$$

Le même changement de variable montre que celle-ci est encore nulle. Avec le terme tout intégré, on a donc :

$$J_a = \frac{\pi}{2} \ln(a)$$

□

13.3.4 Intégration sur un intervalle quelconque

⋆ Intégrale de l'écart à la translation

Soit $f : R \to \mathbb{C}$ intégrable. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-x) - f(t)| \, dt$$

Indication : on pourra se ramener à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-x) - f(t+x)| \, dt$

Démonstration. Pour se ramener à l'indication, faire un changement de variable pour moyenner. Il faudra que je fasse la suite un jour... □

Intégrabilité et uniforme continuité

Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. On suppose f réelle positive. Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.
2. Que peut-on dire si f est à valeurs réelles quelconques ? à valeurs complexes ?
3. Que deviennent ces résultats si l'on remplace l'hypothèse d'intégrabilité par la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$?
4. Et si l'on suppose seulement f continue ?

Démonstration. A faire un jour... □

△ Intégrable positive décroissante

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et décroissante.

1. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\lim_{t \to +\infty} t f(t) = 0$. Étudier la réciproque.
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f décroissante ?

Démonstration. 1. f admet une limite (théorème de la limite monotone) qui est nulle sans quoi f n'est pas intégrable par intégration des relations de comparaison. Ensuite, en majorant par le reste, on a :

$$\int_{x/2}^{x} f(t) \, dt \to 0$$

La décroissance fournit donc $\dfrac{x}{2} f(x) \to 0$ et le résultat recherché. La réciproque est fausse, il suffit de considérer une intégrale de Bertrand avec la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

2. Le résultat est alors faux. On peut prendre f nulle presque partout et lui faire faire ce que l'on souhaite ailleurs (avec des pics de plus en plus fins).

□

△ Inégalité de Hardy

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue de carré intégrable. On pose

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$$

1. Montrer que $F(x)$ est négligeable devant $1/\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$.
2. $\star$ Montrer que F est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Et sur $\mathbb{R}_+$?
3. $\star$ Trouver la plus petite constante $C > 0$ possible qui vérifie l'**inégalité de Hardy** :

$$\int_0^{+\infty} F(x)^2\ dx \leqslant C \int_0^{+\infty} f(x)^2\ dx$$

Démonstration. 1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit un grand O. Retravailler ce grand O en découpant pour obtenir le petit o.

2. Remarquer que F est dérivable que que pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = \frac{f(x) - F(x)}{x}$$

Intégrer par parties F^2 entre 0 et x en dérivant F^2. On obtient

$$\int_0^x F^2(t)\ dt = 2\int_0^x f(t)F(t)\ dt - F^2(x)$$

Dégager le dernier terme qui est négatif, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en distinguant le cas où F^2 est identiquement nulle. On obtient alors

$$\int_0^x F^2(t)\ dt \leqslant 4\int_0^x f^2(t)\ dt \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\ dt$$

On obtient bien l'intégrabilité souhaitée.

3. On passe à la limite dans l'inégalité précédente. La constante 4 est optimale, le vérifier avec une fonction simple comme l'exponentielle.

□

$\star\star$ Utilisation d'une formule de Taylor

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable telle que f'' soit de carré intégrable. Montrer que f et f' admettent une limite nulle en $+\infty$. On pourra utiliser une formule de Taylor.

Démonstration. On prouve rapidement en passant à la valeur absolue et en majorant par un reste que

$$\int_x^{x+1} f(t)\ dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

On prend F une primitive de f. On applique la formule de Taylor avec reste intégrale à F qui est de classe $\mathcal{C}^3$:

$$F(x+1) - \frac{1}{0!}F(x) = \frac{1}{1!}f(x) + \frac{1}{2}f'(x) + \int_x^{x+1} \frac{(x+1-t)^2}{2!} f''(t)\ dt$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que la dernière intégrale tend vers 0 en utilisant l'hypothèse. Donc

$$f(x) + \frac{1}{2}f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Et là il faut conclure ... (soit j'ai mal noté, soit Pierre n'avait pas réellement fini l'exercice). □

13.3.5 Intégrales semi-convergentes

$\Delta\star$ Intégrale de Frullani

Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ admettant une limite finie l en $+\infty$.

1. Pour $b > a > 0$, montrer la convergence de $I_{a,b} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\ dx$ et la calculer.
2. Application : calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\ dx$

Démonstration. 1. On prend $0 < u < v$. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_u^v \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\ dx &= \int_u^v \frac{f(bx)}{x}\ dx - \int_u^v \frac{f(ax)}{x}\ dx \\ &= \int_{bu}^{bv} \frac{f(t)}{t}\ dt - \int_{au}^{av} \frac{f(t)}{t}\ dt \\ &= \int_{av}^{bv} \frac{f(t)}{t}\ dt - \int_{au}^{bu} \frac{f(t)}{t}\ dt\end{aligned}$$

avec des changements de variables et en découpant avec la relation de Chasles. Ensuite :

$$\int_{av}^{bv} \frac{f(t)}{t}\ dt = \underbrace{\int_{av}^{bv} \frac{f(t)-l}{t}\ dt}_{\to 0} + l\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

De même, on trouve :

$$\int_{au}^{bu} \frac{f(t)}{t}\ dt \xrightarrow[u\to 0]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ainsi, l'intégrale $I_{a,b}$ converge et on a :

$$I_{a,b} = (l - f(0)) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

2. Effectuer le changement de variable $x = e^t$ et utiliser la question précédente pour obtenir $\ln(2)$.

$\square$

Une semi-convergence

Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+\cos(t)}}\, dt$

Démonstration. Pas de problème de continuité par morceaux, de définition ni au voisinage de 0. Faire un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ pour obtenir :

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

En intégrant par parties, on montre que l'intégrale de $\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ converge, ce qui permet de conclure. $\square$

Une étude d'intégrale semi-convergente

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\, dx$ et on définit la fonction

$$g : x > 0 \mapsto \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\, dt$$

1. Justifier que l'intégrale I est bien convergente.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et en 0^+.
4. En déduire la valeur de I.

Démonstration. 1. Continue sur $\mathbb{R}_+$ après prolongement par continuité en 0. En $+\infty$, domination par $1/x^2$.

2. On écrit g à l'aide d'une primitive. En dérivant, on obtient :

$$g'(x) = \frac{1}{3x^2}(\sin(3x) - 3\sin(x))$$

3. En 0^+ : faire un DL de l'intégrande de g et utiliser l'intégration des relations de comparaison pour obtenir

$$g(x) = \ln(3) + O\left(x^2\right)$$

donc une limite qui vaut $\ln(3)$ Majorer brutalement en $+\infty$ pour montrer que g tend vers 0 en $+\infty$.

4. Utiliser la formule :
$$\sin^3(x) = -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin(x))$$
On obtient alors en remplaçant dans l'expression de I :
$$I = -\frac{3}{4}\int_0^{+\infty} g'$$
On obtient donc
$$I = \frac{3}{4}\ln(3)$$

□

13.3.6 TD Châteaux

Inégalité de Hardy

Soit $f : \mathbb{R}_+\mathbb{R}$ de carré intégrable. On pose, pour tout $x > 0$:
$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$$
Montrer que F est de carré intégrable et que $\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2$. Indication : on pourra réaliser une intégration par parties.

Démonstration. Faire une intégration par parties en primitivant le $1/x^2$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, diviser, passer au carré et passer à la limite. □

Inégalité de type L^2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables.

1. Justifier que ff'' est intégrable.
2. On suppose $(f')^2$ non intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que ff' a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en déduire une contradiction.
3. Conclure que $(f')^2$ est intégrable et que
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f'')^2$$

Démonstration. Exercice classique.

1. Classique : utiliser $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. Intégrer $(ff')'$ entre 0 et x puis passer à la limite. On en déduit en intégrant désormais ff' que f^2 tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2.

3. La deuxième question fournit l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$. Le raisonnement est symétrique sur $]-\infty, 0]$. En intégrant $(ff')'$, on prouve que ff' admet une limite finie, qui ne peut qu'être nulle sans quoi elle contredirait l'intégrabilité de f^2. En intégrant $(ff')'$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $\mathbb{R}_-$ de même, en sommant et par Chasles, on trouve :

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 + \int_{\mathbb{R}} ff'' = 0$$

puis on conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

□

Inégalité de Wirtinger

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Justifier l'existence des intégrales ci-dessous et l'égalité :

$$\int_0^\pi f(t)f'(t)\cot(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(t)^2\left(1 + \cot(t)^2\right)\ dt$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)^2\ dt \leqslant \int_0^\pi f'(t)^2\ dt$. Étudier le cas d'égalité.
3. Étendre cette inégalité à une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Démonstration. 1. Faire une intégration par parties sous réserve d'existence pour l'égalité. Pour l'existence, travailler avec des équivalents.

2. Partir de $(f(x)\cot(x) - f'(x))^2 \geqslant 0$, développer et intégrer puis conclure avec la première question. Cas d'égalité lorsque $f' = f\cot$, ce qui donne f proportionnelle à un sinus.

3. Se ramener à $[0, \pi]$ par translation. On obtient finalement :

$$\int_a^b f^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b (f')^2$$

□

Lemme de Van Der Corput

1. Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que φ' soit monotone et vérifie $|\varphi'| \geqslant 1$, on ait :
$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} \, dx \right| \leqslant \frac{C}{\lambda}$$
2. Soit k un entier supérieur à 2. Montrer l'existence d'une constante $C_k > 0$ telle que pour tout fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|\varphi^{(k)}| \geqslant 1$, on ait :
$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} \, dx \right| \leqslant \frac{C_k}{\lambda^{1/k}}$$

Démonstration. Écrire
$$e^{i\lambda\varphi(x)} = \frac{i\lambda\varphi'(x)}{i\lambda\varphi'(x)} e^{i\lambda\varphi(x)}$$
puis peut-être une IPP ? □

Découpage et utilisation des ε

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(t)] \, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(t)| \, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt$.

Démonstration. Considérer
$$S_{X,Y}(x) = \int_{-Y}^{X} (f(x+t) - f(t)) \, dt$$
pour $X, Y > 0$, séparer en deux intégrales, faire un petit changement de variables et utiliser la relation de Chasles. Finir avec des ε. □

Inégalités de Hölder et Minkowski

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $I = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et p et q deux exposants conjugués.

1. Démontrer que $\left|\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\ dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\ dt\right)^{1/q}$.
2. Démontrer que $\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\ dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\ dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\ dt\right)^{1/p}$.
3. En déduire que l'application $\|\cdot\|_p : f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p\ dt\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

   Généralise à l'espace $L^p(I, \mathbb{K})$ des fonctions f continues sur I telles que $|f|^p$ soit intégrable.
4. Montrer que si $p_1 \neq p_2$, les normes $\|\cdot\|_{p_1}$ et$\|\cdot\|_{p_1}$ ne sont pas équivalentes. Trouver une inégalité entre les deux.
5. Soit $p > 1$ un réel et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que f^p soit intégrable. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$. Montrer que $x \mapsto \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p$ est intégrable et que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)\ dx \leqslant C_p \int_0^{+\infty}\ dx$$

   où C_p est une constante à déterminer. C'est l'inégalité de Hardy.

Démonstration. Faire comme dans le cas de l'exercice sur les inégalités de Hölder et Minkowski pour les vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour la dernière, effectuer une intégration par parties puis appliquer l'inégalité de Hölder. On trouve une constante :

$$C_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$$

□

Chapitre 14

Fonctions vectorielles

Table des matières

14.1 Points méthode

Utilisation des fonctions coordonnées

Une fois une base de E de dimension finie fixée, pour établir des propriétés de l'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to E$, on peut souvent se ramener aux fonctions coordonnées.

14.2 Astuces

Morphismes continus

Un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour montrer cela, on intègre par rapport à une variable pour obtenir une expression en fonction d'une primitive. Attention, il faut sûrement distinguer le cas d'un morphisme constant. Cette méthode se généralise à d'autres morphismes

Théorème de Rolle généralisé

On se donne $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $a < b$ et on prend f dérivable sur $]a,b[$. On suppose que f admet des limites à droite en a et à gauche en b qui sont égales. Alors :

$$\exists c \in [a,b],\ f'(c) = 0$$

Démonstration. f ne peut pas être injective, sinon elle serait strictement monotone par continuité et on ne pourrait avoir l'égalité des limites. Par conséquent, on fixe $(a',b') \in]a,b[^2$ tel que $f(a') = f(b')$ et on applique le théorème de Rolle (cas fini) à la restriction de f à $]a',b'[$. □

14.3 Exercices classiques

14.3.1 Dérivation des fonctions à valeurs réelles

Δ Théorème de Darboux

Montrer que la dérivée d'une fonction réelle dérivable sur un intervalle possède la propriété des valeurs intermédiaires :

- elle ne peut changer de signe sans s'annuler ;
- l'image direct de n'importe quel sous-intervalle de l'intervalle de départ est un intervalle.

Démonstration. Supposer sans perte de généralité qu'il existe $a < b$ tels que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ puis se ramener à l'utilisation du théorème de Rolle. Pour la deuxième propriété, utiliser la première et $x \mapsto f(x) - tx$ si on prend $f'(a) < t < f'(b)$. □

L'image d'un segment par la dérivée est $\mathbb{R}$

Trouver une fonction dérivable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f'([0,1]) = \mathbb{R}$.

Démonstration. Considérer

$$x \mapsto x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

prolongée par continuité par 0 en 0. On montre qu'elle est bien dérivable et qu'elle vérifie la propriété demandée (elle oscille de plus en plus vite). □

Δ Classique

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(x) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ dans chacun des deux cas suivants :

- $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) = 0$
- $f'(b) = f'(a)$

Démonstration. On considère

$$g(x) = \int_0^1 f'\left(\frac{t-a}{b-a}x + \frac{b-t}{b-a}a\right)\, dt$$

qui vaut $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \in]a,b]$ et $f'(a)$ si $x = a$ (si je ne me suis pas trompé dans le calcul de tête, ce qui est fort peu probable).

- Lui appliquer le théorème de Rolle pour obtenir le résultat.
- Si g admet un extremum en $c \in]a,b[$, conclure comme précédemment. Sinon, on suppose sans perte de généralité :
$$\forall x \in [a,b],\ g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(b)$$
On en déduit que
$$\forall x \in]a,b],\ f(x) \leqslant f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$
En calculant, on en déduit que
$$\forall x \in]a,b],\ \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \geqslant g(b)$$
En passant à la limite lorsque x tend vers b, on obtient $f'(b) \geqslant g(b)$. On en déduit que $g(a) = g(b)$ et on conclut comme précédemment.

$\square$

Une étrange équation

Résoudre l'équation $5^x + 2^x = 4^x + 3^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Considérer $f : t \mapsto t^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est dérivable de dérive $f' : t \mapsto xt^{x-1}$. L'équation se réécrit $f(5) - f(4) = f(3) - f(2)$. Par le théorème des accroissements finis, cela se réécrit

$$f'(t_1)(5-4) = f'(t_2)(3-2)$$

pour un certain $2 < t_2 < 3$ et un certain $4 < t-1 < 5$. Cela se réécrit donc $xt_1^{x-1} = xt_2^{x-1}$ donc nécessairement $x = 1$ car $t_1 \neq t_2$. Et réciproquement, $x = 1$ est bien solution. $\square$

14.3.2 Dérivation

Application directe du cours

Soit A une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver l'équivalence entre les propositions suivantes :

- $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ A(s)A(t) = A(t)A(s)$
- $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ A(s)A'(t) = A'(t)A(s)$

Démonstration. Dans le sens direct, dériver par rapport à t. Dans le sens réciproque, intégrer. $\square$

△ Dérivée des puissances entières

Soit A une application dérivable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Quelle est la dérivée de A^p pour $p \in \mathbb{N}$?
2. On suppose $A(t)$ inversible pour tout $t \in I$. Quelle est la dérivée de A^{-p} pour $p \in \mathbb{N}^*$?

Démonstration. Attention aux idées reçues !

1. *A priori*, ce n'est pas $pA'A^{p-1}$ car on ne sait pas si A commute avec A'. Le théorème de dérivation d'une application multilinéaire assure qu'il s'agit plutôt de :
$$\sum_{k=1}^{p} A^{k-1}A'A^{p-k}$$
2. Ecrire $AA^{-1} = I_n$ et dériver cette relation. On obtient :
$$(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$$
Pour les puissances, utiliser la question 1.

□

Dérivabilité et série de fonctions

Soit $f : [0,1] \to E$ continue en 0. On suppose que $t \mapsto \dfrac{f(3t)-f(t)}{t}$ admet en 0 une limite $l \in E$. Montrer que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de l. On pourra utiliser une série de fonctions.

Démonstration. Écrire
$$f(t) - f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[f\left(\frac{t}{3^n}\right) - f\left(\frac{t}{3^{n+1}}\right) \right]$$
On en déduit que :
$$\frac{f(t)-f(0)}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \left[\frac{f\left(3 \times \frac{t}{3^{n+1}}\right) - f\left(\frac{t}{3^{n+1}}\right)}{\frac{t}{3^{n+1}}} \right]$$
Or, on a une convergence normale donc par interversion de limites f est dérivable et
$$f'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l}{3^{n+1}} = \frac{l}{2}$$

□

Matrices orthogonales et antisymétriques : une quasi équation différentielle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et $O : I \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction $A : I \to \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I,\ O'(t) = O(t)A(t)$$

Démonstration. On considère O^T qui est elle aussi dérivable par linéarité de la transposition et à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Elle vérifie $(O^T)' = (O')^T$ par linéarité. Alors :

$$\forall t \in I,\ O(t)O^T(t) = I_n$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\forall t \in I,\ O'(t)O^T(t) + O(t)O'^T(t) = 0$$

Ainsi :

$$\forall t \in I,\ O'(t) = O(t)\left[\underbrace{-(O^{-1})'(t)O(t)}_{:=A(t)}\right]$$

Or, d'après un exercice précédent, on a :

$$A(t) = O^{-1}(t)O'(t)O^{-1}(t)O(t) = O^{-1}(t)O'(t) = O^T(t)O'(t)$$

Or, on sait aussi que

$$A(t) = -(O')^T(t)O(t)$$

Par conséquent :

$$\forall t \in T,\ A(t)^T = -A(t)$$

donc A est bien à valeurs antisymétriques. □

Hélices

Soit E un espace euclidien et $v \in E$ non nul. Déterminer les fonction dérivables $f : \mathbb{R} \to E$ telles que $(f' \mid v)$ soit une fonction constante.

Démonstration. Cela revient à avoir $(f \mid v)' = C$ avec C une constante réelle. Intégrer puis voir ce que cela implique pour f. Penser à la physique et à la force de Lorentz : on obtient une hélice généralisée. □

Dérivation du polynôme caractéristique

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_M l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \det(tI_n - M) \end{array}$$

Étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i la matrice extraite de A obtenue en supprimant la ligne et la colonne d'indices i.

1. Exprimer χ'_A en fonction des χ_{A_i}.
2. En déduire le coefficient en X dans le polynôme caractéristique de A.

Démonstration.

1. Faire des développements astucieux.
2. Il correspond au coefficient constant de χ'_A.

□

Dérivabilité de l'inverse dans une algèbre

Soit A une algèbre de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^1(I, A)$ à valeurs dans l'ensemble Ω des éléments inversibles de A. On définit g sur I par $g(t) = f^{-1}(t)$.

1. On suppose g de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer sa dérivée en fonction de f' (attention, on n'a pas supposé A commutative).
2. On suppose $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. $\star$ Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ dans le cas général. on pourra considérer l'application :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{L}(A) \\ a & \longmapsto & (x \mapsto ax) \end{array}$$

Démonstration. La dernière question est difficile.

1. Écrire $fg = 1$ puis dériver cette relation pour obtenir $g' = -gf'g$.
2. Utiliser la formule de la comatrice (tout ce qui la compose est $\mathcal{C}^1$).
3. A faire... Il semblerait que φ puisse nous permettre de nous ramener à la question 2.

□

14.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

△ Fonction de décollage en douceur

Montrer que la fonction :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. Le seul problème est en 0 à droite. Prouver par récurrence l'existence d'un polynôme qui apparaît devant l'exponentielle pour les dérivées. □

Remarque. Un contre-exemple classique On a ici l'exemple d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas pour autant développable en série entière : en effet, si cette fonction était développable en série entière, comme elle est nulle sur $]-1, 0[$, elle serait nulle partout.

Utilisation des fonctions de décollage en douceur

Soit $a < b$.

1. Trouver une fonction f positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \iff x \notin]a, b[$$

2. Trouver une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ nulle sur $]-\infty, a]$ et égale à 1 sur $[b, \infty[$.

Démonstration. Utiliser les fonctions de décollage en douceur (exercice précédent) en les recollant convenablement. □

Racines des dérivées successives de arctan

On considère f définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de f admet exactement n racines réelles.
2. Expliciter ces racines.

Démonstration. Exercice classique. A faire... □

∆ Théorème du relèvement

1. Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $g : I \mapsto \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f = \exp \circ g$. Étudier dans quelle mesure g est déterminée de manière unique par f.
2. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ alors une telle fonction g est de classe $\mathcal{C}^n$.
3. Application : déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t)^2 = e^{it}$$

Démonstration. Exercice classique. A faire...

1. Unicité à $2ik\pi$ près.
2.
3. Utiliser la première question.

□

Une inégalité d'interpolation

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable à l'ordre $n + 1$. on fixe $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ dans $[a, b]$ et on considère le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ interpolant f aux points $a_0, \ldots, a_n$.

1. ⋆ Montrer :

$$\forall x \in [a, b],\ \exists t \in [a, b]\ :\ f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - a_k)$$

2. En déduire :

$$\mathcal{N}_\infty(f - P) \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \mathcal{N}_\infty(f^{(n+1)}) \sup_{x \in [a,b]} \prod_{k=0}^{n} |x - a_k|$$

Démonstration. La première question est difficile.

1. A faire...
2. Conséquence directe de la première question avec des majorations brutales.

□

Construction d'une suite strictement croissante de zéros des dérivées successives

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $f(0)f'(0) > 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(x_n) = 0$.

14.3.4 Formules de Taylor

Formule des rectangles médians

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)\ dt - 2f(0) \right| \leqslant \frac{1}{3} \sup_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$$

Démonstration. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 à F une primitive de f entre -1 et 0 puis entre 1 et 0 et les sommer. Finir en majorant délicatement le polynôme dans le reste. □

⋆ Formule des trapèzes

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)\ dt - f(1) - f(-1) \right| \leqslant \frac{2}{3} \sup_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$$

Démonstration. Faire une première IPP :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = [tf(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} tf'(t)\ dt$$

En faire une deuxième avec la bonne fonction pour annuler le crochet, ce qui donne :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt - f(1) - f(-1) = \underbrace{\left[f'(t) \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} \right) \right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} f''(t) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \right)\ dt$$

Ensuite, majorer en valeur absolue et calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} \right)\ dt = \frac{2}{3}$$

□

Utilisation inhabituelle de Taylor reste intégral

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que

$$f(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} f^{(k)}(x) + o(x^n)$$

Généraliser ensuite ce résultat au cas où f est seulement supposée de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Démonstration. Dans le cas $\mathcal{C}^{n+1}$, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral dans le sens inhabituel. Ensuite, montrer que le reste intégrale est un $o(x^n)$ brutalement. A faire dans le cas $\mathcal{C}^n$. □

Encore une majoration

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{[a,b]} |f''|$$

Démonstration. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 en $\dfrac{a+b}{2}$ ar rapport à a puis par rapport à b. Sommer les deux relations puis majorer et calculer l'intégrale pour obtenir la quantité souhaitée. □

Égalité de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^n([0,a],\mathbb{R})$ avec $a > 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,a[$, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(cx)$$

   On pourra considérer un réel A tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^n}{n!} A$$

2. On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ avec $f^{(n+1)}(0) \neq 0$. Montrer l'unicité d'un tel c pour x assez proche de 0. On le note c_x.
3. Déterminer la limite de c_x lorsque x tend vers 0.

Démonstration. Avant, la première question était au programme.

1. Suivre l'indication.
2. A faire...
3. Peut-être faire un DL dans la première expression ?

□

$\Delta\star$ Théorème de division

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, E)$. Montrer que l'application $g : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral dans le sens inhabituel et le théorème hors-programme du cours (limite de la dérivée à l'ordre n). Sinon, on peut utiliser des intégrales à paramètres, c'est beaucoup plus confortable. En effet :

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx)\ dt$$

est le seul prolongement convenable. On peut prouver que cette fonction est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec les théorèmes d'intégrales à paramètres. □

⋆ Racine carrée d'une fonction paire

Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une fonction paire de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \to E$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x^2)$$

On pourra utiliser le théorème de division (exercice précédent).

Démonstration. A faire... □

△ Domination totale par un polynôme de degré impair

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et P un polynôme de degré impair. On suppose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|$$

Montrer que f est nulle.

Démonstration. p possède une racine a. Toutes les dérivées de f sont donc nulles en a. Appliquer ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à x par rapport à a en remarquant que toutes les dérivées sont bornées par une même constante par hypothèse. □

14.3.5 Équations fonctionnelles

△ Équation fonctionnelle exponentielle

On s'intéresse au fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x)f(y)$$

1. Déterminer les fonctions dérivables vérifiant cette condition.
2. ⋆ Déterminer les fonctions continues vérifiant cette condition. On montrera que toute solution est dérivable, en introduisant une primitive F de f et en intégrant par rapport à une variable.

Démonstration. La deuxième question est difficile.

1. Dériver par rapport à une variable pour obtenir une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On trouve une solution exponentielle.
2. Intégrer par rapport à l'une des deux variables puis bien choisir remarquer que la primitive ne peut être constante, sans quoi f serait nulle.

□

△Sous-groupes à un paramètre

Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

1. En introduisant une primitive de φ, montrer que φ est dérivable.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par φ et en déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. 1. Faire comme dans l'exercice précédent en utilisant un DL au voisinage de 0.
2. Dériver par rapport à l'une des deux variables. Récurrence pour la classe $\mathcal{C}^\infty$.

□

Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$$

1. Montrer qu'une telle fonction est impaire.
2. $\star\star$ Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant cette condition.
3. Montrer que toute fonction continue vérifiant cette condition est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pourra écrire la condition sous la forme $f(u)f(v) = \dots$ et primitiver par rapport à v.

Démonstration. La deuxième question est très difficile.

1. $x = y = 0$ donne $f(0) = 0$. Ensuite, jouer avec $x = 0$ ou $x = y$ ou $x = -y$.
2. A faire...
3. Écrire la relation sous la forme suggérée et dériver.

□

$\star$ Une autre équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

On pourra s'inspirer des exercices précédents.

Démonstration. Cet exercice est difficile. On montre avec $x = y = 0$ que $f(0)$ vaut 0 ou 1. Si $f(0) = 0$, on a $f = 0$ en prenant $y = 0$. On suppose donc $f(0) = 1$. Ensuite, on primitive pour montrer que f est dérivable. On se ramène à une équation d'ordre 2. On trouve des solutions en cos et cosh. $\square$

Chapitre 15

Suites et séries de fonctions

Table des matières

15.1 Points méthode

Rédaction d'une convergence uniforme

Pour montrer la convergence uniforme de (f_n) vers f :

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \underbrace{\text{quelque chose de petit}}_{\text{indépendant de } x}$$

En particulier, le quelque chose de petit pourra être une suite qui tend vers 0.

Établissement d'une convergence uniforme

Pour établir la convergence uniforme de la suite (f_n), on peut :

- commencer par déterminer une fonction f vers laquelle (f_n) converge simplement ;
- chercher ensuite à établir une majoration $\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n$, valable à partir d'un certain rang, où (α_n) est une suite tendant vers 0 ;
- à défaut, par retour à la définition, obtenir, pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, la majoration $\|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout x.

Autre façon de montrer une convergence uniforme

Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, l'étude des variations de $f_n - f$ peut permettre de calculer $\alpha_n = \mathcal{N}_\infty(f_n - f)$. Suivant que (α_n) tend vers 0 ou non, on peut conclure quant à la convergence uniforme de (f_n) vers f.

Montrer une non convergence uniforme

Pour montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f, il suffit d'exhiber une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tend pas vers 0.

Utilisation des formules de Taylor

Lorsqu'on a établi une limite simple à l'aide d'une formule de Taylor-Young (souvent via un équivalent), il est judicieux de montrer la convergence uniforme à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange correspondante.

Établir une convergence uniforme au voisinage de tout point

Pour établir la convergence uniforme de la suite (f_n) au voisinage de tout point d'un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment de cet intervalle.

Établir une convergence normale

Pour montrer que $\sum u_n$ converge normalement, il suffit d'exhiber une série $\sum a_n$ convergente telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \|u_n(x)\| \leqslant a_n$. Au niveau de la rédaction, cela donne :

$$\|u_n(x)\| \leqslant \underbrace{a_n}_{\text{indépendant de } x} \quad \text{sommable}$$

Convergence uniforme d'une série via la convergence normale

Pour montrer la convergence uniforme d'une série (par exemple pour montrer que sa somme est continue), on regarde d'abord s'il n'y a pas convergence normale, ce qui est plus simple puisqu'il suffit de considérer son terme général.

Convergence uniforme d'une suite par une série

Pour montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur A (et montrer ainsi, par exemple, qu'elle admet une limite continue), il est souvent pratique de montrer que la série $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge normalement sur A.

CVU et CVN : sur des parties fermées

Pour montrer des convergences uniformes et des convergences normales, sauf rares exceptions, on se place sur des parties fermées de l'ensemble de définition.

Classe $\mathcal{C}^\infty$

Pour montrer que la limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout segment de toutes les suites dérivées.

Détermination d'un équivalent par le théorème d'interversion de limites

Pour déterminer un équivalent de la somme d'une série en une borne de son intervalle de définition, on peut deviner l'équivalent puis le démontrer à l'aide du théorème d'interversion de limites.

Détermination d'un équivalent par comparaison série/intégrale

Pour déterminer un équivalent de la somme d'une série en une borne de son intervalle, on peut utiliser une comparaison série/intégrale.

15.2 Astuces

Usage des théorèmes d'approximation uniforme

On commence par montrer la propriété souhaitée pour une fonction constante (puis on étend aux fonctions en escalier), ou bien pour les fonctions polynomiales (qui sont de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui permet de faire des intégrations par partie dans les intégrales, par exemple...) puis on généralise le résultat à une fonction quelconque en l'approchant par une fonction "simple" (en escalier, polynomiale).

Application. Lemme de Riemann-Lebesgue version segment. La version générale s'en déduit par interversion de limites.

Théorème de la double limite

Le théorème de la double limite est valable pour des fonctions $f : A \to E$ avec E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie quelconque d'un espace vectoriel normée de dimension finie. En particulier, on peut prendre $A = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et appliquer ce théorème à des suites !

Arme anti-colleur

Pour prouver une convergence uniforme, on pourra parfois interpréter notre suite de fonctions comme

$$f_n(t) = \varphi(nt)g(n)$$

avec φ bornée et g qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Cela ira beaucoup plus vite que de tout faire à la main. Souvent, c'est quand la fonction fait apparaître des nt.

Application. Voir la partie exercices classique : $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n\sqrt{t}}$ par exemple

Technique du maillage

Parfois, il pourra être intéressant de faire apparaître un maillage fini ou dénombrable du segment sur lequel on travaille pour pouvoir utiliser des propriétés des suites de fonctions (comme la lipschitzianité ou la croissance) ou bien extraire avec un procédé diagonal. Voir les derniers exercices de la première section d'exercices classiques (fonctions lipschitziennes et théorème d'Ascoli) et le deuxième théorème de Dini.

15.3 Exercices classiques

15.3.1 Suites de fonctions, modes de convergence

△ Une étude de suite de fonctions : un classique

Convergence simple et convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n), où :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Exercice classique. Remarquer que la limite simple est e^{-x}. Pour la convergence uniforme sur tout segment $[0, b]$, utiliser la formule de Taylor-Lagrange comme on a obtenu la limite simple avec un équivalent. Enfin, soit $\varepsilon > 0$. A partir d'un certain $A \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^x \leqslant \varepsilon$$

Et ensuite, pour n assez grand, OK sur le segment $[0, A]$ par ce qui précède. □

Une deuxième étude de suite de fonctions

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que la suite de fonctions

$$f_n : x \mapsto n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Démonstration. On prouve que la limite simple est f'. Ensuite, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'obtenir :

$$|f_n(x) - f'(x)| \leqslant \frac{1}{2n} \|f''\|_{\infty, [x, x+\frac{1}{n}]}$$

On prend alors $x \in [a, b]$ et alors f'' est bornée par M sur $[a, b+1]$ donc

$$\forall x \in [a, b],\ |f_n(x) - f'(x)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2n} \|f''\|_{\infty, [a, b+1]}}_{\text{indépendant de } x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

□

Une troisième étude de suite de fonctions

Convergence simple et uniforme de

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x^k)$$

Où ça ?

Démonstration. En passant au ln, on obtient un domaine qui vaut $[-1, 1[$. En effet, si $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\ln(u_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\ln(1 + x^k)}_{\sim x^k \text{ sommable}}$$

donc convergence. Ensuite,

$$\ln(1 - a^n) \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant a^n$$

si $x \in [-a, a]$ avec $a \in [0, 1[$ donc CVN sur $[-a, a]$. □

Une quatrième étude de suite de fonctions

Etablir la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n) de fonctions définies par :

$$f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n\sqrt{t}} \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Démonstration. La limite simple est la fonction nulle. Ensuite, on utilise l'**arme anti-colleur** (merci pour la dénomination François). On considère

$$\varphi(u) = \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$$

Alors φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (après prolongement par continuité en 0). Et ensuite :

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{\mathcal{N}_\infty(\varphi)}{\sqrt{n}}$$

donc on a une convergence normale. □

Remarque. **Quand il y a du nt, penser à utiliser cette technique !!!**

△ Composition

Soit φ une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $[a, b]$ convergeant uniformément vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $(\varphi \circ f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\varphi \circ f$.

Démonstration. Revenir à la définition de la convergence uniforme avec les ε et utiliser l'uniforme continuité de φ, permise par le théorème de Heine. On prend le η qui correspond et on prend n_0 à partir duquel

$$\|f - f_n\|_\infty \leqslant \eta$$

avant de conclure avec l'uniforme continuité de φ. □

△ Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes

Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que f est polynomiale.

Démonstration. Avec l'inégalité triangulaire, on montre qu'à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$\|P_n - P_{n_0}\|_\infty \leqslant 1$$

Or, les seuls polynômes bornés sont les polynômes constants. On prend donc $c_n \in \mathbb{C}$ tel que $P_n - P_{n_0} = c_n$. En particulier, $c_n = P_n(0) - P_{n_0}(0)$ Mais par convergence simple vers f, on a

$$c_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0) - P_{n_0}(0)$$

Et avec la limite simple on a :

$$f = P_{n_0} + f(0) - P_{n_0}(0)$$

donc f est bien polynomiale. $\square$

$\star$ Itérées d'une fonction qui diminue strictement la norme

Soit A un réel strictement positif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ |f(x)| < |x|$$

Montrer que la suite $f^{=}f \circ \cdots \circ f$ converge uniformément vers 0 sur tout segment $[-A, A]$.

Démonstration. On remarque par passage à la limite que $f(0) = 0$ puis on prend $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On applique le théorème des bornes atteintes à $\dfrac{|f(x)|}{|x|}$ sur $[-A, -\varepsilon]$ et su $[\varepsilon, A]$ pour obtenir qu'elle est contractante (ou presque) sur ces ensembles. Nécessairement, les itérées rentrent dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ à partir d'un certain n qui ne dépend que A et ε. $\square$

Une intégrale

Soit $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que pour tout suite convergente (x_n) d'éléments de $[0, 1]$, la suite de fonctions $(y \mapsto f(x_n, y))$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x, y)\ dy$ est continue.

Démonstration. On utilise le théorème de Heine pour obtenir que f est uniformément continue et on prend $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ associé.

1. On note x la limite. Alors on prend n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $|x_n - x| \leqslant \eta$ puis on utilise l'uniforme continuité.
2. On fait la différence des deux intégrales et on utilise encore l'uniforme continuité.

$\square$

$\triangle$ Limite simple de fonctions lipschitziennes de même rapport sur un segment

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions toutes k-lipschitziennes définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite f. Montrer que la convergence est uniforme.

Démonstration. Un passage à la limite montre que f est k-lipschitzienne. Ensuite, pour $\varepsilon > 0$, on prend une subdivision $a_0 < \ldots < a_p$ de $[a, b]$ telle que

$$|a_{i+1} - a_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{3k}$$

Ensuite, on prend un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ |f_n(a_i) - f(a_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Finalement, pour $x \in [a, b]$, dont le plus proche élément de la subdivision est a_i, on écrit :

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|$$

et on utilise la lipschitzianité et le fait que

$$|x - a_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{3k}$$

puis l'hypothèse sur n_0 pour majorer le tout par ε, indépendamment de x. □

Remarque. Cette technique de prendre une subdivision est fortement utile.

⋆ ⋆ ⋆ Version faible du théorème d'Ascoli

1. Soit $k > 0$ et (f_n) une suite de fonctions de $[0, 1]$ dans $[-1, 1]$ toutes k-lipschitziennes. Montrer que l'on peut extraire de (f_n) une sous-suite convergeant uniformément.
2. Application :montrer qu'est de dimension finie tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ sur lequel $f \mapsto \mathcal{N}_\infty(f)$ et $f \mapsto \mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(f')$ sont équivalentes.
3. Application 2 : soit (f_n) une suite de fonctions convexes bornées sur un intervalle I ouvert (donc continues) : montrer que si la suite (f_n) est bornée pour $\mathcal{N}_\infty$, elle admet une sous-suite convergeant uniformément sur tout segment de I.

Démonstration. Exercice **très** difficile !

1. Mettre en place une extraction diagonale après avoir pris des limites simples en tout point de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ qui est dénombrable, puis utiliser la lipschitzianité un peu comme dans l'exercice précédent. Pour plus de détail, se référer au DM qui concerne ce théorème.
2. Utilise l'équivalence de ces normées pour essayer de se ramener à des fonctions lipschitziennes
3. Écrire une inégalité des pentes et ce que signifie le fait d'être bornée.

□

⋆ Lemme de Riemann-Lebesgue sur un intervalle quelconque

On rappelle que si f est continue par morceaux sur un segment I, alors $\in_I f(t)e^{int}\, dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Généraliser ce résultat à un intervalle I quelconque pour une fonction f intégrable sur I. On pourra se contenter de traiter le cas $I = \mathbb{R}_+$.

Démonstration. On définit

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(t)e^{int}\, dt \quad \text{et} \quad I_n(p) = \int_0^p f(t)e^{int}\, dt$$

Alors, on a :

$$|I_n - I_n(p)| \leqslant \int_p^{+\infty} |f(t)||e^{int}|\ dt = \underbrace{\int_p^{+\infty} |f(t)|\ dt}_{\text{indépendant de } n} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

On a donc une convergence uniforme puis on applique le théorème de la double limite en utilisant le cas des segments. □

15.3.2 Théorèmes de Dini

Δ⋆ Premier théorème de Dini

On considère une suite décroissante de fonctions (f_n) sur un compact K qui converge simplement vers 0. Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Déjà, remarquons que toutes les f_n sont par conséquent positives. Il est possible de démontrer le résultat à la main en prenant les *maxima* sur le segment, mais il y a plus élégant. Soit $\varepsilon > 0$. On considère

$$K_n := \{x \in K \ : \ f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$$

puis on raisonne par l'absurde. On suppose que tous ces compacts (fermés dans un compact) sont non vides. Alors, puisque (K_n) forme une suite décroissante de compacts, d'après le théorème des compacts emboîtés, on peut prendre x dans l'intersection de tous ces compacts. Mais alors il ne peut y avoir convergence simple en x. Cela est absurde. Ainsi, il existe un K_{n_0} vide, et par décroissance, tous les suivants le sont. On a donc bien convergence uniforme. □

Remarque. On peut aussi le faire à la main mais c'est un peu bourbier. Sinon, ceux qui veulent pourront le faire avec Borel-Lebesgue mais c'est un peu overkill (et pas démontrable très vite).

⋆ Deuxième théorème de Dini

On considère une suite de fonctions (f_n) définies sur $[a, b]$ à valeurs réelles qui sont toutes croissantes et qui converge simplement vers f continue. Montrer que la convergence est uniforme.

Démonstration. Un passage à la limite montre que f est croissante. On fixe $\varepsilon > 0$ Et par croissance et uniforme continuité de f, on peut fixer $c_0 < \ldots < c_n$ une subdivision de $[0, 1]$ telle que

$$\forall i,\ f(c_{i+1}) - f(c_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Ensuite, si $x \in [0, 1]$, on prend i tel que $c_i \leqslant x \leqslant c_{i+1}$. Par croissance de f et de f_n on a alors :

$$\begin{cases} f_n(x) - f(x) \leqslant f_n(c_{i+1}) - f(c_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + f_n(c_{i+1}) - f(c_{i+1}) \\ f_n(x) - f(x) \geqslant f_n(c_i) - f(c_{i+1}) \geqslant f_n(c_i) - f(c_i) - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Or, il y a un nombre fini de c_i donc on peut prend n_0 tel que

$$\forall i,\ \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(c_i) - f(c_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On a donc :

$$\forall x, \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est bien la convergence uniforme souhaitée. □

⋆ Théorème de Dini pour les fonctions convexes

Montrer que si une suite de fonctions convexes sur un intervalle ouvert I converge simplement sur I, alors la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Démonstration. On note (f_n) la suite de fonctions et f la limite simple. On prend $[b, c] \in I$ puis $(a, d) \in I^2$ tel que $a < b < c < d$. Soit $x \neq y \in [b, c]$. La convexité fournit :

$$\frac{f_n(b) - f_n(a)}{b - a} \leqslant \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leqslant \frac{f_n(d) - f_n(c)}{d - c}$$

Or, les deux suite extrémales admettent des limites indépendantes de x et y. Donc on en déduit que

$$\forall n,\ \forall x \neq y,\ \left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| \leqslant M$$

où M ne dépend pas ni de x, ni de y, ni de n. Ensuite, il s'agit d'un des exercices précédents (à refaire donc). □

Remarque. il est peut-être possible de se ramener à une autre théorème de Dini, peut-être celui sur les fonctions croissantes.

15.3.3 Propriétés des limites simples et uniformes

Zéros

Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue f. Montrer que si chacune des fonctions f_n admet un zéro, il en est de même pour f. Donner un contre-exemple si l'on ne suppose qu'une convergence simple.

Démonstration. Extraire une valeur d'adhérence d'une suite de zéros puis utiliser la convergence uniforme. Comme contre-exemple, considérer :

$$fn(x) = x^n - \frac{1}{2}$$

sur $[0, 1]$. □

Uniforme continuité

Montrer que si (f_n) converge uniformément sur A vers f, et si pour tout n, la fonction f_n est uniformément continue sur A, alors f l'est également.

Démonstration. Revenir à la définition. Écrire

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|f(x)-f_{n_0}(x)\| + \|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(y)\| + \|f_{n_0}(y)-f_{n_0}(y)\|$$

en utilisant les hypothèses de convergence uniforme avec

$$\|f-f_{n_0}\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et avec l'hypothèse d'uniforme continuité sur f_{n_0}. □

Intégrale et limite nulle

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{+\infty} = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)\, dx = 0$$

mais qu'il n'y a convergence uniforme vers 0 de $f_n : x \mapsto f(nx)$ que si f est nulle.

Démonstration. Revenir avec des ε et couper l'intégrale en deux en utilisant l'hypothèse. On montre le deuxième point par contraposée en prenant x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ et en écrivant

$$x_0 = n\frac{x_0}{n}$$

□

15.3.4 Séries de fonctions

⋆ Un résultat autour de la constante d'Euler γ

Montrer

$$\lim_{x\to0^+} \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+x}}\right) - \frac{1}{x}\right] = \gamma$$

où γ désigne la constante d'Euler (qui apparaît dans le développement asymptotique de la série harmonique). On pourra remarquer que

$$\frac{1}{x} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{1+x}}$$

Démonstration. On pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n^{1+x}} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{1+x}}$$

Un calcul d'intégrale et un DL donnent

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

Or, on sait que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln(n)\right)=\gamma$$

Il suffit alors de montrer la convergence uniforme de $\sum u_n$ au voisinage de 0. Faire une comparaison série-intégrale pour obtenir :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^{1+x}}-\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^{1+x}}\right)\right|\leqslant\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{1+x}}=\frac{1}{xn^x}\left(1-e^{-x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

or, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, on a :

$$-x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\in[-1,0]$$

Avec l'IAF, exp est 1-lipschitzienne sur $[-1,0]$ et alors :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^{1+x}}-\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^{1+x}}\right)\right|\leqslant\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^x}\leqslant\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{indépendant de }x}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

On a donc la CVU souhaitée et le théorème d'interversion de limites fournit le résultat. □

Suite décroissante positive

Soit (a_n) une suite décroissante positive et $u_n : t\mapsto a_nt^n(1-t)$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\sum\frac{a_n}{n}$ converge.
3. ⋆ Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, (a_n) tend vers 0.

Démonstration. La troisième question est difficile. Remarquons déjà que a_n est bornée.

1. Si $t\in[0,1[$, Ok car (a_n) est bornée. Si $t=1$, c'est la série nulle.
2. On étudie les variations de u_n :

$$u_n'(t)=a_nt^{n-1}(n-(n+1)t)$$

Cela permet de montrer que u_n admet pour maximum

$$a_n\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

On prouve alors aisément que

$$\mathcal{N}_\infty(u_n)\sim\frac{a_n}{ne}$$

Par équivalence et comme $1/e\neq0$, on a le résultat.

3. Supposons $a_n \to l > 0$. Alors on montre aisément avec un télescopage que
$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n (1-t)\right| \geqslant l t^N$$
donc pas de convergence uniforme car alors $\|R_{N-1}\|_\infty \geqslant l$. Supposons $a_n \to 0$. Alors :
$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n t^n (1-t)\right| \leqslant a_N \sum_{n=N}^{+\infty} (t^n - t^{n+1}) \leqslant a_N t^N \leqslant \underbrace{a_N}_{\text{ind. de } t} \to 0$$
(la deuxième inégalité est valable aussi si $t = 1$ même si le télescopage ne tient plus).

□

Sommes de puissances

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$
Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
2. En déduire un équivalent simple de la suite
$$S'_n = \sum_{j=0}^{n} j^n$$

Démonstration. On fait comme d'habitude.

1. On pose $u_k(n)$ qui vaut $\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)$ si $k < n$ et 0 sinon. On a alors
$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$$
Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-k}$ Et on a
$$|_k(n)| \leqslant \underbrace{e^{-k}}_{\text{ind. de } n} \quad \text{sommable}$$
donc on a une convergence normale. On a donc convergence et la limite est
$$\frac{1}{1 - e^{-1}}$$
2. Avec un changement d'indice, on montre que
$$S_n = \frac{1}{n^n} S'_n$$
On en déduit que
$$S'_n \sim \frac{n^n}{1 - e^{-1}}$$

□

Une étude de série de fonctions

On pose $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ où $f_n : t \mapsto te^{-n^2t^2}$.

1. Définition et continuité de f ?
2. Limite en $+\infty$?
3. Limite en 0 ?

Démonstration. 1. • Définition : OK pour $t = 0$, et OK si $t \neq 0$ car on a un $O(e^{-nt^2})$ qui est sommable car $t^2 > 0$.
   • Continuité : avec une majoration du reste par une intégrale et un changement de variable, on trouve une CVU sur tout $]-\infty, -a]$ et $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ donc une continuité en tout point de $\mathbb{R}^*$. Remarquer que la continuité en 0 est l'objet de la troisième question.
2. On a en particulier convergence uniforme au voisinage de $+\infty$. or, $f_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc le théorème de la double limite donne $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
3. Une comparaison série-intégrale (et le dessin qui va avec !) donnent pour $t > 0$:

$$\left| f(t) - \underbrace{\int_0^{+\infty} te^{-x^2t^2}\, dx}_{=\sqrt{\pi}/2} \right| \leqslant t$$

donc

$$f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On constate qu'il n'y a pas de continuité en 0 et donc pas de convergence uniforme au voisinage de 0.

□

Une deuxième étude de série de fonctions

1. Déterminer le domaine de convergence réel de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$. on note $\varphi(x)$ sa somme.
2. Montrer qu φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. La série est-elle normalement convergente sur son domaine de définition ?
4. Déterminer la limite puis un équivalent de φ en 0^+.

Démonstration. 1. Si $x < 0$, divergence grossière. Si $x = 0$,$f_n(x) = 0$. Si $x > 0$, $f_n(x) = o(n^{-2})$ donc OK.

2.
$$|f_n(x)| \leqslant \frac{be^{-na}}{\ln(n)} \text{ sommable}$$
si $x \in [a, b]$ avec $a < b$. CVN sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc continuité.

3. On écrit
$$f_n(x) = \frac{\psi(nx)}{n\ln(n)}$$
avec $\psi : t \mapsto te^{-t}$ On a alors :
$$\|f_n\|_\infty = \frac{\|\psi\|_\infty}{n\ln(n)}$$
Or, $\|\psi\|_\infty \neq 0$ et la série des inverses de $n\ln(n)$ diverge (cas limite des séries de Bertrand) donc on n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

4. Comparaison série intégrale puis ? ? ?

□

Une troisième étude de séries de fonctions : ζ alternée

1. Ensemble de définition de $\chi : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$
2. Montrer que χ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
3. Préciser la monotonie de χ au voisinage de $+\infty$.
4. $\star$ Montrer que χ tend vers $1/2$ en 0^+.

Démonstration. La dernière question est difficile.

1. Si $s \leqslant 0$, divergence grossière. Si $s > 0$, OK avec le théorème des séries alternées.
2. Dériver et dominer.
3. Dériver χ et utiliser le théorème des séries alternées.
4. Calculer sur $2f$ en sortant un terme d'une des deux sommes et en faisant un décalage d'indice sur l'autre. On utilise ensuite le théorème des séries alternées sur cette série alternée convexe.

□

⋆ Théorème de Mertens

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes convergentes. On pose

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ converge et vérifie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

On pourra écrire

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p V_{n-p}$$

où (V_n) est la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ convenablement prolongée à $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Comme suggéré, on définit $V_n = 0$ pour $n < 0$. On veut alors utiliser le théorème de la double limite. On montre alors une convergence normale. On sait que (V_n) est bornée donc $|u_p V_{n-p}| \leqslant C|u_p|$ qui est sommable et indépendante de n. On peut alors utiliser le théorème de la double limite sur les sommes partielles. □

⋆ Réciproque d'un résultat classique

Soit $D = \{d_n | n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble au plus dénombrable. Alors il existe une fonction f croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement D.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1/2^n \text{ si } x \geqslant d_n \\ 0 \text{ si } x < d_n \end{cases} \end{array}$$

Alors $f = \sum f_n$ converge simplement. En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$I_x = \{n \in \mathbb{N} \ : \ d_n \leqslant x\}$$

Alors $f(x) = \sum_{i \in I_x} 2^{-i}$ qui est bien finie comme sous-famille de la famille $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est sommable. De plus, f est croissante comme limite simple de fonctions croissantes. Par conséquent, elle admet des limites à gauche et à droite en tout point. Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons l_n cette limite. Il est clair que la limite à droite de f en d_n est supérieure à $f(d_n)$ par croissance. Or, pour $x < d_n$:

$$f(x) = \sum_{i \in I_x} 2^{-i} \leqslant \sum_{d_i < d_n} 2^{-i} = f(d_n) - \frac{1}{2^n}$$

Donc $l_n < f(d_n)$ et d_n est un point de discontinuité de f. Et, si $x \notin D$, on peut distinguer les cas :

- si x n'est pas un point d'accumulation de D, alors on a convergence normale au voisinage de x donc continuité car les f_i sont continues au voisinage de x ;
- si x est un point d'accumulation de D : on revient à la définition en prenant ε, puis on s'approche suffisamment de x pour que la différence causée par une $\sum_{j\in J} 2^{-j}$ soit inférieure à ε (possible car la série converge).

□

15.3.5 Approximation uniforme

Approximation de la fonction et de ses dérivées sur un segment

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \in \mathbb{N}$, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $(P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ pour tout $k \in [\![0,p]\!]$.
2. $\star$ Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $(P_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La deuxième question est difficile.

1. Prendre l'exemple de la fin du cours de fonctions vectorielles et ajouter

$$P_n = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Par la première question, prenons $P_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \leqslant p,\ \|P_p^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^p}$$

On montre que $(P_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convient. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $p \geqslant k$, on a par construction

$$\|P_p^{(k)} - f^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

□

∆ Application du théorème de Weierstrass

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b t^n f(t)\ dt = 0$$

Montrer que f est nulle. On pourra commencer par le cas où f est à valeurs réelles.

Démonstration. Le prouver dans le cas où f est réelle. Le résultat s'en déduire en passant aux parties réelle et imaginaire. utiliser le théorème de Weierstrass pour approximer f par une suite de polynômes. Alors, l'hypothèse permet de montrer que l'intégrale de f^2 est nulle, donc $f = 0$ car continue positive. □

Analogue au précédent

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que

$$\int_0^1 xf(x)\ dx = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ \int_a^b x^n f(x)\ dx = 0$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'une telle fonction f. Alors, en faisant comme dans l'exercice précédent, on montre que

$$\forall x \in [0,1],\ x^2 f(x) = 0$$

On en déduit que

$$\forall x \in [0,1],\ xf(x) = 0$$

et donc que

$$\int_0^1 xf(x)\ dx = 0$$

ce qui est absurde. □

15.3.6 TD Châteaux

Théorèmes de Dini

1. Montrer le premier théorème de Dini : soit K un compact et (f_n) une suite croissante de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f continue. Alors, la convergence est uniforme. Indication : on pourra considérer $\Omega_n = \{x \in K \mid f(x) - \varepsilon < f_n(x)\}$ et utiliser le théorème des compacts emboités.
2. Montrer le deuxième théorème de Dini : soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers f continue. Alors, la convergence est uniforme. Indication : on pourra utiliser le théorème de Heine.

Convergence d'une suite de fonctions lipschitziennes

1. Soit (f_n) une suite de fonctions toutes M-lipschitziennes sur $[a, b]$ et qui converge simplement vers f. Montrer que f est M-lipschitzienne et que la convergence est uniforme.
2. On pose $f_n(x) = \min(nx, \sqrt{x})$. Vérifier que chaque fonction f_n est lipschitzienne. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction racine carré, qui n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.
3. Soit (f_n) une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers f sur un intervalle I. Démontrer que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans l'intérieur de I.

Fonctions α et ζ de Riemann

On pose, sous réserve d'existence, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ et $\alpha(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$.

1. Démontrer la convergence normale sur tout compact du demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ de ces deux séries de fonctions. En déduire que les fonctions ζ et α sont définies dans le champ complexe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, et sont continues sur ce demi-plan.
   Désormais, **on se limite à la variable réelle**.
2. Démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et que $\zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$.
3. Démontrer que la série de fonctions définissant α converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. En déduire que α est continue sur $]0, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.
4. Démontrer : $\forall x > 1,\ \alpha(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$. Indication : on pourra séparer les indices pairs et impairs.
5. Déterminer $\alpha(1)$. En déduire que $\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
6. Démontrer : $\zeta(x) - 1 \underset{x \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{2^x}$. Indication : on pourra effectuer une comparaison série-intégrale.

Équicontinuité

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normée E. L'espace $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ est muni de la norme infinie. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est équicontinue lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in K,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in K,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \|x - y\| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est uniformément équicontinue lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in K^2,\ \forall f \in \mathcal{F},\ \|x - y\| \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

1. Montrer que toute partie équicontinue est uniformément équicontinue.
2. Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ qui converge simplement et telle que l'ensemble $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit équicontinu. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.
3. Soit A une partie dense de K et soit $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une partie équicontinue de $\mathcal{E}$ telles que (f_n) converge simplement vers f sur A. Montrer que f se prolonge en une application $\hat{f}$ continue sur K telle que (f_n) converge simplement vers $\hat{f}$ sur K.
4. **Théorème d'Ascoli** : supposons E de dimension finie et soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathcal{F}$ est d'adhérence compacte
   (ii) $\mathcal{F}$ est équicontinue et $\forall x \in K,\ \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est borné

   Indication : pour le sens $(ii) \implies (i)$, on montrera que de toute suite de $\mathcal{F}$, on peut extraire une suite convergeant simplement dans $K \cap D$ où D est dénombrable dense par le biais d'un procédé diagonal.
5. Application : retrouver le résultat de la première question sur la convergence d'une suite de fonctions toutes lipschitziennes de même rapport.

Chapitre 16

Intégrales à paramètres

Table des matières

16.1 Points méthode

Intégrale dont la borne dépend d'un paramètre

Il faut bien noter, dans l'énoncé du théorème de convergence dominée, que l'intervalle d'intégration est fixe. Prolonger la fonction par la fonction nulle ou effecteur un changement de variable permet parfois de contourner cette difficulté lorsque l'intervalle d'intégration dépend de n.

Justification d'une interversion série/intégrale

Lorsque le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas, pour justifier une interversion série/intégrale, on pourra parfois, en notant S_n et R_n la somme partielle et le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum u_n$ de somme S, vérifier que :

$$\int_I R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ ou } \int_I S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I S$$

Pour établir de telles limites, on utilisera en général le théorème de convergence dominée.

Établissement de la domination sur A pour le théorème de continuité

Une domination sur tout l'ensemble est toujours suffisante, c'est pourquoi on commencera toujours, dans la pratique, par chercher à établir une telle domination. Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on pourra chercher une domination sur tout segment de A ou sur toute famille d'intervalles adaptée à la situation, c'est-à-dire permettant d'obtenir une domination sur tout segment de A.

Établissement de la domination sur J pour le théorème de dérivabilité

Bien entendu, une domination sur tout J est suffisante. Dans la pratique, on commencera par essayer d'établir une domination globale et, seulement si nécessaire, on se limitera aux segments de J, voire à une famille d'intervalles adaptée à la situation, c'est-à-dire permettant d'obtenir une domination sur tout segment de J.

Classe $\mathcal{C}^\infty$

Pour montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il suffit de vérifier que :

- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- chacune des dérivées partielles $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ est dominée sur tout segment.

16.2 Astuces

Une "factorisation" utile

Si f est dérivable, remarquer que la fonction :

$$F: \quad (u,v) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} \dfrac{f(u)-f(v)}{u-v} \text{ si } u \neq v \\ f'(u) \text{ si } u = v \end{cases}$$

peut se réécrire sous la forme :

$$F(u,v) = \int_0^1 f'\big((1-t)u + tv\big)\ dt$$

Cela permet de ne plus avoir à séparer les deux cas et de par exemple appliquer les théorèmes de continuité ou de dérivation.

Application. Théorème de division.

16.3 Exercices classiques

16.3.1 Suites et séries d'intégrales

Application du cours

Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2/n^2}\ dx$$

et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Pour l'existence, on a de la continuité par morceaux et un $O(f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. La limite simple est la fonction nulle sauf en 0 où c'est $f(0)$. On a une domination par $|f|$ qui est intégrable donc la limite est nulle. □

Δ Recherche d'équivalent

Montrer que

$$I_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n}\ dx$$

tend vers 0 et en trouver un équivalent en utilisant le changement de variable $t = x^n$.

Démonstration. La limite simple est la fonction nulle partout sauf en 1 où elle vaut e^{-1}. On a une domination par e^{-x} qui intégrable donc la limite est nulle d'après le théorème de convergence dominée. Avec le changement de variable on trouve :

$$In = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{t^{1/n}e^{-t}}{t}\, dt$$

On a cette fois encore une domination par e^{-t} qui nous fournit avec le théorème de convergence dominée :

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

(cette intégrale est bien non nulle car la fonction est continue positive non identiquement nulle). □

Recherche de développement asymptotique

On définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, dt$$

1. Déterminer un équivalent de (I_n).
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de (I_n).

Démonstration. On fait comme dans l'exercice précédent.

1. Le changement de variable $u = x^n$ donne :

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\, du$$

Le théorème de convergence dominée, avec une domination par $\frac{1}{1+u}$ donne alors :

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{du}{1+u} = \frac{\ln(2)}{n}$$

2. Puis :

$$I_n - \frac{\ln(2)}{n} = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\, du = \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{n(u^{1/n}-1)}{1+u}\, du$$

On a pour cette nouvelle intégrale une convergence simple vers $\frac{\ln(u)}{1+u}$ et une domination par $\frac{-\ln(u)}{1+u}$ qui est intégrable. Par convergence dominée, on a :

$$\int_0^1 \frac{n(u^{1/n}-1)}{1+u}\, du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\, du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

(l'avant-dernière égalité se prouver par intégration terme à terme, puis on prouve la dernière en sortant les termes pairs). On a donc le développement asymptotique :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2}$$

$\square$

△ Une limite exponentielle

On définit

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

Montrer que (I_n) converge et admet pour limite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Démonstration. On vérifie que la limite simple est e^{-x^2} sans trop de problème. Pour la domination, cela se corse. Il faut étudier $g : t \mapsto e^{-t\ln\left(1+\frac{x^2}{t}\right)}$ pour x fixé lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$. En la dérivant et en utilisant l'inégalité :

$$1 - \frac{1}{t} \leqslant \ln(t) \leqslant t - 1$$

on prouver qu'elle est décroissante. On en déduit la décroissance de $(f_n(x))$ et donc une domination par $f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée conclut. $\square$

Intégration terme à terme

Montrer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Démonstration. Écrire

$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \sin(x)\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sin(x) \sum_{n=1}^{+\infty e^{-nx}}$$

On pose $u_n(x) = \sin(x)e^{-nx}$. On montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, dx$ est sommable en découpant entre 0 et 1 pour utiliser la majoration classique de $|\sin(x)|$ par $|x|$ puis entre 1 et $+\infty$ où on peut simplement calculer l'intégrale. On majore alors en valeur absolue par

$$\frac{1}{n^2}(1 - e^{-n}) \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est sommable (des termes se sont simplifiés). On peut donc intégrer terme à terme. Ensuite, on calcule les intégrales des u_n en passant par une partie imaginaire d'une exponentielle complexe pour obtenir le résultat souhaité. $\square$

Géométrique !

Soit p et q deux réels strictement positifs. Montrer l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nq+p}$$

Démonstration. Si $x \in [0,1]$, on écrit :

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n x^{nq+p-1}}_{:=u_n(x)}$$

Ensuite, on veut intégrer terme à terme, mais

$$\int_0^{+\infty} u_n(x)\ dx = \frac{(-1)^n}{nq+p} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |u_n(x)|\ dx = \frac{1}{nq+p}$$

donc le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique pas. Cependant, grâce au théorème des séries alternées, on a, puisque $|u_n(x)|$ décroît :

$$\left|\int_0^1 R_{n-1}(x)\ dx\right| \leqslant \int_0^1 |R_{n-1}(x)|\ dx \leqslant \int_0^1 |u_n(x)| dx = \frac{1}{nq+p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\int_0^1 R_{n-1}(x)\ dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En conséquence, on peut tout de même intervertir somme et intégrale, ce qui fournit le résultat. □

Sophomore's dream

Montrer que la fonction $x \mapsto x^x$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

Démonstration. Avec un DL, on voit que le seul prolongement convenable est le prolongement par 1 en 0. Ensuite, développer f en série avec le développement en série de l'exponentielle puis calculer :

$$\int_0^1 \frac{(x\ln(x))^n}{n!}\ dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Pour cela, il est préférable de définir $I_{n,p}$ avec une puissance sur le ln et l'autre paramètre pour la factorielle puis de faire une récurrence sur le nombre de ln en intégrant par parties. Or, puisque le signe de ces termes est constant, on a

$$\left|\int_0^1 \frac{(x\ln(x))^n}{n!}\ dx\right| = \int_0^1 \left|\frac{(x\ln(x))^n}{n!}\right|\ dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

qui est sommable car $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ensuite, intervertir somme et intégrale pour obtenir le résultat. □

Transformée de Laplace

Soit $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{C})$ ayant une limite $l \in \mathbb{C}$ en $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\ dt = l$
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} x\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\ dt = f(0)$
4. Existe-t-il $f \in \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{C})$ telle que $x \mapsto x\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\ dt$ admette une limite finie en 0 sans que f n'ait de limite finie en $+\infty$?

Démonstration. Classique, du cours pour les SIistes.

1. Continue admet une limite donc bornée et on a le grand O qui suffit. Ensuite, on remarque par changement de variable que :
$$x\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} e^{u} f\left(\frac{u}{x}\right)\ du$$
Et on a les continuités (par morceaux) réglementaires et la domination par une constante multipliée par e^{-u}.
2. Passage à la limite sous le signe intégrale avec ce que l'on a fait avant.
3. Passage à la limite sous le signe intégrale avec ce que l'on a fait avant.
4. Considérer $t \mapsto e^{it}$ (penser aux transformées de Laplace de sin et cos qui existent en SI).

□

Beurk

Montrer que
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n(n+1)^{x+1}}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer son intégrale.

Démonstration. On montre facilement que $u_n(x)$ est intégrable. Ensuite, on considère :
$$f : t \mapsto \frac{\ln(t+1)}{t(t+1)^{x+1}}$$
à x fixé que l'on dérive. En utilisant l'inégalité $\ln(t) \geqslant 1 - \frac{1}{t}$, on prouve, en la dérivant, que f est décroissante et donc que $(|u_n(x)|)$ est décroissante. On calcule :
$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\ dx = \frac{1}{n(n+1)}$$

et on peut alors intégrer terme à terme. On intervertit somme et intégrale et, en écrivant une somme télescopique (après avoir sorti un terme), on prouve que l'intégrale vaut $2\ln(2) - 1$. □

Théorème de convergence monotone

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions intégrables convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux. Montrer que f est intégrable si, et seulement si, la suite $\left(\int_I f_n\right)$ est majorée et qu'alors on a :

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$$

Démonstration. Historiquement, pour démontrer le théorème de convergence dominée, on a commencé par démontrer celui-ci. On considère $(f_{n+1} - f_n)$. Alors $\sum(f_{n+1} - f_n)$ CVS vers $f - f_0$ CPM. Alors, par croissance, tous les termes qui suivent existent dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\int_I (f - f_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I (f_{n+1} - f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_{n+1} - \int_I f_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_I f_n\right) - \int_I f_0$$

Et alors on raisonne par équivalences en remarquant que $f - f_0$ est positive donc la convergence de son intégrale équivaut à son intégrabilité. □

16.3.2 Intégrales dépendant d'un paramètre réel

Application du cours

Définition, continuité, dérivabilité et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt$$

Démonstration. $O(e^{-t})$ pour la définition. pour la continuité, une domination par ae^{-t} sur tout $[-a, a]$ pour $a >$ à donne la continuité sur $\mathbb{R}$. Pour la dérivabilité, on domine

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = |\cos(xt) e^{-t}\right| \leqslant e^{-t}$$

En calculant, on trouve ensuite que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

(passer par des exponentielles complexes). Or, on voit immédiatement que $f(0) = 0$ et alors $f(x) = \arctan(x)$. □

Remarque. On peut en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du$$

En effet, pour $x > 0$, on a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-u/x}\ du$$

Ensuite, on pose

$$f_n(x) = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u} e^{-u/x}\ du$$

On vaut alors utiliser le théorème de la double limite. Pour la convergence uniforme par rapport à x lorsque $n \to +\infty$, on utilise des séries alternées en découpant les intégrales. Et le théorème de convergence dominée donne

$$f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\ du$$

On en déduit avec l'expression de f que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\ du = \frac{\pi}{2}$$

Une étude

Domaine de définition et calcul de :

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}\ dt$$

Démonstration. On dérive deux fois (en dominant sur $[a, +\infty[$) puis on calcule pour obtenir :

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

Ensuite, quand on primitive une première fois, la constante est nulle avec la limite en $+\infty$ puis en primitivant une deuxième fois, la limite en $+\infty$ donne $\pi/2$ pour la deuxième constante. On obtient :

$$f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

□

Remarque. Par continuité, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\ dt = \frac{\pi}{2}$$

Prolongements $\mathcal{C}^\infty$

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, alors il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^n g(x)$$

   On pourra utiliser une formule de Taylor.
2. En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et si P est un polynôme tel que la fonction $t \mapsto f(t)/P(t)$ admette un prolongement continu, alors ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. 1. Suivre l'indication et utiliser la formule de Taylor avec reste intégral. Montrer que l'intégrale, lorsqu'on a sorti x^n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dominant les dérivées sur tout segment.

2. Se ramener en 0 par translation et appliquer la question précédente au numérateur.

□

Intégrales de Fresnel

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$G(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}e^{iyt}}{\sqrt{t}}\ dt$$

1. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Calculer $G(1, 0)$.
3. Exprimer $G(x, y)$ à l'aide de $G(1, z)$ pour un z bien choisi.
4. Montrer que $H : z \mapsto G(1, z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall z \in \mathbb{R},\ H'(z) = \frac{i}{2(1 - iz)} H(z)$$

5. $\star$ En déduire la valeur de $H(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ puis celle de $G(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
6. Montrer que $G(0, y)$ a un sens pour tout $y > 0$.
7. $\star$ Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x, 1) = G(0, 1)$. En déduire la convergence et la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)\ dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\ dt$$

Démonstration. Les questions 5 et 7 sont difficiles.

1. Dominer par $\dfrac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t}}$ sur $[\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}$ et utiliser le théorème de continuité.

2. Calculer en utilisant l'intégrale de Gauss ce qui donne avec un changement de variable
$$G(1,0)=\sqrt{\pi}$$
3. Le changement de variable $u = xt$ fournit :
$$G(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}}G\left(1,\frac{y}{x}\right)$$
4. Dériver avec le théorème. La domination ne pose pas de problème. Faire ensuite une IPP sur l'intégrale dérivée pour obtenir le résultat.
5. Résoudre **proprement** (pas de ln complexe !) cette équation différentielle pour obtenir :
$$\forall z\in\mathbb{R},\ H(z)=\sqrt{\pi}\frac{1}{(1+z^2)^{1/4}}e^{\frac{i}{2}\arctan(z)}$$
Avec le résultat de la question 3, on en déduit que :
$$G(x,y)=\sqrt{\frac{\pi}{x}}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{1/4}e^{\frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$$
6. On l'intégrabilité en 0. La convergence en $+\infty$ s'établit par une IPP.
7. Écrire
$$\begin{aligned}\left|G(x,1)-\int_{1/n}^{n}\frac{e^{-xt}e^{it}}{\sqrt{t}}\ dt\right| &\leqslant \int_0^{1/n}\frac{dt}{\sqrt{t}}+\left|\left[\frac{e^{(i-x)t}}{(i-x)\sqrt{t}}\right]_n^{+\infty}-\int_n^{+\infty}\frac{-e^{(i-x)t}}{2(i-x)t\sqrt{t}}\right|\\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\frac{x+i}{x^2+1}\right|+\left|\frac{x+i}{x^2+1}\right|\int_n^{+\infty}\frac{dt}{2t\sqrt{t}}\\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\\ &= \underbrace{\frac{5}{\sqrt{n}}}_{\text{ind. de } x}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{aligned}$$
donc on a une convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Or, les
$$x\mapsto\int_{1/n}^{n}\frac{e^{-xt}e^{it}}{\sqrt{t}}\ dt$$
sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (dominer) donc $x\mapsto G(x,1)$ aussi donc on a le résultat souhaité. Ensuite, on utilise l'expression de la question 5 et la continuité pour écrire :
$$\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}=G(0,1)=2\int_0^{+\infty}e^{iu^2}\ du$$
après le changement de variable $u=\sqrt{t}$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient la convergence de I et J ainsi que
$$I=J=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

□

Une transformation

Soit f une fonction réelle continue bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Quels sont les nombres complexes z non nuls pour lesquels l'intégrale
$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+z}\,dt$$
converge ?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathrm{Im}F(-x-i\varepsilon)$$
Et si f est seulement continue par morceaux ?

Démonstration. 1. Si $z \in \mathbb{R}_-^*$, cela n'est pas défini. Pour $z = 0$, on ne connaît pas *a priori* le comportement de $\dfrac{f(t)}{t}$ au voisinage de 0. Et si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, on obtient la bonne définition avec la continuité et un $O(f)$.

2. Calculer $F(-x-i\varepsilon)$ en multipliant l'intégrande par le complexe conjugué du dénominateur. On obtient :
$$\mathrm{Im}F(-x-i\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varepsilon,u)\,du$$
avec $h(\varepsilon,u) = \frac{f(x+\varepsilon u)}{u^2+1}$ si $u \in [-\frac{x}{\varepsilon}, +\infty[$ et 0 sinon. On domine par $\dfrac{M}{u^2+1}$ avec f bornée par M et le théorème de passage à la limite sous l'intégrale fournit
$$\mathrm{Im}F(-x-i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{1}{\pi}f(x)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = f(x)$$
Si f est CPM, on peut prouver de même que :
$$\mathrm{Im}F(-x-i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)$$

□

Un exemple où le théorème de dérivation ne fonctionne pas

Montrer que
$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{x(1+t^2)}\,dt$$
est de classe $\mathcal{C}^2$.

Démonstration. On commence par utiliser le théorème de dérivation pour montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$, mais on ne parvient pas avec ce même théorème à montrer qu'elle est $\mathcal{C}^2$. On effectue alors une intégration par parties dans l'expression de $F'(x)$ (ou un changement de variable) et on parvient ensuite à montrer que F' est $\mathcal{C}^1$, donc que F est $\mathcal{C}^2$. $\square$

16.3.3 Intégrales dépendant d'un paramètre complexe

△ Fonction Gamma Γ

On note $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On définit la fonction Gamma sur $\mathcal{P}$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

Elle vérifie :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n!$;
- Γ est log-convexe ;
- Γ est continue sur $\mathcal{P}$

Démonstration. Pour le premier point, effectuer des intégrations par parties successives. Pour le troisième, dominer. $\square$

Prolongement de ζ

1. Montrer que la fonction $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor + 1 - t}{t^{z+1}} \, dt$ est définie et continue sur $\mathcal{P}$ (voir exercice précédent pour la définition).
2. En déduire que
$$\zeta : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$
admet un prolongement continu à $\mathcal{P} \setminus \{1\}$.

16.3.4 Théorèmes de Fubini

Théorème de Fubini sur les rectangles

Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segment non triviaux de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

1. Montrer l'existence des intégrales

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dy\ dx \quad \text{et} \quad \int_c^d \int_a^c f(x, y)\ dx\ dy$$

2. En considérant la fonction

$$t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y)\ dy \right)\ dx$$

montrer l'égalité

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dy\ dx = \int_c^d \int_a^c f(x, y)\ dx\ dy$$

Démonstration. 1. Domination facile car continue sur un compact.

2. Dériver puis intégrer entre c et d.

$\square$

Application. On peut en déduire (avec peine) le théorème de Fubini sur des produits d'intervalles quelconques.

16.3.5 Méthode de Laplace

△ Méthode de Laplace

Soit f une fonction continue et à valeurs strictement positives sur $[0, a]$ avec $a > 0$. on suppose qu'il existe $(\alpha, p) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(t) = 1 - \alpha t^p + o(t^p)$ au voisinage de 0 et $\forall t \in]0, a],\ f(t) < 1$. On se propose de trouver un équivalent de

$$I(x) = \int_0^a f(t)^x \ dt$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

1. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, a],\ f(t) \leqslant \exp(-\beta t^p)$$

2. Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de

$$g(x) = \int_0^{ax^{1/p}} f\left(ux^{-1/p}\right)^x \ dt$$

3. Conclure.

Démonstration. Bel exercice qui permet de déterminer rapidement des équivalents d'intégrales moches.

1. Au voisinage de 0, utiliser des équivalents puis sur le reste (compact), utiliser le théorème des bornes atteintes pour bien choisir la constante. Prendre le minimum des deux constantes obtenues.
2. On pose
$$f(u, x) = \exp\left(x \ln f\left(ux^{-1/p}\right)\right)$$
si $u \in [0, ax^{-1/p}]$ et 0 sinon. Alors
$$f(u, x) \sim \exp(-\alpha u^p) =: h(u)$$
La question 1 donne la domination
$$|f(u, x)| \leqslant \exp(-\beta u^{1/p})$$
Par passage à la limite sous l'intégrale, on obtient :
$$\int_0^{ax^{1/p}} f\left(ux^{-1/p}\right)^x \ dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^p} \ du$$
3. On fait le changement de variable $t = ux^{-1/p}$ dans la définition de g. Alors, la question 2 fournit :
$$\int_0^a f(t)^x \ dt \sim \frac{1}{x^{1/p}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u^p} \ du$$

□

Application 1

Donner un équivalent, lorsque λ tend vers $+\infty$ de

$$I(\lambda) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \exp(-\lambda \sin^2(x))\ dx$$

Démonstration. Utiliser la parité de l'intégrande pour se ramener à $[0, \pi/4]$. Ensuite, écrire :

$$\exp(-\sin^2(x)) = 1 - x^2 + o(x^2)$$

et vérifier que cette fonction vérifie les hypothèses de la méthode de Laplace. On en déduit :

$$I(\lambda) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \exp(-\lambda \sin^2(x))\ dx \sim \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

□

Application 2

Convergence, limite et équivalent lorsque n tend vers l'infini de la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

Démonstration. La convergence de chaque I_n se fait bien. la limite est nulle avec le théorème de convergence dominée (domination par le rang $n = 1$). Ensuite, découper $\mathbb{R}_+$ en $[0, 2]$ et $[2, +\infty[$ et appliquer la méthode de Laplace sur le premier segment. Pour le deuxième intervalle, on montre aisément que l'intégrale est négligeable devant celle sur $[0, 2]$. Or :

$$\frac{1}{1+t^3} = 1 - t^3 + o(t^3)$$

et vérifie les hypothèses. On en déduit finalement que

$$I_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \int_0^{+\infty} e^{-u^3}\ du$$

On pourrait aussi obtenir cet équivalent avec le CDV $u = \sqrt[3]{n}t$ et un TCD, mais justifier la domination serait beaucoup plus embêtant car il faudrait étudier le signe de la dérivée de

$$t \mapsto \left(1 + \frac{u^3}{t}\right)^{-t}$$

à u fixé et utiliser l'inégalité :

$$\ln(1+t) \geqslant 1 - \frac{1}{1+t}$$

□

⋆ Application 3

Déterminer un équivalent de

$$I_n = \int_0^1 (2 - \cosh(t))^n \, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 (2 - \sinh(t))^n \, dt$$

Démonstration. Celui-ci est plus difficile.

- On a
$$2 - \cosh(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$
et la fonction vérifie les hypothèses de la méthode de Laplace. On obtient avec cette méthode et après changement de variable $t = u/\sqrt{2}$ avec l'intégrale de Gauss l'équivalent
$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
Cela ressemble à du Wallis !
- Pour la deuxième, il faut diviser par 2 pour se ramener aux hypothèses. On a :
$$1 - \frac{\sinh(t)}{2} = 1 - \frac{t}{2} + o(t)$$
et cela vérifie les hypothèses donc :
$$\int_0^1 \left(1 - \frac{\sinh(t)}{2}\right)^n \, dt \sim \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t/2} \, dt = \frac{2}{n}$$
D'où le résultat final :
$$J_n \sim \frac{2^{n+1}}{n}$$

□

16.3.6 TD Châteaux

Intégrale de Fresnel

1. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4} dx$$
et calculer cette intégrale.
2. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-(x^2+i)t^2)}{x^2+i} \, dx$. Montrer que F est continue et étudier sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} \, dt$ converge et calculer sa valeur.

Premières propriétés de la transformation de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Lorsque l'intégrale existe, on pose

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt$$

la transformée de Laplace de f. On note $\mathcal{A}_f$ l'ensemble des $p \in \mathbb{C}$ tels que $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.

1. a. Si f est intégrable sur $]0, +\infty[$, montrer que $L(f)$ existe, est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
   b. Montrer que si $f(t) = O(e^{p_0 t})$ en $+\infty$, alors $L(f)$ est définie et continue sur $]p_0, +\infty[$.
2. On suppose que f est à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'en $+\infty$, $f(t) = O(t^k)$. Démontrer que $L(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et
$$(L(f))^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-pt}\, dt$$
Démontrer que $L(f)$ et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $+\infty$.
3. Soit $p_0 \in \mathcal{A}_f$. Démontrer que tout nombre complexe p tel que $\mathrm{Re}(p) \geqslant \mathrm{Re}(p_0)$ appartient à $\mathcal{A}_f$. On pose alors $\sigma_f = \inf \mathbb{R} \cap \mathcal{A}_f$.
4. Soit p_0 tel que $L(f)(p_0)$ existe. Démontrer que, pour tout nombre complexe p tel que $\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(p_0)$, $L(f)(p)$ existe.

Exemples de transformées de Laplace

Calculer σ_f et $L(f)$ pour les fonctions suivantes :

1. $f : t \mapsto t$;
2. $f : t \mapsto \exp(\alpha t)$;
3. $f : t \mapsto \cos(\omega t)$;
4. $f : t \mapsto \sin(\omega t)$;
5. $f : t \mapsto t^n e^{at}$.

Application au calcul d'une intégrale

On se propose de démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. On pose $\displaystyle G(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $G'(p) = \dfrac{-1}{p^2+1}$.
2. En déduire que $G(p) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(p)$ pour $p > 0$.
3. Montrer que G est continue en 0. Indication : on posera $\displaystyle F(t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$ et on remarquera que $G(p) - G(0) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt}F(t)\,dt$.
4. Conclure.

Théorèmes de la valeur initiale et finale

1. Théorème de la valeur initiale : soit f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite l en 0 et vérifiant $f(t) = O(e^{at})$ en $+\infty$. Montrer que
$$pL(f)(p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} l$$
2. Théorème de la valeur finale : soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ de limite l en $+\infty$. Montrer que
$$pL(f)(p) \xrightarrow[p\to 0^+]{} l$$

Applications des théorèmes de la valeurs initiale et finale

1. Retrouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ en appliquant le théorème de la valeur finale avec $\displaystyle f(t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$.
2. Déterminer un équivalent quand p tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{t}\,dt$. En déduire un équivalent en $+\infty$ de la transformée de Laplace de $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$.

Transformée de Laplace des dérivées successives

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $L(f)$ et $L(f')$ existent sur $]p_0,+\infty[$, $f(0) = 0$ et $f(t) = o(e^{pt})$ en $+\infty$ pour $p > p_0$. Montrer que $L(f')(p) = pL(f)(p)$. Généraliser.

Injectivité de la transformation de Laplace

Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(t) = O(e^{p_0 t})$ en $+\infty$. On suppose que $L(f) = 0$ sur $]p_0, +\infty[$. Montrer que $f = 0$.

Propriétés de base de la convolution sur $\mathbb{R}$

Si f et g sont des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle produit de convolution de f et g, $f \star g$, la fonction, si elle existe, définie par $f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\, dt$.
Le support d'une fonction f est l'ensemble définie par

$$\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Adh}\,\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

1. Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f \star g$ est aussi à support compact.
2. Démontrer que le produit de convolution est commutatif. On admet qu'il est associatif.
3. Montrer que si f est bornée et g est intégrable, alors $f \star g$ existe et est bornée par $\|f\|_\infty \|g\|_1$.
4. Montrer que si f et g sont de carré intégrable, alors $f \star g$ existe et est bornée par $\|f\|_2 \|g\|_2$.
5. Montrer que si f est continue et bornée et si g est intégrable, alors $f \star g$ est continue. Remarque : la continuité reste vraie en supposant uniquement les fonctions continues par morceaux.
6. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ à dérivée bornée et si g est intégrable, alors $f \star g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $(f \star g)' = f' \star g$.

Des exemples de convolution

1. Pour $a > 0$, on note φ_a la fonction $t \mapsto \exp(-a^2 t^2)$. Montrer que

$$\varphi_a \star \varphi_b = \sqrt{\frac{\pi}{a^2 + b^2}}\, \varphi_{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

2. On note Π_T la fonction nulle à l'extérieur de $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ et égale à 1 sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Calculer $\Pi_T \star \Pi_T$.
3. On note $e_a : t \mapsto e^{-a|t|}$. Calculer $e_a \star e_b$.

Unités approchées

1. Soit f continue bornée sur $\mathbb{R}$. Soit (φ_n) une suite de fonctions continues positives intégrables telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et, pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\int_{|t|\geqslant\delta} \varphi_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f\star\varphi_n)$ converge simplement vers f, et uniformément sur tout segment.
2. Exemples : on peut par exemple prendre

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2t^2} \quad \text{ou} \quad \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nt^2}$$

Une application de la convolution à l'approximation

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \dfrac{1}{c_n}(1-x^2)^n$ si $x \in [-1,1]$ avec $c_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\, dt$. Soif $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ nulle en dehors de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

1. Montrer que la restriction de $f \star g_n$ à $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$ est polynomiale.
2. Montrer que la suite de fonction $(f \star g_n)$ converge uniformément vers f sur $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$.
3. En déduire une preuve du théorème de Weierstrass.

Espace de Schwartz et transformation de Fourier

On note $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$ et dont toutes les dérivées sont des $O(t^k)$ à l'infini pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in \mathcal{S}$, on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier, c'est-à-dire la fonction :

$$\widehat{f} : \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

Montrer que si f et g appartiennent à $\mathcal{S}$, alors $f \star g$ appartient à $\mathcal{S}$ et

$$\widehat{f\star g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$$

On pourra s'autoriser à échanger des intégrales doubles sans justification.

Théorème de Bohr-Mollerup

On rappelle la définition de $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ pour $x > 0$. On veut démontrer le théorème de Bohr-Mollerup, qui stipule que Γ est l'unique solution de l'équation fonctionnelle :

$$f(x+1) = xf(x)$$

avec $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie de plus $f(1) = 1$ et $\ln \circ f$ convexe.

1. Vérifier que Γ est solution.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$: $\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$
3. Soit f vérifiant l'équation fonctionnelle.
   a. Montrer : $\forall x \in]0,1[,\ \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) \leqslant \ln(n+1)$
   b. En déduire :
   $$\forall x \in]0,1[,\ \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$
   c. Conclure que $f = \Gamma$.

Démonstration. 1. IPP pour la relation fonctionnelle. Calcul immédiat pour $f(1)$. Pour montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe, dériver deux fois Γ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Utiliser le théorème de convergence dominée avec
$$I_n = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\, dt = \frac{n!n^{x+1}}{x(x+1)\cdots(x+n)n^x}$$
qui, complétée par 0, tend vers $\Gamma(x)$ (la domination par $t^{x-1}e^{-t}$ est facile).

3. a. Utiliser le lemme des trois pentes puis le fait que $f(n+1) = n!$ (par récurrence avec l'hypothèse fonctionnelle).
   b. Partir de la sous-question précédente, multiplier par x, passer à l'exponentielle, multiplier par $f(n+1) = n!$ puis utiliser la propriété fonctionnelle pour montrer que $f(n+1+x) = x(x+1)\cdots(x+n)f(x)$.
   c. On en déduit par passage à la limite $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \Gamma(x)$ et on a $f(1) = \Gamma(1) = 1$ par hypothèse. Comme f et Γ sont entièrement déterminée par leurs valeurs sur $]0,1[$ au vu de la propriété fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$, on en déduit que $f = \Gamma$.

□

Chapitre 17

Séries entières

Table des matières

17.1 Points méthode

Utilisation de la sommation par paquets

On suppose que I est réunion disjointe de $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, on a lorsque la famille est sommable ou à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\right)$$

Comment appliquer le théorème de sommation par paquets

Pour appliquer le théorème de sommation par paquets, on appliquera en général de le théorème de sommation par paquets (cas positif) pour montrer :

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda}\|a_i\|\right) < +\infty$$

puis on l'appliquera sans les normes avec le même recouvrement disjointe (I_λ).

Utilisation des sommes doubles

Si $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ ou une famille sommable, on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_{p,q}\right)$$

Sommabilité d'une famille double

Pour montrer la sommabilité d'une famille double, on montrera en général l'un des résultats suivants :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\|a_{p,q}\|\right) < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\|a_{p,q}\|\right) < +\infty \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}\|a_{p,q}\|\right) < +\infty$$

Une méthode de détermination du rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $\sum a_n x_0^n$ est une série convergente, alors $R \geqslant |z_0|$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ est une série divergente, alors $R \leqslant |z_0|$.

En particulier, la règle de d'Alembert pour les séries permet parfois de déterminer le rayon de convergence.

Dérivation sur l'intervalle ouvert de convergence

On peut dériver terme à terme la somme d'une série entière de la variable réelle sur son intervalle **ouvert** de convergence.

Primitivation et intégration terme à terme

On peut primitiver terme à terme la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. On peut intégrer terme à terme la somme d'une série entière sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Structure des fonctions développables en série entière

On a les résultats suivants.

- Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $D_O(0,r)$, alors $f+g$, λf et fg sont développables en série entière sur $D_O(0,r)$.
- Si f et g sont développables en série entière, alors $f+g$, λf et fg sont développables en série entière.
- Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors toutes les dérivées et les primitives de f sont développables en série entière sur $]-r,[$.

Méthode de l'équation différentielle

Voici comment utiliser une équation différentielle.

- Si on sait que f est développable en série entière, on cherche une relation de récurrence entre les coefficients de ce développement (par unicité du développement en série entière) pour déterminer ces derniers.
- Si on cherche à montrer que f est développable en série entière, on cherche une série entière de rayon de convergence strictement positif satisfaisant à la même équation différentielle et l'on utilise un résultat d'unicité des solutions d'une telle équation différentielle.

17.2 Astuces

Détermination d'un RCV

Pour déterminer le rayon de convergence de $\sum a_z^n$, on peut encadrer (a_n) par deux suites plus simples dont les séries entières correspondantes ont des rayons plus faciles à déterminer. On en déduit un encadrement du rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Utilisation de la dérivation et de l'intégration pour obtenir un DSE

Pour trouver le DSE d'une fonction pénible, on dérive (on essaie de se ramener à quelque chose de facile à DSE, une fraction rationnelle par exemple) et on intègre ensuite le DSE pour obtenir celui de l'expression initiale.

Formule de Cauchy (HP)

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}$ admet pour RCV $R > 0$, alors on a la formule de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in [0, R[,\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta$$

Cette formule est particulièrement utile lorsqu'on s'intéresse à des problèmes à rayon constant.

Démonstration. Il suffit d'écrire $f(re^{i\theta})$, de multiplier par l'exponentielle complexe, d'intégrer et de justifier l'interversion série-intégrale. □

Application. Une fonction DSE bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Application. Une fonction DSE sur un disque ouvert, continue sur le disque fermé et nulle sur le cercle est nulle partout. On utilise la formule et le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre. Prolongement : une telle fonction uniquement nulle sur un arc de cercle de longueur non nulle est nulle partout. Pour cela, on remarque que l'anneau des fonctions DSE sur le disque ouvert et continues sur le disque fermé est intègre (prendre deux fonctions non nulles, les plus petits coefficients non nuls, et le coefficient du produit de Cauchy correspondant à la somme des indices), puis on crée une fonction à partir de composées de f par des rotations (en tournant d'assez pour que notre nouvelle fonction sur le cercle passe toujours par l'arc où f est nulle). Cette fonction est nulle par le premier cas, et par intégrité, une composée de f par une rotation est nulle, donc f est nulle.

Utilisation de l'unicité du DSE

Pour extraire un terme particulier d'une somme infinie, penser à utiliser l'unicité des coefficients d'une série entière.

Utilisation avec les matrices

Penser aux analogies avec les séries entières, même quand on travaille avec des matrices, mais il vaut alors mieux travailler avec des matrices nilpotentes de sorte que la série soit finie.

Application. Si N est nilpotente, on pose :

$$M = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} N^n$$

et on devrait tomber sur quelque chose du style $\exp(M) = I + N$.

Utilisation d'une relation de récurrence linéaire

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où (a_n) vérifie la relation de récurrence linéaire :

$$a_n = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{p-k}$$

on peut alors écrire

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x^k f(x) + \text{premiers termes}$$

Cela permet d'isoler f et de montrer que f est une fraction rationnelle.

Équivalent au bord de l'intervalle de convergence

Pour (a_n) et (b_n) des suites de réels strictement positifs telles que $a_n \sim b_n$, alors si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de RCV égal à 1 et si $\sum a_n$ diverge, alors on a pour x réel :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to 1}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Démonstration. Faire la différence entre les deux expressions et utiliser les ε. □

Principe des zéros isolés

Si f est la somme d'une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ est dans le disque ouvert de convergence et vérifie $f(z_0) = 0$, alors :

$$\exists \delta > 0,\ \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\},\ f(z) \neq 0$$

On commence par le prouver dans le cas où $z_0 = 0$. En notant n_0 le plus petit indice tel que a_n soit non nul, on a dans le disque ouvert de convergence :

$$f(z) = z^{n_0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0+k} z^k$$

où le second facteur est une fonction continue (car DSE) qui tend vers a_{n_0} non nul en 0, donc ne s'annule pas dans un voisinage de 0. Ainsi, f est bien non nulle dans un voisinage épointé de 0. Pour z_0 quelconque dans le disque ouvert de convergence, on utilise l'analycité de f, *ie* on étudie la fonction composée par une translation, $z \mapsto f(z - z_0)$ qui est aussi DSE et vérifie les hypothèses du cas précédent.

Application. Par contraposée, s'il existe une suite de complexes différents de z' et qui tend vers z_0 telle qu'on ait toujours $f(z_k) = 0$, alors si f est DSE, f est nulle. Prolongement : on peut étendre ce résultat si on travaille sur une partie connexe.

Limite au bord dans le cas des coefficients positifs

Si (a_n) est une suite positive et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de RCV $R > 0$, alors on a :

$$f(x) \underset{x \to R}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

En effet, si la série converge, c'est simplement le théorème d'Abel radial. Sinon, en repassant par les sommes partielles, on peut prouver que la série entière tend vers $+\infty$.

Calcul de sommes de séries

Pour calculer des sommes de séries comme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

On interprète cette série comme une série entière au bord de son disque de convergence. On calcul la série entière associée par les théorèmes de cours et les méthodes habituelles sur les séries entières, et on conclut avec le théorème d'Abel radial.

Formules de coefficients binomiaux

Voici une formule utile qui s'obtient en dérivant le DSE de $1/(1-x)$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$$

En particulier, la formule pour $p = 2$ peut servir (le cas $p = 1$ est du cours) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Erreur classique

Un fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas nécessairement DSE. Exemple :

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En effet, cette fonction serait nulle si c'était le cas. En revanche, si une fonction est DSE, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de converge, égale à sa série de Taylor.

Utilisation pour les intégrales

Dans certains d'utilisation des séries entières, notamment le calcul d'intégrales, il faut parfois se ramener sur un intervalle où la fonction est DSE. Cela peut nécessiter l'usage de la relation de Chasles et des changements de variable.

Application. Étude de

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

pour $0 < x < 1$. Couper en 1. A la fin, il faut repasser par les sommes partielles et utiliser le théorème de convergence dominée.

17.3 Exercices classiques

17.3.1 Rayon de convergence

Rayon de convergence d'une nouvelle série entière : 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. on note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$.

1. On suppose que $R \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $R' = \sqrt{R}$.
2. On suppose que $R = +\infty$. Montrer que $R' = +\infty$.

Démonstration. Revenir à la définition dans les deux cas. □

Rayon de convergence d'une nouvelle série entière : 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$ est R^2.

Démonstration. Revenir à la définition. □

Coefficients binomiaux centraux

Trouver le rayon de convergence R de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$. Convergence de la série pour $x = \pm R$?

Démonstration. Appliquer la règle de d'Alembert.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4$$

donc $R = 1/4$. Si on n'arrive pas pour la convergence, on peut tenter d'utiliser Raabe-Duhamel. $\square$

Série hypergéométrique

Trouver le rayon de convergence R de la série hypergéométrique :

$$1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+1)}{3!c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots$$

où a, b et c sont des réels positifs. $\star$ Convergence de la série pour $x = \pm R$?

Démonstration. Avec la règle de d'Alembert, on trouve $R = 1/1 = 1$. Bon courage pour les convergences (A faire...) $\square$

Un exercice de séries

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Démonstration. On rappelle le résultat classique suivant : pour une telle série, si $l \in [0, 1[$, alors la série $\sum a_n$ converge, et si $l > 1$, cette série diverge. Dans notre cas $\sqrt[n]{a_n r^n} \to lr$ donc on en déduit que le rayon de convergence vaut $1/l$ (faire avec divergence grossière et convergence). $\square$

Autour du sinus et de $\pi\sqrt{3}$

Calculer les rayons de convergence R des séries entières :

- $\sum \sin(\pi\sqrt{3}n) z^n$;
- $\star \sum \dfrac{1}{\sin(\pi\sqrt{3}n)} z^n$

Démonstration. La deuxième est difficile.

- $\sin(\pi\sqrt{3}n) = O(1)$ donc $R \geqslant 1$ La densité de $\pi\sqrt{3}\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ permet de montrer élégamment que $R \leqslant 1$, donc $R = 1$.

- $\left|\dfrac{1}{\sin(\pi\sqrt{3}n)}\right| \geqslant 1$ donc $R \leqslant 1$. Ensuite, on prend l'unique $p_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p_n - \frac{1}{2} \leqslant n\sqrt{3} < p_n + \frac{1}{2}$$

Alors :

$$|\sin(n\pi\sqrt{2})| \geqslant \frac{2}{\pi}|n\pi\sqrt{3} - p_n|$$

On en déduit que

$$\left|\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{3}n)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{p_n + n\sqrt{3}}{\underbrace{|3n^2 - p_n^2|}_{\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}}$$

donc

$$\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{3}n)} = O(n)$$

et alors $R \geqslant 1$ donc $R = 1$.

□

17.3.2 Propriétés de la somme

△ Important : comportement de la somme au voisinage du cercle

Soit $\sum b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in \mathbb{R}_+$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$.

1. Soit (a_n) une suite complexe vérifiant respectivement $a_n = o(b_n)$, $a_n = O(b_n)$ ou $a_n \sim b_n$. Montrer que la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 et qu'en notant, pour $|x| < 1$:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

on a respectivement $A(x) = o(B(x))$, $A(x) = O(B(x))$ ou $A(x) \sim B(x)$ au voisinage de 1.

2. Même question en supposant cette fois ci $A_n = o(B_n)$, $A_n = O(B_n)$ ou $A_n \sim B_n$ où

$$A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} b_p$$

3. Application : déterminer un équivalent en 1 de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$. Retrouver ce résultat avec une comparaison série-intégrale.

Démonstration. Exercice important.

1. Le faire avec des ε : cela se fait bien (d'après Baptou le douzeur fou).
2. Faire de même.
3. Appliquer les questions précédentes.

□

⋆ Injectivité locale de la somme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et telle que $a_1 \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ sur lequel la somme est injective.

Démonstration. Exercice difficile. On prouve d'abord le lemme suivant : si

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leqslant a_1$$

alors $R \geqslant 1$ la somme est injective sur le disque ouvert de rayon 1. En effet, $a_n = O(1)$ donc $R \geqslant 1$. Raisonnons-par l'absurde et prenons $x \neq y$ de module strictement inférieur à 1 tels que $f(x) = f(y)$ Alors, en écrivant cette égalité sous forme sommatoire et en divisant par $x - y$, on obtient :

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) = 0$$

Puisque f n'est pas injective, au moins un a_n est non nul pour $n \geqslant 2$. Or, $|x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}| < n$ donc

$$|a_1| < \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$$

ce qui est absurde. Munis de ce lemme, on dérive f. Donc $\sum na_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence et $\sum n|a_n|z^{n-1}$ aussi, et elles sont toutes deux continues. Par conséquent :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|r^{n-1} \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$$

donc pour un certain $r > 0$, comme $a_1 \neq 0$, on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|r^{n-1} \leqslant |a_1|$$

Le lemme montre alors que

$$f(rz) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^{n-1} z^{n-1}$$

est injective sur le disque unité ouvert. On en déduit que f est injective sur le disque ouvert de centre r. □

17.3.3 Calcul de sommes

Avec un polynôme

Montrer que pour tout polynôme $P \neq 0$, la série entière $\sum P(n)z^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Montrer que sa somme est une fonction rationnelle sur $D_O(0,1)$. Comment déterminer cette fonction rationnelle ?

Démonstration. Avec α le coefficient dominant de P et $k = \deg(P)$ on a $P(n) \sim \alpha n^k$ donc $R = 1$. Puis s'intéresser à

$$P_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

□

Décimales

Rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ où a_n est le n-ème chiffre de l'écriture décimale de $a \in [0,1[$. Donner sa somme pour $a = \frac{1}{7}$.

Démonstration. On rappelle qu'un nombre est décimal si, et seulement si, son développement décimal est presque nul.

- Supposons a décimal : alors $R = +\infty$ car (a_n) est presque nulle.
- Si a n'est pas décimal, alors on a immédiatement $R \geqslant 1$, et si $r > 1$, il suffit d'attendre que a_n soit non nul et assez grand pour avoir $a_n r^n \geqslant M$ pour M quelconque. Donc $R = 1$.
- Pour $a = 1/7$, on utilise le fait que $a = 0,142857142857\ldots$. Avec la convergence absolue, on obtient réécrit la somme en sommant par paquets de 6. Cela donne finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x^6}\left(x +' x^2 + 2x^3 8x^4 + 5x^5 + 7x^6\right)$$

□

△ Nombre de façons de former n avec N entiers fixés

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit a le nombre de façons de former un tas de n kg avec des poids de 2 kg et des poids de 3 kg. Calculer a_n pour tout entier n et donner un équivalent de la suite (a_n).
2. $\star$ Soit $(p_1, \ldots, p_N) \in (\mathbb{N}^*)^N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note α_n le nombre de N-uplets $(k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{N}^N$ tels que $\sum_{i=1}^{N} k_i p_i = n$. Donner un équivalent simple de α_n. Indication : se ramener au cas où $p_1, \ldots, p_N$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Démonstration. Exercice classique. La deuxième question est difficile. Écrire la chose avec un produit de Cauchy de séries entières puis décomposer en éléments simples. Cela est très calculatoire. □

Une technique de filtre

Pour $x \in \mathbb{R}$, donner une expression simple de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n!)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n!)}$$

puis généraliser la méthode.

Démonstration. Pour la première, lorsque $x \geqslant 0$, écrire $x = t^2$ et écrire $x = -t^2$ lorsque $x < 0$. On trouve $\cos(\sqrt{-x})$ si $x \leqslant 0$ et $\cosh(\sqrt{x})$ si $x \geqslant 0$. Pour la deuxième somme, qu'on note comme $f(x)$, on pose $g_0(t) = f(t^3)$. On pose ensuite :

$$g_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3n+1}}{(3n+1)!} \quad \text{et} \quad g_2(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

On remarque alors que :

$$\begin{cases} g_0(t) + g_1(t) + g_2(t) = e^t \\ g_0(t) + jg_1(t) + j^2 g_2(t) = e^{jt} \\ g_0(t) + j^2 g_1(t) + jg_2(t) = e^{j^2 t} \end{cases}$$

On en déduit

$$g_0(t) = \frac{1}{3}(e^t + e^{jt} + e^{j^2 t})$$

Et par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(e^{\sqrt[3]{x}} + 2e^{-\sqrt[3]{x}/2} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[3]{x}\right)\right)$$

De façon générale, on aura une matrice de Vandermonde de taille p à inverser. □

△ Une intégrale particulière

Soit a un nombre complexe de module différent de 1. Calculer :

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^{i\theta} - a}$$

Démonstration. Distinguer selon que le module de a est strictement inférieur à 1 ou strictement supérieur à 1. Ensuite, développer en une série géométrique selon ce qui est de module strictement inférieur à 1 (a ou son inverse) puis intégrer terme à terme en vérifiant les hypothèses. Lorsque $|a| < 1$, on trouve $I(a) = 0$. Lorsque $|a| > 1$, on trouve :

$$I(a) = \frac{-2\pi}{a}$$

□

17.3.4 Formule de Cauchy et applications

Δ Fonction bornée DSE sur $\mathbb{C}$

Montrer qu'une fonction bornée, somme sur $\mathbb{C}$ d'une série entière, est constante.

Démonstration. La formule de Cauchy donne avec l'inégalité triangulaire et M une borne de f :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ |a_n| \frac{M}{r^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Si bien que $\forall n \geqslant 1,\ a_n = 0$ donc cette fonction est constante. □

$\star$ Principe du maximum

On note E l'ensemble des fonctions continues sur le disque unité fermé Δ et sommes, sur ce disque fermé, d'une série entière que l'on notera $\sum a_n(f) z^n$.

1. Montrer que $\sup\limits_{z \in \mathbb{U}} \|f(z)\| = \sup\limits_{z \in \Delta} \|f(z)\|$
2. Montrer qu'il existe $K \geqslant 0$ telle que

$$\forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\| \sum_{k=0}^{n} a_n(f) \right\| \leqslant K \|f\|_\infty \ln(n)$$

Démonstration. Exercice difficile. A faire... □

Δ Fonctions nulles sur un arc de cercle

On note E l'ensemble des fonctions continues sur le disque unité fermé Δ et sommes, sur le disque ouvert, d'une série entière.

1. On suppose $f \in E$ nulle sur $\mathbb{U}$. Montrer que $f = 0$.
2. Montrer que E est un anneau intègre.
3. $\star$ Montrer que le résultat de la première question subsiste si l'on suppose seulement f nulle sur un arc non nul de $\mathbb{U}$.

Démonstration. Très bel exercice ! La troisième question est difficile.

1. Appliquer la formule de Cauchy et s'approcher du cercle en utilisant l'uniforme continuité de f (théorème de Heine). Sinon, utiliser le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre avec la formule de Cauchy.
2. Cela ne dépend pas vraiment des hypothèses présentes ici et est un résultat plus général sur les séries entières.Le caractère d'anneau est immédiat. Pour l'intégrité, faire le raisonnement contraire du raisonnement habituel. On prend deux séries entières non nulles, on note i et j les indices respectifs des termes de plus bas degré non nuls, et on montre aisément que le terme du produit de degré $i + j$ est non nul (c'est la même preuve que pour l'intégrité de l'anneau des polynômes).

3. Construire une fonction g qui correspond au produit des rotations de f de sorte qu'une des fonctions ayant fait une rotation se trouve toujours dans l'arc où f est nulle. Ainsi, g est nulle d'après la première question. Mais par intégrité, l'une des rotations de f est alors nulle, donc f est nulle. Formellement, considérer le produit des $z \mapsto f(ze^{ik\alpha})$ de sorte que les $k\alpha$ recouvrent le cercle avec un pas de longueur inférieure à la longueur de l'arc sur lequel f est nulle.

□

17.3.5 Développement en série entière

Un calcul d'intégrale par un DSE

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\, du$.

Démonstration. Comme d'habitude pour l'existence. Pour le calcul, développer $1/(1-u)$ en série entière puis intervertir somme et intégrale pour faire le calcul formel, dont on fait la justification après. On trouve :

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\, du = -\frac{\pi^2}{6}$$

Pour justifier l'interversion, on a :

$$\int_0^1 |u^n \ln(u)|\, du = -\int_0^1 u^n \ln(u) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

qui est sommable. □

Une CNS de contrôle des dérivées pour être DSE

Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[, \mathbb{C})$.

1. On suppose qu'il existe $(M, \rho) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a, a[,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant M \frac{n!}{\rho^n}$$

Montrer que f est développable en série entière.

2. $\star$ Réciproquement, supposons qu'il existe $R > 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Montrer qu'il existe $b > 0$ ainsi que $(M, r) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-b, b[,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant M \frac{n!}{r^n}$$

Démonstration. La deuxième question est difficile.

1. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange et l'hypothèse pour montrer que f est DSE sur $D_O(0,\rho)$.
2. Nécessairement, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)(0)}}{n!}$$
puis on a :
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+k)}(0)}{k!} x^k$$
Prenons $r = R/2$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |r^n a_n| \leqslant M$$
On en déduit que
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Mn!}{r^k} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \left|\frac{x}{r}\right|^k = \frac{Mn!}{r^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^{n+1}}$$
En fait, si $2|x| \leqslant r$, alors on a même mieux :
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Mn!}{r^k} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{(2M)n!}{\left(\frac{r}{2}\right)^n}$$
Donc $M' = 2M$ et $b = r/2$ conviennent.

□

△ Nombre de partitions

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, une partition étant un ensemble de parties non vides deux à deux disjointes et recouvrant $[\![1,n]\!]$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$.

1. Montrer la relation
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$
2. On suppose que $R = +\infty$. Montrer alors que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = \exp(e^x - 1)$$
3. montrer que $R = +\infty$ et en déduire la formule
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Démonstration. Exercice classique.

1. Le faire par dénombrement.Se donner une partition de $[\![0,n]\!]$ revient à se donner une partie B de $[\![1,n]\!]$ et une partition de $[\![1,n]\!] \setminus B$ (on greffe B à $\{0\}$).
2. On dérive la somme qu'on note désormais f. La formule de la question permet de voir un produit de Cauchy et de montrer en séparant astucieusement le coefficient binomial que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x f(x)$$
Cette équation différentielle se résout aisément pour obtenir la formule demandée.
3. Si on se donne $r \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit avec la formule de la question 1 et les M_k des majorants les plus petits possibles des $\dfrac{B_k}{k!}r^k$:
$$\frac{B_{n+1}}{(n+1)!}r^{n+1} = \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{r^{n-k}}{(n-k)!}\underbrace{\frac{B_k}{k!}r^k}_{\leqslant M_k} \leqslant \frac{re^r}{n+1}M_n$$
donc cette suite de majorants est décroissante APCR et ainsi $\left(\dfrac{B_n}{n!}r^n\right)$ est bornée donc le rayon de convergence est infini. Ensuite, on écrit le DSE de e^{e^x} dans lequel on peut intervertir les sommes car les séries exponentielles convergent absolument. Par unicité avec la question 2, on en déduit la formule souhaitée.

□

△ Théorème de Bernstein

Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a,a[,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$. Alors, f est développable en série entière sur $[0,a[$ et sur $]-a,a[$.

Démonstration. Pour cela, montrer que la fonction $x \mapsto R_n(x)/x^{n+1}$ est une fonction croissante de x en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral sous sa deuxième forme. On majore ensuite $R_n(x)$ par $R_n(y)x^{n+1}/y^{n+1}$ avec $x < y < a$. Or, $R_n(y)$ est bornée en écrivant la formule de Taylor, donc $R_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et f est DSE sur $[0,a[$. Pour symétriser le résultat :
$$|R_n(-x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}f^{n+1}(0)}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
car c'est le terme général d'une série convergente par ce qui précède. On a donc le résultat sur $]-a,a[$. □

Application. En fait, il suffit qu'on suppose la positivité sur $[0,a[$ pour avoir le résultat. Cela permet de montrer que tan est DSE.

△ Fonctions analytiques

En utilisant une série double, on montre que si f est DSE sur $I =]-R,R[$, alors pour tout $x_0 \in I$, la fonction $t \mapsto f(x_0+t)$ est DSE sur $]-\alpha,\alpha[$ avec $\alpha = R - |x_0|$. On dit que f est analytique sur I.

Démonstration. Utiliser une série double et intervertir les sommes après avoir développé avec un binôme de Newton en série. Pour la justification de l'interversion, on prendra $|h| < R - |z_0|$. □

17.3.6 Étude au bord du disque de convergence

Une étude

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ où

$$a_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\ dt$$

2. Étudier la somme au voisinage des points R et $-R$.

Démonstration. Il est clair que la suite (a_n) est décroissante. Avec un changement de variable $u = t^n$ et le théorème de convergence dominée, on montre que

$$a_n \sim \frac{1}{n} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\ du}_{:=C\neq 0}$$

1. De cet équivalent on obtient directement $R = 1$.
2. L'équivalent donne la divergence de la somme en R, le fait que la suite a_n soit positive, décroissante et tende vers 0 donne la convergence de la somme en -1 avec le théorème des séries alternées.

□

Une série entière dont la somme n'est pas continue

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{n!}}{n}$. On note f sa somme, D son domaine de définition et R son rayon de convergence.

1. Montrer que $R = 1$.
2. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $z = \exp(i\pi p/q)$. Montrer que $z \notin D$ et, plus précisément, que f est non bornée au voisinage de z.
3. $\star$ Montrer que :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$
et en déduire que $z_0 = \exp(i\pi e) \in D$.
4. Montrer que f est non continue en z_0.
5. $\star$ Montrer que $D \cap \mathbb{U}$ et $\mathbb{U} \setminus D$ sont denses dans $\mathbb{U}$.

Démonstration. Les question 3 et 5 sont difficiles.

1. La suite a_n est bornée donc $R \geqslant 1$. Pour $z = 1$, la série diverge donc $R \leqslant 1$. Donc $R = 1$.
2. Pour $n \geqslant 2q$, $z^{n!} = 1$. Donc $\sum \frac{z^{n!}}{n}$ diverge par divergence de la série harmonique. Pour $r \in [0, 1]$, on a :
$$f(rz) = P(r) + \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{r^{n!}}{n}$$
Le premier terme est borné au voisinage de 1, alors que le deuxième diverge vers $+\infty$ (prendre les sommes partielles de la série harmonique, s'approcher par continuité, puis rajouter les termes positifs manquant).
3. Cela découle du fait que
$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!} \sim \frac{1}{n!}$$
puis on somme les relations de comparaison (cas convergent). Ensuite, on écrit
$$n!e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{=p_n \in \mathbb{N}} + n!R_n$$
où $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Ensuite, on en déduit que
$$\frac{z_0^{n!}}{n} = \frac{(-1)^{p_n}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Or, en sortant les deux derniers termes, on montre que $p_n - n - 1$ est pair, donc $(-1)^{p_n} = (-1)^{n+1}$ et on conclut avec le théorème des séries alternées.
4. Se rapprocher de e avec des rationnels et utiliser la deuxième question.
5.
   - Pour $\mathbb{U} \setminus D$: par la deuxième question, $\{e^{i\pi x} \mid x \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{U} \setminus D$ et comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathbb{U} \setminus D$ est dense dans $\mathbb{U}$.
   - Pour D : on pose $z = z_0 e^{i\pi x}$ avec $x \in \mathbb{Q}$. A partir d'un certain rang, $z^{n!} = z_0^n$ si bien que $z \in D \cap \mathbb{U}$. Comme $e + \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on a de même le fait que $D \cap \mathbb{U}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

□

⋆⋆ Théorème d'Abel non tangentiel

Si on a la convergence de la série au bord du disque de convergence, on a non seulement la continuité radiale, mais aussi la continuité dans tout secteur angulaire non tangentiel.

Démonstration. Exercice difficile. Effectuer une transformation d'Abel. Je n'ai ensuite pas trouvé mieux que de repasser par les ε. Couper en deux la série et utiliser pour le terme "reste" une majoration brutale par une suite géométrique totale. On devra utiliser la majoration :
$$\frac{1}{1 - |z|} \leqslant \frac{2}{1 - |z|^2}$$
(vraie car $(|z| - 1)^2 \geqslant 0$) □

⋆⋆⋆ Théorème de Tauber

Si $\sum a_n z^n$ est une série de rayon entière de rayon de convergence 1, si sa somme S tend vers une limite finie l radialement en 1 et si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l$$

Démonstration. Exercice très difficile. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_n - S\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

tend vers 0. Pour cela, écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} a_n - S\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) + \sum_{k=n=1}^{+\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

On montre que les deux termes tendent vers 0. Pour le premier, utiliser le fait que

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{n}{k}$$

(le démontrer avec une factorisation de Bernoulli) puis utiliser le théorème de Cesàro avec (na_n) qui tend vers 0 par hypothèse. Pour le second terme, écrire artificiellement

$$a_k = a_k \frac{k}{k}$$

Majorer tous les $1/k$ par $1/(n+1)$ puis majorer en module tous $a_k k$ par la borne supérieure de ces éléments pour $k \geqslant n+1$, borne supérieure qui tend vers 0 par hypothèse. Enfin, pour le reste, majorer brutalement par la série géométrique totale pour avoir une expression simple, et majorer $1 - 1/n$ par 1. □

17.3.7 TD Châteaux

Formule de Cauchy et identité de Parseval

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Soit $r \in [0, R[$. Montrer la formule de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt$$

On note $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. En déduire les inégalités de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| \leqslant M(r)$$

2. Soit $r \in [0, R[$. Montrer l'identité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

3. On suppose que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (on dit que f est une fonction entière).
   a. Théorème de Liouville : montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.
   b. Que peut-on dire si $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant A|z|^d + B$ où A et B sont des constantes et $d \in \mathbb{N}$?

Démonstration. 1. Interversion série intégrale puis inégalité triangulaire pour les inégalités de Cauchy.

2. On écrit $|f| = f\overline{f}$, on développe en série entière puis on intervertit somme et intégrale.

3. a. Utiliser les inégalités de Cauchy, ce qui montre que $f = a_0$.

   b. En utilisant l'identité de Parseval et un équivalent à l'infini, on trouve $\forall n \geqslant d,\ a_n = 0$ donc f est polynomiale.

□

Analycité ; principe du maximum et holomorphie

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Analycité de f : soit z_0 dans le disque ouvert D_R. Démontrer que la fonction $u \mapsto f(u + z_0)$ est développable en série entière sur le disque ouvert $D_{R-|z_0|}$. Indication : on utilisera le théorème de Fubini pour échanger deux sommes.
2. Principe du maximum : soit $r \in [0, R[$. Prouver que $|f|$ atteint son maximum sur le disque fermé D'_r en un point z_0 de module égal à r, et que si $|f|$ atteint son maximum en un point de module strictement inférieur à r, alors f est constate sur D_R.
3. Holomorphie de f : démontrer que pour tout $z \in D_R$, le rapport $\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ tend vers une limite que l'on calculera quant le nombre complexe f tend vers 0 (autrement dit, f est dérivable par rapport à la variable complexe). On dit que f est holomorphe.

Démonstration. 1. Pour l'analycité, se référer au cours de Moulin.

2. Si un point où le maximum est atteint n'est pas sur le cercle, alors on utilise l'analycité et l'identité de Parseval pour montrer que la fonction est constante.

3. L'analycité de f donne :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1} h^n \xrightarrow[h \to 0]{} b_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^n$$

□

Inverse d'une série entière et une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

1. Soit f DSE sur le disque ouvert D_R et ne s'annulant pas. Démontrer que $1/f$ est DSE au voisinage de 0. Indication : si $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n z^n| \leqslant 1$ pour $|z| \leqslant r$, on cherchera une suite (b_n) telle que le produit de Cauchy de (a_n) et (b_n) soit égal à $(1, 0, \dots)$ et on montrera que $\left(\left|b_n \left(\frac{r}{2}\right)^n\right|\right)$ est bornée.
2. Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss : on suppose que $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant ne possède pas de racine dans $\mathbb{C}$.
   a. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |P(z_0)|$.
   b. Montrer que $1/P$ est DSE au voisinage de z_0.
   c. En appliquant l'identité de Parseval, montrer que $1/P$ est constante au voisinage de z_0 et conclure à une absurdité.

Équivalent au bord de l'intervalle de convergence

Soit (a_n) et (b_n) deux suites strictement positives équivalentes. On note R le rayon de convergence commun à ces deux séries. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. On suppose que $R = 1$ et que $\sum a_n$ diverge. Montrer que $f(x) \sim_{x\to 1} g(x)$. Indication : on utilisera des ε.
2. On suppose que $R = +\infty$. Montrer que $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$. Indication : on utilisera des ε.
3. Applications :
   a. On suppose que la suite (a_n) converge vers le réel l. Démontrer que $e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.
   b. Soit (a_n) une suite réelle de limite l non nulle. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \sim_{x\to 1} \frac{l}{1-x}$.
   c. Donner des équivalents simples des sommes suivantes lorsque $x \to 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n \ (p \in \mathbb{N}) \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Le faire avec les ε. □

Théorème de Tauber

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} l$ et $n a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut l. Indication : partir de $S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Donner un contre-exemple en enlevant l'hypothèse $n a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. Se référer à la section d'exercices qui précède. □

Chapitre 18

Équations différentielles

Table des matières

18.1 Points méthode

Détermination d'une solution particulière pour une EDL d'ordre 1

Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre :

- on commence par chercher une solution particulière "évidente" (éventuellement en se guidant sur le problème, physique, géométrique ou autre, d'où est issu cette équation différentielle) ;
- si l'on n'en trouve pas, on peut utiliser la méthode de variation de la constante car une solution non nulle de l'équation homogène associée ne s'annule pas.

Résolution d'une EDL d'ordre 1

Résolution d'une équation différentielle de la forme $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur un intervalle sur lequel a ne s'annule :

- On commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a ne s'annule pas (on sait que l'ensemble des solutions est une droite affine).
- On procède ensuite par analyse/synthèse puisque l'on n'a aucune théorème ni d'existence ni d'unicité.

Structure des solutions

Pour résoudre une équation différentielle linéaire, on ajoute une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

Base des solutions de l'équation homogène

Si l'on dispose de n fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de I dans E de dimension n, alors, pour prouver que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_0$, il suffit de démontrer au choix :

- que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ appartiennent à $\mathcal{S}_0$ et forment une famille libre ;
- que $\mathcal{S}_0 \subset \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. On a alors $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ pour des raisons de dimension, et la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est génératrice, donc une base de $\mathcal{S}_0$. Il n'est pas nécessaire de démontrer préalablement que les fonctions φ_k appartiennent à $\mathcal{S}_0$.

Cas où A est diagonalisable

Si la matrice A est diagonalisable, alors en notant $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées, on obtient une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) en prenant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda_k t} V_k \end{array}$$

Cas où A est diagonalisable uniquement sur $\mathbb{C}$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$, on peut déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ des solutions de (E_0) à partir de la diagonalisation de A :

1. On forme une base de vecteurs propres complexes de A telle que :
   - les vecteurs propres associées à des valeurs propres réelles appartiennent à $\mathbb{R}^n$;
   - vis-à-vis des des valeurs propres non réelles, on forme des couples de vecteurs propres conjugués (*ie* de la forme $(V, \overline{V})$).
2. Dans la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $\mathcal{S}_\mathbb{C}$ évoquée dans le point méthode qui précède, on voit alors apparaître :
   - pour les valeurs propres réelles, des applications de la forme $t \mapsto e^{\lambda t}V$, qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;
   - pour les valeurs propres non réelles, des couples de la forme $(t \mapsto e^{\lambda t}V,\ t \mapsto e^{\overline{\lambda} t}\overline{V})$, c'est-à-dire des couples de la forme $(\varphi, \overline{\varphi})$.
3. On change les couples de la forme $(\varphi, \overline{\varphi})$ en $(\mathrm{Re}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi))$, qui est encore une base de $\mathcal{S}_\mathbb{C}$. Or, cette base n'est formée que d'applications à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, donc c'est une base de $\mathcal{S}_\mathbb{R}$.

Cas où A est non diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Si A est non diagonalisable sur $\mathbb{C}$:

1. On trigonalise, c'est-à-dire qu'on écrit $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure.
2. En posant $Y = P^{-1}X$ et en traduisant sur Y le système différentiel, $X' = AX$, on obtient le système différentiel $Y' = TY$: ce système différentiel est triangulaire et on peut donc le résoudre ligne par ligne, du bas vers le haut.
3. On trouve les solutions recherchées à l'aide de la relation $X = PY$.

Remarquer qu'il n'est donc pas nécessaire de calculer P^{-1}. Et lorsqu'on trigonalise A, on cherchera à obtenir la matrice triangulaire la plus simple possible afin d'obtenir le système différentiel le plus simple possible.

Remarque (Utilisation calculatoire de la décomposition de Dunford). Si jamais on dispose facilement de la décomposition de Dunford de la matrice, on pourra l'utiliser pour calculer directement $\exp(tA)$ et s'éviter des tonnes de calcul. En particulier, cela peut énormément servir si la matrice n'est pas diagonalisable et ne possède qu'une seule valeur propre : en effet, la matrice diagonalisable dans la décomposition de Dunford n'est alors autre qu'une matrice scalaire associée à l'unique valeur propre, et la matrice nilpotente s'en déduit en soustrayant cette matrice scalaire à la matrice de départ.

Recherche d'une solution particulière

Pour trouver une solution particulière de $y' = a(t) \cdot t + b(t)$:

- on commencera par chercher une solution évidente ;
- dans le cas où il n'y en a pas d'évidente, on pourra utiliser la méthode de variation de la constante en cherchant y sous la forme $t \mapsto \exp(ta) \cdot \Lambda(t)$, avec $\Lambda : I \mapsto E$ dérivable ;
- pour une équation différentielle $Y' = AY + B(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$, si l'on réduit A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale ou triangulaire, en posant $Z = P^{-1}Y$, on est ramené à résoudre $Z' = DZ + P^{-1}B(t)$, et on récupère ensuite $Y = PZ$

Méthode de variations des constantes à l'ordre 2

Si on connaît une base (φ_1, φ_2) de l'espace des solutions de (E_0), alors on peut chercher une solution particulière de $(E) : x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$ sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \quad \text{dérivables sur} \quad I$$

Une telle fonction φ est solution de (E) si :

$$\begin{cases} \lambda_1'\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0 \\ \lambda_1'\varphi_1' + \lambda_2'\varphi_2' = b \end{cases}$$

On peut alors déterminer λ_1' et λ_2', puis λ_1 et λ_2 par calcul de primitives.

Étude d'une équation non normalisée

Pour résoudre une équation différentielle linéaire de la forme

$$a_n(t)x^{(n)} + \ldots + a_0(t)x = b(t)$$

lorsque la fonction a_n possède des points d'annulation :

- on commence par résoudre l'équation sur tout intervalle sur lequel a_n ne s'annule pas ;
- on cherche ensuite, par analyse/synthèse, les solutions sur l'intervalle entier en exploitant les conditions de dérivabilité et de continuité pour obtenir les constantes.

18.2 Astuces

Annulation du wronskien

Pour une équation différentielle de degré 2 à coefficients constants, si le Wronskien est nul en un point, il est nul partout, puisqu'il est solution d'une équation

$$y' = ay$$

Le théorème de Cauchy linéaire permet de conclure.

Existence d'autres solutions

Si on étudie des solutions particulières d'équations différentielles linéaires, bien penser qu'il existe probablement plein d'autres solutions (le théorème de Cauchy linéaire peut en assurer l'existence).

Utilisation pour le calcul d'intégrales à paramètres

Si F est une intégrale à paramètre qu'on cherche à exprimer autrement, on peut avoir envie de trouver une équation différentielle vérifiée par F. Pour cela, on fait parfois une intégration par parties sur l'intégrale après l'avoir dérivée.

Équations d'Euler

Pour les équations d'Euler :

$$x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, le changement de variables $x = e^t$ fonctionne sur $\mathbb{R}_+^*$, et sur $\mathbb{R}_-^*$, on utilise $x = -e^t$. En d'autres termes, cela revient à chercher des solutions en $x \mapsto x^r$.

Fausses équations différentielles faisant intervenir $f(1/t)$

Si on a affaire à des équations faisant intervenir $f(1/t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on peut faire un changement de variable $t = e^u$, ce qui va permettre de se ramener à des équations différentielles usuelles (à mettre en regard de la méthode pour les équations d'Euler).

Application. Trouver les f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall t > 0,\ f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Utilisation d'une autre équation différentielle et lemme de Gronwall

Pour étudier une solution f d'une équation différentielle :

$$y''(x) + y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

(ou quelque chose qui y ressemble), connaissant des hypothèses sur f ou q, on peut essayer de résoudre l'équation $z''+z = g$ avec $g(x) = -q(x)f(x)$. Cela donne une nouvelle expression de f avec laquelle on peut parfois utiliser le lemme de Gronwall. Cette méthode qui consiste à obtenir une nouvelle expression d'une fonction en résolvant une autre équation différentielle est intéressante (*cf* le DM sur le théorème de décomposition asymptotique).

Principe des zéros isolés

Si f est solution non nulle de l'équation homogène du second ordre

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

avec a et b continues, alors tout zéro de f est isolé (*ie* f est non nulle dans un voisinage épointé de x_0). En effet, soit x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Alors $f'(x_0) \neq 0$ car sinon elle serait solution d'un problème de Cauchy dont la fonction nulle est solution, et serait alors nulle. Comme

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \neq 0$$

f est non nulle dans un voisinage de x_0.

Inversibilité d'une solution

Soit $u : I \to \mathcal{L}(E)$ une solution de l'équation différentielle homogène $u' = a(t) \circ u$. Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $u(t_0)$ soit inversible, alors $u(t)$ est inversible pour tout t.

Démonstration. On peut prouver l'injectivité ou la surjectivité via le théorème de Cauchy linéaire. L'injectivité est plus simple. Soit $t \in I$ et $x \in \mathrm{Ker}(u(t))$. On pose $y(s) = u(s) \cdot x$. Alors y est solution de

$$\begin{cases} y' = a \cdot y \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

donc $y = 0$. En particulier, $u(t_0) \cdot x = 0$. Donc par injectivité de $u(t_0)$, $x = 0$, si bien que $u(t)$ est injective, donc inversible. $\square$

18.3 Exercices classiques

18.3.1 Résolution d'équations différentielles scalaires du premier ordre

18.3.2 Résolution d'équation différentielles scalaires d'ordre 2

18.3.3 Systèmes différentiels

△ Sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ une morphisme de groupes continu.

1. Montrer que φ est dérivable. On pourra introduire une primitive de φ.
2. Montrer que $\varphi' = \varphi'(0)\varphi$.
3. En déduire $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \exp(t\varphi'(0))$.
4. $\star$ Décrire tous les morphismes de groupes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ puis de $\mathbb{U}$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. La quatrième question est difficile.

1. Comme d'habitude : intégrer par rapport à une variable en considérant Φ la primitive qui s'annule en 0. Remarquer que $\Phi(u) = uI_n + o(u)$ donc puisque $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert, il existe u_0 non nul tel que $\Phi(u_0)$ soit inversible puis on conclut comme d'habitude.
2. Dériver l'équation fonctionnelle par rapport à une des variables puis prendre la prendre égale à 0.
3. Invoquer une unicité à un problème de Cauchy.
4. Pour la première partie de la question, c'est simplement la synthèse de l'analyse effectuée dans les trois question précédentes. Ensuite, on considère $f : \mathbb{U} \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes continu. Alors $\varphi : t \mapsto f(e^{it})$ est un morphisme de groupes continu par composition. On raisonne ensuite par analyse-synthèse :
   - Analyse : on peut fixer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(e^{it}) = \varphi(t) = \exp(tA)$$
   Or, $\exp(2\pi A) = f(1) = I_n$ donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{Z}$ (c'est un lemme qu'on démontre en utilisant la décomposition de Dunford, se référer au chapitre de réduction).
   - Synthèse : réciproquement, on considère
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \\ u & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}$$
   où $u = e^{it}$ et A est diagonalisable à spectre inclus dans $i\mathbb{Z}$. On vérifie que cette fonction est bien continue en diagonalisant A et en utilisant le fait que son spectre est inclus dans $i\mathbb{Z}$ et on vérifie immédiatement que c'est un morphisme de groupes continu.

□

18.3.4 Étude d'équations différentielles du premier ordre

△ Équation différentielle vérifiée par le wronskien

On considère n solutions de $y' = ay$ avec $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ où F est dimension finie, dont on prend $\mathcal{B}$ une base. On considère $y_1, \ldots, y_n$ des solutions de cette équation et w leur wronskien. Soit $t_0 \in I$. Alors :

$$\forall t \in I,\ w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(a(u))\ du\right)$$

Démonstration. En effet, d'après un exercice classique de formes n-linéaires alternées, on a pour tout u et pour tout t :

$$\mathrm{Tr}(a(u)) \det_{\mathcal{B}}(y_1(t), \ldots, y_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(y_1(t), \ldots, a(u)(y_j(t)), \ldots, y_n(t))$$

Soit, puisqu'on a des solutions de l'équation, $a(u)(y_j(t)) = y_j'(t)$. On en déduit que

$$\mathrm{Tr}(a(u))w(t) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(y_1(t), \ldots, y_j'(t), \ldots, y_n(t)) = w'(t)$$

On en déduit la formule annoncée en résolvant l'équation différentielle. □

△ $f' + f$ de limite nulle

Soif $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f' + f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Alors :

$$\begin{cases} f \xrightarrow[+\infty]{} 0 \\ f' \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{cases}$$

Démonstration. En effet, on pose $g = f' + f$ et on résout $y' + y = g$. Les fonctions y solutions sont celles telles qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ y(x) = e^{-x}\left(\int_0^x e^t g(t)\ dt + C\right)$$

Or, f vérifie cette équation différentielle, donc il existe une telle constante C. De plus, puisque $e^t g(t) = o(e^t)$, on a par intégration des relations de comparaion :

$$\int_0^x e^t g(t)\ dt = o(e^x)$$

On en déduit que $f(x) = o(1)$, c'est-à-dire que

$$f \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

Par différence avec $f' + f$, on obtient le résultat sur f'. □

Application. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'' + 3f' + 2f \xrightarrow[+\infty]{} 0$, alors f, f' et f'' tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il suffit d'appliquer deux fois ce qui précède à $g = f' + 2f$.

Remarque. Le résultat se généralise à $P(f)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ où P est un polynôme complexe dont toutes les racines ont une partie réelle strictement négative. Le faire par récurrence en utilisant le cas de l'ordre 1 déjà effectué.

⋆ Moyenne de limite nulle

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que

$$Mg : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x g(t)\ dt$$

tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que pour toute solution f de l'équation différentielle $y' + y = g$, la fonction Mf tend vers 0 en $+\infty$.

Démonstration. Exercice difficile. On cherche à faire comme dans l'exercice précédent. Soit f une solution de cette équation. Alors :

$$\forall x > 0,\ \frac{f(x) - f(0)}{x} + Mf(x) = Mg(x)$$

Or, on remarque que Mf est dérivable et que :

$$\forall x > 0,\ (Mf)'(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{Mf(x)}{x}$$

Par conséquent, on a :

$$(Mf)'(x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right)(Mf)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Ensuite, comme dans l'exercice précédent pour conclure, mais la résolution est légèrement plus difficile. On utilisera encore l'intégration des équivalents. □

Δ⋆ Lemme de Gronwall (HP)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, ainsi que que $a : I \to \mathbb{R}_+$ et $b : I \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues. On note A la primitive de a s'annulant en t_0. Si y de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie :

$$\forall t \geqslant t_0,\ \|y'(t)\| \leqslant b(t) + a(t)\|y(t)\|$$

alors y vérifie :

$$\forall t \geqslant t_0,\ \|y(t)\| \leqslant \|y(t_0)\|e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}\ ds$$

Le résultat est facile à retrouver : on majore $\|y\|$ par la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z' = b(t) + a(t)z \\ z(t_0) = \|y(t_0)\| \end{cases}$$

Démonstration. La concept est simple : on fait des choses sans comprendre pourquoi, mais ça marche et tout va se simplifier par miracle. *cf* le cours pour les détails. □

Application. Étude du comportement asymptotique des solutions de l'équation :

$$y'' + \frac{1}{x^2}y' + y = 0$$

⋆ Une application du lemme de Gronwall

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On s'intéresse à l'équation différentielle (E) :

$$Y' = A(t)Y$$

1. Montrer que toutes les solutions de (E) sont bornées puis qu'elles admettent une limite finie en $+\infty$.
2. Montrer que l'application u qui à un vecteur Y_0 associe la limite en $+\infty$ de la solution de (E) valant Y_0 en 0 est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Exercice difficile.

1. Appliquer le lemme de Gronwall pour montrer que Y est bornée puisque A est intégrable. Ainsi, $Y' = O(A)$ donc Y' est intégrable donc Y admet une limite finie en $+\infty$.
2. Deux méthodes sont possibles :
   - une méthode stylée mais utilisant d'autres exercices : on considère w le wronskien des solutions qui valent les vecteurs de la base canonique en 0. Un exercice assure que

$$w(t) = \underbrace{w(0)}_{=1} \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))\ ds\right)$$

Or, cette intégrale converge car la trace est linéaire et A est intégrable. Donc le wronskien admet une limite finie non nulle (car il y a une exponentielle). Or, par continuité du déterminant, cette limite est le déterminant de u. Donc u est inversible.

- une méthode faisable sans avoir besoin d'un autre exo : on constate que

$$u(Y_0) - Y(t) = \int_t^{+\infty} A(s)Y(s)\ ds$$

Ensuite, on montre que u est injective ce qui suffira à conclure par égalité de dimensions. Supposons $u(Y_0) = 0$. Alors :

$$\|Y(t)\| \leqslant \int_t^{+\infty} \|A(s)\|\|Y(s)\|\ ds$$

Prenons t_0 tel que

$$\int_{t_0}^{+\infty} \|A(s)\|\ ds < 1$$

(possible car c'est le reste d'une intégrale convergente). Alors :

$$\|Y\|_{\infty,[t_0,+\infty[} \leqslant \|Y\|_{\infty,[t_0,+\infty[} \int_{t_0}^{+\infty} \|A(s)\|\ ds$$

donc

$$\|Y\|_{\infty,[t_0,+\infty[} = 0$$

On en déduit aisément que $Y = 0$, car par exemple $Y'(t_0+1) = 0$ et $Y(t_0+1) = 0$. Donc u est injective ce qui conclut.

□

⋆ Une équation différentielle perturbée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable à valeur propres imaginaires pures et $B : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ continue et intégrable. On considère une solution non nulle X de l'équation différentielle

$$X' = (A + B(t))X$$

Montrer qu'il existe un vecteur non nul X_0 tel que

$$X(t) = \exp(tA)X_0 + o(1)$$

au voisinage de $+\infty$.

Démonstration. Exercice difficile. D'après le lemme de Gronwall, X est bornée. En écrivant X sous la forme $X = e^{tA}Y$ on trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X(t) = e^{tA} \underbrace{\left(Y_0 + \int_0^t \underbrace{e^{-sA}B(s)X(s)}_{=O(B(s))}\ ds \right)}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} X_0}$$

donc $X(t) = \exp(tA)X_0 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$. Il reste à montrer que $X_0 \neq 0$. Deux pistes (j'ai essayé la première) :

- Remarquer que l'application qui à X associe X_0 est linéaire et tenter d'exhiber sa bijection réciproque en perturbant l'équation différentielle à l'envers ;
- Supposer que $X_0 = 0$ et montrer que $X = 0$.

A finir... □

△ Théorème de Floquet

Soit $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ périodique de période T. montrer que l'équation différentielle

$$Y' = A(t)Y$$

admet une solution non nulle f pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = \lambda f(t)$$

Démonstration. Vérifier que l'application qui à Y une solution de cette équation associe $t \mapsto Y(t+T)$ est un endomorphisme de S l'espace des solutions. il suffit alors de considérer un vecteur propre et une valeur propre (possible car on travaille dans $\mathbb{C}$ donc cela existe). □

△ Pas de sous-espace de dimension finie impaire stable

On considère l'application T définie sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\ dt$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie impaire stable par T ?

Démonstration. La caractère linéaire est immédiat. Pour l'injectivité et la surjectivité, utiliser le théorème de Cauchy linéaire. Pour la dernière question, on raisonne par l'absurde en supposant que c'est la cas. Alors, l'induit de T sur cet espace admet une valeur propre et un vecteur propre associé. On distingue deux cas : si la valeur propre vaut 1 ou non. Dans tous les cas, on montre que le vecteur propre est nul, ce qui est absurde. On en déduit qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension finie impaire stable par T. □

Paramètre symétrique constant

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle $X' = AX$.

1. Soit X une solution non nulle. Montrer que $t \mapsto \ln(\|X(t)\|_2)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit X une solution non nulle. Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. On réalise tout d'abord un travail préliminaire utile pour les deux question. En effet, en notant λ_i les éléments du spectre de A, on peut, après orthodiagonalisation, écrire

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = P\mathrm{Diag}(e^{\lambda_i t})P^{-1}X_0$$

Si X est non nulle, X_0 est non nul et on pose $Y_0 = P^{-1}X_0$ qui est donc tout aussi non nul. De plus, puisque P est orthogonale, on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|X(t)\| = \|\mathrm{Diag}(e^{\lambda_i t})Y_0\|$$

Par conséquent, après produit et expression de la norme 2, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|X(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e^{2\lambda_i t} v_i^2}$$

Puis :

1. Passer au logarithme et montrer que la fonction obtenue (sans le 1/2) est convexe. Pour cela, la dériver deux fois et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que le numérateur est positif.
2. Remarquer que les valeurs propres sont alors strictement positives. La fonction $t \mapsto \|X(t)\|$ est alors strictement croissante et ses limites sont 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$ puisque la solution est non nulle. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance permettent de conclure.

□

Paramètre à valeurs antisymétriques

On considère l'équation $X' = A(t)X$ d'inconnue matricielle avec $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit X une solution de cette équation différentielle. Montrer que si $X(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Démonstration. Supposons $X(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et considérons $f : t \mapsto X(t)^T X(t)$. Il est clair que f est dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = X(t)^T A(t)X(t) + X(t)^T A(t)^T X(t) = X(t)^T A(t)X(t) - X(t)^T A(t)X(t) = 0$$

si bien que f est constante. Or, $f(0) = I_n$ puisque $X(0) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = I_n$$

Autrement dit, on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

□

⋆ Une identité remarquable

On considère A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pose $C = AB - BA$. On suppose que A et B commutent avec C. On définit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) = e^{-t(A+B)}e^{tA}e^{tB}$$

Exprimer $M(t)$ en fonction de C et t.

Démonstration. Exercice difficile. On utilise l'astuce de dérivation : en mettant la dérivée de la première fonction à sa droite, et celles des deux suivantes à leur gauche, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = e^{-t(A+B)}\left(-Be^{tA} + e^{tA}B\right)e^{tB}$$

On écrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -Be^{tA} + e^{tA}B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}(A^nB - BA^n)$$

Or, il est classique, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^nB - BA^n = nAc^{n-1}$$

Par conséquent, après réindexation et utilisation de la définition de l'exponentielle, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = e^{-t(A+B)}tCe^{tA}e^{tB}$$

Or, comme C commute avec A, C commute avec e^{tA} (par continuité du produit), si bien qu'on a finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = tCM(t)$$

Comme de plus $M(0) = I_n$, on en déduit finalement l'identité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}C\right)$$

□

Équation de Lax

Soit $B : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une application continue et $A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = A(t)B(t) - B(t)A(t)$$

et $A(0) = A_0$.

2. ⋆ Montrer qu'alors le spectre de $A(t)$ est indépendant de t, et plus précisément qu'il existe $S : \mathbb{R} \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = S(t)A_0S(t)^{-1}$$

Démonstration. La première question est une application directe du cours, la deuxième est difficile.

1. Interpréter comme un problème de Cauchy avec une application linéaire.
2. Chercher des infos sur S par CN. Il suffit qu'elle vérifie

$$S' = -BS$$

et $S(0) = I_n$. Réciproquement, on vérifie qu'une telle solution est de classe C^1 et convient, en démontrant la formule de la dérivée de l'inverse. Attention : il faut vérifier en appliquant le théorème de Cauchy linéaire que comme $S(0) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$$

□

18.3.5 Étude d'équations différentielles d'ordre 2

Δ⋆ Méthode de Sturm-Liouville (HP)

Soit p_1 et p_2 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $p_1 \leqslant p_2$. On considère les équations différentielles :

$$\begin{cases} y'' + p_1 y = 0 & (E_1) \\ y'' + p_2 y = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Soit y_1 une solution réelle non nulle de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Si t_1 et t_2 sont deux zéros distincts de y_1, alors il existe $t \in [t_1, t_2]$ tel que $y_2(t) = 0$.

Démonstration. Considérer $W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_1 y_2 (p_1 - p_2)$. Les zéros de y_1 sont isolés, donc on peut prendre SPG t_1 et t_2 deux zéros consécutifs de y_1. SPG, on peut supposer que y_1 est strictement positive entre t_1 et t_2 : on a alors $y_1'(t_1) > 0$ et $y_2'(t_2) < 0$ en effectuant un DL. On raisonne alors par l'absurde en supposant que y_2 ne s'annule pas sur $[t_1, t_2]$. Le Wronskien est alors monotone, mais s'il est croissant par exemple, alors il est positif en t_1 et négatif en t_2. Mais par conséquent, $y_1'(t_1) = 0$. Donc y_1 est nulle car c'est une solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + p_1 y = 0 \\ y(t_1) = 0 \\ y_1'(t_1) = 0 \end{cases}$$

C'est absurde, donc y_2 s'annule sur $[t_1, t_2]$. En examinant la preuve ci-dessus, on peut même montrer en réalité que y_2 s'annule dans $[t_1, t_2[$ et dans $]t_1, t_2]$. □

Application. Application à l'étude des zéros d'une solution non nulle sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + e^t y = 0$. Montrer que ces zéros forment une suite strictement croissante, dont on déterminera un équivalent à l'infini.

Application. Permet de montrer qu'une solution de $y'' + qy = 0$ avec $q > 0$ et $q' > 0$ au voisinage de l'infini admet une infinité de zéros.

⋆ Une application de la méthode de Sturm-Liouville

Montrer que les zéros d'une solution y sur $\mathbb{R}_+$ non nulle de $y'' + e^t y = 0$ forment une suite strictement croissante (t_n). Déterminer un équivalent de la suite (t_n).

Démonstration. Pour le fait qu'il y en a une infinité, utiliser la méthode de Sturm-Liouville avec $t \mapsto \sin(t)$ solution de $y''+y = 0$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ e^t \geqslant 1$. Ensuite, pour les ordonner, on peut remarquer qu'il ne peut y avoir une infinité de zéros sur le compact $[0, A]$ grâce au principe des zéros isolés. On peut alors les ordonner. Pour l'équivalent, on utilise le fait que

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}],\ e^{t_n} \leqslant e^t \leqslant e^{t_{n+1}}$$

On applique la méthode de Sturm-Liouville à $t \mapsto \sin(e^{t_n/2}(t - t_n))$, y et $t \mapsto \sin(e^{t_{n+1}/2}(t - t_n))$ pour obtenir l'encadrement :

$$\frac{\pi}{e^{t_{n+1/2}}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{e^{t_n/2}}$$

Or, $t_n \to +\infty$ puisque par construction on a des zéros aussi grand que l'on veut (ou alors, par l'absurde, t_n convergerait vers un zéro de y par continuité, mais cela est impossible par stricte croissance de (t_n)). Par conséquent, $t_{n+1} - t_n \to 0$. On en déduit que

$$t_{n+1} - t_n \sim \frac{\pi}{e^{t_n/2}}$$

car les exponentielles sont équivalentes car la différence des arguments tend vers 0. On étudie ensuite la suite annexe $e^{t_n/2}$. En faisant la différence de deux termes, on trouve une limite non nulle avec les résultats précédents $(\pi/2)$ donc on peut sommer les relations de comparaison. On en déduit que

$$e^{t_n} \sim \frac{n^2\pi^2}{4}$$

et comme tout tend vers $+\infty$, on sait qu'on peut prouver rapidement qu'on peut passer les équivalents au ln, ce que l'on fait et qui fournit finalement :

$$t_n \sim 2\ln(n)$$

□

Au moins une annulation

Soit $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et y une solution réelle sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + p(x)y = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Alors, y est de signe constant, SPG strictement positive. Donc y est concave. Or, pour tout x_0, la dérivée de y en x_0 ne peut pas être non nulle car alors y s'annulerait par concavité comme y est définie sur $\mathbb{R}$, donc $y' = 0$. Donc y est constante. Donc y est nulle car y'' est nulle et p ne s'annule jamais. C'est absurde. □

Une unique solution périodique

Soit g une fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = g(t)$$

admet exactement une solution périodique.

Démonstration. Pour l'unicité, il y a même unicité de la solution bornée en observant la forme des solutions de l'équation homogène, donc *a fortiori* unicité d'une solution périodique. Pour l'existence, faire à moitié la variation des constantes (les intégrales n'importent pas) pour se ramener à un système 2×2 *via* la CNS habituelle pour les solutions périodiques (détaillée dans la section suivante). □

⋆ Équation $y'' + q(x)y$ avec q positive croissante asymptotiquement

On considère $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et l'équation $y'' + q(x)y = 0$. Alors :

- toute solution admet une infinité de zéros ;
- ⋆⋆ toute solution est bornée

Démonstration. Pour le premier point, appliquer la méthode de Sturm-Liouville sur un voisinage de $+\infty$ car on a alors $q(x) \geqslant k > 0$ par croissance et positivité asymptotiques de q. On se ramène alors aux zéros de sin (à peu de choses près) que l'on contrôle bien, et la méthode de Sturm-Liouville prouver que toute solution de la première équation admet un zéro entre deux zéros de ce sin.

Pour le deuxième point, considérer $z(x) = (y(x))^2 + \dfrac{(y'(x))^2}{q(x)}$. Cette fonction est dérivable au voisinage de $+\infty$, et sa dérivée est négative (on a une simplification car y est solution). Ainsi, z est décroissante à partir d'un certain seuil, puis par positivité, y^2 est bornée dans ce voisinage de $+\infty$, donc y y est bornée. Par continuité, y est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. □

△ Existence de solutions non bornées

Considérons l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$ avec q continue et intégrable. Alors :

- La dérivée de toute solution bornée de cette équation tend vers 0 en $+\infty$;
- En déduire qu'il existe des solutions à cette équation non bornées.

Démonstration. Soit y une solution de cette équation. Prouvons les deux points dans l'ordre.

- En intégrant y'' entre 0 et t et en remarquant que qy est intégrable car c'est un $O(q)$, on trouve que y' admet une limite finie en $+\infty$. Cette limite ne peut être non nulle, car en intégrant y' au voisinage de $+\infty$ là où y' serait de signe constant est de module minorée par un réel strictement positif, on trouverait que y est non bornée.
- S'il existe une solution non nulle bornée y_1, on considère une deuxième solution y_2 telle que (y_1, y_2) soit un système fondamental. Alors, le wronskien de y_1 et y_2 est constant car l'équation différentielle ne possède pas de terme en y', et il est donc égal à une constante non nulle car (y_1, y_2) est un système fondamental. De plus, si y_2 est bornée, alors d'après le premier point,

le wronskien doit tendre vers 0 en l'infini, donc être nul. Or, il est non nul, donc y_2 et non bornée. Dans tous les cas, il existe une solution non bornée.

□

⋆⋆ Inégalité de Liapounov

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Soit u une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^2$ solution de $y'' + fy = 0$ sur $[a,b]$ vérifiant $u(a) = u(b) = 0$. Montrer l'inégalité de Liapounov :

$$\int_a^b |f| \geqslant \frac{4}{b-a}$$

Démonstration. Puisque les zéros sont isolés, on peut sans perte de généralité supposer que a et b sont des zéros consécutifs de u, ce qui revient à prouver une inégalité encore plus forte que celle demandée. Ensuite, on utilise la méthode de variations des constantes pour montrer que :

$$\forall t \in [a,b],\ (b-a)u(t) = (t-a)\int_t^b u(s)f(s)(b-s)\ ds + (b-t)\int_a^t u(s)f(s)(s-a)\ ds$$

Ensuite, on considère t_0 en lequel la norme infinie de u sur $[a,b]$ est atteinte (qui est strictement positive car u est non nulle). L'inégalité triangulaire permet d'obtenir :

$$(b-a)\|u\|_\infty \leqslant (t_0-a)\int_{t_0}^b \|u\|_\infty |f(s)|(b-t_0)\ ds + (b-t_0)\int_a^{t_0} \|u\|_\infty |f(s)|(t_0-a)\ ds$$

On en déduit en regroupant les termes et en simplifiant par la norme infinie non nulle :

$$b-1 \leqslant (b-t_0)(t_0-a)\int_a^b |f|$$

Or, $x \mapsto (b-x)(x-a)$ atteint son maximum en $\dfrac{a+b}{2}$ (fonction polynomiale de degré 2), où elle vaut alors $\dfrac{(b-a)^2}{4}$. En majorant puis divisant par cette dernière quantité, on obtient bien :

$$\int_a^b |f| \geqslant \frac{4}{b-a}$$

□

⋆ Théorème de stabilité de Liapounov

On considère $T >$ et q une fonction continue sur $\mathbb{R}$ T-périodique. On note S l'ensemble des solutions de l'équation (E) :
$$y'' + qy = 0$$
On note y_1 (resp. y_2) l'élément de S vérifiant $y_1(0) = 1$ et $y_1'(0) = 0$ (resp. $y_2(0) = 0$ et $y_2'(0) = 1$).

1. Montrer que si $f \in S$, alors $f_T : x \mapsto f(x+T)$ appartient aussi à S. On note alors Φ l'endomorphisme de S qui à f associe f_T ainsi que A sa matrice dans la base (y_1, y_2).
2. Calculer le déterminant de A.
3. On suppose que $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$. Montrer que tout élément de S est borné.
4. On suppose q positive non identiquement nulle. Montrer que tout élément de S possède possède au moins deux zéros.
5. On suppose q positive non identiquement nulle et $T \displaystyle\int_0^T q < 4$. En utilisant l'inégalité de Liapounov, montrer que les solutions de (E) sont toutes bornées.

Démonstration. Remarquons qu'on a pour tout $f \in S$, $f = f(0)y_1 + f'(0)y_2$.

1. Immédiat en utilisant la T-périodicité de q.
2. D'après notre remarque préliminaire, $\Phi(y_1) = y_1(T)y_1 + y_1'(T)y_2$ et symétriquement pour $\Phi(y_2)$. Alors :
$$A = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$$
Pour le déterminant de A, on reconnaît le Wronskien évalué en T. Or, le Wronskien est constant puisqu'il n'y a pas de terme en y' dans (E). Par conséquent, il est égal au Wronskien en 0, soit :
$$\det(A) = 1$$
3. Matrice 2×2, on nous a demandé de calculer le déterminant à la question d'avant et on nous donne une information sur la trace, il faut penser polynôme caractéristique ! L'hypothèse nous assure que χ_A possède deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$. De plus, elle sont de module 1 car leur produit vaut $\det(A) = 1$. On considère (u_1, u_2) une base de vecteurs propres des solutions complexes associée aux valeurs propres $(\lambda, \overline{\lambda})$. Alors, $|u_1|$ et $|u_2|$ sont T-périodiques. Elles sont donc bornées. Donc toute solution complexe est bornée. *A fortiori*, toute solution réelle est bornée.
4. En raisonnant un première fois par l'absurde en supposant qu'une solution y ne s'annule pas, il est classique, en utilisant la convexité ou la concavité, que y doit être constante, puis constante nulle. En raisonnant par l'absurde une seconde fois en supposant que y possède uniquement un point d'annulation x_0, on peut sans perte de généralité supposer y négative avant x_0 puis positive après. Alors, y est concavec après x_0, donc y' admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Cette limite ne peut être strictement sinon positive sans quoi y tendrait vers $-\infty$ en $+\infty$, ce qui contredirait sa positivité. Donc cette limite est positive et y' est positive après x_0 donc y croît après x_0. Elle admet donc une limite l strictement positive en $+\infty$. Mais, à

partir d'un certain $y'' \leqslant -\frac{1}{2}lq$, et puisque q n'est pas identiquement nulle et est périodique, l'intégrale de y'' diverge vers $-\infty$, donc y' tend vers $-\infty$, ce qui est là encore absurde.

5. On essaye de se ramener à la question 3. En raisonnant par l'absurde, on suppose que $|\mathrm{Tr}(A)| \geqslant 2$. Alors A admet une valeur propre réelle λ, et on peut considérer u un vecteur propre de l'endomorphisme Φ associé à la valeur propre λ. D'après la question 4, u admet un zéro a. Puisque c'est un vecteur propre, $a+T$ est aussi un zéro de u. L'inégalité de Liapounov fournit alors :

$$T\int_a^{a+T} q \geqslant 4$$

ce qui est absurde par hypothèse (la valeur de l'intégrale de q sur une période est une constante par périodicité). On en déduit que $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$, puis la question 3 conclut.

□

Ordre 2 et fausse périodicité

Soit $T > 0$ ainsi que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère y une solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay = b$$

telle que $y(T) = y(0) = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ y(nT) = 0$.

Démonstration. Considérer $z : t \mapsto y(t+T)$ la translation. Elle est aussi solution de l'équation. On considère alors le wronskien de y et z. Celui-ci est constant car il n'y a pas de terme en y' dans l'équation. Et, en évaluant en 0, il vaut 0 donc est constamment nul. Si y est la fonction nulle, le résultat est évident. On suppose désormais que y n'est pas la fonction nulle. Il s'agit alors simplement d'une récurrence en utilisant que la dérivée de y ne peut pas s'annuler en un point où y s'annule, et en évaluant le wronskien en nT pour obtenir l'annulation de z en nT donc de y en $(n+1)T$. On "propage" en quelque sorte les annulations grâce au wronskien. □

18.3.6 Étude d'équations différentielles d'ordre n

△ Résolution d'une EDL scalaire homogène à coefficients constant d'ordre n

On s'intéresse à l'équation différentielle scalaire homogène à coefficients constants (E) :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} = 0$$

1. Montrer que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$ si, et seulement si, λ est racine du polynôme :

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

2. En déduire que si le polynôme P est scindé à racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors l'ensemble E_0 des solutions de (E) est

$$E_0 = \operatorname{Vect}(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$$

3. $\star$ Décrire E_0 dans le cas général.

Démonstration. La dernière question est difficile.

1. Faire la vérification.
2. La première question donne n solutions indépendantes (vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes pour la dérivation).
3. Utiliser le lemme des noyaux. Ce sont les $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$ où $0 \leqslant k \leqslant m_P(\lambda) - 1$ avec $m_P(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de P.

□

$\star$ Pas trop d'annulations dans un voisinage d'un point

On se donne une EDL d'ordre n :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} = 0$$

où les a_k sont continues sur un intervalle I d'intérieur non vide (sinon le résultat n'a pas d'intérêt), ainsi que $t_0 \in I$. Alors, il existe un voisinage J de t_0 dans I tel que toute solution non nulle de l'équation s'annule au plus $n-1$ fois sur J.

Démonstration. Exercice difficile. On raisonne par l'absurde, et on prend, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une fonction φ_p solution non nulle qui s'annule au moins n fois sur

$$J_p = \left[t_0 - \frac{1}{2^p}, t_0 + \frac{1}{2^p}\right]$$

Quitte à renormaliser φ_p, on peut la supposer de norme 1 (nous verrons pour quelle norme après). En effet, cet intervalle est un voisinage de t_0 APCR. Alors, avec le théorème de Rolle, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi_p^{(k)}$ s'annule en $x_p^{(k)}$. On extrait de (φ_p) une sous-suite qui converge vers φ par compacité de la sphère unité en dimension finie. Alors, on choisit maintenant d'avoir travaillé avec la norme

$$N(f) = \|f\|_\infty + \ldots + \|f^{(n-1)}\|_\infty$$

On a alors :

$$|\underbrace{\varphi_p^{(k)}(t_0)}_{=0} - \varphi^{(k)}(t_0)| \leqslant \|\varphi_p^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty \leqslant N(\varphi_p - \varphi) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

donc, par continuité et unicité de la limite $\varphi^{(k)}(t_0) = 0$. Par unicité de la solution au problème de Cauchy avec de telles conditions initiales, $\varphi = 0$, ce qui est absurde car elle est de norme 1 donc non nulle. □

⋆ Solutions stables par dérivation $\implies$ coefficients constants

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1}$ continue. On suppose que l'ensemble E_0 des solutions de

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} = 0$$

est stable par dérivation. Alors les a_k sont constantes.

Démonstration. Exercice difficile. On note D l'endomorphisme induit par la dérivation sur E_0. E_0 est de dimension n, on note

$$\chi_D = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$$

le polynôme caractéristique de D. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, tout élément de E_0 vérifie donc aussi l'équation différentielle :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{(k)} = 0$$

En considérant les solutions dont les conditions initiales sont

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x^{(k)}(t_0) = \delta_{k,l}$$

on on obtient que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in \mathbb{R},\ a_k(t) = b_k$$

□

Remarque. Réciproquement, avec la même méthode, tout sous-espace vectoriel de dimension finie n de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ stable par dérivation est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

△ CNS de périodicité d'une solution d'une "équation périodique"

On considère l'équation différentielle d'ordre n suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)} = b(t)$$

où les a_k et b sont des fonctions continues toutes périodiques de même période T. Soit y une solution de cette équation. Montrer que y est T-périodique si, et seulement si,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ y^{(k)}(T) = y^{(k)}(0)$$

Démonstration. Considérer $z : t \mapsto y(t+T)$. z est aussi solution de l'équation puisque les a_k et b sont T-périodiques. Ensuite, y est périodique si, et seulement si, $y = z$, ce qui équivaut, puisqu'elles sont solutions d'une même équation différentielle, à l'égalité des dérivées k-èmes en 0, et correspond bien à la CNS recherchée. □

18.3.7 TD Châteaux

Lemme de Gronwall

1. Lemme de Gronwall : soient u et g deux fonctions continues positives sur $[0, +\infty[$ et A un réel positif tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leqslant A + \int_0^x u(t)g(t)\ dt$$

Montrer alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leqslant A \exp\left(\int_0^x g(t)\ dt\right)$$

Indication : considérer $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u(t)g(t)\ dt$. On notera que $A = 0$ implique u nulle.

2. Généralisation : soient u, f et g des fonctions continues positives sur $[0, +\infty[$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leqslant f(x) + \int_0^x u(t)g(t)\ dt$$

Montrer alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) \leqslant f(x) + \int_0^x f(t)g(t) \exp\left(\int_t^x g(u)\ du\right)\ dt$$

Applications du lemme de Gronwall

1. Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + (1+q(x))y = 0$ est bornée.
2. Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et à valeurs strictement positives. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + q(x)y = 0$ est bornée.
3. On suppose la fonction $t \mapsto tq(t)$ intégrable sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Soit f une solution de $y'' + qy = 0$ sur $[a, +\infty[$.
   a. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est bornée. Indication : appliquer Taylor avec reste intégral entre a et x.
   b. Montrer que $f'(x)$ admet une limite finie λ en $+\infty$. En déduire que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$.
   c. La fonction $x \mapsto f(x) - \lambda x$ admet-elle une limite finie en $+\infty$?
4. On suppose q intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que les solutions de $y'' + qy = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ ne sont pas toutes bornées. Indication : on pourra utiliser le wronskien.
5. Soit q de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que q' soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $q(x)$ tende vers 0 en $+\infty$.
   a. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + (1 + q(x))y = 0$ est bornée.
   b. Soit r une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + (1 + q(x) + r(x))y = 0$.
6. Soit p une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y'' + y' - p(x)y = 0$.
   a. Montrer qu'il existe deux réels a et b teks que
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = a + be^{-x} + \int_0^x p(t)f(t)\ dt - \int_0^x e^{t-x}p(t)f(t)\ dt$$
   b. On suppose que p est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est bornée.
7. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ M-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. On pose $g = f + \phi$ où $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie $|\phi| \leqslant \varepsilon$. Soient x et y des solutions sur $\mathbb{R}_+$ des problèmes de Cauchy :
   $$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
   Montrer en utilisant la généralisation du lemme de Gronwall que
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |x(t) - y(t)| \leqslant |x_0 - y_0|e^{Mt} + \frac{\varepsilon}{M}\left(e^{Mt} - 1\right)$$

Zéros des solutions d'une équation particulière

Soient q, q_1 et q_2 des fonctions continues de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$, et f une solution non nulle de $y'' + qy = 0$, qu'on notera $(E(q))$.

1. Montrer que l'ensemble des zéros de f dans I est formé de points isolés.
2. On suppose $q_1 \leqslant q_2$. Soient f_1 et f_2 des solutions respectives de $(E(q_1))$ et $(E(q_2))$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f_1 (cela a du sens d'après la première question). Montrer qu'il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ tel que $f_2(\gamma) = 0$, et que si $q_1 - q_2$ n'est pas la fonction nulle sur $[\alpha, \beta]$, alors $\gamma \in]\alpha, \beta[$.
3. Soient f_1 et f_2 deux solutions indépendantes de $(E(q))$ sur I, $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de f_1. Montrer qu'il existe un unique zéro de f_2 dans $]\alpha, \beta[$.
4. Soit $m > 0$ tel que $\forall x \in I,\ q(x) \geqslant m$. Montrer que tout segment de longueur $\dfrac{\pi}{\sqrt{m}}$ inclus dans I contient au moins un zéro de f.
5. Soit $M > 0$ tel que $\forall x \in I,\ q(x) \leqslant M$. Montrer que la distance entre deux zéros de f est supérieure ou égale à $\dfrac{\pi}{\sqrt{M}}$.
6. On suppose $I = \mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ q(x) > 0$. Peut-on affirmer que f possède une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$?
7. On suppose $I = \mathbb{R}_+$ et $q(x) = e^x$. Montrer que l'ensemble des zéros de f peut être ordonné en une suite croissante (x_n) strictement croissante qui tend vers l'infini et telle que $x_{n+1} - x_n$ tende vers 0. Déterminer ensuite un équivalent de x_n. Montrer que f est bornée.

Chapitre 19

Calcul différentiel

Table des matières

19.1 Points méthode

Montrer une différentiabilité

Pour montrer que f est différentiable en a, on peut chercher une application linéaire u telle que
$$f(a+h) - f(a) - u(h) = o(h)$$

Montrer une non-différentiabilité

Une application $f : \Omega \to F$ n'est **pas différentiable** en a :

- si elle n'admet pas de dérivée selon tout vecteur en a ;
- si elle en admet, mais que l'application $u : h \mapsto D_h f(a)$ n'est pas linéaire ou ne vérifie pas $f(a+h) - f(a) - u(h) = o(h)$.

Étudier une différentiabilité

Pour étudier si une fonction $f : \Omega \to F$ est différentiable en a, on peut vérifier l'existence de toutes ses dérivées partielles en a, puis voir si l'application linéaire :

$$u : h \mapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(a)$$

vérifie $f(a+h) - f(a) - u(h) = o(h)$.

Montrer une classe $\mathcal{C}^1$

Pour démontrer qu'une fonction $f : \Omega \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$:

- on cherche d'abord à utiliser les théorèmes généraux de manipulation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
- si ceux-ci ne s'appliquent pas, on peut chercher à montrer que dans une base donnée, toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues sur Ω.

Montrer une classe $\mathcal{C}^k$

Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$, on essaie tout d'abord d'utiliser les théorème généraux ou de s'y ramener.

Montre une classe $\mathcal{C}^\infty$ dans des cas compliqués

Dans les cas plus compliqués, pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on trouve une classe $\mathcal{S}$ de fonctions telle que :

- $f \in \mathcal{S}$;
- tout élément de $\mathcal{S}$ est élément continu ;
- $\mathcal{S}$ est stable par dérivation partielle.

Recherche d'*extrema*

Pour démontrer qu'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ admet un extremum en a, on peut étudier le signe de $g : h \mapsto f(a+h) - f(a)$.

- Si g est de signe fixe au voisinage de 0, alors f admet un *extremum* local en a.
- Si g est de signe fixe sur tout son domaine de définition, alors f admet un *extremum* global en a.

Montrer qu'un point n'est pas un extremum local

En reprenant les notations du point méthode précédent, si l'on montre que, sur tout voisinage de 0, la fonction g prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives, alors f n'admet pas d'*extremum* local en a. En pratique, cela pourra se faire en étudiant le signe de $t \mapsto g(th)$ pour des vecteurs h bien choisis.

Lieux de recherche des *extrema* locaux

Les *extrema* locaux de $f :\to \mathbb{R}$ sont à chercher parmi :

- les points critiques de f ;
- les points de $\mathring{A}$ où f n'est pas différentiable ;
- les points de $A \setminus \mathring{A}$.

Nature des *extrema* dans le cas $\mathcal{C}^2$ euclidien

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un point critique de f, ainsi que $H_f(a)$ sa matrice hessienne en a.

- Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.
- Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) >< 0$, alors f admet un maximum local strict en a.
- Si $\det(H_f(a)) < 0$, alors f n'admet pas d'*extremum* local strict en a.

Attention : dans le cas où $\det(H_f(a)) = 0$, on ne peut rien conclure sans une étude approfondie.

19.2 Astuces

Différentielle du déterminant

Théorème d'inversion locale

Théorème d'inversion globale

Utilisation de la hessienne

Si f est de classe C^2, pour a et h deux vecteurs de Ω, on définit :

$$g : t \mapsto f(a+th)$$

g est définie dans un voisinage de 0, et deux fois dérivable. On a alors :

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)$$

et à l'ordre 2 :

$$f''(t) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(th) h_j = h^T H_f(a+th)h$$

19.3 Exercices classiques

19.3.1 Différentiabilité

○ Application de la règle de la chaîne

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Justifier la dérivabilité de $g : x \mapsto f(x, f(x,x))$.
2. Déterminer les dérivées partielles de $g : (x,y) \mapsto f(f(x,y),y)$.
3. Déterminer les dérivées partielles de $g : (x,y) \mapsto f(y, f(x,y))$.

Démonstration. Appliquer la règle de la chaîne... □

⋆ Une étude de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Pour $(x,y) \in E$, on pose :

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+ny}$$

- Montrer que f est bien définie sur E et que la série converge uniformément sur tout ensemble de la forme $[a, +\infty[^2$ avec $a > 0$. En déduire que f est continue sur E.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Exercice difficile.

1. Utiliser le théorème des séries alternées.

2. Dériver par rapport à x et à y. Pour cela, établir une convergence uniforme sur tout segment : pour la dérivée par rapport à x, pas de problème, on a aisément une convergence normale. Pour la dérivée par rapport à y, cela est plus difficile : montrer que la suite décroît asymptotiquement en étudiant la fonction et en montrant une borne qui convient pour tout un segment. Ensuite, utiliser le théorème des séries alternées pour obtenir une convergence normale sur tout segment. Ensuite, montrer que ces dérivées partielles sont continues par rapport au couple (x, y). Pour la première, c'est facile, pour la deuxième, réutiliser ce qui a été fait pour la dérivation.

$\square$

Δ Fonctions homogènes

On pose $U = E \setminus \{0\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est **homogène de degré** α lorsqu'elle vérifie :

$$\forall x \in U,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx) = t^\alpha f(x)$$

1. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, on a :

$$\forall x \in U,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ df(x) \cdot x = \alpha f(x)$$

2. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ est homogène de degré α, alors df est homogène de degré $\alpha - 1$.

Démonstration. A connaître, très classique !

1. Dans le sens direct, dériver l'hypothèse par rapport à t à x fixé puis prendre $t = 1$. Dans le sens réciproque, appliquer l'hypothèse en tx en considérant $g(t) = f(tx)$ pour obtenir une équation différentielle sur g qui se résout en $g(t) = t^\alpha \times C$. Avec $t = 1$, on trouve $C = f(x)$.
2. Différencier l'hypothèse.

$\square$

Δ Différentiation des coefficients du polynôme caractéristique

Δ Matrices cycliques

On considère :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(M), \dots, \mathrm{Tr}(M^n)) \end{array}$$

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle en tout point.
2. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{rg}(d\varphi(M)) = \deg(\pi_M)$.
3. En déduire que l'ensemble : $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ :\ \chi_M = \pi_M\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Le nom de l'exercice vient du fait que le dernier ensemble est aussi l'ensemble des matrices M telles qu'il existe un vecteur X tel que $(X, \dots, M^{n-1}X)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$, qu'on appelle ensemble des matrices cycliques.

1. Pour montrer la classe $\mathcal{C}^1$, utiliser les théorèmes généraux.
2. Utiliser le gradient.
3. Caractériser la liberté d'une famille par l'inversibilité d'un matrice.

□

Différentielle d'une série fonctions dont la somme des différentielles converge normalement

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de E dans F. On suppose que $\sum f_n$ converge simplement sur E et que $\sum(x \mapsto \|df(x)\|)$ converge normalement au voisinage de tout point. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle.

Application. Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

⋆ Différentiation de l'exponentielle

Fonctions holomorphes

⋆ Lemme pour l'inversion locale

Soit Ω un ouvert de E contenant 0 ainsi que $f : \Omega \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $df(0) = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer l'existence d'un réel $r > 0$ tel que, pour tout $y \in B_f(0, r/2)$, la fonction $g_y : x \mapsto y + x - f(x)$ soit 1/2-lipschitzienne de $B = B_f(0, r)$ dans lui-même et en déduire l'injectivité de f sur B.
2. Soit $y \in B_f(0, r/2)$. On pose $x_0 = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g_y(x_n)$$
Montrer la convergence de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ vers un élément $x \in B$ tel que $f(x) = y$, puis que f induit une bijection de B sur un voisinage de 0 et que f^{-1} est continue au voisinage de 0.
3. Montrer que f^{-1} est différentiable en 0.

Démonstration. Exercice difficile. A finir...

1. Par continuité, faire en sorte que

$$\|df(x) - df(0)\| \leqslant \frac{1}{2}$$

   Puis tout fonction bien. L'injectivité provient du fait que g_y est alors contractante.

2. On a un $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ donc une convergence absolue. On obtient, par continuité de g_y, le fait que $x = g_y(x)$, ce qui traduit le fait que $y = f(x)$. On a donc le caractère surjectif par cette question, et le caractère injectif par la première question. Pour la continuité, à finir...

3. A faire...

$\square$

⋆ Théorème d'inversion locale

Soit Ω un ouvert de E ainsi que $f : \Omega \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \Omega$ tel que $df(a) \in \mathcal{GL}(E)$.

1. Montrer que $df(x)$ est inversible pour tout x dans un voisinage Ω' de a.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que f induit une bijection d'un voisinage $U \subset \Omega'$ de a sur un voisinage V de $b = f(a)$ dont la réciproque est continue sur V et différentiable en b, puis différentiable en tout point de V.
3. Montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. A faire...

1. Utiliser la continuité de la différentielle et le fait que $\mathcal{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

$\square$

19.3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Un prolongement $\mathcal{C}^\infty$

On note $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = y\}$. Montrer que la fonction f définie sur Δ par la formule

$$f(x, y) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}$$

se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. Par trigonométrie, si $(x, y) \in \Delta$, on a :

$$g(x, y) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

Or, le sinus cardinal se prolonge par continuité en 0, de façon $\mathcal{C}^\infty$ car ce prolongement est alors DSE avec un RCV infini. Comme le cosinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on obtient le résultat par composition. $\square$

⋆ Prolongement $\mathcal{C}^\infty$: cas général

On note $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y\}$ et considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que la fonction g définie sur Δ par la formule

$$g(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. La ruse employée à l'exercice précédent ne fonctionne plus. Et si on veut le faire à la main, ça va être très moche. Donc, on utilise une classe de fonction. On considère :

$$S = \left\{(x,y) \mapsto \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n(t) f^{(n)}(x + t(y-x)) \ dt \ \mid \ (P_n) \in \mathbb{R}[X]^{(\mathbb{N})}\right\}$$

Il est clair que

$$g : (x,y) \to \int_0^1 f'(x + t(y-x)) \ dt$$

est dedans, et c'est le seul prolongement convenable pour g. De plus, en dominant, on voit que toute fonction de S est continue. Enfin, en dominant, on montre que S est stable par dérivation partielle. Cela permet de conclure, conformément au point méthode du cours, que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

⋆ $\mathcal{C}^p$-difféomorphismes

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \geqslant 1$. On suppose que f est bijective et que f^{-1} est différentiable. Montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$.

Démonstration. A faire... □

Indépendance du laplacien vis-à-vis des bases orthonormées

On suppose E muni d'une structure euclidienne et de dimension n. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \partial_k \partial_k f$$

ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle on le calcule. On l'appelle le laplacien de f.

Démonstration. Le faire par rapport à la base canonique. Utilise la règle de la chaîne et le faire matriciellement. □

Laplacien en coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit son laplacien par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

On définit ensuite la fonction g sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par :

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Montrer la formule :

$$\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Démonstration. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de g par rapport à r et θ en utilisant la règle de la chaîne. Ensuite, sommer les dérivées secondes puis ajuster. $\square$

$\star$ Laplacien en coordonnées sphériques

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit son laplacien par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On définit ensuite la fonction g sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :

$$g(r, \theta, \varphi) = f(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))$$

Montrer la formule :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial g}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Démonstration. Il s'agit de la version énervée du précédent. Un conseil : le faire calmement. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de g par rapport à r et θ en utilisant la règle de la chaîne. Ensuite, sommer les dérivées secondes puis ajuster. $\square$

⋆ Théorème de Schwarz avec hypothèses affaiblies

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to F$. on suppose que les dérivées partielles premières de f existent partout et sont partiellement continues, et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est définie sur tout U et continue. Montrer alors que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est définie sur tout U et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. On pourra remarquer que :

$$f(x,y) = f(x,b) + (y-b)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,(1-t)b+ty)\ dt$$

Démonstration. Exercice difficile. A faire... □

⋆ Théorème de Schwarz avec hypothèses inhabituelles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to F$. On suppose que les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ existent en tout point et que la dernière est continue en tout point. On suppose que $(0,0) \in U$.

1. Montrer que, pour (x,y) voisin de $(0,0)$:

$$f(x,y) = f(0,0)+df(0,0)[x,y]+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)+xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(0,0)+\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)+o(x^2+y^2)$$

   On pourra appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $y \mapsto f(x,y)$.

2. En déduire que si les quatre dérivées partielles d'ordre 2 de f sont définies sur tout U et si les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sont continues, alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Démonstration. Exercice difficile. A faire... □

⋆ Théorème de Poincaré

Soit V un ouvert étoilé par rapport à a d'un espace euclidien et $f : V \to V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $df(a)$ soit un endomorphisme symétrique pour tout a (on dit aussi que f est de **rotationnel** nul). Montrer que f est le gradient d'une fonction $F : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra remarquer que si $f = \nabla F$, alors pour tout $x \in V$:

$$F(x) - F(a) = \int_0^1 \left(f(a+t(x-a)) \mid x-a\right)\ dt$$

Démonstration. Le faire en passant par les expressions du produit scalaire dans la base. Montrer que les dérivées partielles sont les bonnes. Pour cela, dériver sous le signe intégral composante par composante, utiliser l'hypothèse du rotationnel nul puis observer qu'on est en présence d'une règle de la chaîne par rapport à t à l'envers. Remontrer cette règle de la chaîne et faire une intégration par parties pour conclure. □

⋆ Jacobienne antisymétrique

Montrer que la jacobienne est antisymétrique si, et seulement si,

⋆ Lemme de Morse

19.3.3 *Extrema*

Principe du maximum pour une fonction harmonique

Soit U un ouvert non vide borné de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction définie sur l'adhérence U, continue sur l'adhérence de U et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si Δf ne prend que des valeurs strictement positives sur U, alors f n'a pas de maximum local sur U.
2. ⋆ On suppose que f est **harmonique** sur U, c'est-à-dire que $\Delta f = 0$. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur l'adhérence de U, et que ceux-ci sont atteints sur la frontière de U (il peuvent être atteints ailleurs néanmoins).

Démonstration. La deuxième question est difficile. Bel exercice.

1. Utiliser la matrice hessienne qui ne peut pas être négative.
2. Pour l'existence, c'est une affaire de compacité. Remarquer qu'il suffit de prouver le résultat pour le maximum, quitte à changer f et $-f$. Considérer

$$g_n : x \mapsto f(x) + \frac{1}{n+1}\|x\|^2$$

   Lui appliquer la question précédente pour obtenir un maximum sur la frontière. La frontière est compacte, donc on extrait de cette suite de *maxima* une limite. En passant à la limite, un maximum est atteint en ce point.

□

△ Une autre démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique

Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique en utilisant du calcul différentiel.

Démonstration. □

△ Une autre démonstration du théorème spectral

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle, S sa sphère unité et u un endomorphisme autoadjoint de E. En considérant la restriction à S de la fonction

$$f_u : x \mapsto (u(x) \mid x)$$

montrer que u admet une valeur propre réelle.

Démonstration. Calculer le gradient de f. Montrer que la restriction de f_u à S admet un maximum et utiliser le théorème d'optimisation sous contrainte en ce point. Conclure. □

Une autre démonstration variationnelle du théorème spectral

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = \mathrm{Diag}(1, \ldots, n)$. On pose :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \|M^T AM - B\|^2 \end{array}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer la différentielle de φ en tout point.
2. Montrer que la restriction de φ à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ possède un maximum. On notera P une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$\max_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi = \varphi(P)$$
3. Soit $C \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\psi : t \mapsto \varphi(Pe^{tC})$. Montrer que
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) \leqslant \varphi(0)$$
et en déduire que
$$\big(C \mid P^T APB - BP^T AP\big) = 0$$
4. En déduire que $PA^T P$ et B commutent, puis conclure.

19.3.4 Équations aux dérivées partielles

⋆ Une EDP difficile

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Démonstration. Chercher un changement de variables linéaire de la forme. En le cherchant, on trouve qu'il suffit de le prendre sous la forme :

$$(x, y) = (u + v, 3u - v)$$

pour se ramener à l'exemple du cours avec un

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

□

19.3.5 Vecteurs tangents

⋆ Espaces tangents à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ en I_n

L'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$) en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (resp. l'ensemble des matrices anti-hermitiennes, *ie* égales à l'opposé de leur transconjuguée).

Démonstration. Exercice difficile. On prouve le résultat pour $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la preuve est entièrement symétrique pour $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Soit A un vecteur tangents à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n. On fixe $\varepsilon > 0$ et

$$\gamma : \quad]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \longrightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

dérivable en 0 telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$. Alors, en considérant $\varphi : t \mapsto \gamma(t)^T$, qui est alors tout autant définie et dérivable en 0 que γ, de dérivée $\varphi'(0) = I_n^T = I_n$. Or :

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ \gamma(t)\varphi(t) = I_n$$

Donc, en dérivant en 0 :

$$0 = (\gamma\varphi)'(0) = \gamma'(0)\varphi(0) + \gamma(0)\varphi'(0) = A + A^T$$

si bien que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On considère alors :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : &]-\varepsilon, \varepsilon[& \longrightarrow & \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & \exp(tA) \end{array}$$

En effet, cette application est déjà bien définie puisque la transposée de l'exponentielle est l'exponentielle de la transposée et alors, puisque A est antisymétrique, $\exp(tA)$ est bien dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (en fait dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ même avec la formule $\det(\exp) = \exp(\mathrm{Tr})$). Ensuite, γ est dérivable de dérivée $t \mapsto A\gamma(t)$ (*cf* chapitre d'équations différentielles). Ainsi, γ est en particulier dérivable en 0 et :

$$\begin{cases} \gamma(0) = I_n \\ \gamma'(0) = A \end{cases}$$

si bien que A est effectivement un vecteur tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n, ce qui conclut la preuve. □

Espaces tangent à $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ en I_n

L'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ en I_n est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Démonstration. On utilise le théorème du cours avec l'application $g : A \mapsto \det(A) - 1$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et dont l'annulation correspond à $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$. Sa différentielle en I_n est celle du déterminant et est bien non nulle :

$$dg(I) : H \mapsto \mathrm{Tr}(H\mathrm{Com}(I)^T) = \mathrm{Tr}(H)$$

Par résultat de cours, l'espace tangent à $\mathcal{SL}_n(\mathbb{K})$ en I_n est donc le noyau de cette différentielle, *ie* l'ensemble des matrices de trace nulle. □

Remarque. L'ensemble des matrices de trace nulle est de dimension $n^2 - 1$ si on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $2n^2 - 2$ si on travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (toujours en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels dans ce chapitre). Pour le montrer, appliquer le théorème du rang.

Chapitre 20

Dénombrabilité et dénombrements

Table des matières

20.1 Points méthode

Montrer qu'un ensemble infini est dénombrable

Pour montrer qu'un ensemble infini est dénombrable, on peut :

- exhiber une bijection de $\mathbb{N}$ sur A, ce qui revient à numéroter les éléments de A en suite (a_n) ;
- exhiber une injection de A dans $\mathbb{N}$ (ou dans un ensemble dénombrable) ;
- exhiber une surjection de $\mathbb{N}$ (ou d'un ensemble dénombrable) dans A

20.2 Astuces

Vocabulaire

Lorsqu'un ensemble est dénombrable, c'est qu'il est au plus dénombrable et infini. Sinon, on dit seulement au plus dénombrable pour un ensemble en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Une manière de dénombrer

Se donner k entiers positifs de somme p revient à se donner k entiers strictement positifs de somme $p+k$.

Lemme des bergers

Soit X un ensemble fini et Y un ensemble quelconque. Soit $f : X \to Y$. Alors :

$$\mathrm{Card}(X) = \sum_{y \in f(X)} \mathrm{Card}(f^{-1}(y))$$

En particulier, si chaque image possède exactement p antécédents, on a alors :

$$\mathrm{Card}(X) = p \times \mathrm{Card}(f(X))$$

Coefficients multinomiaux

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On notera $\binom{n}{i_1, \ldots, i_k}$ le nombre de partitions $A_1, \ldots, A_k$ de E telles que $\forall j,\ \mathrm{Card}(A_j) = i_j$. Ces coefficients vérifient :

$$\binom{n}{i_1, \ldots, i_k} = \frac{n!}{(i_1!) \times \cdots \times (i_k!)}$$

Remarque. Ces coefficients généralisent les coefficients binomiaux. Ils apparaissent naturellement dans la formule de multinôme de Newton, qui généralise celle du binôme de newton en donnant une forme développée de $(x_1 + \cdots + x_p)^n$.

20.3 Exercices classiques

20.3.1 Dénombrabilité

Disques ouverts

On appelle disque ouvert de $\mathbb{C}$ tout ensemble de la forme $\{z \in \mathbb{C} : |z-p| < \rho\}$ pour $p \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. Soit $(D_i)_{i \in I}$ une famille de disques ouverts deux à deux disjoints. Montrer que I est au plus dénombrable.

Démonstration. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour les parties réelles et imaginaires pour montrer qu'un point de coordonnées rationnelles appartient à chacun des disques fermés. Ensuite, utiliser la dénombrabilité de $\mathbb{Q}^2$ pour conclure. $\square$

△ Points de discontinuité d'une fonction monotone

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Démonstration. SPG, on peut suppose la fonction f croissante. Par croissance, elle admet des limites à gauche et à droite en tout point. un point de discontinuité est caractérisé par des limites à gauche et à droite différentes en ce point. Caler alors un rationnel entre ces deux limites. On obtient ainsi une injection de l'ensemble des points de discontinuité dans $\mathbb{Q}$, qui est au plus dénombrable, donc l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable. □

***Maxima* locaux**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note A l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}$ où f admet un maximum local. Montrer que A est au plus dénombrable.

Démonstration. Utiliser le fait que $\mathbb{R}$ est séparé pour distinguer clairement les voisinages correspondant à $a \in A$ et $a' \in A$ distincts. De la sorte, on peut caler un rationnel dans un voisinage de chacun des $a \in A$ de façon injective et conclure comme dans l'exercice précédent. □

△ Nombres algébriques

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est au plus dénombrable. En déduire qu'il existe une infinité indénombrable de nombres transcendants.

Démonstration. On note A l'ensemble des nombres algébriques et A_n l'ensemble des nombres complexes racines d'un polynôme non nul à coefficients rationnels de degré au plus n. Alors, chaque A_n est au plus dénombrable car un polynôme non nul possède un nombre fini de racines et $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. On en déduit que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

est au plus dénombrable. Par passage au complémentaire, l'ensemble des nombres transcendants est donc indénombrable, donc en particulier non vide. □

20.3.2 Dénombrements

Somme fixée

Soit $k \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de n-uplets d'entiers naturels dont la somme vaut k ?

Démonstration. Une méthode élégante est celle du *stars and bars* : on regroupe les entiers ayant la même valeur, et on sépare les différentes valeurs possibles par des barres. On obtient comme résultat :

$$\binom{n+k-1}{k}$$

□

20.3.3 Nombres divers et variés

Nombres de Bell

On note B_n le nombre de partitions d'un ensemble un n éléments.

1. Montrer la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$
2. Démontrer la formule :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Démonstration. 1. Faire un dénombrement.

2. Utiliser des séries entières. Montrer que le rayon de convergence est non nul, puis dériver la série entière et utiliser la première question pour faire apparaître un produit de Cauchy avec le DSE de l'exponentielle. On obtient une équation différentielle qui se résout pour donner le résultat souhaité.

□

Nombres de Catalan

On note C_n le nombre de triangulations d'un polygone régulier à $n+2$ côtés.

1. Montrer la formule de Segner : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$
3. Montrer qu'il s'agit aussi du nombre de chemins monotones le long des arêtes d'une grille $n \times n$ qui restent sous la diagonale (au sens large).
4. Montrer qu'il s'agit aussi du nombre de parenthésages d'une expression à $n+1$ facteurs.

Démonstration. Dénombrer dans tous les sens. Pour la deuxième question, on peut tenter une récurrence forte en utilisant la question 1 (pas sûr que cela fonctionne). □

20.3.4 Graphes

Somme des degrés sur un graphe

Soit (V,E) un graphe. Alors :
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\mathrm{Card}(E)$$

Lemme de Sperner

Soit T un triangle triangulé et colorié selon les règles suivantes :

1. les sommets sont coloriés de trois couleurs différentes c_1, c_2 et c_3 ;
2. sur une arête $[c_i, c_j]$ donnée, les points de la triangulation sont coloriés en c_i ou en c_j.

Montrer alors que quel que soit le coloriage des points à l'intérieur du triangle, il existe un petit triangle colorié c_1, c_2, c_3.

Démonstration. On associe un graphe au triangle : les petits triangles ainsi que l'extérieur sont des sommets du graphe, et il existe une arête entre deux sommets si, et seulement si, les deux triangles associés partagent une arête colorée c_1, c_2. On remarque que sur l'arête $[c_1, c_2]$ de T, il y a nécessairement un nombre impair de changements de couleur donc l'extérieur est de degré impair. Or, la somme des degrés est paire (*cf* l'exercice précédent), donc la somme des degrés des petits triangles est impaire, et il y a alors un nombre impair de triangles de degré impair. Mais un triangle est nécessairement de degré 0, 1 ou 2. Il y a donc un nombre impair de petits triangles de degré 1, c'est-à-dire coloriés c_1, c_2, c_3. □

Théorème de Turan

Soit $p \geqslant 2$ et G un graphe simple d'ordre n ne contenant pas de p-cycle. Si m est le nombre d'arêtes de G, alors :

$$m \leqslant \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

Chapitre 21

Probabilités

Table des matières

21.1 Points méthode

Loi conjointe et lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

- Pour tout $x \in X(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

- Pour calculer $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, il suffit de se limiter au cas où $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$ et alors :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$$

Loi d'une fonction de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

Connaissant la loi de deux variables aléatoires indépendantes X et Y, on peut en déduire la loi de tout variable aléatoire Z fonction de X et Y. Pour tout $z \in Z(\Omega)$, on écrit $\{Z = z\}$ comme réunion d'événements de la forme $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$.

Détermination d'une espérance sans connaître la loi

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète dont on ne connaît pas la loi, on peut chercher à la décomposer en somme de variables aléatoires discrètes d'espérance connue. Par exemple, on pourra décomposer la variable aléatoire sous forme de somme d'indicatrices, et utiliser le fait que l'espérance de l'indicatrice d'un événement est la probabilité de cet événement.

21.2 Astuces

Possibilités à toujours envisager

Toujours envisager : la combinatoire, l'utilisation d'indicatrices ou les fonctions génératrices.

Formule du crible de Poincaré

Elle s'énonce :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)$$

On peut la démontrer en développant $1-\mathbf{1}_{\cup A_i}$ avec les complémentaires, de la distributivité généralisée et les produits d'indicatrices. On conclut en passant par linéarité de l'espérance avec la formule :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$$

Application. Cela peut permettre de calculer la probabilité d'avoir un dérangement en tirant au hasard un élément de S_n

Variables aléatoires ne prenant que deux valeurs

Quand on a des variables aléatoires ne prenant que deux valeurs, se ramener 'a des variables suivant une loi de Bernoulli via une transformation affine (peut servir à faire apparaître des lois binomiales cachées !) C'est notamment le cas quand on somme des variables de Rademacher (exemple d'une marche aléatoire...)

Fonction caractéristique

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, sa fonction caractéristique $F_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$ caractérise sa loi et on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_X(t)e^{-int}\ dt$$

Le transfert d'indépendance permet de montrer que pour des variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1,\ldots,X_n$, on a, comme pour les fonctions génératrices :

$$F_{X_1+\ldots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}$$

(pas besoin que les variables aléatoires soient à valeurs dans $\mathbb{Z}$ pour cela).

Application. Permet de retrouver les stabilités de la loi de Poisson et de la loi binomiale

Une majoration

Soit A et B deux événements. on a :

$$|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$$

Inégalité de Paley-Zygmund

Soit X une v.a.d. réelle à valeurs strictement positives qui admet un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \lambda \in]0,1[,\ \mathbb{P}(X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)) \geqslant \frac{(1-\lambda)^2\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$

Démonstration. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à

$$X\mathbf{1}_{X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)}$$

et écrire par ailleurs que

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X \geqslant \lambda \mathbb{E}(X)}) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X < \lambda \mathbb{E}(X)})$$

□

Inégalité de Bhatia-Davis

Si X est un variable aléatoire discrète à valeurs dans le segment réel $[a,b]$, alors on a :

$$\mathbb{V}(X) \leqslant (b - \mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - a)$$

Démonstration. Partir de l'inégalité $(b-X)(X-a) \geqslant 0$, développer, utiliser la croissance de l'espérance, changer quelques termes de côté dans l'inégalité et enfin ajouter le terme qui manque pour obtenir le résultat. □

Inégalité de Popoviciu

Sous les mêmes hypothèses que l'inégalité de Bhatia-Davis, on a :

$$\mathbb{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

Démonstration. Partir de l'inégalité de Bhatia-Davis et constater que $y \mapsto (b-y)(y-a)$ admet pour maximum $(b-a)^2/4$, atteint en $(a+b)/2$. □

Inégalité de Cantelli

Soit X une v.a.d. et $a > 0$.

1. $\forall t \geqslant 0,\ \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant a) \leqslant \dfrac{t^2 + \mathbb{V}(X)}{(t+a)^2}$
2. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{2}{\mathbb{V}}(X)a^2 + \mathbb{V}(X)$

Démonstration. 1. Calculer $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X) + a)^2)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

2. Utiliser le premier point et symétriser.

□

Inégalité de Jensen

Pour f concave, en supposant que X et $f(X)$ sont d'espérance finie, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) \leqslant f(\mathbb{E}(X))$$

Démonstration. Dans le cas fini, c'est simplement l'inégalité de Jensen habituelle. Dans le cas général, on peut le faire par densité en partant du cas fini ou utiliser des minorants de la courbe. □

Fonction génératrice

Pour montrer qu'une fonction f est la série génératrice d'une variable aléatoire, il faut montrer :

1. qu'elle est DSE, de RCV$\geqslant 1$;
2. que les coefficients du développement sont positifs ;
3. que la somme des coefficients vaut 1, ou encore que $f(1) = 1$ (existera si f est effectivement une série génératrice).

Limite supérieure et limite inférieure ; lemmes de Borel-Cantelli

Pour une suite (A_n) d'événements, on définit la limite supérieure par :

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} A_p$$

et la limite inférieure par :

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} A_p$$

On dispose alors du premier lemme de Borel-Cantelli :

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \text{ alors } \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$$

On dispose aussi du second lemme de Borel-Cantelli : lorsque les A_n sont mutuellement indépendants, on a :

$$\text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \text{ alors } \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$$

Maximum et minimum de variables aléatoires

Quand voit un maximum ou un minimum de variables aléatoires, s'intéresser aux événements $\max(\ldots) \geqslant \varepsilon$ ou $\min(\ldots) \leqslant \varepsilon$ car on peut les écrire comme des intersections ou des unions d'événements de la forme $\{X \geqslant \varepsilon\}$ ou $\{X \leqslant \varepsilon\}$.

Découpage par les indicatrices

On pourra penser à "conditionner" avec des indicatrices, notamment en découpant des variables aléatoires comme
$$X = \mathbf{1}_{\{X \leqslant a\}} X + \mathbf{1}_{\{X > a\}} X$$
Cela peut permettre d'utiliser le fait que $\mathbb{E}(1_A) = \mathbb{P}(A)$, de faire jouer des inégalités sur l'espérance, et d'utiliser d'autres sortes d'outils.

Découpage adapté à des fonctions convexes

On pourra penser à écrire, si X est à valeurs dans $[a, b]$, que
$$X = \frac{b - X}{b - a} a + \frac{X - a}{b - a} b$$
Cela permet d'obtenir une inégalité en appliquant une fonction convexe ou concave. En particulier, cela est très utile si la variable aléatoire est centrée. En général, des exercices sur des inégalités de concentration peuvent commencer comme cela.

Numérotation et ordonnement dans le cas fini

Quand on travaille sur des espaces probabilisés finis, pour se simplifier la vie, ne pas hésiter à numéroter, voire à ordonner, les éléments de l'univers.

Résultat de convergence en probabilité

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 telle que
$$\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} m \text{ et } \mathbb{V}(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
Alors, on a :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Si $|X_n - m| \geqslant \varepsilon$, alors $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| + |\mathbb{E}(X_n) - m| \geqslant \varepsilon$. On obtient donc à partir d'un certain rang, par croissance de la probabilité :
$$\mathbb{P}(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n) \geqslant \varepsilon - |\mathbb{E}(X_n) - m|)$$
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de conclure avec l'hypothèse $\mathbb{V}(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Remarque : Cette méthode fonctionne la plupart du temps pour établir une convergence en probabilité. □

21.3 Exercices classiques

21.3.1 Probabilités finies

QCM

Un élève répond à un test de cours portant sur une question à choix multiples dans lequel il y a 5 réponses possibles. Si l'élève a bien appris son cours, il choisit sûrement la bonne réponse. Si l'élève n'a pas bien appris son cours, il choisit une réponse au hasard. La probabilité qu'un élève ait bien appris sont cours est de 3/4. Sachant que l'élève a choisi la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait bien appris son cours ?

Démonstration. Utiliser la formule de Bayes et la formule des probabilités totales. □

Loi du cardinal d'une intersection de variables aléatoires

Soit $X_1, \dots, X_r : \Omega \to \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme. Déterminer la loi du cardinal

$$|X_1 \cap \ldots \cap X_r|$$

Démonstration. A faire... □

Taille de l'orbite de 1

On munit le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. Déterminer la probabilité pour que l'orbite de 1 pour σ soit de longueur k.

Démonstration. C'est un exercice de dénombrement. Se donner une permutation dont l'orbite de 1 est de taille k revient à se donner $k-1$ éléments avec ordre parmi les $n-1$ restants puis une permutation des $n-k$ restants. Donc, il y en a :

$$\binom{n-1}{k-1}(n-k)! = \frac{(n-1!)}{(n-k)!}(n-k)! = (n-1)!$$

donc une probabilité $1/n$. □

△ Téléphone arabe

Soit $X_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = p$$

et l'on pose $X_n = X_0\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$. Calculer $p_n := \mathbb{P}(X_n = X_0)$ et étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in N}$.

Démonstration. Faire une récurrence en utilisant la formule des probabilités totales. On trouve

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n) = (2p-1)p_n + (1-p)$$

Ensuite, étude classique de suite arithmético-géométrique qui donne

$$p_n = \frac{1}{2} + (2p-1)^n \left(p_0 - \frac{1}{2}\right)$$

Or, $-1 < 2p - 1 < 1$ donc la suite converge vers $1/2$. □

△ Indicatrice d'Euler

Soit $n \geqslant 2$. On munit $[\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme. Pour p un diviseur de n, on note A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Montrer que les A_p pour p premier divisant n sont mutuellement indépendants.
2. En déduire le nombre $\varphi(n)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ premiers avec n vérifie

$$\frac{\varphi}{n} = \prod_{p\in\mathcal{P}(n)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

   où $P(n)$ est l'ensemble des diviseurs premiers de n.
3. Bonus (sans rapport) : montrer que $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$

Démonstration. Exercice classique. Cet exercice présente deux formules très utiles pour les exercices en lien avec l'indicatrice d'Euler.

1. Revenir à la définition et utiliser des théorèmes d'arithmétique en travaillant directement sur les événements.
2. Utiliser le fait qu'on travaille avec la probabilité uniforme pour établir le membre de gauche. Pour le membre de droite, considérer le complémentaire de la question précédente et utiliser l'indépendance des $\overline{A_p}$ puisque les A_p sont indépendants.
3. Se référer aux astuces du chapitre arithmétique. Formule très utile dans les exercices en lien avec l'indicatrice d'Euler.

□

Les allumettes de Banach

Un fumeur a deux poches contenant respectivement n et $n+1$ allumettes. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il prend au hasard dans l'une des poches. On fixe un entier $k \in [\![0, n+1]\!]$. Quelle est la probabilité pour que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, l'autre boîte contienne encore au moins k allumettes ?

Démonstration. Exercice difficile. A faire... $\square$

$\star$ Placement dans un avion

Un avion comporte n sièges ($n \geqslant 2$). Chacun des n passagers a une place qui lui est réservée.

- Le premier passager arrive. Il est distrait et s'installe à une place choisie au hasard.
- Les passagers suivants, quand ils arrivent, s'installent à leur place sauf si celle-ci est déjà occupée, auquel cas ils choisissent une place au hasard parmi les places restantes.

En raisonnant par récurrence sur n, déterminer la probabilité que le n-ème passager s'installe à sa place.

Démonstration. Exercice difficile. On peut tester sur les petites valeurs de n pour se convaincre que cette probabilité vaudra tout le temps $1/2$. Ensuite, faire une récurrence forte et distinguer les cas pour se ramener à l'hypothèse de récurrence. $\square$

Le problème des ménages

1. Soit n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $2k \leqslant n$. Montrer que le nombre de manières de choisir k paires de points adjacents disjointes dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{n-k}{k}$. En déduire que le nombre de manières de choisir k paires de points adjacents, disjointes, parmi n points sur un cercle est $\dfrac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.
2. $\star$ On installe n couples, constitués chacun d'un homme et d'une femme, autour d'une table rode, en alternant hommes et femmes. Montrer que la probabilité que personne ne soit assis à côté de son ou sa partenaire est :
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$
3. Reprendre la question précédente en supposant cette fois-ci que l'on n'alterne pas nécessairement hommes et femmes autour de la table.

Démonstration. La deuxième question est difficile. A faire... $\square$

$\Delta\star$ Urnes de Polya

Une urne contient des boules blanches et des boules rouges.

- A l'instant 0, elle contient b boules blanches et r boules rouges.
- A l'instant n, un opérateur tire une boule au hasard dans l'urne avec probabilité uniforme, puis il la remet dans l'urne et y rajoute c boules de la même couleur que la boule tirée.
- Il répète l'opération à l'instant $n+1$.

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au n-ème tirage ?

Démonstration. Exercice difficile. On note $\mathbb{P}_n(b,r)$ cette probabilité. Il faut **conditionner par rapport au premier événement** (en effet, on ne peut pas le faire par rapport au dernier, puisque celui-ci dépend de tout ce qu'il s'est passé avant). On obtient la relation de récurrence :

$$\mathbb{P}_n(b,r) = \frac{b}{b+r}\mathbb{P}_{n-1}(b+c,r) + \frac{r}{b+r}\mathbb{P}_{n-1}(b,r+c)$$

Par récurrence, cela permet de montrer que pour tous n, b et r, on a :

$$\mathbb{P}_n(b,r) = \frac{b}{b+r}$$

□

Δ Espérance et variance d'une matrice à coefficients suivant des lois de Rademacher indépendantes

Chacun des n^2 coefficients d'une matrice est tiré aléatoirement dans $\{-1,1\}$, avec probabilité uniforme pour chaque issue et indépendance des tirages. On considère la variable aléatoire "déterminant de la matrice". Calculer son espérance et sa variance.

Démonstration. Utiliser la formule des signatures pour trouver une espérance nulle. Calculer le déterminant du carré de la matrice avec la formule des signatures en faisant un produit de sommes. Noter qu'en prenant l'espérance, les termes correspondant à deux permutations distinctes sont nulles par indépendance. □

Δ Espérance et variance du nombre de points fixes d'un élément de $\mathcal{S}_n$

On considère une permutation aléatoire de $[\![1,n]\!]$ avec probabilité uniforme.

1. Quelle est l'espérance du nombre de points fixes ?
2. Quelle est la variance du nombre de point fixes ?

Démonstration. Pour calculer l'espérance et la variance, écrire le nombre de points fixes comme une somme d'indicatrice et déterminer les probabilités des événements associés. On peut notamment calculer l'espérance et la variance du nombre de points fixes d'une permutation $\sigma \in S_n$ de cette façon. Pour la variance, on passera par les covariances. □

⋆ Urne d'Erhenfest

On se donne deux urnes A et B contenant en tout b boules avec $b \geqslant 2$. A chaque étape, une boule est choisie avec équiprobabilité et change d'urne. On note X_0 le nombre de boules dans l'urne A à l'instant initial, X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'issue de la $n$ème étape. Calculer l'espérance de X_n.

Démonstration. Exercice difficile. Procéder par récurrence pour le calcul de l'espérance. Conditionner. Se représenter matriciellement le problème peut aider : on a une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux sur la sous-diagonale et la sur-diagonale. Ensuite, on peut faire le calcul à la main en regroupant bien les termes pour obtenir une relation arithmético-géométrique sur l'espérance. □

Réciproque d'un théorème de cours ?

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(n,p)$. Est-ce que X est nécessairement la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de de paramètre p ?

Démonstration. La réponse est non. Si c'est le cas, l'univers doit être de cardinal supérieur à 2^n (construire une injection avec les variables aléatoires indépendantes) et il est pourtant possible d'avoir une telle loi sur un univers de cardinal n. □

21.3.2 Tribus, mesures de probabilité

Une "probabilité" sur $\mathbb{N}^*$ et sa tribu totale

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On admet que la famille $\left(\dfrac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{P}}$ n'est pas sommable. on suppose qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que l'événement $A_n = \{k \in \mathbb{N}^* \ : \ n \mid k\}$ soit systématiquement de probabilité $\dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\{1\}) = 0$.
3. Montrer plus généralement que pour tout famille finie $(p_1, \dots, p_N)$ de nombres premiers deux à deux distincts, l'événement "tous les diviseurs premiers de k sont dans $\{p_1, \dots, p_N\}$ est négligeable.
4. Conclure.

Démonstration. A faire...

1. Revenir à la définition et travailler sur les événements avec des théorèmes d'arithmétique.
2.
3.
4. Il devrait y avoir une absurdité.

□

Une inégalité

Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup i = 1^n A_i\right) \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \mathbb{P}(A_i \cap A_k) \right)$$

Démonstration. Raisonner par récurrence. □

Loi du zéro-un de Borel

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \bigcup_{k \geqslant n} A_k \text{ et } C_n = \bigcap_{k \geqslant n} A_k \quad \text{puis} \quad B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \text{ et } C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $B = C$, et, par définition, sa limite A est $A = B = C$.

1. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors A est un événement et la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{P}(A)$.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements B_n et C_n sont indépendants. Montrer que B et C sont indépendants. En déduire que si de plus la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Démonstration. A rapprocher des exemples du cours sur Borel-Cantelli. A faire... □

⋆ Une probabilité qui prend une infinité de valeurs

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. on suppose que l'ensemble des valeurs prises par $\mathbb{P}$ est infini.

1. Montrer l'existence d'une suite décroissante (A_n) d'événements pour lesquels $\{\mathbb{P}(B) \mid B \subset A_n\}$ est infini et tels que $(\mathbb{P}(A_n))$ soit strictement décroissante.
2. En déduire une suite d'événements (B_n) non négligeables et deux à deux incompatibles.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ est indénombrable.

Démonstration. Exercice difficile. Merci Pierre pour la correction quand Moulin a dispawn.

1. Construire par récurrence une telle suite en coupant à chaque fois en deux comme dans la preuve de Bolzano-Weierstrass en sup.
2. Prendre $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$.

3. On a :
$$\mathbb{P}\left(\left\{\bigcup_{n\in A} B_n \mid A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\right\}\right)\subset\mathbb{P}(\mathcal{T})$$
et le premier ensemble est indénombrable car en bijection avec $\mathbb{P}(\mathbb{N})$ en utilisant la deuxième question.

□

Intersection de tribus et tribu engendrée

Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille non vide de tribus sur Ω. Montrer que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ est une tribu sur Ω. En déduire qu'étant donnée une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$, il existe une plus petite tribu parmi celles incluant $\mathcal{A}$: on l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et on la note $\sigma(\mathcal{A})$.

Démonstration. Application du cours. Le faire à la main, comme d'habitude dans ce genre de choses (considérer l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$ pour la tribu engendrée). □

Théorème d'Ulam

Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble totalement ordonné indénombrable tel que pour tout $x\in E$; l'ensemble $\{y\in E\ :\ y\leqslant x\}$ soit au plus dénombrable. Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $(E,\mathcal{P}(E))$. On se propose de montrer qu'il existe $x\in E$ tel que $\mathbb{P}(\{x\})>0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\forall x\in E,\ \mathbb{P}(\{x\})=0$. pour tout $x\in E$, on choisit une injection f_x de $\{y\in E\ :\ y<x\}$ dans $\mathbb{N}$ puis pour tout $x\in E$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$A_{x,n}=\{y\in E\ :\ y>x \text{ et } f_y(x)=n\}$$

1. Montrer que $(A_{x,n})_{x\in E}$ est constituée de parties deux à deux disjointes, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $x\in E$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_{x,n})>0$.
3. $\star$ En déduire une contradiction.
4. $\star$ Montrer que $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité discrète.

Démonstration. Les deux dernières question sont difficiles. Merci à Gustave pour la correction des trois premières !

1. Se donner $a\in A_{x,n}\cap A_{y,n}$. Par injectivité de f_a, comme $f_a(x)=n=f_a(y)$, on en déduit que $x=y$.
2. On écrit que
$$\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_{x,n}=E\setminus\bigcup_{y\leqslant x}\{y\}$$
donc
$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_{x,n}\right)=1$$

car
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{y\leqslant x}\{y\}\right)=\sum_{y\leqslant x}\mathbb{P}(\{y\})=\sum_{y\leqslant x}0=0$$
Par conséquent,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_{x,n})=1$$
et il existe donc $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(A_{x,n})>0$.

3. On définit
$$B_n=\{x\in E\mid \mathbb{P}(A_{x,n})>0\}$$
Alors on a $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ d'après la deuxième question. Or :
$$\sum_{x\in B_{n_0}}\mathbb{P}(A_{x,n_0})=+\infty$$
ce qui est absurde.
4. A faire...

□

21.3.3 Suites de pile ou face

△ La ruine des joueurs

Deux joueurs A et B ayant pour capitaux initiaux respectivement a et b euros avec $(a,b)\in\mathbb{N}^2$, s'affrontent dans un jeu constitué d'une succession de parties indépendantes. A chaque partie, A a la probabilité $p\in]0,1[$ de gagner et B la probabilité $q=1-p$. A l'issue de chaque partie, le perdant donne 1 euro au gagnant. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs est ruiné. On note $R(a,b)$ la probabilité que A soit ultimement ruiné.

1. Montrer que si $a\geqslant 1$ et $b\geqslant 1$, alors :
$$R(a,b)=pR(a+1,b-1)+qR(a-1,b+1)$$
2. Calculer $R(a,b)$. On pourra remarquer que le capital total $a+b$ total reste fixe au cours de la partie.
3. Montrer que, presque sûrement, le jeu se termine au bout d'un nombre fini de parties.
4. Calculer la limite de $R(a,b)$ quand b tend vers $+\infty$ et a reste fixe.

Démonstration. Exercice classique. A faire...

1. utiliser la formule des probabilités totales.

□

21.3.4 Variables aléatoires discrètes

△ Taux de panne

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(x \geqslant n) > 0$$

On appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \mathbb{P}(X = n \mid X \geqslant n)$$

1. Exprimer $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le taux de panne associé à une variable aléatoire X. montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant x_n < 1$ et que la série de terme général x_n diverge.
3. Réciproque, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0, 1[$ telle que la série de terme général x_n diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite (x_n).
4. Montrer que la variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, sont taux de panne est constant.

Démonstration. Avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient par récurrence :

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$$

et par conséquent $\mathbb{P}(X = n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1}(1-x_k)$. Ensuite, il s'agit simplement d'utiliser ces formules dans tous les sens, de remarquer que

$$\mathbb{P}(X \geqslant n) \to 0$$

et de passer au ln les produits pour montrer qu'ils tendent vers $-\infty$. □

△ Minimum de deux lois géométriques indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs λ et μ. Montrer que $Z = \inf(X, Y)$ suit aussi une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Démonstration. Exercice classique. On se donne $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$ indépendantes. On pose $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$ ainsi que $p = 1 - q_1 q_2$. Alors $\min(X, Y) \sim \mathcal{G}(p)$. En effet, on a :

$$\{\min(X, Y) \geqslant k\} = \{X \geqslant k\} \cap \{Y \geqslant k\}$$

donc par indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) \geqslant k) = q_1^{k-1} q_2^{k-1}$$

On obtient donc, puisque $\{\min(X,Y)=k\} = \{\min(X,Y) \geqslant k\} \cap \overline{\{\min(X,Y) \geqslant k+1\}}$, la relation :

$$\mathbb{P}(\min(X,Y)=k) = (1-q_1q_2)(q_1q_2)^{k-1}$$

Cela traduit bien le fait que $\min(X,Y) \sim \mathcal{G}(p)$. □

△ Somme de deux lois de Poisson indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que Y suit une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

1. Montrer que $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
2. Étant donné $n > 0$, déterminer la loi de X sachant $S = n$.

Démonstration. Exercice classique.

1. On peut le faire à la main avec les sommes et faire apparaître un binôme de Newton et un produit de Cauchy, ou alors on peut aussi le faire avec les fonctions génératrices.
2. Le faire à la main avec les sommes. Cela se fait bien. Voir l'exercice suivant.

□

△ Une caractérisation de la loi de Poisson

On considère une variable aléatoire discrète N sur l'espace probabilisé $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(N=n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la variable N prend la valeur n, on procède à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. On note S et E les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de succès et d'échecs dans ces n épreuves.

1. Montrer que si N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, les variables$S$ et E suivent aussi des lois de Poisson dont on déterminera les paramètres. Montrer que les variables S et E sont indépendantes.
2. Montrer réciproquement que si S et E sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson. Pour cela, on montrer :
   - qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telle que
   $$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ (m+n)!\mathbb{P}(N=m+n) = u_m v_n$$
   - que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques

Démonstration. Exercice classique. On pose $q = 1-p$.

1. On calcule directement pour trouver :
$$\mathbb{P}(S=n, E=m) = \binom{m+n}{n} p^n q^m e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} = \left[e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^n}{n!}\right] \times \left[e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^n}{n!}\right]$$
   ce qui donne l'indépendance et les lois de S et E.

2.
   - Comme dans le première question, on calcule directement pour obtenir par indépendance :
   $$(m+n)!\mathbb{P}(N=m+n) = \frac{n!\mathbb{P}(S=n)}{p^n} \times \frac{m!\mathbb{P}(E=m)}{q^m}$$
   - En utilisant ce qui précède, on trouve $u_m v_{n+1} = u_{m+1} v_n$ donc les suites sont géométriques de même paramètre. On reporte dans l'expression du point précédent pour obtenir une loi de Poisson.

□

21.3.5 Espérance, variance

△ Espérance et Cauchy-Schwarz

Montrer que, pour une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geqslant 1$$

Démonstration. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{X}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ et déterminer ainsi les cas d'égalité. □

Variante du précédent

On a une variante si $X \sim Y$ avec X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$$

Démonstration. On peut alors appliquer le résultat précédent avec un transfert d'indépendance et de loi, ou bien on peut simplement remarquer que par transfert d'indépendance et de loi

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

sommer les deux, puis utiliser le fait que la fonction

$$x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

est minorée par 2 sur $\mathbb{R}_+^*$ □

Une caractérisation de l'indépendance des variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, et à valeurs dans des ensembles respectifs E et F. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

- Les variables X et Y sont indépendantes.
- Quelles que soient les fonctions bornées $f : E \mapsto \mathbb{R}$ et $g : F \mapsto \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

Démonstration. Le sens direct est immédiat par transfert d'indépendance. Dans le sens réciproque, revenir à la définition et appliquer l'hypothèse aux fonctions indicatrices des événements considérés. □

△ Le problème du collectionneur

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On y effectue un tirage avec remise. Le tirage s'arrête dès que chaque boule a été tirée au moins une fois.

1. Montrer que le tirage s'arrête presque sûrement.
2. On note $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ la variable aléatoire donnant le temps d'arrêt du triage. Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance. Réaliser un équivalent de cette dernière lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que T est dans L^2 et calculer sa variance. Réaliser un équivalent de cette dernière lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Exercice classique. A faire... □

Inégalité de Bonferroni

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}$$

et en déduire son signe.

2. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $l \in [\![1,n]\!]$. Déterminer le signe de la variable aléatoire

$$\nVdash_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} + \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ 0 < |i| \leqslant l}} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \mathbb{A}_{A_i}$$

3. En déduire l'inégalité de Bonferroni :

$$(-1)^l \left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) - \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ 0 < |i| \leqslant l}} (-1)^{|I|-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) \geqslant 0$$

Démonstration. 1. Se faire une idée sur les petites valeurs (c'est quelque chose du style $(-1)^p \binom{n}{p-1}$) puis le prouver par récurrence avec la formule de Pascal.

2. Faire comme dans la démonstration de la formule du crible.

3. Utiliser les questions précédentes.

□

Un encadrement

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé. on suppose X et Y d'espérance finie et centrées. Montrer que si $-1 \leqslant X \leqslant 1$ et $Y \geqslant -1$, alors

$$|\mathbb{E}(XY)| \leqslant 1$$

Démonstration. On "remarque" que $Y + 1 \geqslant 0$. D'où :

$$-(Y+1) \leqslant XY + X \leqslant (Y+1)$$

On obtient le résultat par croissance de l'espérance et avec l'hypothèse X et Y centrées. □

⋆⋆ Un autre encadrement

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, avec Y centrée. Montrer que

$$\mathbb{E}(|X+Y|) \geqslant \mathbb{E}(|X|)$$

Démonstration. Exercice très difficile. A faire... □

Une majoration de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans le segment $[a, b]$, d'espérance m. Montrer que
$$\mathbb{V}(X) \leqslant (b - m)(m - a)$$

Démonstration. Remarquer que
$$(b - X)(X - a) \geqslant 0$$
développer, utiliser la croissance de l'espérance et ajouter ce qu'il manque pour arriver au résultat. □

Δ Inégalité de Hölder

Soit p et q des réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ (**inégalité de Young**).
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X|^p$ et $|Y|^q$ soient d'espérance finie. Montrer que XY est d'espérance finie et que l'on a :
$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}$$
(**inégalité de Hölder**).

Démonstration. Exercice classique qu'on retrouve dans d'autres domaines.

1. Utiliser la concavité de ln.
2. Utiliser la question précédente.

□

$\star$ Une inégalité

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes bornées. Montrer que
$$\mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)) \leqslant \mathbb{E}((fg)(X))$$
Application : soit f et g croissantes continues par morceaux sur $[0, 1]$. Montrer que
$$\int_0^1 f \int_0^1 g \leqslant \int_0^1 fg$$

Démonstration. Exercice difficile. Pour cela, remarquer que :
$$\forall (x, y) \in I^2,\ (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geqslant 0$$

par croissance. On en déduit que $(fg)(Y) + (fg)(X) \geqslant f(Y)g(X) + f(X)g(Y)$ et on conclut par croissance de l'espérance (le caractère borné de f et g assure l'existence de ces espérances). Pour l'application, chercher à se ramener à des sommes de Riemann. On considèrera X et Y iid qui suivent une loi uniforme sur $\{0, \ldots, (n-1)/n\}$. On applique ensuite l'inégalité précédente et on passe à la limite. □

⋆ Inégalité des *maxima* de Kolmogorov

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite finie de variables aléatoires réelles indépendantes centrées et dans L^2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2}$$

On pourra introduire l'événement

$$A_k = \{|S_1| < \alpha, \ldots, |S_{k-1}| < \alpha, |S_k| \geqslant \alpha\}$$

et utiliser l'inégalité

$$|S_n|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |S_n|^2 \mathbf{1}_{A_k}$$

Démonstration. Exercice difficile. Il est clair que

$$\left\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\right\} = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$$

D'où :

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_k})$$

On en déduit que

$$\alpha^2 \mathbb{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \alpha\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\alpha^2 \mathbf{1}_{A_k}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|S_k|^2 \mathbf{1}_{A_k})$$

Or, on a :

$$\mathbb{E}((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}) = \mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) + \mathbb{E}(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) - 2\mathbb{E}(S_n S_k \mathbf{1}_{A_k})$$

Or, par indépendance et comme toutes les X_i sont centrées, on prouve aisément que

$$\mathbb{E}((S_n - S_k) S_k \mathbf{1}_{A_k}) = 0$$

On en déduit que

$$\underbrace{\mathbb{E}((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k})}_{\geqslant 0} = \mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) - \mathbb{E}(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k})$$

Et par conséquent :

$$\alpha^2\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\alpha\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(S_n^2\mathbf{1}_{A_k})=\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}S_n^2\mathbf{1}_{A_k}\right)$$

L'inégalité soufflée par l'énoncé se démontre aisément car les A_k sont deux à deux incompatibles. On en déduit que

$$\alpha^2\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\alpha\right)\leqslant\mathbb{E}(S_n^2)$$

Or,

$$\mathbb{E}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=0$$

par linéarité de l'espérance, donc $\mathbb{V}(S_n)=\mathbb{E}(S_n^2)$ d'après la formule de König-Huygens, ce qui conclut. □

Application. Séries aléatoires (*cf* la dernière pâle de l'année...).

21.3.6 Fonctions génératrices

△⋆ Foot à Palaiseau

Peut-on piper deux dés à 6 faces (indépendamment l'un de l'autre) afin que le résultat du jet de ces deux dés suive une loi uniforme sur $[\![1,12]\!]$?

Démonstration. La réponse est non. Raisonner par l'absurde et considérer les deux fonctions génératrices G_X et G_Y des dés. On doit avoir, pour $S=X+Y$, par indépendance : $G_S=G_XG_Y$ Or, par hypothèse, on doit avoir :

$$G_S(t)=\sum_{n=2}^{12}\frac{1}{11}t^k=\frac{t^2}{11}\frac{1-t^{11}}{1-t}$$

Or, G_X et G_Y possèdent toutes les deux au moins 2 racines réelles : 0 puis après factorisation par t, on a des fonctions polynomiales de degré 5 exactement (sans quoi on ne pourrait pas obtenir 12 pour la somme) qui admettent une racine réelle. Or, G_S possède exactement 2 racines réelles, ce qui est absurde. □

21.3.7 Convergence de suites de variables aléatoires, loi des grands nombres

⋆ Une inégalité de grande déviation

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et X une variable aléatoire discrète, centrée et à valeurs dans $[a, b]$. Montrer que
$$\mathbb{E}(e^X) \leqslant \frac{be^a - ae^b}{b-a}$$
et en déduire que
$$\mathbb{E}(e^X) \leqslant e^{(b-a)^2/8}$$
On pourra introduire les quantités $s = \dfrac{a+b}{2}$, $t = \dfrac{b-a}{2}$ et $\alpha = \dfrac{s}{t}$ pour se ramener à l'inégalité :
$$\ln\left(\cosh(t) - \alpha \sinh(t)\right) \leqslant -\alpha t + \frac{t^2}{2}$$
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, réelles bornées et indépendantes. Soit $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ des réelles tels que $a_i \leqslant X_i \leqslant b_i$ pour tout i. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que
$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant t) \leqslant \exp\left(\frac{-2t^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right)$$
On pourra appliquer l'inégalité de la première question aux variables sX_i pour un réel $s > 0$ bien choisi. Comment peut-on majorer $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \leqslant -t)$?

Démonstration. Exercice difficile mais magnifique !

1. Écrire
$$X = \frac{b-X}{b-a}a + \frac{X-a}{b-a}b$$
puis utiliser la convexité de l'exponentielle puis la croissance de l'espérance et le fait que X est centrée. Ensuite, suivre l'indication pour se ramener à prouver l'inégalité suggérée.
2. Remarquer qu'on peut SPG supposer $a_i < b_i$ sinon le résultat à prouver se ramène à un cas avec n inférieur ou alors n'a tout bonnement pas de sens. Chercher par CN des informations sur les bons s à choisir en appliquant l'inégalité de Markov puis utilisant un transfert d'indépendance et le fait que l'espérance du produit de variables aléatoires indépendantes est le produit des espérances. Ensuite, utiliser la première question. On souhaite alors avoir :
$$-st + \frac{s^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = \frac{-2t^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}$$

Cela se réécrit

$$\left(\frac{s}{\sqrt{8}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}-\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}}\right)^2=0$$

En appliquant les calculs avec

$$s=\frac{4t}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}$$

on obtient le bon résultat. Ensuite, remarquer que

$$\{S_n-\mathbb{E}(S_n)\leqslant -t\}=\{-S_n-\mathbb{E}(-S_n)\geqslant t\}$$

donc on obtient la même majoration en appliquant le résultat précédent aux $-X_i$ qui sont tout autant centrées, indépendantes et à valeurs dans $[-b_i,-a_i]$.

□

△ Loi forte des grands nombres dans L^4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes centrées de même loi telle que X_1^4 soit d'espérance finie. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

1. Montrer que X_1 est dans L^2.
2. Calculer l'espérance de S_n^4.
3. En déduire que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right)<+\infty$$

puis que "la suite $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ converge vers 0" est un événement presque sûr.

Démonstration. X_1^2 est donc dans L^2, donc dans L^1 donc X_1 est dans L^2. Il faut ensuite utiliser l'inclusion

$$\left\{\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\geqslant\varepsilon\right\}\subset\left\{\frac{(X_1+\ldots+X_n)^4}{n^4}\geqslant\varepsilon^4\right\}$$

On distribue ensuite pour montrer que

$$\mathbb{E}\left((X_1+\ldots+X_n)^4\right)=n\mathbb{E}(X_1^4)+3n(n-1)\mathbb{E}(X_1^2)^2=O(n^2)$$

En effet, seul les termes où les 4 indices sont distincts, ou bien ou les termes où on a deux indices i et deux indices j avec $i \neq j$ ne sont pas nuls après passage à l'espérance et par indépendance, donc on obtient bien le $O(n^2)$. L'inégalité de Markov fournit alors un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui permet de conclure. □

21.3.8 TD Châteaux

Généralités

Limites supérieure et inférieure d'une suite d'événements

Soit (A_n) une suite de parties de Ω. On note :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m \geqslant n} A_m \text{ et } \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m \geqslant n} A_m$$

1. Montrer que $\liminf A_n$ est l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_n sauf pour un nombre fini d'indices n, et que $\limsup A_n$ est l'ensemble des éléments appartenant à A_n pour une infinité d'indices n.
2. Soient A et B deux parties de Ω. On pose A_n qui vaut A si n est pair, et B sinon. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.
3. Que valent $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ lorsque la suite (A_n) est monotone ?
4. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Montrer que si (A_n) est une suite d'événements, alors $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ sont des événements.
5. On dit que la suite (A_n) converge lorsque $\liminf A_n = \limsup A_n$, et on note alors $\lim A$ cette valeur commune. Montrer qu'une suite monotone d'événements converge.
6. Si (u_n) est une suite réelle bornée, on note $\liminf u_n$ la plus petite valeur d'adhérence de (u_n) et $\limsup u_n$ la plus grande valeur d'adhérence de (u_n). Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et (A_n) une suite d'événements.
   a. Montrer les inégalités de Fatou :
   $$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leqslant \liminf \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\limsup A_n) \geqslant \limsup \mathbb{P}(A_n)$$
   b. En déduire que si la suite d'événements (A_n) converge vers A, alors $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

1. Le faire par double inclusion.
2. La limite inférieure est $A \cap B$, et la limite supérieure est $A \cup B$.
3. Si la suite est croissante, les limites inférieure et supérieure valent toutes les deux $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Si la suite est décroissante, les limites inférieure et supérieure valent toutes les deux $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$.

4. Utiliser le fait qu'une tribu est stable par intersection et union au plus dénombrables.
5. Utiliser le résultat de la question 4.
6. a. Utiliser la croissance de la probabilité.
   b. Dans ce cas, la seule valeur d'adhérence de $(\mathbb{P}(A_n))$ est $\mathbb{P}(A)$.

□

Probabilité sur $[\![1;n]\!]$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\Omega = [\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Si d est un diviseur de n dans $\mathbb{N}$, on note D_d l'ensemble des multiples de d dans Ω.

1. Déterminer $\mathbb{P}(D_d)$.
2. On écrit $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ en facteurs premiers. Les événements $D_{p_1}, \ldots, D_{p_r}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. En déduire que $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

Démonstration. 1. $\mathbb{P}(D_d) = \dfrac{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor}{n} = \dfrac{1}{d}$

2. Utiliser le lemme de Gauss.
3. Passer au complémentaire et utiliser les deux questions précédentes.

□

Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux

On pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ lorsque $s > 1$. On admet que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$
3. Montrer que $\dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{\pi^2}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note p_n la probabilité que X_n et Y_n soient premiers entre eux. Montrer que la suite (p_n) converge, et déterminer sa limite.

Démonstration. 1. Calculer $\zeta(s) \times \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ en décomposant les n en facteurs premiers dans la somme double. Intervertir les sommes et utiliser après démonstration le fait que

$$\sum_{d|k} = \delta_{1,k}$$

2. Utiliser l'expression de $\varphi(n)/n$ obtenue dans l'exercice précédent.

3. Utiliser la formule de la question précédente et prouver que la différence entre l'expression cherchée multipliée par n^2 et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)\left(\frac{n}{k}\right)^2}{2}$$

tend vers 0, puis on montre que S_n/n^2 tend vers $3/\pi^2$ avec la question 1.

4. On a $p_n = \dfrac{1}{n^2}\left(2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\varphi(k) - 1\right)$ puis on utilise la question précédente.

□

Probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$

On se propose de prouver qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n\mathbb{N}) = \dfrac{1}{n}$.

1. Démontrer que si une telle probabilité existe, alors les événements $A_p = p\mathbb{N}$ pour p premier sont mutuellement indépendants.
2. Conclure à l'aide du lemme de Borel-Cantelli. On pourra utiliser sans démonstration le fait que la famille des inverses des nombres premiers n'est pas sommable.

Démonstration. 1. Utiliser le lemme de Gauss.

2. Par indépendance mutuelle,

□

Loi de Zipf

Soit $a \in]1, +\infty[$. On pose $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

1. Montrer que l'on peut définit une probabilité $\mathbb{P}_a$ sur $\mathbb{N}^*$ à l'aide des réels q_k définis par

$$q_k = \mathbb{P}_a(\{k\}) = \frac{1}{\zeta(a)k^a}$$

2. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_m = \{km \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $\mathbb{P}_a(A_m)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur deux entiers i et j pour que A_i et A_j soient indépendants.
4. On note p_i le i-ème nombre premier et C_n l'ensemble des entiers divisibles par aucun des p_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
   a. Calculer $\mathbb{P}_a(C_n)$.
   b. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$.
   c. En déduire le développement eulérien de la fonction ζ :

$$\forall a > 1,\ \zeta(a) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^a}\right)^{-1}$$

   d. Déterminer la probabilité pour qu'un entier tiré soit sans facteur carré.

Urnes de Polya

Une urne contient r boules et n boules noires. Une boule est retirée au hasard, on note sa couleur puis on remet l'urne $d+1$ boules de la même couleur (de sorte qu'il y ait d boules de la couleur de celle tirée en plus dans l'urne à la fin de l'opération). Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire.

1. Trouver la probabilité pour que :
   - la deuxième boule tirée soit noire ;
   - la première boule ait été noire, sachant que la seconde est noire.
2. On note Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage pour lequel on tire une boule rouge. Calculer la loi de Y et étudier si Y est d'espérance finie.
3. On note B_m l'événement selon lequel la m-ème boule tirée est noire. Montrer que $\mathbb{P}(B_m) = \mathbb{P}(B_1)$.
4. Trouver la probabilité pour que la première boule soit noire, sachant que les $m-1$ suivantes sont noires. Que se passe-t-il quand m tend vers $+\infty$?

Probabilités sur les permutations et les graphes

Nombre de dérangements

On munit le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. On dit qu'une permutation est un dérangement si elle ne possède aucun point fixe. On note D_n l'ensemble des dérangements, qui est un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$, dont on note d_n le cardinal.

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note E_k la variable aléatoire telle que $E_k(\sigma) = \delta_{\sigma(k),k}$. Déterminer la loi de E_k.
2. On note X_n le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
3. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. En partitionnant $\mathcal{S}_n$ selon le nombre de points fixes, déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$. En déduire l'expression de d_n, ainsi qu'un équivalent quand n tends vers $+\infty$. Déterminer la loi de X_n et retrouver la valeur du nombre moyen de points fixes d'une permutation.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}(X_n = k)$.
5. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X = k)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Nombre de cycles à support disjoints dans la décomposition

On munit le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ comme les coefficients du polynôme P_n suivant :

$$P_n = X(X+1)\cdots(X+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$$

1. Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
2. Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ est le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ dont la décomposition en cycles à support disjoints comporte k cycles.
3. Si σ est une permutation aléatoire, on note $X_n(\sigma)$ le nombre de cycles disjoints de σ.
   a. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_n) \sim \ln(n)$ en $+\infty$.
   b. Démontrer que $\mathbb{V}(X_n) \sim \ln(n)$ en $+\infty$.
   c. En déduire que $\frac{X_n}{\ln(n)}$ converge en probabilité vers 1.

Probabilités sur les applications de $[\![1;m]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$

L'univers E des applications de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points de $[\![1,n]\!]$ sans antécédent.

1. Soit Y_j la variable aléatoire de Bernoulli telle que $Y_j(\omega) = 1$ si j est dans l'image de ω et 0 sinon. Déterminer la loi de Y_j.
2. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Dans un immeuble de n étages, m personnes prennent un ascenseur. Déterminer le nombre moyen d'arrêts de cet ascenseur.
4. On suppose $m = n$. Déterminer des équivalents simples de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
5. Soit (m_n) une suite d'entiers naturels telle que $m_n \sim cn$ avec $c > 0$. On note X_n la variable aléatoire X égale au nombre de points sans antécédents de $[\![1,n]\!]$. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers e^{-c}.

Graphes aléatoires : modèle d'Erdös-Renyi

Soit p un réel appartenant à $]0,1[$. Un graphe aléatoire non orienté à n sommets avec probabilité de liaison égale à p est un graphe dont deux sommets distincts portent une arête avec la probabilité p, les liaisons étant mutuellement indépendantes. Le modèle décrit est appelé modèle d'Erdös-Renyi.

1. Modéliser cette situation avec une famille de variables aléatoires de Bernoulli. Justifier que le nombre de sommets reliés à un sommet fixé suit une loi binomiale de paramètres $n-1$ et p.
2. Déterminer la loi du nombre total d'arêtes.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sommets isolés. Déterminer l'espérance et la variance de X. Indication : on pourra introduire la variable de Bernoulli U_s égale à 1 si, et seulement si, s est un sommet isolé. Calculer l'espérance du nombre de paires de sommets sans voisin commun.
4. Si $k \geqslant 3$, un k-cycle du graphe est un sous-ensemble de k sommets tous reliés entre eux. Calculer l'espérance du nombre de k-cycles.

Suites de graphes aléatoires

On se donne une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]0,1[$. On note G_n un graphe aléatoire non orienté de sommets $1,\dots,n$. Pour tout (i,j) tel que $1\leqslant i<j\leqslant n$, on note $X_{i,j}$ une variable aléatoire qui vaut 1 lorsque (i,j) est une arête de G_n, et 0 sinon. On suppose que les $X_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés de G_n.

1. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n=0)\leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Y_n)}{\mathbb{E}(Y_n^2)}$.
2. On suppose que $\dfrac{\ln(n)}{n}=o(p_n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n>0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
3. On suppose que $p_n=o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n>0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.
4. On suppose que $p_n=c\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $c>0$. Étudier la suite $(\mathbb{P}(Y_n=0))$.

Marches aléatoires

Marche aléatoire sur une droite : généralité

On se donne un réel $p\in]0,1[$ et une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n=1)=p$ et $\mathbb{P}(X_n=-1)=1-p$. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$. Dans une marche aléatoire sur la droite, X_n correspond au $n$ème déplacement, valant 1 si on se déplace vers la droite et -1 si on se déplace vers la gauche. S_n désigne la position après n pas. Dans un jeu de pile ou face où la probabilité de tirer pile vaut p et où on gagne 1 si on tire pile et on perd 1 si on tire face, S_n correspond au portefeuille après n tirages. On note T la date du premier retour en 0 :

$$T=\min\{n\geqslant 1 \ \mid S_n=0\}$$

avec $T=+\infty$ si on ne retourne jamais en 0. On pose $X_i=2Y_i-1$ et $Y=Y_1+\cdots+Y_n$.

1. Déterminer la loi de Y_n. En déduire la loi de S_n.
2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Marche équilibrée

On suppose ici que $p = \dfrac{1}{2}$. Les X_n sont alors appelées des variables aléatoires de Rademacher. On pose, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)t^{2n} \quad \text{et} \quad g(t) = G_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 2n)t^{2n}$$

1. Vérifier que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \dbinom{2n}{n} \dfrac{1}{2^{2n}}$.
2. Démontrer que $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. En partitionnant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon la date du premier retour en 0, démontrer que $f(t) - 1 = f(t)g(t)$.
4. En déduire que $\mathbb{P}(T = 2n) = \dbinom{2n-2}{n-1} \dfrac{1}{n2^{2n-1}}$. Calculer $\mathbb{E}(T)$.
5. Soit A l'événement "la marche aléatoire repasse par 0". Démontrer que $\mathbb{P}(A) = 1$. Il en résulte que la marche aléatoire repasse presque sûrement par l'origine, mais au bout d'un temps d'espérance infinie.
6. On note A_n l'événement "la marche aléatoire repasse n fois par 0". Démontrer que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n. En déduire que la marche aléatoire repasse presque sûrement une infinité de fois par l'origine. On dit que le retour à l'origine est un phénomène récurrent.
7. On note T_n le temps du n-ème passage en 0. Démontrer que $G_{T_n} = G_T^n$.
8. On cherche à estime la distance à l'origine.
   a. Montrer que $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(S_n = 0)$.
   b. En déduire que $\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{2n} X_k\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{4n}{\pi}}$.

Marche déséquilibrée

On suppose ici que $p \neq \dfrac{1}{2}$ et on conserve les notations des deux exercices précédents.

1. Montrer que $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)t^2}}$ et $g(t) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$. En déduire $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)$. Interpréter le résultat.

Inégalités de concentration

Grandes déviations

1. a. Montrer que $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [-1,1],\ e^{tx} \leqslant \dfrac{1-x}{2}e^{-t} + \dfrac{1+x}{2}e^{t}$.
   b. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une suite finie de variables aléatoires centrées mutuellement indépendantes à valeurs dans $[-1,1]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En considérant $\mathbb{E}(e^{tS_n})$, démontrer que :
   $$\forall a > 0,\ \mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ et $c > 0$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) \leqslant K e^{-cn}$$
   b. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K >$ à et $c > 0$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon\right) \leqslant K e^{-cn}$$
   c. Quelle est la limite presque sûre de $\dfrac{S_n}{n}$?

Inégalité de Paley-Zygmund

Soit X une variable aléatoire discrète positive de variance finie. Démontrer que, pour tout réel $\theta \in]0,1[$, on a :
$$\mathbb{P}(X \geqslant \theta \mathbb{E}(X)) \geqslant (1-\theta^2)\frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$$
On pourra introduire la variable aléatoire $\mathbf{1}_{X \geqslant \theta \mathbb{E}(X)}$.

Inégalité de Hoeffding

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et Z une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[a,b]$. Montrer :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}(e^{tZ}) \leqslant \exp\left(\frac{(b-a)^2t^2}{8}\right)$$
2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels tels $a_k \leqslant X_k \leqslant b_k$ pour tout k. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Démontrer :
$$\forall u > 0,\ \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant u) \leqslant 2\exp\left(-\frac{2u}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

Loi forte des grands nombres

On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X lorsque
$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1$$
On se propose de montrer que si une suite de variables aléatoires i.i.d admet un moment d'ordre 4, alors $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$, où $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Quitte à soustraire $\mathbb{E}(X_1)$, on supposera $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

1. Prouver le lemme suivant : une suite (X_n) converge presque sûrement vers X si, et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$
2. Calculer S_n^4 et démontrer à l'aide de l'inégalité de Markov que $\sum \mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} > \varepsilon\right)$ converge.
3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, démontrer que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\limsup\{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$
4. Conclure que $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0.

Files d'attente et fonction caractéristique

On considère la file d'attente à une caisse de supermarché. il y a un serveur et un nombre de places infini. Les clients sont servis selon le principe "premier arrivé, premier servi". On appelle système l'ensemble des clients en attente et du client en service. On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ où A_n représente le nombre de clients arrivés pendant le service du client n. On définit la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :
$$X_0 = 0 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} \text{ si } X_n = 0 \\ X_n - 1 + A_{n+1} \text{ si } X_n > 0 \end{cases}$$
On suppose que les variables aléatoires A_n sont indépendantes et de même loi, égale à celle d'une variable aléatoire A vérifiant les hypothèses suivantes :

- A est à valeurs entières ;
- $\mathbb{P}(A \geqslant n) > 0$ pour tout entier n ;
- A est d'espérance finie, notée ρ.

Fonctions caractéristique : définition et premières propriétés

Ici, X représente une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa fonction caractéristique ϕ_X sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

1. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que X et Y ont même loi.
3. Si $\mathbb{E}(X) < +\infty$, montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\phi'_X(0)$.
4. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $Z = Y - 1$ où Y suit une loi géométrique de paramètre p.

Démonstration.

1. On note $f_n(t) = \mathbb{P}(X = n)e^{itn}$. On a convergence normale de la série des f_n sur $\mathbb{R}$ donc ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$. La périodicité est immédiate par périodicité des e^{itn}.
2. On a :

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-itn} \phi_X(t)$$

car X est à valeurs entières donc ϕ_X suffit à définir entièrement X.

3. L'hypothèse se traduit par la convergence de $\sum \mathbb{P}(X = n)n$ donc on a convergence normale de la série des f'_n d'où la dérivabilité. On a en particulier :

$$\phi'_X(0) = i\mathbb{E}(X)$$

4.

□

Remarques préliminaires

1. Que représente X_n ?
2. Existe-t-il $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n \leqslant M) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$?
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $X_{n+1} - X_n \geqslant -1$.
4. Pour tout $n \geqslant 0$, montrer que les variables aléatoires X_n et A_{n+1} sont indépendantes.

Convergence

1. Établir l'identité suivante lorsque X est une variable aléatoire à valeurs entières :

$$\mathbb{E}(e^{itX}\mathbf{1}_{X>0}) = \phi_X(t) - \mathbb{P}(X=0)$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir la relation suivante :

$$\phi_{X_{n+1}}(t) = \phi_A(t)\left(e^{-it}\phi_{X_n}(t) + (1-e^{-it})\mathbb{P}(X_n = 0)\right)$$

On suppose dorénavant que $0 < \rho < 1$. On admet qu'alors, la suite $(\mathbb{P}(X_n = 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite α. On suppose que A n'est pas arithmétique, c'est-à-dire que $|\phi_A| < 1$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On définit alors $\theta : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ par $\theta(0) = 1$ et

$$\forall t \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\},\ \theta(t) = \alpha\frac{\phi_A(t)(1-e^{-it})}{1-\phi_A(t)e^{-it}}$$

3. Établir le développement limité à l'ordre 1 de ϕ_A au voisinage de 0.
4. Que doit valoir α (en fonction de ρ) pour que θ soit continue en 0 ?
5. On fixe $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, identifier $\beta_t \in]0,1[$ tel que pour tout entier n suffisamment grand, on ait l'identité suivante :

$$|\phi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t)| \leqslant \beta_t|\phi_{X_n}(t) - \theta(t)| + \varepsilon$$

6. Montrer que la suite de fonctions de fonctions $(\phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement

Application

On admet que θ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y à valeurs entières :

$$\forall t \in [-\pi,\pi],\ \theta(t) = \mathbb{E}(e^{itY})$$

De plus, on suppose que $\phi_A(t) = \dfrac{1}{1+\rho-\rho e^{it}}$.

1. Identifier la loi de A.
2. Montrer que ϕ_A satisfait les hypothèses requises.
3. Calculer θ et identifier la loi de Y.

Chapitre 22

Astuces en vrac

Théorème de Cantor-Bernstein

S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors E et F sont équipotents.

Montrer une égalité

Quand on doit montrer une égalité entre deux expressions, bien choisir celle de laquelle on part.

Degré de liberté

Parfois, il faut essayer de se créer un degré de liberté.

Une identité à connaître

$$(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Démonstration. Pour le prouver et y penser, utiliser :

$$|a + ib|^2 \times |c + id|^2 = |(ac - bd) + i(ad + bc)|^2$$

□

Application. Permet de prouver que le produit de deux sommes de deux carrés est une somme de deux carrés.

Application. On dispose également d'une identité semblable pour des sommes de quatre carrés (le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés) : elle se prouve avec les quaternions. Cette dernière permet de montrer que tout entier est la somme de quatre carrés.

Entier le plus proche

L'entier le plus proche d'un réel x est

$$n = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Si x est exactement entre deux entiers, ceci donne le plus petit des deux.

Dérivées successives des cosinus et sinus

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Théorème d'Al-Kashi

Loi des sinus

Fonctions homographiques

L'application $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ est constante si, et seulement si, $ad - bc = 0$. En effet, on a :

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{cx+d}$$

Une fonction homographique est strictement monotone sur ses intervalles où elle est continue.

Montrer une bijectivité

Parfois, pour montrer une bijectivité, on peut exhiber la fonction réciproque.

Application. Pour les fonctions qui modélisent un processus qui va dans un sens, prendre la fonction qui modélise le processus inverse.

Une identité factorielle

Si $i \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (i-j) = (-1)^i (n-i) i!$$