

Cours de physique-chimie

La MP*1 de Niels Vandecasteele (le goat)

1^{er} juillet 2025

Table des matières

I	Mécanique	7
1	Mécanique du point matériel	9
2	Changements de référentiel	21
3	Mécanique des systèmes matériels	31
4	Lois du frottement solide	41
II	Électromagnétisme	45
5	Analyse vectorielle	47
6	Électrostatique	53
7	Dipôle électrostatique	65
8	Magnétostatique	69
9	Dipôle magnétostatique	77
10	Équations de Maxwell	81
11	Conducteur soumis à un champ électromagnétique	91
12	Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide	103
13	Propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu dispersif	113
14	Propagation d'ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique ; réflexion, guides d'ondes	121
15	Rayonnement dipolaire électrique	131

III Thermodynamique	141
16 Principes de la thermodynamique	143
17 Changements d'état d'un corps pur	151
18 Systèmes ouverts ; machines thermiques	155
19 Transferts thermiques	161
 IV Thermochimie	 175
20 Enthalpie libre ; potentiel chimique	177
21 Évolution d'un système lors d'une réaction chimique	185
22 Déplacement et rupture d'équilibre	191
 V Optique	 197
23 Optique géométrique	199
24 Introduction à l'optique physique	207
25 Interférences lumineuses	213
26 Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young	219
27 Réseaux	227
28 Exemple de dispositif à division d'amplitude : l'interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue	233
 VI Mécanique quantique	 247
29 Description quantique d'une particule	249
30 Particule quantique dans un potentiel	261
 VII Électronique numérique	 269
31 Électronique numérique	271

VIII	Physique statistique	275
32	Physique statistique	277
IX	Électrochimie	291
33	Courbes intensité-potentiel	293
34	Corrosion humide du fer	297
X	Chimie de sup	305
35	Cinétique chimique	307
36	Solutions aqueuses	309
37	Architecture de la matière	311
38	Cristallographie	313

Première partie

Mécanique

Chapitre 1

Mécanique du point matériel

Table des matières

1	Cinématique du point	10
1.a	Systèmes usuels de coordonnées	10
1.b	Cas du mouvement circulaire	10
1.c	Base de Frenet	10
1.d	Précession d'un vecteur	11
2	Dynamique du point matériel	11
2.a	Grandeurs cinétiques	11
2.b	Forces usuelles	11
2.c	Théorèmes de la dynamique du point	13
2.d	Trajectoire de phase d'un système à un degré de liberté	13
3	Énergétique du point matériel	13
3.a	Théorème de la puissance cinétique, de l'énergie cinétique...	13
3.b	Définition d'une force conservative	14
3.c	Équilibre et stabilité d'un système conservatif à un degré de liberté	14
3.d	Trajectoire de phase d'un système conservatif à un degré de liberté	14
4	Oscillateurs	14
4.a	Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable	14
4.b	Réponse d'un oscillateur amorti à une sollicitation constante	15
4.c	Réponse d'un oscillateur amorti à une sollicitation sinusoïdale	15
4.d	Étude d'oscillateurs couplés ; modes propres ; battements	16
4.e	Oscillateur isotrope ; trajectoire elliptique	16
4.f	Effets non-linéaires ; non-isochronisme ; apparition d'harmoniques	17
5	Mouvements à force centrale	17
5.a	Problème à deux corps	17
5.b	Conservation du moment cinétique ; conséquences	18
5.c	Énergie potentielle effective	18
6	Mouvements dans un champ newtonien	18
6.a	Première loi de Kepler (admise)	19
6.b	États liés : trajectoires circulaires ou elliptiques	19

6.c	États de diffusion : trajectoires parabolique ou hyperboliques	19
7	Mouvement d'une particule chargée dans un champ statique	20

1 Cinématique du point

1.a Systèmes usuels de coordonnées

Coordonnées cartésiennes Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$
 Vecteur déplacement élémentaire : $d\vec{l} = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$
 Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$
 Vecteur accélération : $\overrightarrow{a_{M/R}} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

Coordonnées cylindriques Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
 Vecteur déplacement élémentaire : $d\vec{l} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$
 Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
 Vecteur accélération : $\overrightarrow{a_{M/R}} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

Coordonnées sphériques Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
 Vecteur déplacement élémentaire : $d\vec{l} = d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi\vec{u}_\varphi$
 Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r \sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$
 Vecteur accélération :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{M/R}} = & (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r \sin^2(\theta)(\dot{\varphi})^2) \vec{u}_r \\ & + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sin(\theta) \cos(\theta)(\dot{\varphi})^2) \vec{u}_\theta \\ & + (2\dot{r} \sin(\theta)\dot{\varphi} + 2r\dot{\theta} \cos(\theta)\dot{\varphi} + r \sin(\theta)\ddot{\varphi}) \vec{u}_\varphi\end{aligned}$$

1.b Cas du mouvement circulaire

Pour un mouvement circulaire de rayon R , en utilisant les coordonnées cylindriques centrées en le centre du cercle et d'axe vertical orthogonal au cercle, on a :

$$\overrightarrow{a} = -R(\dot{\theta})^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

En particulier, on a : $a_r = -\frac{v^2}{R}$

1.c Base de Frenet

Pour un mouvement curviligne plan quelconque, on a :

$$\overrightarrow{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} - \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$$

où \vec{T} est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que \vec{v} , \vec{N} est un vecteur unitaire orthogonal à \vec{T} dans le plan de la trajectoire et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire, et ρ est le rayon de courbure de la trajectoire à cet endroit (ie le rayon du cercle par lequel on peut localement approximer la trajectoire). Par exemple, si la trajectoire est rectiligne, le rayon de courbure est infini.

1.d Précession d'un vecteur

On dit que le vecteur \vec{A} précesse à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe \vec{u}_z dans le repère $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lorsqu'il existe des constantes B , C et φ telles que

$$\vec{A}(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_x + B \sin(\omega t + \varphi) \vec{u}_y + C \vec{u}_z$$

On montre que cette condition est réalisée si, et seulement si,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \omega \vec{u}_z \wedge \vec{A}$$

2 Dynamique du point matériel

2.a Grandeurs cinétiques

On définit la quantité de mouvement du point matériel M de masse m dans le référentiel R par :

$$\overrightarrow{p_{M/R}} := m \overrightarrow{v_{M/R}}$$

On définit le moment cinétique vectoriel du point M par rapport au point A dans le référentiel R par :

$$\overrightarrow{L_A}(M/R) := \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p_{M/R}}$$

On définit le moment cinétique scalaire du point M par rapport à un axe $\Delta = (A; \vec{u})$ par :

$$L_\Delta := \overrightarrow{L_A}(M/R) \cdot \vec{u}$$

Pour calculer un moment cinétique scalaire efficacement, on peut utiliser ce qu'on appelle le bras de levier. Si on note v_\perp la norme de la composante de la vitesse orthogonale à \vec{u} et b la distance de l'axe Δ au support de la vitesse \vec{v}_\perp , alors on a :

$$|L_\Delta| = b m v_\perp$$

La signe du moment cinétique scalaire par rapport à un axe indique si on tourne ou non dans le sens direct autour de l'axe avec la direction de l'axe imposée par \vec{u} .

2.b Forces usuelles

Poids Dans le référentiel terrestre, il tient compte de la force de gravitation et du caractère non galiléen du référentiel terrestre (*cf* deuxième chapitre de mécanique).

Loi de la gravitation universelle

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Loi de Coulomb (France, XVIIIe-XIXe) Si q_1 et q_2 sont immobiles, alors :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (M_1 M_2)^3} \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Force de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Réaction d'un support S'il n'y a pas de frottement avec le support, \vec{R} est normale au plan tangent de contact. Pour plus de détails, voir le chapitre 4 de mécanique. **Attention**, la réaction normale peut travailler si on ne se place pas dans le référentiel du support !

Tension d'un fil Bien lire le sujet. Pour un fil inextensible de masse négligeable tendu, la tension est la même partout. Une poulie parfaite (*ie* de masse négligeable et sans frottement) modifie simplement la direction d'un fil idéal. S'il y a des frottements ou des contraintes variables le long du fil, passer à une étude locale du fil pour trouver une équation différentielle et remonter à l'équation de la tension.

Frottements fluides Bien lire le sujet ! Il y a différents modèles :

$$\begin{cases} \vec{f} = -\lambda \vec{v} \\ \vec{f} = -\mu v \vec{v} \\ \dots \end{cases}$$

Le premier modèle, dit "linéaire", est utilisé à faibles vitesses, le deuxième, dit "quadratique", est utilisé pour des vitesses plus importantes.

Poussé d'Archimède SI un corps est entièrement plongé dans un ou des fluide(s) à l'équilibre dans un référentiel galiléen, alors il est soumis à :

$$\vec{\pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g}$$

Souvent, la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids du dispositif, mais dans certains cas (sous-marins et ballons par exemple), elle est essentielle au bon fonctionnement du système.

Astuce : pour calculer la résultante des forces qui s'appliquent à un objet immergé mais dont un bord touche un solide, ajouter une fine bande de fluide fictive entre le bord et le solide, appliquer Archimède, puis enlever ce qu'on a ajouté en intégrant sur le bord.

Loi de Hooke / Force de rappel d'un ressort Pour un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , la force de rappel exercée par un ressort sur un objet M à son extrémité est :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé du point d'attache du ressort vers l'objet attaché au ressort.

2.c Théorèmes de la dynamique du point

Théorème 1 (Théorème du moment cinétique vectoriel). *Si M est un point matériel, R est galiléen et A est fixe dans R , alors :*

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{L}_A(M/R) \right|_R = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_i)$$

Théorème 2 (Théorème du moment cinétique scalaire). *Si M est un point matériel, R est galiléen et Δ est un axe fixe dans R , alors :*

$$\frac{d}{dt} L_\Delta(M/R) = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_i)$$

2.d Trajectoire de phase d'un système à un degré de liberté

Définition 1 (Portrait de phase). On appelle **portrait de phase** le graphe de \dot{f} en fonction de f . On peut aussi renormaliser l'axe des ordonnées afin d'avoir la même dimension pour les deux axes. On oriente le sens de variation du graphe.

Pour un oscillateur harmonique sans second membre, on a un cercle. Avec un second membre, on a plus généralement une ellipse. Si l'oscillateur est amorti, on a une spirale qui s'enroule jusqu'à une position d'équilibre de vitesse nulle.

3 Énergétique du point matériel

Pour un point M de masse m dans un référentiel R , son énergie cinétique dans ce référentiel est définie par :

$$E_c(M/R) = \frac{1}{2} m v_{M/R}^2$$

Tout comme la vitesse, l'énergie cinétique dépend donc profondément du référentiel d'étude.

3.a Théorème de la puissance cinétique, de l'énergie cinétique...

Théorème 3 (Théorème de la puissance cinétique). *Si M est un point matériel dans un référentiel R galiléen, alors :*

$$\frac{d}{dt} E_c(M/R) = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{M/R}$$

Théorème 4 (Théorème de l'énergie cinétique). *Si M est un point matériel et R est galiléen, alors :*

$$E_c(B/R) - E_c(A/R) = W_A^B$$

3.b Définition d'une force conservative

Une force \vec{F} est dite **conservative** lorsqu'il existe E_p qui ne dépend que de la position et telle que :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$$

Pour un point matériel, cela correspond à $\vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p)$.

Théorème 5 (Théorème de la puissance mécanique). *Si M est un point matériel dans un référentiel R galiléen, alors :*

$$\frac{d}{dt}E_m(M/R) = \sum \vec{f}_{\text{non conservatives}} \cdot \vec{v}_{M/R}$$

Théorème 6 (Théorème de l'énergie mécanique). *Si M est un point matériel et R est galiléen, alors :*

$$E_m(B/R) - E_m(A/R) = W_{A \text{ non conservatives}}^B$$

3.c Équilibre et stabilité d'un système conservatif à un degré de liberté

On trace l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée qui constitue le degré de liberté. On trace la droite d'équation $y = E_m$. Les zones pour lesquelles $E_p > E_m$ ne sont pas atteignables car $E_c \geq 0$. Les positions d'équilibre sont repérées par des *extrema* locaux de l'énergie potentielle.

Définition 2 (Position d'équilibre stable). Une position d'équilibre est **stable** lorsqu'après une petite perturbation du système, le système tend à revenir vers cette position d'équilibre.

Définition 3 (Position d'équilibre instable). Une position d'équilibre est **instable** lorsqu'après une petite perturbation du système, le système tend à s'éloigner de cette position d'équilibre et ne pas y revenir sans une autre perturbation.

3.d Trajectoire de phase d'un système conservatif à un degré de liberté

Pour un système conservatif à un degré de liberté, deux trajectoires de phase ne peuvent pas se croiser (ou alors il s'agit d'un "faux croisement" et les trajectoires repartent chacune de leur côté).

En pratique, on trace la courbe de l'énergie potentielle, et on aligne avec le portrait de phase. On trace alors le portrait de phase pour différents seuils d'énergie mécanique.

4 Oscillateurs

4.a Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

Exemple du pendule simple ou de l'anneau coulissant sans frottement sur un cerceau. On a un système conservatif à un degré de liberté qu'on note θ . On obtient une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0$$

par une méthode énergétique ou un théorème du moment cinétique. Les positions d'équilibre sont donc $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Pour $\theta = 0$, en effectuant l'approximation des petits angles, on trouve une pulsation des petites oscillations de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

En $\theta = \pi$, un DL et la résolution de l'équation différentielle donnent une solution divergente, ce qui confirme bien que cette approximation n'est pas valable très longtemps et que la position d'équilibre est instable.

4.b Réponse d'un oscillateur amorti à une sollicitation constante

Définition 4 (Régimes pour une EDL du second ordre). On est en régime :

- **pseudo-périodique** si $Q > \frac{1}{2}$;
- **apériodique critique** (ou **critique**) si $Q = \frac{1}{2}$;
- **apériodique** si $Q < \frac{1}{2}$.

Définition 5 (Pseudo-pulsation, pseudo-période). En régime pseudo-périodique, on définit la **pseudo-pulsation** par

$$\omega_{pp} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On définit aussi la **pseudo-période** par

$$T_{pp} = \frac{2\pi}{\omega_{pp}}$$

Définition 6 (Décroissement logarithmique). En régime pseudo-périodique, on définit le **décroissement logarithmique** par :

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t) - x(\infty)}{x(t + T_{pp}) - x(\infty)} \right)$$

On a :

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Lorsque $Q \gg 1$, on a $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$.

4.c Réponse d'un oscillateur amorti à une sollicitation sinusoïdale

Passe-bas Pour un passe-bas du second ordre, on peut avoir ou non résonance. La fonction de transfert se met sous la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j \frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Condition de résonance : $Q > \frac{1}{2}$. On a lors $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. On a toujours $\omega_{res} < \omega_0$.

Passe-bande La fonction de transfert se met sous la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{cte}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

Si on note $\omega_1 < \omega_2$ les deux pulsations de coupure à $-3dB - ie$ telles que $G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$, alors on a :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

Il faut savoir refaire la démonstration de ce résultat (résoudre une équation bicarrée et sélectionner les seules solutions "viables" puis en faire la différence).

Rappels sur le mode XY de l'oscilloscope Pour détecter la résonance, il doit y avoir une droite passant par l'origine de pente positive. En opposition de phase, on obtient une droite passant par l'origine de pente négative. En quadrature de phase, on a une ellipse.

4.d Étude d'oscillateurs couplés ; modes propres ; battements

Definition 7 (Mode propre). Pour un **mode propre**, tous les degrés de liberté d'un système sont des fonctions sinusoïdales de la même pulsation, dite pulsation propre.

Definition 8 (Battement). On a un phénomène de **battement** lorsqu'on a le produit de deux fonctions sinusoïdales dont une pulsation est très grande devant l'autre. On observe alors des oscillations sinusoïdales très rapides dans une enveloppe sinusoïdale beaucoup plus lente.

Exemple : les pendules couplés par torsion.

Astuce : souvent, pour l'étude de système couplés, il peut être intéressant de faire un changement de fonctions inconnues, en posant par exemple la demi-somme et la demi-différence dans le cas des pendules couplés par torsion.

4.e Oscillateur isotrope ; trajectoire elliptique

Exemple : un ressort laissée libre dans l'espace.

La trajectoire de phase d'un oscillateur isotrope est une ellipse centrée sur l'origine (contrairement au forces newtoniennes dont la trajectoire de phase est une ellipse centrée ailleurs qu'à l'origine).

4.f Effets non-linéaires ; non-isochronisme ; apparition d'harmoniques

Exemple : anneau coulissant sur une barre sans frottement soumis à une force de rappel élastique, avec la barre placée à la distance de la longueur à vide du ressort.

\Rightarrow Faire un DL de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre "au milieu" puis écrire la conservation de l'énergie mécanique. On peut alors écrire E_m en fonction des données avec les conditions à un instant particulier, puis cela nous permet d'obtenir \dot{x} en fonction de x et de constantes. On sépare les variables et on intègre pour obtenir la pulsation des petites oscillations. On montre qu'elle est égale à une constante multipliée par une donnée, si bien que cette pulsation dépend des conditions initiales. Il y a donc **non-isochronisme des oscillations**.

x est alors une fonction périodique du temps non-sinusoïdale : son spectre n'est pas réduit à un fondamental.

5 Mouvements à force centrale

On rappelle qu'il faut absolument connaître :

$$\begin{cases} M_{\text{Soleil}} \approx 2.10^{30} \text{ kg} \\ M_{\text{Terre}} \approx 6.10^{24} \text{ kg} \end{cases}$$

5.a Problème à deux corps

On suppose le système $\{M_1, M_2\}$ isolé. On note G son centre de masse et μ la masse réduite du système telle que $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. Le référentiel R^* lié à G est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de départ, supposé galiléen. Les équations du mouvement sont dans R^* :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{GM}_1}{dt^2} = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{GM}_2}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

On introduit la particule fictive P de masse réduite μ telle que $\vec{GP} = \vec{GM}_1 M_2$ et on a alors

$$\mu \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}$$

qui peut alors être plus simple résoudre selon les cas. Un cas particulier simple est celui où $m_1 = m_2$.

Attention, ce n'est pas la bonne méthode en général ! Elle est surtout présentée ici à titre culturel, mais on peut toujours tenter de l'utiliser en dernier recours.

5.b Conservation du moment cinétique ; conséquences

Désormais, M est soumis uniquement à $\vec{f} = f(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques de centre O avec O fixe dans R galiléen. Le théorème du moment cinétique par rapport à O fixe dans R galiléen donne :

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O(M/R) = \vec{0}$$

(car la force est centrale), si bien que $\vec{L}_O(M/R) = c\vec{e}$. Or, $\vec{OM} \cdot \vec{L}_O(M/R) = 0$ par définition du moment cinétique, donc M reste dans le plan passant par O de vecteur normal $\vec{L}_O(M/R)$. Si de plus le moment cinétique est nul, le mouvement est rectiligne.

On utilise alors les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire d'origine O . Avec ces coordonnées, on a :

$$\vec{L}_O(M/R) = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Or, $\vec{L}_O(M/R) = c\vec{e}$, donc on obtient la **loi des aires** :

$$r^2\dot{\theta} = cte = \mathcal{C}$$

5.c Énergie potentielle effective

L'énergie mécanique s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}m\left((\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + E_p$$

avec la constante des aires, cela donne :

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + E_p + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

On définit alors l'**énergie potentielle effective** par :

$$E_{p,eff} = E_p + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

Elle est dite effective car elle cache dans la constante des aires les conditions initiales du problème. L'étude de l'énergie potentielle effective permet de mener l'étude du mouvement radial.

Par exemple, pour l'oscillateur isotrope, $E_{p,eff} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$.

6 Mouvements dans un champ newtonien

On dit qu'une force \vec{F} est **newtonienne** lorsqu'il existe une constante K telle que

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$$

Par exemple, la force gravitationnelle et la force de Coulomb sont des forces newtoniennes. Notons que toute force newtonienne est conservative, on trouve facilement qu'elle dérive de l'énergie potentielle K/r .

6.a Première loi de Kepler (admise)

Dans le système solaire, les planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le Soleil.

Généralisation : La trajectoire d'un point matériel soumis à une force newtonienne est une conique.

6.b États liés : trajectoires circulaires ou elliptiques

Cas circulaire On travaille avec $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$. Le PFD donne :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

donc le mouvement est uniforme. On en déduit que

$$E_m = -\frac{GMm}{2r}$$

puis que l'astre vérifie la troisième loi de Képler :

$$\frac{T^2}{r^2} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Cas elliptique dans un champ newtonien On note a le demi-grand axe, b le demi-petit axe, et c la demi-distance entre les foyers F et F' . On rappelle que l'ellipse est le lieu des points M tels que la distance $FM + F'M$ soit constante égale à $2a$. On retrouve donc la formule $a^2 = b^2 + c^2$. En notant x l'axe passant par F et F' et y l'axe orthogonal à x passant par O , on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En considérant les points d'annulation de \dot{r} (périgée et apogée), et en écrivant l'équation du second degré vérifiée par r en ces points, et en utilisant le fait que $r_P + r_A = 2a$ ainsi que la somme des solutions d'une équation de degré 2, on obtient la généralisation :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

6.c États de diffusion : trajectoires parabolique ou hyperboliques

Cas hyperbolique Exemple de la déviation d'une particule.

Astuce : pour une force newtonienne, écrire le premier principe sous la forme :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r = \frac{K}{r^2} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \vec{u}_r = -\frac{K}{C} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

permet d'intégrer pour obtenir :

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = -\frac{K}{mC} (\vec{u}_\theta - \vec{u}_{\theta,0})$$

Cas parabolique Exemple de la trajectoire parabolique.

Astuce : se souvenir que pour une trajectoire parabolique en présence d'une force newtonienne, $E_m = 0$. On peut alors écrire la conservation du moment cinétique en un point particulier de la trajectoire et utiliser le fait que $E_m = 0$ pour déterminer les paramètres manquants qui apparaissent.

7 Mouvement d'une particule chargée dans un champ statique

Très souvent, on peut négliger les interactions gravitationnelles devant la force de Lorentz. Le plan de bataille est toujours le suivant :

- Système, référentiel, bilan des forces
- Principe fondamental et projections
- La force de Lorentz ne peut coupler que deux équations. Pour résoudre ces équations couplées, on peut en intégrer une et réinjecter dans l'autre, ou alors poser une fonction complexe $u = x + iy$ si x et y sont couplées par exemple, trouver une équation différentielle en u , la résoudre, puis passer aux parties réelle et imaginaire.

Souvent, si le champ \vec{B} est constant, on peut poser la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ et faire les calculs avec $\varepsilon = \pm 1$.

Chapitre 2

Changements de référentiel

Table des matières

1	Cinématique des changements de référentiel	22
1.a	Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre	22
1.b	Dérivées temporelles d'un vecteur dans deux référentiels ; relation de la dérivation composée	22
1.c	Lois de composition des vitesses et des accélérations	23
1.d	Point géométrique coïncident ; résumé	23
2	Dynamique dans un référentiel non galiléen	24
2.a	Principes de relativité galiléenne	24
2.b	Principe fondamental ; pseudo-forces d'inertie	24
2.c	Théorèmes du moment cinétique	24
2.d	Théorèmes énergétiques	25
3	Applications	25
3.a	Sismographe	25
3.b	Manège	25
4	Manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre	26
4.a	Référentiels usuels	26
4.b	Champ de pesanteur	26
4.c	Déviations vers l'est	27
4.d	Cyclones (vernissages culturels)	27
5	Manifestations du caractère non galiléen du référentiel géocentrique	27
5.a	Mouvements de la Lune	27
5.b	Théorie statique des forces de marée	28
6	Complément : de la transformation de Galilée à celle de Lorentz-Poincaré	29

1 Cinématique des changements de référentiel

1.a Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

Il faut préciser :

- la position de O'
- les orientations de $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ et $\vec{e}_{z'}$ par rapport à R

Translation

Définition 9 (Translation). $R' = (O', x', y', z')$ est en translation par rapport à $R = (O, x, y, z)$ lorsque $\vec{e}_{x'}$, $\vec{e}_{y'}$ et $\vec{e}_{z'}$ sont fixes par rapport à R . C'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{dt} \vec{e}_{x'} \right|_R = \vec{0} \\ \left. \frac{d}{dt} \vec{e}_{y'} \right|_R = \vec{0} \\ \left. \frac{d}{dt} \vec{e}_{z'} \right|_R = \vec{0} \end{cases}$$

Attention, toutes les translations ne sont pas rectilignes. Par exemple, une cabine de grande roue est en translation circulaire.

Rotation uniforme autour d'un axe fixe On peut prendre par exemple R' en rotation autour de Oz à la vitesse de rotation $\Omega = cte$. On a alors :

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{dt} \vec{e}_{x'} \right|_R = \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{x'} \\ \left. \frac{d}{dt} \vec{e}_{y'} \right|_R = \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{y'} \\ \left. \frac{d}{dt} \vec{e}_{z'} \right|_R = \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_{z'} \end{cases}$$

On remarque qu'on reconnaît un mouvement de précession. Aussi, les relations précédentes restent valables si la vitesse de rotation n'est pas constante (projection dans la base fixe et dérivation).

1.b Dérivées temporelles d'un vecteur dans deux référentiels ; relation de la dérivation composée

Translation On a la formule de dérivation composée si R' est en translation par rapport à R :

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{A} \right|_R = \left. \frac{d}{dt} \vec{A} \right|_{R'}$$

Rotation autour d'un axe fixe On a la formule de dérivation composée si R' est en rotation par rapport à R à $\overrightarrow{\Omega_{R'/R}}$:

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{A} \right|_R = \left. \frac{d}{dt} \vec{A} \right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \vec{A}$$

1.c Lois de composition des vitesses et des accélérations

Translation de R' par rapport à R On a la **loi de composition des vitesses** :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_{O'/R}$$

En cas de doute sur la présence du point O' dans la formule, prendre $M = O'$ dans la formule pour vérifier. Avec $M = O$, on a $\vec{v}_{O/R'} = -\vec{v}_{O'/R}$.

On a aussi la **loi de composition des accélérations** :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_{O'/R}$$

Rotation uniforme de R' autour d'un axe fixe par rapport à R (à $\Omega = \Omega \vec{e}_z$) On a la **loi de composition des vitesses** :

$$\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \Omega \wedge \overrightarrow{HM}$$

avec H le projeté orthogonal de M sur Oz .

On a aussi la **loi de composition des accélérations** :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + 2\Omega \wedge \vec{v}_{M/R'} - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

1.d Point géométrique coïncident ; résumé

Définition 10 (Point coïncident). Le point coïncident à t_0 , noté P_{t_0} est le point tel que :

- $M(t_0) = P_{t_0}$
- P_{t_0} est fixe dans R'

Définition 11 (Vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement et de Coriolis). Dans le cas de la translation ou de la rotation pure, on écrit $\vec{v}_{M/R} = \vec{v}_{M/R'} + \vec{v}_e$ et $\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ où \vec{v}_e est la **vitesse d'entraînement**, \vec{a}_e est l'**accélération d'entraînement** et \vec{a}_c est l'**accélération de Coriolis**. La vitesse d'entraînement est la vitesse du point coïncident dans R et l'accélération est l'accélération du point coïncident dans R .

Voici un résumé de la situation :

	Translation de R' dans R	Rotation uniforme de R' dans R à $\vec{\Omega}$
\vec{v}	$\vec{v}_e = \vec{v}_{O'/R}$	$\vec{v}_e = \Omega \wedge \overrightarrow{HM}$
\vec{a}	$\begin{cases} \vec{a}_e = \vec{a}_{O'/R} \\ \vec{a}_c = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{a}_e = -\Omega^2 \overrightarrow{HM} \\ \vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} \end{cases}$

Remarquer que dans le cas de la translation, aucun de ces vecteurs ne dépend du point M , alors qu'ils dépendent tous *a priori* de M dans le cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe.

2 Dynamique dans un référentiel non galiléen

2.a Principes de relativité galiléenne

La relativité galiléenne part de deux postulats fondamentaux :

- le "temps absolu" : il y a quelque part une horloge qui donne le même temps pour tous les référentiels qui l'utilisent ;
- la "longueur absolue" : il existe un étalon de longueur qui ne dépend pas du référentiel.

Ce sont là des approximations qui sont très souvent vérifiées à des échelles ni trop faibles ni trop grandes. En réalité, il y a "dilatation des durées" et "contraction des longueurs".

De plus, la relativité galiléenne postule qu'on ne peut pas distinguer deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Théorème 7. *Si R est galiléen et R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R , alors R' est galiléen.*

2.b Principe fondamental ; pseudo-forces d'inertie

On définit la pseudo-force d'inertie d'entraînement par

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$$

On définit la **pseudo-force d'inertie de Coriolis** par :

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c$$

On note \vec{F} la résultante des vraies forces s'appliquant au système dans R . Alors on a le :

Théorème 8 (Principe fondamental dans R'). *Si R est galiléen, alors*

$$m\vec{a}_{M/R'} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Attention, les pseudo-forces d'inertie ne sont pas des forces au sens propre car elles ne vérifient pas la troisième loi de Newton. Toutefois, elles modifient le mouvement dans R' .

Dans le cas de la translation rectiligne uniforme de R' par rapport à R , le principe fondamental dans R' montre que R' vérifie la deuxième loi de Newton, si bien que R' est galiléen (ouf!).

2.c Théorèmes du moment cinétique

Théorème 9 (Théorème du moment cinétique vectoriel). *Si*

- R' est non galiléen et on connaît son mouvement par rapport à R galiléen
- A est fixe dans R'

alors

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{L}_A(M/R') \right|_{R'} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_i) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic})$$

Théorème 10 (Théorème du moment cinétique scalaire). *Si*

- *R' est non galiléen et on connaît son mouvement par rapport à R galiléen*
- *l'axe Δ est fixe dans R'*

alors

$$\left. \frac{d}{dt} L_{\Delta}(M/R') \right|_{R'} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_i) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}_{ic})$$

2.d Théorèmes énergétiques

Théorème 11 (Théorème de la puissance cinétique). *Si M est un point matériel et R' est un référentiel non galiléen dont on connaît le mouvement par rapport à R galiléen, alors :*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{M/R'}^2 \right) = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{M/R'} + \vec{f}_{ie} \cdot \vec{v}_{M/R'} + \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}_{M/R'}$$

SI R' est en translation ou en rotation pure par rapport à R , alors on a même $\vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}_{M/R'} = 0$.

On dispose des variantes habituelles : théorème de l'énergie cinétique, théorème de la puissance mécanique ou encore théorème de l'énergie mécanique.

Cas de la translation Si R' est en translation rectiligne uniformément accélérée par rapport à R , alors \vec{f}_{ie} dérive d'une énergie potentielle :

$$E_{p,ie} = m \vec{a}_{O'/R} \cdot \vec{OM} + cte$$

Cas de la rotation pure Si R' est en rotation uniforme à Ω autour d'un axe fixe par rapport à R , alors \vec{f}_{ie} dérive d'une énergie potentielle :

$$E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 H M + cte$$

3 Applications

3.a Sismographe

Appliquer le principe fondamental dans le référentiel galiléen du repère ou dans le référentiel non galiléen lié au sismographe et en translation par rapport au premier donne le même résultat (heureusement), en faisant bien attention aux vitesses relatives.

3.b Manège

Des fois, il est préférable d'appliquer le principe dans le référentiel galiléen puis d'effectuer de la cinématique pour passer dans le référentiel dont on connaît le mouvement par rapport au premier référentiel.

4 Manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre

4.a Référentiels usuels

Référentiel terrestre Il s'agit d'un référentiel lié au sol. Il est en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel géocentrique.

Référentiel géocentrique Il s'agit d'un référentiel lié au centre de masse de la Terre et dont les axes sont définis par trois étoiles lointaines considérées comme fixes. Il est en translation elliptique (presque circulaire) dans le référentiel héliocentrique.

Référentiel héliocentrique (ou référentiel de Képler) Il s'agit d'un référentiel lié au centre de masse du Soleil et dont les axes sont définis par les trois mêmes étoiles lointaines que pour le référentiel géocentrique.

Référentiel de Copernic Il s'agit d'un référentiel lié au centre de masse du système solaire et dont les axes sont donnés par les trois mêmes étoiles lointaines que pour les référentiels géocentrique et héliocentrique.

Remarque Tous ces référentiels peuvent ou non être considérés comme galiléens. Cela dépend en réalité de l'échelle du système que l'on a à étudier. Ces distinctions font l'objet des parties 4 et 5 de ce chapitre.

4.b Champ de pesanteur

Définition 12 (Poids). Le poids d'un objet est l'opposé de la force qu'il faut exercer sur cet objet pour qu'il reste immobile dans le référentiel terrestre.

Pour cette définition, on suppose le référentiel géocentrique galiléen. En appliquant le principe fondamental au référentiel terrestre en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, l'accélération étant nulle car l'objet est immobile, et la force de Coriolis étant nulle car la vitesse dans le référentiel terrestre est nulle, on obtient :

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \vec{u}_r + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

où \vec{u}_r est le vecteur unitaire radial en coordonnées sphériques. Il faut connaître l'ordre de grandeur :

$$\Omega \approx 7.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

Ainsi, le poids rend compte de la force gravitationnelle et du caractère non galiléen du référentiel terrestre.

4.c Déviation vers l'est

Attention, lorsqu'on étudie un système dans le référentiel terrestre en ne supposant pas le référentiel terrestre galiléen et en supposant le référentiel géocentrique galiléen, la force d'inertie d'entraînement est déjà comptée dans le poids !

On étudie la chute d'une bille lâchée sans vitesse initiale dans une mine désaffectée plutôt profonde (pour éviter le vent et autres bêtises). Le principe fondamental dans le référentiel terrestre non galiléen s'écrit alors :

$$\vec{a}|_{R_T} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}|_{R_T}$$

On résout par une **méthode perturbative** : on suppose à l'ordre 0 que la vitesse est nulle, et on obtient alors une solution linéaire en \vec{v} . On réinjecte à l'ordre 1 en supposant désormais que la vitesse est égale à la solution linéaire trouvée précédemment, on intègre et une composante "vers l'est" apparaît alors. Avec z colinéaire à \vec{g} et y vers l'est, on trouve à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = g\Omega \cos(\lambda) \frac{t^3}{3} \\ z = -g\frac{t^2}{2} + H \end{cases}$$

où λ est la "latitude" repérée en fonction de \vec{g} . Ainsi, à la fin de la chute, il y a bien eu une déviation vers l'Est (prendre la valeur de t pour laquelle $z = 0$ et réinjecter dans l'expression de y).

Cette expérience a été menée par Reich en 1833 : avec une latitude $\lambda = 50,5$ degrés, une hauteur $H = 158,5$ m, il trouve une déviation totale vers l'Est de 2,8 cm. Certes, le résultat est juste, mais trop peu significatif pour mettre clairement en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre.

4.d Cyclones (verniss culturel)

Les forces de pression sont dirigées des anticyclones vers les dépressions.

Loin de la dépression, dans l'hémisphère Nord, la force de Coriolis écarte vers l'Est la masse d'air qui se dirige vers l'anticyclone, puis l'anticyclone l'attire à mesure qu'elle s'approche de lui, ce qui fait que l'air s'enroule dans le sens trigonométrique autour de la dépression.

5 Manifestations du caractère non galiléen du référentiel géocentrique

Dans cette section, on suppose le référentiel héliocentrique galiléen.

5.a Mouvements de la Lune

Le plan de bataille usuel pour étudier le mouvement de la Lune autour du Soleil consiste à négliger l'action du Soleil sur la Lune et à considérer le référentiel géocentrique comme galiléen.

Cependant, quand on calcule l'action du Soleil sur la Lune, on se rend compte que celle-ci est deux fois plus importante que l'action de la Terre sur la Lune (oui, celle qu'on néglige est deux fois plus grande que celle que l'on conserve). Il y a donc un problème !

En appliquant le principe fondamental à la Lune dans le référentiel géocentrique en translation par rapport au référentiel héliocentrique galiléen, puis en appliquant le principe fondamental à la Terre dans le référentiel héliocentrique galiléen pour trouver l'accélération d'entraînement obtenue dans la première application du principe fondamental, on trouve :

$$\vec{a}|_{R_G}(L) = \vec{A}_T(L) + [\vec{A}_S(L) - \vec{A}_S(T)] - \vec{A}_L(T)$$

Or, le terme différentiel de marée $\vec{A}_S(L) - \vec{A}_S(T)$ est très faible devant $\vec{A}_T(L)$, et $\vec{A}_L(T) = \frac{M_L}{M_T} \vec{A}_T(L)$ est négligeable devant $\vec{A}_T(L)$. Donc on retrouve $\vec{a}|_{R_G}(L) \approx \vec{A}_T(L)$.

Ainsi, les deux erreurs commises (négliger l'action du Soleil et négliger le caractère non galiléen du référentiel géocentrique) se compensent.

5.b Théorie statique des forces de marée

On considère une masse δm d'eau. En appliquant la même méthode que précédemment, et en négligeant les actions gravitationnelles des astres autres que le Soleil et la Lune, on a :

$$\delta m \vec{a}|_{R_G}(M) = \vec{f} + \delta m \left([\vec{A}_L(M) - \vec{A}_L(T)] + [\vec{A}_S(M) - \vec{A}_S(T)] \right)$$

où \vec{f} est la résultante des autres forces qui ne nous intéressent pas (poids, pression, etc.)

Considérons le terme différentiel de marée $\vec{A}_L(M) - \vec{A}_L(T)$. Le terme $\vec{A}_L(T)$ s'applique partout sur la Terre de la même façon (cf théorème de Gauss dans la chapitre d'électrostatique). Mais le terme $\vec{A}_L(M)$ dépend de la position de M sur la Terre. On a alors une forme d'océan statique qui ressemble à un ballon de rugby et est invariante par rotation autour de l'axe Terre-Lune. Cette forme de ballon de rugby et la rotation propre de la Terre expliquent la présence de deux marées par jour.

On pourrait réaliser la même étude pour le terme différentiel de marée dû au Soleil. Toutefois, ce terme est 10 fois moins important que celui lié à la Lune, mais reste très grand devant les termes différentiels dus aux autres planètes.

On s'intéresse désormais à l'effet combiné de la Lune et du Soleil. Lorsque la Lune et le Soleil sont en phase ou en opposition de phase (pleine Lune ou nouvelle Lune), les effets de la Lune et du Soleil se renforcent : ce sont les **vives-eaux** (tous les 14 jours). Lorsque la Lune et le Soleil sont en quadrature, leurs effets se compensent : ce sont les **mortes-eaux**.

6 Complément : de la transformation de Galilée à celle de Lorentz-Poincaré

On considère R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R à la vitesse $V\vec{e}_x$. R' et R ont les mêmes axes, et on prend $O' = O$ à $t = 0$. Alors, la **transformation de Galilée** s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Cette transformation est une **approximation** de la **transformation de Lorentz-Poincaré** :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Si on note \tilde{a} l'ordre de grandeur d'une grandeur a , alors on retrouve la transformation de Galilée à partir de la transformation de Lorentz-Poincaré si $\tilde{v} \ll c$ et $c\tilde{t} \gg \tilde{x}$.

Chapitre 3

Mécanique des systèmes matériels

Table des matières

1	Éléments cinétiques des systèmes de points matériels	32
1.a	Deux descriptions	32
1.b	Éléments cinétiques	32
2	Dynamique et énergétique des systèmes matériels	33
2.a	Actions subies par un système matériel	33
2.b	Théorèmes dynamiques pour un système matériel	33
2.c	Théorème énergétiques pour un système matériel	34
3	Statique des fluides	35
3.a	Principe fondamental de la statique des fluides; équivalent volumique des forces de pression	35
3.b	Application : cas d'un liquide incompressible	35
3.c	Application : cas d'un gaz parfait isotherme, modèle de l'atmosphère	36
3.d	Poussée d'Archimède	36
4	Solide	36
4.a	Définition; cinématique	36
4.b	Théorèmes dynamiques	36
4.c	Théorèmes énergétiques	37
4.d	Solide en translation	37
5	Solide en rotation autour d'un axe fixe	37
5.a	Moment et énergie cinétiques pour un solide en rotation autour d'un axe fixe	37
5.b	Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe	38
5.c	Couple	38
5.d	Liaison pivot	38
5.e	Rotation autour d'un axe mobile (complément)	38
5.f	Résumé	39

1 Éléments cinétiques des systèmes de points matériels

1.a Deux descriptions

Description microscopique On liste les points avec leurs positions et leurs masses.

Description mésoscopique On a trois descriptions mésoscopiques :

- **volumique** : $\delta m = \rho \delta \tau$ avec ρ la masse volumique ;
- **surfactive** : $\delta m = \sigma \delta S$ avec σ la masse surfacique ;
- **linéique** : $\delta m = \mu \delta l$ avec μ la masse linéique.

1.b Éléments cinétiques

Masse Pour un système Σ constitué de points matériels M_i de masse m_i , on définit la masse du système par

$$M_\Sigma = \sum_i m_i$$

Quantité de mouvement (ou résultante cinétique) Dans le référentiel R , elle est définie par

$$\vec{p}(\Sigma/R) = \sum_i m_i \vec{v}(M_i/R)$$

Avec G le centre d'inertie du système Σ , cela se réécrit :

$$\vec{p}(\Sigma/R) = M_\Sigma \vec{v}(G/R)$$

par définition du centre d'inertie.

Moment cinétique Dans le référentiel R , par rapport au point A , il se définit par

$$\vec{L}_A(\Sigma/R) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/R) = \sum_i m_i \vec{AM}_i \wedge \vec{v}(M_i/R)$$

De plus, on a la formule hors-programme du **premier théorème de König**

$$\vec{L}_A(\Sigma/R) = \vec{AG} \wedge M_\Sigma \vec{v}(G/R) + \vec{L}(\Sigma/R^*)$$

avec R^* le référentiel barycentrique. En effet, comme $\vec{p}(\Sigma/R^*) = \vec{0}$, le moment cinétique dans le référentiel barycentrique est un torseur couple. Puis :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A(\Sigma/R) &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/R) \\ &= \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i (\vec{v}(M_i/R^*) + \vec{v}(G/R)) \\ &= \vec{L}_A(\Sigma/R^*) + \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(G/R) \\ &= \vec{L}_A(\Sigma/R^*) + \vec{AG} \wedge M_\Sigma \vec{v}(G/R) \end{aligned}$$

Énergie cinétique L'énergie cinétique du système Σ dans R est définie par

$$E_c(\Sigma/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v(M_i/R))^2$$

De plus, on a le **deuxième théorème de König** (hors-programme) :

$$E_c(\Sigma/R) = E_c(\Sigma/R^*) + \frac{1}{2} M_\Sigma v(G/R)^2$$

En effet :

$$\begin{aligned} E_c(\Sigma/R) &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v(M_i/R)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}(M_i/R)\|^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}(M_i/R^*) + \vec{v}(G/R)\|^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (v(M_i/R^*)^2 + v(G/R)^2 + 2\vec{v}(M_i/R^*) \cdot \vec{v}(G/R)) \\ &= E_c(\Sigma/R^*) + \frac{1}{2} M_\Sigma v(G/R)^2 + M_\Sigma \vec{v}(G/R^*) \cdot \vec{v}(G/R) \\ &= E_c(\Sigma/R^*) + \frac{1}{2} M_\Sigma v(G/R)^2 \end{aligned}$$

2 Dynamique et énergétique des systèmes matériels

2.a Actions subies par un système matériel

On distingue les forces d'origine intérieure au système qui s'appliquent au système, les forces d'origine extérieure qui s'appliquent au système et les forces hors-sujet qui ne s'appliquent pas au système.

2.b Théorèmes dynamiques pour un système matériel

Définition 13 (Système fermé). En mécanique, on dira qu'un système de points matériels est fermé lorsqu'il ne "perd pas" de points au cours du temps, et que ses points sont de masse constante.

Théorème 12 (Théorème de la résultante). Si :

- Σ est un système fermé
- R est galiléen

alors :

$$M_\Sigma \vec{a}(G/R) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{v}(M_i/R) \right) = \vec{F}_{ext}$$

où \vec{F}_{ext} est la résultante des forces extérieures qui s'appliquent sur le système.

La troisième loi de Newton montre que la résultante des forces intérieures est nulle. Si R est non galiléen mais on connaît son mouvement par rapport à un référentiel galiléen, il suffit de rajouter la résultante des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis obtenues pour chaque point.

Théorème 13 (Théorème du moment cinétique). *Si :*

- Σ est un système fermé
- R est galiléen
- A est fixe dans R

alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{L}_A(\Sigma/R) \right) = \vec{\mathcal{M}}_{Aext}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_{Aext}$ est la somme des moments des actions extérieures s'appliquant au système au point A .

Si on a appliqué le théorème de la résultante et le théorème du moment cinétique, appliquer le théorème du moment cinétique en un autre point ne fournit aucune information réellement nouvelle car les deux moments sont alors reliés par la formule BABAR à la résultante.

La démonstration du théorème (utilisation des deux parties de la troisième loi de Newton) montre que la somme des moments des actions intérieures au point A est nulle. Dans le cas non galiléen, il suffit d'ajouter les moments des forces d'inertie d'entraînement pour chaque point.

2.c Théorème énergétiques pour un système matériel

Attention, la puissance des forces intérieures n'est pas toujours nulle (penser à ses cuisses quand on monte un escalier).

Théorème 14 (Théorème de la puissance cinétique). *Si*

- Σ est un système fermé ;
- R est galiléen

alors

$$\frac{d}{dt} (E_c(\Sigma/R)) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int}$$

$$\text{où } \mathcal{P}_{ext} = \sum_i \vec{f}_{ext \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i/R) \text{ et } \mathcal{P}_{int} = \sum_i \vec{f}_{int \rightarrow i} \cdot \vec{v}(M_i/R)$$

On dispose des variantes habituelles : théorème de l'énergie cinétique, théorème de la puissance mécanique et théorème de l'énergie mécanique.

Les actions intérieures dérivent d'une énergie potentielle lorsque

$$\delta W = -dE_{p,int} \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_{int} = -\frac{d}{dt} E_{p,int}$$

où $E_{p,int}$ ne dépend que de la position des points du système.

3 Statique des fluides

Quand on parle de statique des fluides, le caractère statique est évidemment macroscopique, il y a en effet toujours un mouvement microscopique.

Albert Einstein et Jean Perrin mettent en évidence le mouvement brownien en 1905. En 1905, Einstein publie 4 articles majeurs : $E = mc^2$, l'effet photoélectrique, la relativité restreinte et le mouvement brownien.

3.a Principe fondamental de la statique des fluides ; équivalent volumique des forces de pression

On a

$$\overrightarrow{\delta F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = +P \delta S \vec{n}$$

et

$$\overrightarrow{\delta F}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \delta \tau$$

On dit que $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)$ est une densité volumique de force. Elle s'exprime en $N.m^{-3}$. Une pression est une énergie volumique.

Théorème 15 (Principe fondamental de la statique des fluides). *Si un fluide est macroscopiquement au repos dans un référentiel galiléen, alors :*

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \delta \tau + \vec{f} \delta \tau$$

où $\vec{f} \delta \tau$ est la résultante des forces autres que la pression s'exerçant sur $\delta \tau$. Si le référentiel n'est pas galiléen :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \delta \tau + \vec{f} \delta \tau + \rho \delta \tau \vec{a}_e + \vec{0}$$

car $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ puisque la vitesse relative est nulle.

P est continue à la traversée d'une interface si on néglige la tension de surface. En présence d'un ménisque, cela n'est plus vrai sans quoi les masses volumiques de l'air et de l'eau seraient égales.

3.b Application : cas d'un liquide incompressible

Exemple : Expérience de Pascal On utilise le baromètre de Torricelli rempli de mercure de masse volumique constante. Dans le mercure, en supposant $P = P(z)$, on obtient avec le principe fondamental de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ donc, puisque la pression de vapeur saturante du mercure est très faible devant la pression atmosphérique P_0 , on obtient $P_0 = \rho g H$ avec H la hauteur de mercure dans le baromètre.

Ordres de grandeur à connaître Pour l'eau, $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. En prenant $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$, on trouve que la pression augmente de 1 bar si on descend de 10 mètres sous l'eau. Pour le mercure, $\rho_{Hg} \approx 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Au niveau de la mer (pression atmosphérique valant 1 bar), on trouve alors $H \approx 76 \text{ cm}$.

3.c Application : cas d'un gaz parfait isotherme, modèle de l'atmosphère

Les hypothèses de ce modèle sont :

- une atmosphère isotherme à T_0 ;
- une atmosphère de masse molaire M uniforme ;
- l'air est un gaz parfait ;
- l'atmosphère est macroscopiquement au repos ;
- $P = P(z)$

Dans ce cas, $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ avec l'équation de la statique des fluides. Or, avec l'équation d'état du gaz parfait appliquée à un volume mésoscopique d'air, $\rho = \frac{PM}{RT_0}$. on résolvant l'équation différentielle, on obtient :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT_0}z\right)$$

En posant $H = \frac{RT_0}{gM}$, on a en prenant $M \approx 30 \text{ g.mol}^{-1}$ et $T_0 \approx 300 \text{ K}$ la valeur approchée $H \approx 8 \text{ km}$.

3.d Poussée d'Archimède

Un objet entièrement plongé dans un (des) fluide(s) et immobile dans un référentiel galiléen (ou ayant un mouvement très lent) subit une force

$$\vec{\pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g}$$

Le fluide déplacé a un caractère fictif. On rappelle qu'à 1 bar et 20 degrés Celsius, $\rho_{\text{air}} \approx 1,3 \text{ g.L}^{-1}$.

4 Solide

4.a Définition ; cinématique

Définition 14 (Solide). Un objet est un solide lorsqu'il est indéformable, c'est-à-dire que la distance entre deux points quelconques de cet objet est une constante indépendante du temps.

En considérant un référentiel lié au solide S , on obtient alors :

$$\vec{v}(B \in S/R) = \vec{v}(A \in S/R) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

4.b Théorèmes dynamiques

Théorème 16 (Théorème de la résultante). Si S est un solide de masse M_S et R est galiléen, alors :

$$\frac{d}{dt}(M_S \vec{v}(G/R)) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Théorème 17 (Théorème du moment cinétique vectoriel). *Si S est un solide de masse M_S , R est galiléen et A est fixe dans R , alors :*

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_A(S/R)) = \vec{\mathcal{M}}_{A,ext}$$

Théorème 18 (Théorème du moment cinétique scalaire). *Si S est un solide de masse M_S , R est galiléen et Δ est un axe fixe dans R , alors :*

$$\frac{d}{dt} (L_\Delta(S/R)) = \mathcal{M}_{\Delta,ext}$$

Pour l'instant, rien de nouveau par rapport aux systèmes de points matériels.

4.c Théorèmes énergétiques

Théorème 19. *Si on considère un unique solide, alors $\mathcal{P}_{int} = 0$, et par conséquent $W_{int} = 0$.*

Par conséquent, on obtient une version simplifiée des théorèmes énergétiques :

Théorème 20 (Théorème de la puissance cinétique pour un solide). *SI S est un solide et R est galiléen, alors :*

$$\frac{d}{dt} (E_c(S/R)) = \mathcal{P}_{ext}(S/R)$$

Les variantes usuelles (énergie cinétique, puissance mécanique et énergie mécanique) sont alors vraies avec la simplification.

4.d Solide en translation

Puisque tous les points du solide ont la même vitesse que le centre d'inertie du solide si celui-ci est en translation, on a :

$$\vec{L}_A(S/R) = M_S \vec{AG} \wedge \vec{v}(G/R)$$

et

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} M_S \times v(G/R)^2$$

5 Solide en rotation autour d'un axe fixe

5.a Moment et énergie cinétiques pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Définition 15 (Moment d'inertie). Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à un axe fixe Δ est défini par

$$J_\Delta(S) = \sum_{i \in S} m_i d(\Delta, M_i)^2$$

Plus généralement, on a en fait

$$J_\Delta(S) = \iiint_S r^2 \delta m$$

En pratique, on calcule le moment d'inertie élémentaire en remplaçant δ grâce aux données, puis on intègre sur le paramétrage du solide.

Le moment d'inertie est l'analogie de la masse pour les solides en rotation. En effet, on a alors les identités suivantes :

Théorème 21. *Si le solide S est en rotation autour de l'axe fixe Δ à la vitesse angulaire Ω dans le référentiel R galiléen, alors :*

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} J_{\Delta}(S) \Omega^2$$

et

$$L_{\Delta}(S/R) = J_{\Delta}(S) \Omega$$

5.b Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème 22. *Si le solide S est en rotation autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen, alors*

$$\frac{d}{dt} E_c(S/R) = \mathcal{P}_{ext}(S/R)$$

5.c Couple

Définition 16 (Couple). Une action mécanique est un couple lorsque sa résultante est nulle. Par abus de langage, on appelle souvent couple le moment d'une action mécanique qui est un couple puisque le moment d'un couple ne dépend pas du point où il est calculé.

Par exemple, appuyer de façon antisymétrique sur les barres d'un gouvernail est un couple.

5.d Liaison pivot

Le rotor tourne autour du stator. La liaison pivot est dite parfaite (ou sans frottement) lorsque $\mathcal{M}_{\Delta, liaison} = 0$

5.e Rotation autour d'un axe mobile (complément)

Exemple : moto qui fait une roue arrière sans glisser.

Il faut :

- appliquer le théorème de la résultante à l'ensemble de la moto dans le référentiel terrestre
- appliquer le théorème du moment cinétique au système châssis, roue avant par rapport à l'axe de la roue arrière qui est fixe dans le référentiel de la moto, lui-même en translation par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen
- appliquer le théorème du moment cinétique à la roue arrière par rapport à l'axe de la roue arrière fixe dans le référentiel de la moto
- combiner toutes les équations scalaires pour exprimer l'accélération de la moto en fonction de la masse M de la moto, du rayon R de la roue arrière, de g , de l'angle α que fait la moto avec le sol, de la distance d entre le centre de la roue arrière et le centre d'inertie de la moto et du moment d'inertie J de la roue arrière par rapport à son axe de rotation.

On obtient (pour la science) :

$$a_0 = \frac{Mgd \cos(\alpha)}{\frac{J}{R} + MR + Md \sin(\alpha)}$$

5.f Résumé

Tout est dans les parties précédentes !

Chapitre 4

Lois du frottement solide

Table des matières

1	Présentation et définitions	41
2	Composante normale de la réaction	42
3	Composante tangentielle de la réaction	42
3.a	Cas 1/2 : non-glissement ou adhérence	42
3.b	Cas 2/2 : glissement	42
3.c	Ordres de grandeur	42
3.d	Contact sans frottement	42
3.e	Interprétation microscopique	42
3.f	Exemple 1 : masse initialement au repos sur un plan incliné	43
3.g	Cône de frottement ; arc-boutement	43
4	Aspect énergétique	44
4.a	Puissance des forces de contact sur un des deux solides	44
4.b	Puissance totale des forces de contact entre deux solides	44
4.c	Exemple 2 : entraînement par frottement	44

1 Présentation et définitions

Il est important de comprendre que, même si nous avons jusqu'à présent très souvent négligé les frottements, ceux-ci sont en réalité nécessaire à presque tout. En effet, sans frottement, on ne pourrait pas avancer lorsqu'on marche (essayez à la patinoire et vous allez rigoler...). Il est donc vital de s'intéresser à ces forces pour mieux comprendre leur fonctionnement.

On s'intéresse au contact de deux solides S_1 et S_2 qui a lieu en un point I. On appelle vitesse de glissement du solide 2 par rapport au solide 1 la vitesse :

$$\vec{v}_{\text{glissement } 2/1} := \vec{v}_{I \in S_2/R_0} - \vec{v}_{I \in S_1/R_0}$$

Cette expression est invariante par changement de référentiel puisque les termes d'accélération d'entraînement d'inertie et de Coriolis se compensent alors.

2 Composante normale de la réaction

Une liaison unilatérale peut être rompue. Pour une liaison unilatérale, on connaît toujours le sens de la réaction.

Inversement, on ne connaît pas le sens de la réaction d'une liaison bilatérale, mais la liaison ne peut pas être rompue de façon simple.

3 Composante tangentielle de la réaction

3.a Cas 1/2 : non-glissement ou adhérence

Si $\vec{v}_{\text{glissement } 2/1} = \vec{0}$, alors :

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_S \|\vec{R}_N\|$$

avec f_S le coefficient de frottement statique, qui est sans dimension. f_S dépend de la nature des solides, ne dépend pas de l'aire de la surface de contact et ne dépend pas de R_N .

3.b Cas 2/2 : glissement

Si $\vec{v}_{\text{glissement } 2/1} \neq \vec{0}$, alors :

$$\|\vec{R}_T\| = f_D \|\vec{R}_N\|$$

avec f_D le coefficient de frottement dynamique (ou cinétique), qui est sans dimension. f_D dépend de la nature des solides, ne dépend pas de l'aire de la surface de contact et ne dépend pas de R_N .

On a toujours $f_D \leq f_S$, et, bien souvent, $f_D \approx f_S$.

3.c Ordres de grandeur

Pour un contact métal contre métal, on a :

$$f_S \approx f_D \approx 0,2$$

3.d Contact sans frottement

Si $f_S = f_D = 0$, alors $\vec{R}_T = \vec{0}$ d'après les lois de Coulomb. Dans les exercices, cette condition est traduite par la mention "sans frottement".

3.e Interprétation microscopique

En réalité, une surface de contact telle que nous la modélisons n'est pas réellement pleine de contacts. En fait, les surfaces ont plein de micro-aspérités (de l'ordre de la dizaine de micromètres) et ne se touchent qu'en certains points.

Pour passer de l'adhérence au glissement, il faut qu'il y ait rupture de ces micro-contacts.

Ainsi, il ne faut pas confondre la surface apparente de contact (c'est-à-dire macroscopique) avec la surface de contact réelle (c'est-à-dire microscopique et beaucoup moins importante).

3.f Exemple 1 : masse initialement au repos sur un plan incliné

Un solide S de masse m est initialement au repos en étant posé sur un support incliné par rapport au sol d'un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Les forces qui s'appliquent sur le solide S sont la réaction normale du support, la réaction tangentielle du support et le poids. On se place dans le repère "naturel" lié à la pente avec x orienté dans le sens de la pente et z orthogonal à la surface dirigé vers l'extérieur de la surface.

Cas 1 : adhérence On applique le théorème de la résultante au solide S dans le référentiel galiléen lié au support pour obtenir :

$$\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

car le solide est alors immobile. En projetant, on obtient :

- sur \vec{u}_x : $\vec{R}_T \cdot \vec{u}_x + 0 + mg \sin(\alpha) = 0$
- sur \vec{u}_z : $mg \cos(\alpha) + R_N + 0 = 0$

Or d'après la loi de Coulomb sur l'adhérence, on a $R_T \leq f R_N$. On obtient donc $mg \sin(\alpha) \leq f mg \cos(\alpha)$, soit :

$$\tan(\alpha) \leq f$$

Cas 2 On suppose $\vec{v}_{\text{glissement}}$ selon $+\vec{u}_x$ (solide en translation). On applique le théorème de la résultante au solide S dans le référentiel galiléen lié au support et on projette selon \vec{u}_x et \vec{u}_z pour obtenir :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin(\alpha) - R_T \\ 0 = -mg \cos(\alpha) + R_N \end{cases}$$

On suppose $\dot{x} > 0$. Alors, $\vec{v}_{\text{glissement}} = \dot{x}\vec{u}_x \neq \vec{0}$. Puis, d'après la loi de Coulomb sur le glissement, on a

$$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\| = f mg \cos(\alpha)$$

3.g Cône de frottement ; arc-boutement

Que ce soit dans le cas du glissement ou de l'adhérence, la réaction du support est contenue dans un cône vertical d'angle au sommet α tel que $\tan(\alpha) = f$. ce cône est appelé cône de frottement.

Pour passer de l'adhérence au glissement, augmenter la norme de la réaction ne sert à rien car on reste dans le cône de frottement. Il faut plutôt modifier la direction de la réaction. C'est le phénomène d'arc-boutement. -> Exemple du serre-joint

4 Aspect énergétique

Attention, les frottements peuvent être moteurs ! Leur effet global est toujours résistant, mais peut être moteur pour une partie du système → penser au deuxième principe en thermodynamique : l'entropie d'un système fermé peut diminuer à condition d'augmenter plus vite celle du reste du monde (frigo).

4.a Puissance des forces de contact sur un des deux solides

On suppose que le solide 2 est en translation par rapport au référentiel d'étude. Alors

$$\mathcal{P}_{\text{action } 1 \rightarrow 2} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{G_2}$$

4.b Puissance totale des forces de contact entre deux solides

On suppose que les solides 1 et 2 sont en translation par rapport au référentiel d'étude. Alors :

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}_{G_2} - \vec{v}_{G_1})$$

Ainsi, s'il y a glissement ou si $f = 0$, on a $\mathcal{P}_{\text{tot}} = 0$. Sinon, on a $\mathcal{P}_{\text{tot}} < 0$.

Dans tous les cas, $\mathcal{P}_{\text{tot}} \leq 0$. Il y a conversion d'énergie mécanique en énergie thermique.

4.c Exemple 2 : entraînement par frottement

Exemple d'un cadeau de masse m sur un traineau de masse M . Le cadeau frotte sur le traineau, le traineau glisse sans frotter sur le sol et est soumis à une force horizontale \vec{F} constante qui le tracte. Condition sur \vec{F} pour que le cadeau ne glisse pas ?

On distingue les cas où il y a adhérence et où il y a glissement. Dans le cas de l'adhérence, on applique le théorème de la résultante à M, m puis le théorème de la résultante à m . Dans le cas du glissement, on applique le théorème de la résultante à m puis on l'applique à M . La limite est $F = f(m + M)g$ et il y a glissement au-dessus. Tant que le cadeau n'est pas tombé du traineau, les frottements sont moteurs pour lui.

Deuxième partie

Électromagnétisme

Chapitre 5

Analyse vectorielle

Table des matières

1	Opérateurs	47
1.a	Gradient	47
1.b	Divergence	48
1.c	Rotationnel	49
1.d	Laplacien scalaire	50
1.e	Laplacien vectoriel	50
2	Relations d'analyse vectorielle	50
3	Deux cas particuliers	51
3.a	Définitions	51
3.b	Champ à circulation conservative	51
3.c	Champ à flux conservatif	51

1 Opérateurs

1.a Gradient

L'opérateur gradient est un champ de vecteurs : il prend en argument scalaire qui dépend de l'espace et donne un vecteur. On le note $\overrightarrow{\text{grad}}$. Le gradient est linéaire : si α et β ne dépendent pas de l'espace et f et g sont des scalaires, alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(f) + \beta \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(g)$$

On a :

$$\left[\overrightarrow{\text{grad}}(f) \right] = \frac{[f]}{L}$$

Le gradient possède une formule intrinsèque qui ne dépend pas du système de coordonnées ni de l'orientation de la base choisie. Cette formule intrinsèque est :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

On peut introduire le vecteur nabla :

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

qui permet de mémoriser les expressions des différents opérateurs en **coordonnées cartésiennes uniquement !** Il ne faut **surtout pas essayer de généraliser ces expressions aux autres systèmes de coordonnées**. Cet avertissement étant fait, on peut retenir le gradient en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f$$

1.b Divergence

L'opérateur divergence est un champ scalaire : il prend en argument un vecteur et donne un scalaire. On le note div . La divergence est linéaire : si α et β ne dépendent pas de l'espace et \vec{a} et \vec{b} sont des vecteurs, alors :

$$\text{div}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \cdot \text{div}(\vec{a}) + \beta \cdot \text{div}(\vec{b})$$

On a :

$$[\text{div}(\vec{a})] = \frac{[a]}{L}$$

La divergence possède une formule intrinsèque qui ne dépend pas du système de coordonnées ni de l'orientation de la base choisie. Cette formule intrinsèque est :

$$\delta\Phi = \text{div}(\vec{a}) \times \delta\tau$$

avec $\delta\tau$ le volume élémentaire délimité par une surface δS et $\delta\Phi$ le flux sortant de δS .

En coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Pour une expression à symétrie cylindrique ($\vec{a} = a_r(r)\vec{u}_r$) :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r}$$

Pour une expression à symétrie sphérique ($\vec{a} = a_\rho(\rho)\vec{u}_\rho$) :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 a_\rho)}{\partial \rho}$$

On a le :

Théorème 23 (Théorème de Green-Ostrogradski). *Soit V un volume délimité par une surface S fermée. Alors :*

$$\iiint_V \text{div}(\vec{a}) \delta\tau = \oiint_S \vec{a} \cdot dS \vec{n}_{ext}$$

1.c Rotationnel

$\vec{\text{rot}}$ L'opérateur rotationnel prend un argument vectoriel et donne un résultat vectoriel. On le note $\vec{\text{rot}}$. Il est linéaire et on a :

$$[\vec{\text{rot}}(\vec{a})] = \frac{[\vec{a}]}{L}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

On peut retenir cette formule **en coordonnées cartésiennes uniquement** avec :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$$

On a de façon générale le :

Théorème 24 (Théorème de Stokes). *Soit Γ un contour fermé et S une surface s'appuyant sur Γ . Alors :*

$$\oint_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot dS \vec{n}_{ext}$$

On prendra garde au fait que l'orientation du contour et \vec{n}_{ext} sont liés par la règle de la main droite.

On peut aussi écrire cette relation sous forme locale avec

$$\delta C = \vec{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot dS \vec{n}$$

où δC est la **circulation**.

1.d Laplacien scalaire

En coordonnées cartésiennes, le **laplacien scalaire** de f est défini par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Le laplacien scalaire est un opérateur linéaire qui prend en argument un scalaire et donne un scalaire. On a :

$$[\Delta f] = \frac{[f]}{L^2}$$

On trouve parfois l'écriture en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f$$

Les expressions du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques et sphériques sont bien trop compliquées et hors-programme. Elles seront données si nécessaire. Tenter de les apprendre serait une grave erreur car elles sont beaucoup trop complexes et le risque d'erreur est énorme.

1.e Laplacien vectoriel

En coordonnées cartésiennes, le **laplacien vectoriel** du champ vectoriel \vec{a} est défini par :

$$\vec{\Delta}(\vec{a}) = (\Delta a_x)\vec{u}_x + (\Delta a_y)\vec{u}_y + (\Delta a_z)\vec{u}_z$$

où Δa_x , Δa_y et Δa_z sont respectivement les laplaciens scalaires en coordonnées cartésiennes des scalaires a_x , a_y et a_z .

Les expressions du laplacien vectoriel en coordonnées cylindriques et sphériques sont bien trop compliquées et hors-programme. Elles seront données si nécessaire. Tenter de les apprendre serait une grave erreur car elles sont beaucoup trop complexes et le risque d'erreur est énorme.

2 Relations d'analyse vectorielle

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{a})) = 0$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(f)) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}}(f)) = \Delta f$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{a})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{a})) - \vec{\Delta}(\vec{a})$$

$$\text{div}(f\vec{a}) = f\text{div}(\vec{a}) + \vec{\text{grad}}(f) \cdot \vec{a}$$

$$\vec{\text{rot}}(f\vec{a}) = f\vec{\text{rot}}(\vec{a}) + \vec{\text{grad}}(f) \wedge \vec{a}$$

$$\vec{\text{grad}}(fg) = f\vec{\text{grad}}(g) + g\vec{\text{grad}}(f)$$

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{\text{rot}}(\vec{b}) \cdot \vec{a}$$

3 Deux cas particuliers

3.a Définitions

Definition 17 (Ligne de champ). En tout point M d'une ligne de champ \mathcal{L} , $\vec{E}(M)$ est tangent à \mathcal{L} en M .

Par exemple, la trajectoire d'un point matériel peut être considérée comme la ligne de champ de \vec{v} , à ceci près que \vec{v} ne dépend pas de l'espace mais du temps. L'image est tout de même celle qu'il faut retenir.

Definition 18 (Tube de champ). Un tube de champ est un ensemble de lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé et l'intérieur de la zone délimitée par ces lignes de champ.

3.b Champ à circulation conservative

Un champ \vec{f} est dit **à circulation conservative** quand il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

- Formulation intégrale 1 : Pour tous contours Γ_1 et Γ_2 reliant deux points A et B en allant de A à B , on a $\oint_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{l}$
- Formulation intégrale 2 : Pour tout contour fermé Γ , $\oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{l} = 0$
- Formulation locale 1 : En tout point, $\text{rot}(\vec{f}) = \vec{0}$
- Formulation locale 2 : Il existe un champ scalaire u tel que $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}}(u)$

Une force conservative est un cas particulier de champ vectoriel à circulation conservative.

3.c Champ à flux conservatif

Un champ \vec{f} est dit **à flux conservatif** quand il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

- Formulation intégrale 1 : Pour toute surface fermée S , on a $\oiint_S \vec{f} \cdot d\vec{S} = 0$
- Formulation intégrale 2 : Si S_1 est une surface s'appuyant sur le contour fermé Γ_1 et S_2 s'appuie sur Γ_2 où Γ_1 et Γ_2 délimitent un tube de champ, alors $\iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{f} \cdot d\vec{S}$
- Formulation intégrale 3 : Pour tout contour fermé Γ et toutes surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur Γ , alors $\iint_{S_1} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{f} \cdot d\vec{S}$
- Formulation locale 1 : En tout point, $\text{div}(\vec{f}) = 0$
- Formulation locale 2 : Il existe un champ vectoriel \vec{A} tel que $\vec{f} = \text{rot}(\vec{A})$

Remarquer que la dernière formulation intégrale prouve la validité du théorème de Stokes peu importe le choix de la surface.

Chapitre 6

Électrostatique

Table des matières

1	Des charges au champ électrique	54
1.a	Distributions de charges	54
1.b	Loi de Coulomb et principe de superposition	54
1.c	Propriétés de symétrie; principe de Curie	54
1.d	Exemple (complément)	55
2	Flux du champ électrique; théorème de Gauss	55
2.a	Formulation intégrale; théorème de Gauss	55
2.b	Notion d'angle solide (complément)	55
2.c	Formulation locale; équation de Maxwell-Gauss	55
2.d	Exemples	55
3	Circulation du champ électrique; potentiel électrique	57
3.a	Cas d'une charge ponctuelle; principe de superposition	57
3.b	Relation champ-potentiel; équation de Maxwell-Faraday statique	57
3.c	Exemples	58
3.d	Continuité de potentiel	58
4	Conséquence des deux propriétés précédentes	58
4.a	Relation de passage	58
4.b	Équations de Poisson et de Laplace; théorème d'unicité	58
4.c	Théorème de l'extremum	59
5	Topographie du champ électrique	59
5.a	Définitions	59
5.b	Champ à circulation conservative; conséquence	59
5.c	Champ à flux conservatif dans une zone vide de charges; conséquence	59
6	Analogie avec la gravitation	59
7	Énergie potentielle électrostatique	60
7.a	Charge ponctuelle dans un champ extérieur	60
7.b	Énergie d'un système de charges ponctuelles en interaction	61
8	Modélisation des condensateurs	61
8.a	Condensateur plan	61

8.b	Condensateur cylindrique	61
8.c	Condensateur sphérique	62
8.d	Énergie électrique emmagasinée	62
9	Conducteur à l'équilibre (complément)	63

1 Des charges au champ électrique

1.a Distributions de charges

Description microscopique On liste les charges et leurs positions.

Description mésoscopique On dispose de trois modélisation microscopiques :

- linéique : $\delta Q = \lambda \delta l$ avec λ la charge linéique en $C.m^{-1}$
- surfacique : $\delta Q = \sigma \delta S$ avec σ la charge surfacique en $C.m^{-2}$
- volumique : $\delta Q = \rho \delta t$ avec ρ la charge volumique en $C.m^{-3}$

Attention la modélisation surfacique est une simplification car l'épaisseur de la distribution de charges n'est pas nulle en réalité.

Passage d'une description à l'autre Pour passer d'une description à l'autre, on se place à grande distance du système et on regarde les charges dans un volume mésoscopique.

1.b Loi de Coulomb et principe de superposition

Pour deux charges (P_1, q_1) et (P_2, q_2) , on a la loi de Coulomb électrostatique :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = \frac{q_1 q_2 \overrightarrow{P_1 P_2}}{4\pi\epsilon_0 (P_1 P_2)^3}$$

On peut l'écrire $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} = q_2 \overrightarrow{E}(P_2)$ avec

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{q_1 \overrightarrow{P_1 M}}{4\pi\epsilon_0 (P_1 M)^3}$$

Plus généralement, si on prend un nombre quelconque de charges, le champ électrique s'écrit selon le **principe de superposition** :

$$\overrightarrow{E}(M) = \sum_i \frac{q_i \overrightarrow{P_i M}}{4\pi\epsilon_0 (P_i M)^3}$$

1.c Propriétés de symétrie ; principe de Curie

Plans de symétrie des charges Pour un plan de symétrie des charges, un point et son symétrique ont des champs électriques symétriques par rapport à ce plan. Par conséquent, pour tout point appartenant à un plan de symétrie des charges, le champ électrique en ce point est contenu dans le plan de symétrie.

Plans d'antisymétrie des charges Pour un plan d'antisymétrie des charges, tout point contenu dans le plan a un champ électrique orthogonal à ce plan d'antisymétrie.

Invariances Lorsqu'on a une invariance par rotation ou par translation de la distribution des charges, toutes les composantes du champ électrique ne dépendent pas de la coordonnée qui correspond à l'invariance.

Principe de Curie "Les effets ont au moins les symétries des causes." Dans notre cas, cela signifie que \vec{E} possède globalement les mêmes symétries que la distribution de charges.

1.d Exemple (complément)

Attention, le calcul direct n'est pas la bonne méthode la plupart du temps. il convient toujours d'étudier les symétries et les invariances puis de tenter d'appliquer le théorème de Gauss si l'on dispose de suffisamment de symétries et d'invariances.

2 Flux du champ électrique ; théorème de Gauss

2.a Formulation intégrale ; théorème de Gauss

Théorème 25 (Théorème de Gauss électrostatique). *Pour toute surface **fermée** S et tout champ électrique \vec{E} , on a :*

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

avec Q_{int} la charge totale contenue à l'intérieur de la surface S .

2.b Notion d'angle solide (complément)

2.c Formulation locale ; équation de Maxwell-Gauss

Théorème 26 (Équation de Maxwell-Gauss). *On a*

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet de montrer que le théorème de Gauss électrostatique et l'équation de Maxwell-Gauss sont équivalents.

2.d Exemples

Fil infini On considère un fil infini de charge linéique λ uniforme. En coordonnées cylindriques, les symétries montrent que le champ n'a qu'une composante radiale. Les invariances montrent que cette composante radiale ne dépend que de la distance radiale. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur H quelconque. L'application du théorème de Gauss donne :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Sphère chargée en volume On considère une boule uniformément chargée en volume de charge volumique ρ de rayon R . On se place en coordonnées sphériques de centre le centre de la sphère chargée. Les symétries montrent que le champ n'a qu'une composante selon \vec{u}_r , et l'étude des symétries montre que cette composante ne dépend que de r . On applique le théorème de Gauss à une sphère de même centre que la sphère chargée et on obtient :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Sphère chargée en surface On considère une sphère de rayon R uniformément chargée en surface à σ . De même que pour la boule, on a $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$. En appliquant le théorème de Gauss à une sphère de même centre que la sphère chargée, on obtient :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Attention, si $r = R$, on ne peut rien dire. Noter la discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ en $r = R$.

Généralisation en symétrie sphérique A l'extérieur d'une distribution de charges à symétrie sphérique, le champ électrique est le même que si toute la charge était concentrée au centre de la sphère (on le retrouve en appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon $r > R$ et en constatant que le champ est le même que celui créé par une charge ponctuelle placée au centre de la sphère).

Attention, cela n'est valable qu'à l'extérieur de la sphère.

Plan infini chargé en surface On considère un plan infini chargé uniformément en surface à σ . On repère ce plan par l'équation $z = 0$ en coordonnées cartésiennes. L'étude des symétries montre que $\vec{E} = E_z(z) \vec{u}_z$ et que la composante E_z est impaire. On applique le théorème de Gauss à un cylindre dont les plans sont z et $-z$ pour $z > 0$. On obtient :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Attention, si $z = 0$, on ne peut rien dire, il y a un problème de modélisation. Noter la discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ en $z = 0$.

3 Circulation du champ électrique ; potentiel électrique

3.a Cas d'une charge ponctuelle ; principe de superposition

Deux charges ponctuelles en interaction

$$\vec{E}(M) = \frac{q\vec{PM}}{4\pi\epsilon_0(PM)^3} = -\vec{\text{grad}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM}\right)$$

si bien que si Γ est fermé, alors $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. On définit alors le potentiel créé par la charge q placée en P au point M par :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} + cte$$

Nombre quelconque de charges ; principe de superposition Si les charges q_i sont placées aux points P_i alors le potentiel en M est donné par le principe de superposition :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M} + cte$$

Choix de la constante On a l'apparition d'une constante à cause du gradient. Lorsque les distributions sont d'extension finie, on peut facilement prendre une constante nulle à l'infini par exemple. Sinon, on peut s'arranger pour prendre la constante nulle en un point particulier du système. Toutefois, lorsqu'on a une distribution de charges à l'infini, on ne peut pas toujours prendre une constante nulle à l'infini.

Remarques En électrostatique :

- \vec{E} est un gradient
- \vec{E} est à circulation conservative

3.b Relation champ-potentiel ; équation de Maxwell-Faraday statique

Théorème 27 (Équation de Maxwell-Faraday statique). *En statique, on a :*

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Attention, en régime variable on a en réalité :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

3.c Exemples

Reprendre les exemples de calcul de champ électrostatique et intégrer. Pour se débarrasser des constantes d'intégration, on peut utiliser la continuité du potentiel aux points de jonction des domaines. Sinon, on peut aussi effectuer un calcul direct, ce qui est beaucoup plus pénible.

3.d Continuité de potentiel

En électrostatique, le potentiel est continu, même en présence d'une charge surfacique.

	\vec{E}	V
ρ	continu	continu
σ	discontinu	continu
λ	diverge ($1/r$)	diverge ($\ln(r)$)
q	diverge ($1/r^2$)	diverge ($1/r$)

4 Conséquence des deux propriétés précédentes

4.a Relation de passage

A la traversée d'une surface chargée à σ , en notant \vec{E}_2 le champ à l'extérieur de la surface, \vec{E}_1 le champ à l'intérieur de la surface, et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur normal à la surface dirigé de 1 vers 2, on a une discontinuité du champ électrique donnée par la **relation de passage** :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Pour le prouver, appliquer un théorème de Gauss à un cylindre dont on fait tendre les dimensions vers 0. La composante normale est discontinue de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (cf l'exemple sur le plan chargé). Pour les autres composantes, on utilise le fait que \vec{E} est à circulation conservative et que certains flux tendent vers 0.

4.b Équations de Poisson et de Laplace ; théorème d'unicité

Théorème 28 (Équation de Poisson). En *statique*, on a :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Théorème 29 (Équation de Laplace). En *statique*, dans une zone vide de charges :

$$\Delta V = 0$$

En pratique, l'équation de Poisson et l'équation de Laplace permettent de passer immédiatement des charges au potentiel sans passer par le champ, et donc sans utiliser l'équation de Maxwell-Gauss ou le théorème de Gauss. Néanmoins, on ne peut les utiliser que si on est en coordonnées cartésiennes ou si on dispose d'un formulaire donnant le laplacien scalaire en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Théorème 30 (Théorème d'unicité). *Soit V un volume délimité par une surface S . Si*

- $V = 0$ en tout point de S
- $\Delta V = 0$ en tout point intérieur de V

alors $V = 0$ en tout point de V .

4.c Théorème de l'extremum

Le potentiel ne peut pas atteindre un maximum en un point vide de charges. Il est donc impossible de confiner des charges avec un potentiel électrostatique seul.

Pour des exemples clairs, cf transferts thermiques et bulles de savon.

5 Topographie du champ électrique

5.a Définitions

Ligne de champ Le champ électrique est tangent en tout point à la ligne de champ.

Équipotentielle L'équipotentielle à V_0 est l'ensemble des points M tels que $V(M) = V_0$.

Exemple de la charge ponctuelle chargée positivement Les lignes de champ sont des demi-droites qui partent de la charge ponctuelle. Les équipotentielles sont des sphères concentriques centrées sur la charge ponctuelle.

5.b Champ à circulation conservative ; conséquence

Les lignes de champ pour un champ \vec{E} statique ne sont pas fermées : le long d'une ligne de champ, le potentiel décroît strictement, si bien qu'une ligne de champ ne peut pas revenir au potentiel initial.

5.c Champ à flux conservatif dans une zone vide de charges ; conséquence

Dans une zone vide de charges, le champ \vec{E} est à flux conservatif. Ainsi, dans une zone vide de charges, la norme du champ \vec{E} diminue lorsque les lignes de champ s'écartent.

6 Analogie avec la gravitation

Généralités et passage d'un domaine à l'autre **Très important** : il suffit de se rappeler quelles constantes doit-on remplacer par lesquelles, et quelle lettre par laquelle, et les théorèmes gravitationnels sont alors les mêmes que les théorèmes électrostatiques modulo les changements de lettres et de constantes.

\vec{E}	\vec{A} (champ de gravitation)
$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i \vec{P_i M}}{4\pi\epsilon_0 (P_i M)^3}$	$\vec{A}(M) = \sum_i -\frac{\mathcal{G} m_i \vec{P_i M}}{(P_i M)^3}$
$1/4\pi\epsilon_0$	$-\mathcal{G}$
q_i	m_i

Circulation

$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$
$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$	$\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)$
$E_p = q_{test} V$	$E_p = m_{test} \Phi$
$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{0}$

Flux Probablement la partie la plus importante : retenir le théorème de Gauss gravitationnel, l'équation de Maxwell-Gauss gravitationnelle et l'équation de Poisson gravitationnelle

$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{int}$
$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\text{div}(\vec{A}) = -4\pi\mathcal{G}\mu$
$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta \Phi - 4\pi\mathcal{G}\mu = 0$

7 Énergie potentielle électrostatique

7.a Charge ponctuelle dans un champ extérieur

On s'intéresse à l'énergie potentielle de la charge q_{test} placée en M , dans le champ électrostatique créé par les charges q_i . On a :

$$\overrightarrow{F}_{q_{test}} = q_{test} \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(q_{test} V)$$

La force électrostatique dérive donc d'une énergie potentielle E_p telle que

$$E_p = qV + cte$$

7.b Énergie d'un système de charges ponctuelles en interaction

Pour un système de charges en interaction, on a :

$$E_{p,int} = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 P_i P_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 P_i P_j}$$

8 Modélisation des condensateurs

Pour nos condensateurs, en prenant la convention de prendre la tension u de la charge négative vers la charge positive (la flèche sur le schéma électrique dans ce sens-là), on

$$Q = Cu$$

avec C la capacité du condensateur en Farad (F).

8.a Condensateur plan

On se place dans le cas où deux armatures planes de surface S chargées uniformément en surface à σ et $-\sigma$ sont espacées parallèlement d'une épaisseur e . On néglige les effets de bord, si bien que $\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z$ où \vec{u}_z est unitaire dirigé de l'armature négative vers l'armature positive. On place le plan positif à $\frac{e}{2}$ et le négatif à $-\frac{e}{2}$.

On applique le principe de superposition avec les deux armatures pour obtenir un champ nul dès que $|z| > \frac{e}{2}$ et valant $\frac{-\sigma}{\epsilon_0}$ si $|z| > \frac{e}{2}$. Ainsi, pour $|z| < \frac{e}{2}$, $V(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}z + cte$. Donc

$$u = V\left(\frac{e}{2}\right) - V\left(-\frac{e}{2}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}e$$

Comme $Q = \sigma S$, on en déduit

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Théorème 31 (Condensateur plan). *Pour un condensateur plan, en négligeant les effets de bord ($e^2 \ll S$), on a :*

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide qui vaut $8,89.10^{-12} F.m^{-1}$.

SI on a un matériau isolant entre les deux armatures qui n'est pas du vide, on remplace ϵ_0 par $\epsilon_r \epsilon_0$ qui est la permittivité relative du matériau. Si c'est le cas, cela est donné par le sujet (cf chimie).

8.b Condensateur cylindrique

On prend un cylindre de rayon R_1 chargé Q et un cylindre concentrique chargé $-Q$ de rayon $R_2 > R_1$. Les deux cylindres sont de hauteur H . On néglige les effets de bord en supposant les armatures infinies pour calculer le champ électrique.

En appliquant le théorème de Gauss, on trouve que $E_r(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r H}$ lorsque $R_1 < r < R_2$.
 En intégrant, $V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$ pour $R_1 < r < R_2$ où a est une longueur pour la prise de potentiel nul. On obtient alors :

$$u = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q}{C}$$

D'où :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Remarques Un condensateur de hauteur $H'' = H + H'$ s'obtient en mettant en parallèle deux condensateurs de hauteurs H et H' . L'expression de la capacité obtenue dans les deux cas précédents est alors compatible avec $C'' = C' + C$ en parallèle.

Si on place des condensateurs en série, alors les expressions des capacités sont compatibles avec la relation :

$$\frac{1}{C_{1,3}} = \frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{2,3}}$$

Ainsi, les relations obtenues sont compatibles avec les relations sur les impédances complexes.

Dans le cas limite où $R_1 = R$ et $R_2 = R + e$ avec $e \ll R$, on retrouve l'expression de la capacité d'un condensateur plan en prenant un équivalent de $\ln(1 + u)$ pour $u \ll 1$.

8.c Condensateur sphérique

cf TD. L'idée est la même que pour le condensateur cylindrique.

8.d Énergie électrique emmagasinée

Énergie emmagasinée On rappelle que

$$W = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

On admet que

$$W = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \delta\tau$$

où $\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ est en $J.m^{-3}$

Cas du condensateur plan Avec la formule admise, puisque le champ "à l'intérieur" vaut $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ et celui "à l'extérieur" est nul, on a $W = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 eS$. Or, $W = \frac{1}{2} \frac{(\sigma S)^2}{C}$. On retrouve alors la formule

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Condensateur cylindrique Le champ "à l'intérieur" vaut $\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r H}$ "à l'intérieur" et est nul "à l'extérieur". Avec la même idée que pour le condensateur plan, on retrouve en intégrant et en égalant la formule :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

9 Conducteur à l'équilibre (complément)

Dans un conducteur, si $\vec{E} \neq \vec{0}$, alors il y a un mouvement macroscopique des charges.

Conducteur en équilibre On a alors $\vec{E} = \vec{0}$. On en déduit que V est uniforme à l'intérieur du conducteur. Aussi, $\rho = 0$ à l'intérieur du conducteur grâce à l'équation de Maxwell-Gauss. Ainsi, les charges sont donc présentes en surface. On a donc finalement

$$Q = \oint_S \sigma \, dS$$

D'après la relation de passage, juste à l'extérieur du conducteur proche de celui-ci, on a :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

où \vec{n} est unitaire dirigé de l'intérieur du conducteur vers l'extérieur.

Influence Charger un conducteur par influence consiste à charger ce conducteur sans le toucher, en approchant une charge par exemple.

Par exemple, si on considère un conducteur en équilibre relié à une masse et qu'on en approche une charge positive, alors le conducteur se charge négativement en surface.

Effet de point Si on place une pointe, les équipotentiels doivent nécessairement se resserrer au voisinage de cette pointe. Cela fait que le champ électrique est beaucoup plus intense au voisinage de la pointe : c'est l'effet de pointe.

Cet effet explique que la foudre tombe le plus souvent sur des objets pointus.

Chapitre 7

Dipôle électrostatique

Table des matières

1	Champ et potentiel créés par un dipôle	65
1.a	Présentation	65
1.b	Potentiel créé par le dipôle dans l'approximation dipolaire	66
1.c	Moment dipolaire	66
1.d	Champ créé par le dipôle dans l'approximation dipolaire	66
1.e	Carte de champ et équipotentiels	67
2	Actions mécaniques d'un champ extérieur sur un dipôle rigide	67
2.a	Attention	67
2.b	Cas d'un champ extérieur uniforme	67
2.c	Cas d'un champ non uniforme dans l'approximation dipolaire	67
2.d	Énergie potentielle extérieure ; positions d'équilibre et stabilité	67

1 Champ et potentiel créés par un dipôle

1.a Présentation

Exemples : les molécules polaires comme H_2O , HCl ou encore CO_2 . On rappelle que la charge formelle consiste à couper toutes les liaisons en deux puis à faire un bilan des charges et enlever la charge de valence. Alors, la charge totale de la molécule ou de l'ion est égale à la somme des charges partielles. Attention, il ne faut pas confondre la charge formelle avec la règle de l'octet ou la règle du duet, ou encore avec les nombres d'oxydation.

On rappelle que la géométrie AXE correspond pour le X au nombre d'atomes auquel l'atome central est lié, et le E au nombre de doublets non liants autour de l'atome central.

Une distribution dipolaire de charges est une distribution d'extension finie, globalement neutre et dont le barycentre des charges négatives est distinct du barycentre des charges positives.

On se place dans le cas d'un dipôle doublet $\{P, N\}$ où P est chargé $+q$ et N est chargé $-q$ avec $q > 0$. On note a la longueur PN et on note O le milieu du segment $[PN]$. On note z l'axe vertical allant de N vers P . On se place en coordonnées sphériques (r, θ, φ) centrées en O et avec la colatitude définie par rapport à Oz . On a $E_\varphi = 0$ car pour tout point M , $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des charges. On a une invariance par rotation autour de l'axe Oz donc E_r et E_θ ne dépendent pas de φ .

1.b Potentiel créé par le dipôle dans l'approximation dipolaire

Approximation dipolaire : $r \gg a$

Dans l'approximation dipolaire, en utilisant le principe de superposition et le potentiel créé par une charge ponctuelle, puis en négligeant les termes d'ordre 2 et en faisant un DL, on obtient **dans l'approximation dipolaire** :

$$V(M) = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

1.c Moment dipolaire

On définit le **moment dipolaire** \vec{p} par $\vec{p} := q\overrightarrow{NP}$. On pose $p = qa$. On appelle indifféremment \vec{p} et p le moment dipolaire. L'unité SI du moment dipolaire est le $C.m$.

Plus généralement, pour une distribution dipolaire quelconque, son moment dipolaire est défini par :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{AP_i}$$

et cette définition est indépendante du point A de référence choisi car $\sum_i q_i = 0$.

Ordre de grandeur : pour une molécule

- $a \approx 10^{-10}m$
- $q \approx e = 1,60.10^{-19}C$
- donc $p \approx 1,60.10^{-29}C.m$

On introduit alors une unité, le Debye (noté D), telle que $1D \approx 3,33.10^{-30}C.m$.

On dispose d'une formule intrinsèque pour le potentiel créé par le dipôle dans l'approximation dipolaire. Avec $r = OM$ et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$, on a :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

1.d Champ créé par le dipôle dans l'approximation dipolaire

Pour le dipôle doublet P, N , on a :

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta)\vec{u}_r + \sin(\theta)\vec{u}_\theta)$$

Plus généralement, on dispose de la formule intrinsèque suivante, avec les mêmes conventions qu'au paragraphe précédent :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{p})$$

1.e Carte de champ et équipotentiellles

Attention, il y a une zone proche du dipôle où l'on ne peut rien dire du fait de l'approximation dipolaire !

2 Actions mécaniques d'un champ extérieur sur un dipôle rigide

2.a Attention

Attention, on change dans cette partie de point de vue.

2.b Cas d'un champ extérieur uniforme

Pour créer un champ extérieur, rappelons que l'on peut par exemple utiliser un condensateur plan.

Dans un champ extérieur uniforme :

- $\vec{R} = \vec{0}$
- $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \overrightarrow{E_{ext}}$

On a donc un couple.

2.c Cas d'un champ non uniforme dans l'approximation dipolaire

On suppose donc $a \ll d$ avec d la distance caractéristique de variation de $\overrightarrow{E_{ext}}$. On a :

$$\vec{R} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = (p_x \partial_x + p_y \partial_y + p_z \partial_z) \vec{E}$$

et

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \overrightarrow{E_{ext}}$$

2.d Énergie potentielle extérieure ; positions d'équilibre et stabilité

Dans l'approximation dipolaire :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

On a donc affaire à un système conservatif à un degré de liberté :

- les actions de liaison ne travaillent pas ;
- l'action de \vec{E} dérive de E_p ;
- $W_{int} = 0$ car on considère le dipôle rigide (*ie* c'est un solide).

Les positions d'équilibre correspondent à $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$. Or, $E_p = -pE \cos(\theta)$ (puis visualiser le graphe de E_p). Alors, $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable, et $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable. Si de plus on connaît J_Δ , on peut exprimer la pulsation des petites oscillations autour de $\theta = 0$.

Chapitre 8

Magnétostatique

Table des matières

1	Des courants aux champs magnétiques	70
1.a	Distribution de courants	70
1.b	Un mot sur les aimants	71
1.c	Propriétés de symétrie du champ magnétique	71
1.d	Loi de Biot et Savart (HP)	72
1.e	Cartes de champ	72
2	Flux du champ magnétostatique	73
2.a	Formulations intégrales	73
2.b	Application	73
2.c	Formulation locale	73
3	Circulation du champ magnétique ; théorème d'Ampère	74
3.a	Formulation intégrale	74
3.b	Formulation locale	74
4	Applications	75
4.a	La recette	75
4.b	Fil rectiligne "infini"	75
4.c	Cylindre "infini" parcouru par une courant inhomogène	75
4.d	Solénoïde "infini"	76
4.e	Nappe de courant ; relation de passage	76
5	Comparaison magnétostatique - électrostatique	76

Le champ magnétique est caractérisé par son action mécanique au travers de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Son unité est le Tesla (T). Le champ à la surface de la terre est de l'ordre de 10^{-5} T. Pour avoir un ordre d'idée, les champs de l'ordre de 1 T sont ceux que l'on retrouve dans un appareil à IRM, au CERN ou encore au LHC.

1 Des courants aux champs magnétiques

1.a Distribution de courants

Différentes modélisations On dispose des différents types de modélisations :

- 1D / linéique : on s'intéresse à l'intensité I en Ampère (A)
- 2D / surfacique : le vecteur densité de courant électrique surfacique \vec{j}_s en A.m^{-1}
- 3D / volumique : le vecteur densité de courant électrique volumique \vec{j} en A.m^{-2}

Intensité à travers une surface orientée Pour une surface S orientée par un vecteur unitaire \vec{n} , alors l'intensité au travers de cette surface est définie par :

$$I = \iint_S \vec{j}_{el} \cdot dS \vec{n}$$

Modèle simpliste Si tous les porteurs de charge ont la même charge et la même vitesse, on a :

$$\vec{j} = n_0 q \vec{v} \text{ ie } \vec{j} = \rho \vec{v}$$

avec n_0 la densité particulaire de charges en m^{-3} .

Attention, si tous les porteurs de charge n'ont pas la même vitesse, on peut très bien avoir $\vec{j} \neq \vec{0}$ et pourtant avoir $\rho = 0$.

Si on peut regrouper les porteurs de charges selon des paquets i où tous les porteurs de charges d'un même paquet ont même charge et même vitesse, on a :

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

Passage d'une modélisation à une autre On prend une modélisation où

$$\vec{j} = \begin{cases} j_0 \frac{r}{a} & \text{si } r < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut modéliser cette distribution "de loin" par une distribution linéique avec

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^a \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a j_0 \frac{r}{a} r dr d\theta = \frac{2\pi}{3} j_0 a^2$$

Passage d'une modélisation à une autre (bis) Si un grand nombre de spires sont parcourues par un courant I , on peut modéliser le tout par une densité de courant électrique surfacique donnée par

$$\vec{j}_s = nI \vec{u}$$

1.b Un mot sur les aimants

cf. chapitre EM2' Dipôle magnétostatique

Hypothèse d'Ampère Le champ magnétique des aimants serait dû aux "courants microscopiques".

1.c Propriétés de symétrie du champ magnétique

Pseudo-vecteurs Le champ magnétique \vec{B} est un **pseudo-vecteur** (ou plus anciennement un **vecteur axial**) : lorsqu'on symétrise le problème par rapport à un axe, le champ \vec{B} est transformé en son opposé.

Vrais vecteurs	Pseudo-vecteurs
Champ électrique \vec{E}	Champ magnétique \vec{B}
Vitesse \vec{v}	Rotation $\vec{\Omega}$
Position, accélération, etc.	Moments cinétiques
Force \vec{F}	Moments de forces
Moment dipolaire électrique	Moment dipolaire magnétique
Vecteur de Poynting $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$	

Pseudo-scalaires De même, on appelle pseudo-scalaire un scalaire qui est changé en son opposé par symétrisation du problème par rapport à un axe. Par exemple, $\vec{E} \cdot \vec{B}$ est un pseudo-scalaire.

Nouvelle condition d'homogénéité Un vecteur non-nul ne peut pas être à la fois un vrai vecteur et un pseudo-vecteur. Cela permet de détecter rapidement de potentielles erreurs dans des résultats vectoriels.

Plans de symétrie et d'antisymétrie des courants Si un plan est tel que deux courants i_1 et i_2 soient symétriques par rapport à ce plan, on dit que ce plan est un plan :

- de **symétrie des courants** si $i_1 = i_2$;
- d'**antisymétrie des courants** si $i_1 = -i_2$

Propriétés des plans de symétrie des courants Si Π est un plan de symétrie des courants et M' est le symétrique de M par rapport à Π , alors $\vec{B}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à Π . En particulier, si $N \in \Pi$, alors $\vec{B}(N)$ est orthogonal à Π .

Propriétés des plans d'antisymétrie des courants Si Π^* est un plan d'antisymétrie des courants et M' est le symétrique de M par rapport à Π , alors $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à Π^* . En particulier, si $N \in \Pi^*$, alors $\vec{B}(N)$ est inclus dans Π^* .

Remarque Il faut noter l'inversion des propriétés par rapport au champ \vec{E} .

Invariance par translation Si la distribution de courants est invariante par translation selon la direction z , alors on a :

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$$

Invariance par rotation Si la distribution des courants est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) , alors on a

$$B_r = B_r(r, \theta, z) ; \quad B_\theta = B_\theta(r, \theta, z) ; \quad B_z = B_z(r, \theta, z)$$

Attention, en revanche, on a généralement $\vec{B}(r, \theta_1, z) \neq \vec{B}(r, \theta_2, z)$

1.d Loi de Biot et Savart (HP)

Loi de Biot et Savart Il s'agit de la relation :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint i d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Noter l'analogie avec

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in V} \rho \delta\tau \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Grâce à la loi de Biot et Savart, on voit aisément que \vec{B} est un pseudo-vecteur.

Exemple d'application : Calcul du champ sur l'axe d'une spire On considère une spire de centre O et de rayon a parcourue par une intensité i . Elle est orthogonale à l'axe (Oz) et on souhaite déterminer le champ magnétique en $M \in (Oz)$. Tout plan contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie des courants, donc $\vec{B}(M) = B_z \vec{u}_z$. Or, la loi de Biot et Savart donne :

$$\vec{u}_z \cdot \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{i}{PM^3} \left(d\vec{l} \wedge \vec{PM} \right) \cdot \vec{u}_z$$

Or, un découpage en $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$ donne rapidement

$$\left(d\vec{l} \wedge \vec{PM} \right) \cdot \vec{u}_z = a \times dl$$

donc

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

1.e Cartes de champ

Fil infini Les lignes de champ sont des cercles concentriques autour de l'axe et orientés par le sens du courant.

Spire Proche de la spire, les lignes de champ sont presque des cercles. Sinon, elles sont coincées entre la spire et l'axe de la spire, puis s'écartent de plus en plus lorsqu'elles s'éloignent de l'axe.

2 Flux du champ magnétostatique

2.a Formulations intégrales

Le champ magnétique est à flux conservatif. Cela se traduit des trois façons suivantes :

- si S est une surface fermée, on a :

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- si S_1 est la face d'entrée d'un tube de champ orientée par le vecteur entrant dans le tube de champ et S_2 est la face de sortie de ce tube de champ orientée par le vecteur normal sortant du tube de champ, on a :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- Si Γ est un contour orienté fermé sur lequel s'appuient les surfaces S_1 et S_2 , alors

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Remarque La troisième formulation assure donc que la loi de Faraday a du sens puisqu'elle est vraie pour toute surface.

Remarque \vec{B} est **toujours** à flux conservatif, même en régime variable.

2.b Application

On se donne une spire de rayon a autour d'un axe de direction z et un tube de champ créée par la spire. On note r_0 le rayon du tube de champ à l'intérieur de la spire. On suppose le rayon $r(z)$ du tube de champ négligeable devant le rayon a . Calculer $r(z)$.

\vec{B} est à flux conservatif donc on sait que $\pi r_0^2 B_z(z=0) = \pi r(z)^2 B_z(z)$ grâce à notre approximation, car on peut considérer que le champ est égal à celui sur l'axe pour les surfaces sur lesquelles on calcule le flux. Cela se traduit, en vertu de l'expression du champ créée par une spire sur son axe :

$$r(z) = r_0 \left(\frac{a^2 + z^2}{a^2} \right)^{3/4} = r_0 \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{3/4}$$

2.c Formulation locale

Équation de Maxwell-Thomson Anciennement appelée équation de Maxwell-Flux, elle est la quatrième des équations de Maxwell et stipule qu'on a en tout point, que ce soit en régime permanent ou en régime variable, l'égalité :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

3 Circulation du champ magnétique ; théorème d'Ampère

Attention, les résultats qui vont être énoncés dans cette section sont faux en régime variable.

3.a Formulation intégrale

Théorème d'Ampère En régime permanent, si Γ est un contour fermé orienté, on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

où $I_{\text{enlacée}}$ est le flux de \vec{j}_{el} à travers une surface S s'appuyant sur Γ .

Remarque En statique, \vec{j}_{el} est à flux conservatif (c'est la loi des nœuds) donc $I_{\text{enlacée}}$ ne dépend pas du choix de la surface S .

Remarque L'orientation de S est imposée par l'orientation de Γ .

3.b Formulation locale

Équation de Maxwell-Ampère stationnaire En régime stationnaire, on a la relation :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

Conséquence Cette équation implique que

$$\text{div}(\vec{j}) = 0$$

C'est la loi des nœuds.

Équivalence entre les formes intégrale et locale Elle s'obtient aisément avec le théorème de Stokes.

Conservation de la charge Soit V un volume délimité par une surface S . On a le **bilan de charges** suivant :

$$\frac{Q(t+dt) - Q(t)}{dt} = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

et on a $\frac{Q(t+dt) - Q(t)}{dt} = 0$ en régime permanent. Il faut noter le parallèle avec les transferts thermiques, mais remarquer qu'il n'y a jamais de terme source pour la charge.

4 Applications

4.a La recette

- Étude des symétries et des invariances
- Recherche d'un bon contour d'Ampère : il faut de préférence avoir un contour dont les composantes sont orthogonales au champ magnétique ou parallèles au champ magnétique
- Conclure avec le théorème d'Ampère

4.b Fil rectiligne "infini"

On considère une fil rectiligne infini d'axe (Oz) parcouru par une intensité I constante dirigée selon \vec{u}_z .

Pour tout point M, le plan (MOz) est un plan de symétrie des courants. Et puisque la distribution des courants est invariante par translation selon l'axe (Oz) et est invariante par rotation autour de l'axe (Oz), on a :

$$\vec{B} = B_\theta(r, \emptyset, \emptyset) \vec{u}_\theta$$

En appliquant le théorème de Gauss sur un cercle de rayon r , puisque $I_{\text{enlacée}} = I$, on trouve :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

4.c Cylindre "infini" parcouru par une courant inhomogène

On considère un cylindre infini d'axe de révolution (Oz) et de rayon a tel que

$$\vec{j} = \begin{cases} \frac{j_0 r^2}{a^2} \vec{u}_z & \text{si } r < a \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les symétries et les invariances sont les mêmes que dans l'exemple précédent. On choisit encore comme contour d'Ampère un cercle de rayon r et d'axe (Oz). On applique le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

soit $2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$. Or, si $r \leq a$, on a $I_{\text{enlacée}} = \frac{\pi j_0 r^4}{2a^2}$ et si $r \geq a$, on a : $I_{\text{enlacée}} = \frac{\pi j_0 a^2}{2}$. On en déduit :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{j_0}{4} \frac{r^3}{a^2} \vec{u}_\theta & \text{si } r < a \\ \mu_0 \frac{j_0}{4} \frac{a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r \geq a \end{cases}$$

4.d Solénoïde "infini"

On prend l'exemple d'un solénoïde infini avec n spires par unité de longueur. En admettant que $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$, on a par symétrie et invariance $\vec{B}_{\text{int}} = B_z(r)\vec{u}_z$ puis d'après le théorème d'Ampère :

$$B_z = \mu_0 n I$$

On peut montrer que $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$ en trouvant le champ sur l'axe pour une spire puis en intégrant (principe de superposition).

4.e Nappe de courant ; relation de passage

Nappe de courant On considère une nappe de courant située dans le plan (Oxy) avec ε la distance entre deux fils et les intensités I toutes constantes orientées selon $-\vec{u}_y$ et dans le plan $z = 0$.

(M, z, y) est un plan de symétrie et on a invariance par translation dans les directions x et y donc on a :

$$\vec{B} = B_x(x, y, z)\vec{u}_x$$

De plus, $z = 0$ est un plan de symétrie, donc $B_x(-z) = -B_x(z)$. On applique le théorème d'Ampère sur un rectangle de longueur arbitraire et on fait bien attention au signe de $I_{\text{enlacée}}$. On obtient alors :

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 \frac{I}{2\varepsilon} \vec{u}_x & \text{si } z > 0 \\ \mu_0 \frac{I}{2\varepsilon} \vec{u}_x & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Généralisation : relation de passage Pour une densité surfacique de courant \vec{j}_s , on a la relation de passage admise

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Il faut penser à l'homogénéité vecteurs/pseudo-vecteurs et au champ qui s'enroule pour s'en souvenir.

5 Comparaison magnétostatique - électrostatique

Électrostatique	Magnétostatique
Plan de symétrie : \vec{E} dans ce plan.	Plan de symétrie : \vec{B} orthogonal à ce plan.
Plan d'antisymétrie : \vec{E} orthogonal à ce plan.	Plan d'antisymétrie : \vec{B} dans ce plan
Loi de Coulomb	Loi de Biot et Savart
Théorème de Gauss	\vec{B} est à flux conservatif
Maxwell-Gauss (valable en régime variable)	Maxwell-Thomson (valable en régime variable)
\vec{E} est à circulation conservative (statique seulement)	Théorème d'Ampère (statique seulement)
Maxwell-Faraday statique	Maxwell-Ampère statique
$\vec{E} = -\text{grad}(V)$	$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$ avec \vec{A} le potentiel vecteur
$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$	$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$

Chapitre 9

Dipôle magnétostatique

Table des matières

1	Champ créé par un dipôle magnétostatique	77
1.a	Définition ; moment magnétique	77
1.b	Moment magnétique à l'échelle atomique	78
1.c	Champ créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire (admis)	78
1.d	Carte de champ	78
1.e	Analogies et différences avec le dipôle électrostatique	79
2	Actions subies par un dipôle dans un champ magnétique extérieur	79
2.a	Attention	79
2.b	Résultante et moment	79
2.c	Énergie potentielle magnétique (admis)	80
2.d	Généralisation : énergie d'interaction entre deux dipôles	80
3	Expérience de Stern et Gerlach	80

1 Champ créé par un dipôle magnétostatique

1.a Définition ; moment magnétique

Définition Pour un circuit plan orienté parcouru par un courant I entourant une surface S orientée par un vecteur normal \vec{n} , le **moment magnétique** est donné par

$$\vec{M} = IS\vec{n}$$

Il s'exprime en A.m².

Remarque Le sens de I et de \vec{n} sont liés par la règle de la main droite.

Cas de la bobine plate Pour une bobine plate (les spires sont "confondues") de N spires, on a :

$$\vec{M} = NIS\vec{n}$$

1.b Moment magnétique à l'échelle atomique

Moment magnétique orbital Dans le modèle de Bohr, un électron sur une orbite circulaire de moment cinétique quantifié $\theta_0 = n\hbar$ n'émet pas. Son moment magnétique vérifie alors :

$$\vec{M} = \frac{-e}{2m_e} \vec{\theta}_0$$

$\frac{-e}{2m_e}$ est le **facteur gyromagnétique** de l'électron. Le moment magnétique est alors de l'ordre du **magnéton de Bohr** :

$$\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9,274.10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$$

"Rappel" On rappelle que

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \text{ et } L_z = n_l\hbar$$

Spin Le **spin** est un autre moment défini par :

$$\vec{M} = \frac{-eg}{2m_e} \vec{S}$$

où g est la facteur de Landé de l'électron (vaut environ 2). On retrouve l'idée de configuration électronique (n, l, n_e et n_s).

Ordres de grandeur A l'échelle atomique, M est de l'ordre du magnéton de Bohr. Pour un aimant de quelques grammes, M est de l'ordre de 1 A.m^2 .

1.c Champ créé par un dipôle dans l'approximation dipolaire (admis)

Champ créé On admet que, dans l'approximation dipolaire (le dipôle est "vu de loin"), le champ créé est le même que pour un dipôle électrostatique. On a donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left(2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta \right)$$

Remarque En fait, tout est relié par la relation $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$.

1.d Carte de champ

On a une ligne de champ alignée avec le moment magnétique. Les autres lignes de champ sortent du "haut" du dipôle, font comme une patate qui grandit et rentrent par le "bas" du dipôle. Il y a une zone proche du dipôle où on ne peut rien dire car on travaille dans l'approximation dipolaire. Noter la ressemblance avec la carte de champ du champ créé par une spire.

1.e Analogies et différences avec le dipôle électrostatique

En dehors des charges et des courants :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} &= \vec{0} & \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}$$

\vec{M} est un pseudo-vecteur puisque symétriser le problème revient à prendre l'opposé de l'intensité pour qu'elle soit comptée comme strictement positive et donc à inverser le vecteur normal, et donc \vec{M} .

Tout comme le champ électrique, la composante sur \vec{u}_φ de \vec{B} est nulle car le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan d'antisymétrie des courants. On a aussi, comme pour le dipôle électrostatique, une invariance par rotation autour de l'axe (Oz) .

2 Actions subies par un dipôle dans un champ magnétique extérieur

2.a Attention

Dans cette section, on considère un champ magnétique extérieur créé par d'autres courants.

2.b Résultante et moment

Dipôle dans un champ extérieur uniforme Si le champ \vec{B}_{ext} est uniforme, la résultante est nulle, c'est la force de Laplace

$$\vec{R} = \oint_{\Gamma} i d\vec{l} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

En revanche, le moment n'a aucune raison d'être nul et vaut

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

Dans ce cas, l'action mécanique est un couple de forces.

Remarque Il y a des cas où la formule du moment est sans intérêt, par exemple celui où il y a une liaison pivot dans le circuit.

Dipôle dans un champ extérieur non uniforme Si le champ \vec{B}_{ext} est non uniforme mais qu'on se place dans l'approximation dipolaire, (le circuit est petit devant les variations de \vec{B}_{ext}), le moment vaut toujours **à l'ordre 1** :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

2.c Énergie potentielle magnétique (admis)

Énergie potentielle magnétique L'énergie potentielle s'écrit alors

$$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

(penser à une boussole), et on a alors :

$$\vec{R} = -\vec{\text{grad}} \left(\vec{M} \cdot \vec{B}_{\text{ext}} \right)$$

Remarque \vec{M} et \vec{B}_{ext} sont des pseudo-vecteurs donc E_p est un "vrai" scalaire.

Exemple de la boussole Le moment magnétique pivote sur son axe grâce à une liaison pivot parfaite. L'angle entre \vec{B}_{ext} et \vec{M} est noté θ . On a alors grâce à la formule :

$$E_p = -MB_{\text{ext}} \cos(\theta)$$

$\theta = 0$ est donc une position d'équilibre stable et $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable. Avec une information supplémentaire comme le moment d'inertie J de la boussole autour de son axe de rotation, on peut déterminer la pulsation des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

Remarque Dans l'exemple de la boussole, ce sont en réalité les frottements qui permettent à la boussole de s'aligner parfaitement avec le Nord.

2.d Généralisation : énergie d'interaction entre deux dipôles

Énergie d'interaction On admet que

$$E_p = -\vec{M}_1 \cdot \vec{B}_2(P_1) = -\vec{M}_2 \cdot \vec{B}_1(P_2)$$

Remarque Penser à utiliser les formules intrinsèques dans l'étude de l'interaction entre plusieurs dipôles, car les formules générales du cours avec les systèmes de coordonnées ne sont valables que pour le système de coordonnées du dipôle considéré : les systèmes de coordonnées de différents dipôles ne sont donc pas compatibles.

3 Expérience de Stern et Gerlach

Expérience de Stern et Gerlach La projection de \vec{S} est quantifiée :

$$\vec{S} \cdot \vec{u}_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

L'expérience consiste à faire sublimer des atomes d'argent, garder ceux ayant uniquement une vitesse selon \vec{u}_x et les faire passer dans un champ magnétique inhomogène orienté selon \vec{u}_z . On s'attendrait alors à observer une distribution continue (déviations selon $\vec{M} \cdot \vec{u}_z$) mais on n'observe dans les faits que 2 raies.

Chapitre 10

Équations de Maxwell

Table des matières

1	Équations de Maxwell ; conséquences	81
1.a	Postulats de l'électromagnétisme	81
1.b	Cas statique	82
1.c	Transformations non relativistes des champs	82
1.d	Conservation de la charge	83
1.e	Formes intégrales des équations de Maxwell	84
1.f	Potentiels associés au champ	85
1.g	Généralisation des relations de passage	85
2	Propagation du champ électromagnétique	85
2.a	Équation de propagation dans le vide	85
2.b	Propagation par couplage des champs	86
2.c	La lumière, une onde électromagnétique	86
3	Énergie du champ électromagnétique	86
3.a	Interaction volumique entre le champ et les porteurs ; exemples	86
3.b	A la recherche d'un bilan sur l'énergie des champs	87
3.c	Identité de Poynting	88
3.d	Deux exemples	88

1 Équations de Maxwell ; conséquences

1.a Postulats de l'électromagnétisme

Force de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Équation de Maxwell-Thomson ou équation de Maxwell-flux

$$\text{div} \left(\vec{B} \right) = 0$$

Équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.b Cas statique

Si \vec{E} et \vec{B} sont indépendants du temps, les équations sont découplées et on retrouve les équations données dans les chapitres d'électrostatique et de magnétostatique :

Électrostatique	Magnétostatique
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
$\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

1.c Transformations non relativistes des champs

Pour plus de précisions, cf. la page Wikipédia "Transformation de Lorentz du champ magnétique".

Attention On s'apprête ici à effectuer un raisonnement fallacieux qui donne néanmoins une formule juste.

Situation On se place dans le cas d'un référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel R avec une vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{v}(O'/R)$. On pose $\beta = \frac{v_e}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Résultat On cherche à obtenir la formule de Lorentz avec $v_e \ll c$ et $cB^* \gg E^*$, c'est-à-dire la limite non relativiste "magnétique" :

$$\vec{B}' = \vec{B} ; E'_x = E_x ; E'_y = E_y - \beta c B_z ; E'_z = E_z + \beta c B_y$$

"Démonstration" On utilise l'invariance de la force de Lorentz par changement de référentiel et la loi de composition des vitesses classique. On a $\vec{F}' = \vec{F}$, soit

$$q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = q \left(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' \right)$$

Or, d'après la loi de composition des vitesses, $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$ donc on a pour tout \vec{v}' :

$$\vec{E} + \left(\vec{v}' + \vec{v}_e \right) \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'$$

En particulier, pour $\vec{v}' = \vec{0}$, on obtient $\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}'$ d'où on déduit que pour tout \vec{v}' , $\vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{v}' \wedge \vec{B}'$ et donc que $\vec{B} = \vec{B}'$.

Limite non relativiste "magnétique" Elle est très utile pour l'induction :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

Exemple pour souligner l'importance de l'hypothèse "dominante magnétique" On s'intéresse à un cylindre infini d'axe (Oz) et de rayon a dans un référentiel R . La densité volumique de charge est de ρ_0 dans le cylindre et 0 en-dehors. On regarde ensuite ce cylindre dans un référentiel en translation à \vec{v}_e avec $\vec{v}_e = -v_e \vec{u}_z$, les charges ont donc un mouvement à $-\vec{v}_e$. On cherche à exprimer \vec{E} , \vec{B} , \vec{E}' et \vec{B}' pour $r < a$.

Les symétries et les invariances dans le cas de R donnent rapidement $\vec{E} = E_r(r, \emptyset, \emptyset) \vec{u}_r$ puis le théorème de Gauss fournit $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\pi\epsilon_0} \vec{u}_r$ si $r < a$. Et on a $\vec{B} = \vec{0}$ car il n'y a pas de courant.

Dans R' , \vec{E} ne change pas. On a $\vec{j} = -nq\vec{v}_e = -\rho_0\vec{v}_e$ car il n'y a qu'un seul type de porteurs de charges. Les symétries et les invariances donnent rapidement $\vec{B}' = B_\theta(r, \emptyset, \emptyset) \vec{u}_\theta$. L'application du théorème d'Ampère sur un cercle d'axe (Oz) et de rayon $r < a$ fournit rapidement $\vec{B}' = -\mu_0\rho_0 v_e \frac{r}{2} \vec{u}_\theta$

Limite non relativiste "électrique" De façon symétrique, il existe une limite non relativiste à dominante "électrique" qui stipule que

$$\vec{E}' = \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B}' \neq \vec{B}$$

1.d Conservation de la charge

Conservation de la charge On l'obtient en 1D en faisant un bilan

$$Q(t + dt) - Q(t) = I(x) - I(x + dx)$$

ou en utilisant

$$\frac{Q(t + dt) - Q(t)}{dt} = \Phi$$

et le théorème de Green-Ostrogradski. Elle s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left(\vec{j} \right) = 0$$

Les équations de Maxwell permettent de la retrouver : il suffit d'appliquer l'opérateur divergence à l'équation de Maxwell-Ampère.

1.e Formes intégrales des équations de Maxwell

Maxwell-Thomson intégrale \vec{B} est à flux conservatif (théorème de Green-Ostrogradski)

Maxwell-Gauss intégrale C'est le théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot dS \vec{n} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

(théorème de Green-Ostrogradski)

Maxwell-Faraday intégrale Avec le théorème de Stokes, on montre que pour un contour fermé Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot dS \vec{n}$$

Loi de Faraday (induction de Neumann) Si le circuit / contour Γ est fixe, on a

$$e = -\frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t}$$

où $\Phi_{\vec{B}}$ est le flux de \vec{B} à travers une surface de bord γ et e est la force électromotrice, *ie* l'énergie fournie par unité de charge. **Attention**, en réalité, le "générateur" est réparti sur l'ensemble du circuit avec la loi de Faraday.

Maxwell-Ampère intégrale / Théorème d'Ampère généralisé Avec le théorème de Stokes, on obtient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacée}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\vec{E}}}{\partial t}$$

Attention, $I_{\text{enlacée}}$ et $\Phi_{\vec{E}}$ dépendent de S , mais leur somme ne dépend que de Γ .

Exemple du condensateur On considère un condensateur plan de surface S avec une intensité i et une normale \vec{u}_z en régime lentement variable (ARQS) et on néglige les effets de bord, si bien que l'on a

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{hors du condensateur} \\ \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z & \text{dans le condensateur} \end{cases}$$

On considère un contour circulaire Γ autour de l'axe z . On choisit comme surfaces S_1 la surface du disque et S_2 une surface qui enveloppe une armature du condensateur. On a donc avec le théorème d'Ampère généralisé :

- pour S_1 :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + 0$$

- pour S_2 :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Q(t)S}{\varepsilon_0 S} \right) = \mu_0 \frac{dQ}{dt}$$

Si bien que l'on retrouve $i = \frac{dQ}{dt}$

1.f Potentiels associés au champ

Potentiels (HP) $\text{div}(\vec{B}) = 0$ donc il existe \vec{A} tel que $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$. On en déduit d'après l'équation de Maxwell-Faraday que

$$\text{rot} \left(E + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

On en déduit que

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

1.g Généralisation des relations de passage

Relations de passage Ce sont les mêmes qu'en électrostatique et en magnétostatique :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

2 Propagation du champ électromagnétique

2.a Équation de propagation dans le vide

Onde dans le vide et équation de d'Alembert Pour trouver l'équation de d'Alembert, on part de la relation :

$$\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad}(\text{div}) - \Delta$$

et des équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) pour arriver à **l'équation de d'Alembert** :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

et de même pour \vec{B} . Les ondes progressives se déplaçant à une célérité c telle que $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$ sont solution de l'équation de d'Alembert.

Cas 1D On se place dans le cas où $\vec{E} = E_x(x, t)\vec{u}_x$. Alors, l'équation de d'Alembert devient

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

Toute fonction de la forme $(x, t) \mapsto f(x - ct)$ avec $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ est alors solution.

Remarque L'équation de d'Alembert (qu'on appelle aussi parfois équation d'onde) est invariante par renversement du temps, contrairement à l'équation de la diffusion thermique.

2.b Propagation par couplage des champs

On prend l'exemple d'une suite de masses repérées par leurs abscisses x_i et toutes de masse m . Elles sont reliées à la précédente et à la suivante par des ressorts de mêmes longueur à vide l et de même raideur k . On note $l_i = x_{i+1} - x_i$ et $v_i = \frac{dx_i}{dt}$. On a alors $\frac{dl_i}{dt} = v_{i+1} - v_i$, cette équation couplant une dérivée temporelle (membre de gauche) et une dérivée spatiale (membre de droite).

On applique le principe fondamental à la masse i , ce qui donne :

$$m \frac{dv_i}{dt} = k(l_i - l) - k(l_{i-1} - l)$$

et on a donc un couplage entre une dérivée temporelle et une dérivée spatiale :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{k}{m} (l_i - l_{i-1})$$

2.c La lumière, une onde électromagnétique

Hertz La première vérification expérimentale de l'existence d'onde électromagnétiques a été effectuée par Hertz, à qui on doit les ondes hertziennes et l'unité Hz.

Postulat de Maxwell On trouve que $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ pour la lumière, donc Maxwell postule que la lumière est une onde électromagnétique.

3 Énergie du champ électromagnétique

3.a Interaction volumique entre le champ et les porteurs ; exemples

Force volumique La force de Lorentz sur un petit volume s'écrit :

$$\delta \vec{F} = \sum_{q_i \in \delta \tau} q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B} \right) = \rho \delta \tau \vec{E} + \vec{j} \delta \tau \wedge \vec{B}$$

La densité volumique de la force de Lorentz s'écrit donc

$$\vec{f}_v = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Puissance volumique cédée aux porteurs On la calcule à partir du travail de la force de Lorentz puisque la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas :

$$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Exemple On considère un fil de rayon a orienté selon un axe \vec{u}_z . Il est constitué d'un plasma neutre avec des ions fixes et des électrons homocinétiques se déplaçant à une vitesse $+v\vec{u}_z$ avec une densité n . Le fil est parcouru par une intensité I compté positivement (donc orientée selon $-\vec{u}_z$). On suppose que la pression à l'extérieur du fil est négligeable. Quelle est la pression en $r = 0$?

Stratégie : on détermine \vec{B} avec les symétries et le théorème d'Ampère, puis on calcule $\vec{j} \wedge \vec{B}$ et on utilise l'équation de la statique des fluides.

On calcule \vec{B} pour $r < a$. Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants et on a des invariances pour rotation autour de l'axe \vec{u}_z et par translation selon \vec{u}_z , si bien que

$$\vec{B} = B_\theta(r, \emptyset, \times) \vec{u}_\theta$$

Le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe (Oz) et de rayon r fournit alors :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

Or, puisqu'on a un seul type de porteurs de charges mobiles, on a

$$\vec{j} = -nev\vec{u}_z = -\frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$$

La densité volumique de force vaut donc

$$\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B} = -\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 a^4} \vec{u}_r$$

Or, l'équation de la statique des fluides s'écrit $\vec{0} = \vec{f}_v \delta\tau - \overrightarrow{\text{grad}}(P) \delta\tau$ donc après projection sur \vec{u}_r :

$$0 = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 a^4} r - \frac{dP}{dr}$$

d'où après intégration entre 0 et a avec l'hypothèse de négligeabilité de $P(a)$:

$$P(0) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2}$$

Cette expression est bien homogène (utiliser \vec{B} et \vec{F}_{Laplace})

3.b A la recherche d'un bilan sur l'énergie des champs

Bilan de puissance On introduit l'énergie magnétique U contenue dans un volume V et ω l'énergie volumique correspondante :

$$U = \iiint_V \omega \delta\tau$$

On introduit le vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ tel que le flux de $\vec{\pi}$ à travers S soit la puissance transverse. Le bilan s'écrit alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \oint_S \vec{\pi} \cdot dS \vec{n} - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E}$$

le premier terme étant la puissance transmise à l'extérieur et le second terme étant la puissance transmise à l'intérieur. Grâce au théorème de Green-Ostrogradski, on en déduit sa version locale :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}(\vec{\pi}) = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Il faut noter l'analogie avec la conservation de la charge et les bilans en transferts thermiques. On peut retrouver cette expression à partir des équations de Maxwell en effectuant \vec{E} scalaire Maxwell-Ampère moins \vec{B} scalaire Maxwell-Faraday et en utilisant l'identité

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot}(\vec{E}) - \vec{E} \cdot \text{rot}(\vec{B})$$

Cela donne les expressions :

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

On retrouve ainsi les expressions des énergies stockées dans un condensateur et une bobine.

3.c Identité de Poynting

On a les différentes formules :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}(\vec{\pi}) = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

3.d Deux exemples

Exemple 1 : Condensateur dans l'ARQS électrique Dans l'ARQS électrique, le champ dans la condensateur de section S , de charge $Q(t)$ et d'épaisseur e vaut

$$\vec{E}_1 = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

Ce champ électrique est la source d'un champ magnétique \vec{B}_2 . D'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\text{rot} \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$ avec $\vec{j} = \vec{0}$. Or, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de

\vec{E}_1 donc $\vec{B}_2 = B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$. L' théorème d'Ampère généralisé sur un cercle d'axe (Oz) de rayon r fournit :

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = 0 + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$$

soit

$$2\pi r B_\theta = \varepsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{dQ}{dt}$$

donc

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 r}{2S} \frac{dQ}{dt} \vec{u}_\theta$$

A son tour, \vec{B}_2 crée \vec{E}_3 , qui crée \vec{B}_4 , etc.

Exemple 2 : Solénoïde dans l'ARQS magnétique Dans l'ARQS magnétique, $\vec{B}_0 = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$. $\vec{B}_0(t)$ est la source de $\vec{E}_1(t)$. La plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants (causes indirectes de \vec{E}_1) et par invariances par rotation et translation, on obtient :

$$\vec{E}_1 = E_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

Remarquons que les lignes de champ de \vec{E}_1 sont des cercles et sont donc fermées, **ce qui ne pose pas de problème car on est en régime variable**. On applique la loi de Faraday avec comme contour Γ un cercle d'axe (Oz) et de rayon r et comme surface associée S la surface du disque associé. On a alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

soit $2\pi r E_1 = -\mu_0 n \pi r^2 \frac{di}{dt}$ donc on obtient, dans le solénoïde :

$$\vec{E}_1 = - \frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta$$

Mais \vec{E}_1 est la cause de \vec{B}_2 . Puisque $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie et par invariances par rotation et translation, on a :

$$\vec{B}_2 = B_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

On admet que $B_z(r=0) = 0$. En appliquant le théorème d'Ampère sur un cadre de hauteur H et de longueur r dont l'un des côtés est selon (Oz), on obtient :

$$0 + 0 + 0 - B_2 H = -\mu_0 \frac{n}{c^2} \frac{d^2 i}{dt^2} H \frac{r^2}{4}$$

et par conséquent :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 n}{c^2} \frac{d^2 i}{dt^2} \frac{r^2}{4} \vec{u}_z$$

Si le courant est sinusoïdal de pulsation ω , on a :

$$\vec{B}_2 = - \frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \vec{B}_0$$

En notant a le rayon du solénoïde, la condition de validité de l'ARQS magnétique s'écrit alors :

$$a\omega \ll c$$

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) La plus fréquente est la magnétique $E \ll cB$: on remplace $I(t)$ par I , la propagation est instantanée et on néglige ρ ainsi que le courant de déplacement $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On considère alors que \vec{B} est la seule source de \vec{E} . Parfois, on considère l'ARQS électrique $E \gg cB$: on néglige alors $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et \vec{j} .

Chapitre 11

Conducteur soumis à un champ électromagnétique

Table des matières

1	Conduction électrique dans les métaux	92
1.a	Modèle de Drude en régime stationnaire	92
1.b	Loi d'Ohm statique : formulations locale et intégrale	92
1.c	Puissance Joule	93
1.d	Effet Hall	93
1.e	Généralisation aux régimes variables ; domaine de validité de la loi d'Ohm . .	93
1.f	ARQS dans un conducteur ohmique	94
2	Actions de Laplace sur un conducteur	94
2.a	Densité volumique de force de Laplace	94
2.b	Application : ancienne définition de l'Ampère	95
2.c	Actions de Laplace en champ uniforme	95
2.d	Exemples	96
3	Induction de Neumann	96
3.a	Loi de Faraday ; loi de Lenz	97
3.b	Auto-induction	97
3.c	Couplage de deux circuits par induction mutuelle	97
3.d	Courants de Foucault	99
4	Induction de Lorentz	99
4.a	Loi de Faraday ; loi de Lenz	99
4.b	Exemple/recette	100
4.c	Puissance des actions de Laplace	101

1 Conduction électrique dans les métaux

1.a Modèle de Drude en régime stationnaire

Modèle de Drude Pour un métal, les porteurs sont les électrons de valence.

- Un seul électron par atome métaux alcalins
- Les électrons se déplacent librement, le noyau et les électrons de cœur (cations) sont fixes

On en déduit la densité moyenne d'électrons $n_e = \frac{\rho N_A}{M} = 10^{29} \text{ m}^{-3}$. Le mouvement des électrons est décrit par deux modélisations :

- Lorentz plus frottements : $\frac{m}{\tau} \vec{v}$
- les chocs se produisent tous les τ et renvoient l'atome avec une vitesse nulle

Dans les deux cas, on a :

$$\langle v \rangle = \frac{\tau q}{m} \vec{E}$$

Ordres de grandeurs Pour le cuivre, $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$.

1.b Loi d'Ohm statique : formulations locale et intégrale

Loi d'Ohm Si $T \gg \tau$, on a $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ avec $\sigma > 0$ la conductance. Dans le modèle de Drude, on a :

$$\sigma = \frac{n_0 q^2 \tau}{m}$$

Connaissant σ , on peut estimer τ , ce qui est valable si $f \ll 10^{14} \text{ Hz}$ (donc valable pour les ondes radio mais pas pour les ondes visibles). La puissance dissipée par effet Joule s'écrit alors :

$$P_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

Loi d'Ohm dans un conducteur On justifie l'ARQS magnétique en établissant l'équation différentielle sur ρ à l'aide de la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et des équations de Maxwell. On trouve un temps caractéristique $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \approx 10^{-18} \text{ s}$: l'électroneutralité du conducteur est donc très vite atteinte. On montre également que

$$\varepsilon \omega E = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Loi d'Ohm intégrale Comme pour les résistances thermiques et les capacités, on calcule la résistance d'un conducteur de conductivité γ , de longueur L et de section S par :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

Exemple bicornu A COMPLÉTER

Remarque : solution particulière de l'équation de Laplace en cylindriques On vient d'observer que $V = \frac{\theta}{r}$ est une solution en coordonnées cylindriques de l'équation $\Delta V = 0$.

Remarque : densité de charges en statique dans un conducteur En statique, dans un conducteur (γ uniforme), on a $\rho = 0$. En effet, $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss, mais $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$ d'après la loi d'Ohm donc $\rho = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \operatorname{div} \vec{j}$. Or, $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ d'après l'équation de Maxwell-Ampère en statique, donc $\rho = 0$.

1.c Puissance Joule

Puissance dissipée par unité de volume La puissance dissipée par effet Joule par unité de volume vaut

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

Puissance dissipée La puissance dissipée par effet Joule dans un conducteur métallique vaut

$$\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$$

Preuve dans un cas simple On se place dans le cas d'une résistance cylindrique de longueur L , de section S , de conductivité γ parcourue par une intensité I et avec une tension u . On a $E = \frac{|u|}{L}$ et alors :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \delta\tau = SL \times \gamma \frac{u^2}{L^2} = \frac{u^2}{R}$$

1.d Effet Hall

On applique le principe fondamental à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0 - e\vec{E}_{\text{Hall}} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, en régime permanent, $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ donc en projection sur \vec{u}_y en régime permanent, on obtient :

$$\vec{E}_{\text{Hall}} \cdot \vec{u}_y = +v_x B_z$$

1.e Généralisation aux régimes variables ; domaine de validité de la loi d'Ohm

Modèle de Drude en régime sinusoïdal forcé En régime sinusoïdal avec $e^{+i\omega t}$, cela devient

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \cancel{e\vec{v} \wedge \vec{B}} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

On néglige le terme en $e \vec{v} \wedge \vec{B}$ car il est d'ordre $\frac{E}{c}$.

Généralisation de la loi d'Ohm On passe en notation complexe et le modèle de Drude en régime sinusoïdal forcé devient $im\omega \underline{\vec{v}} = -\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{v}}$. On en déduit :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e}{\frac{m}{\tau} + im\omega} \underline{\vec{E}}$$

Or, $\underline{\vec{j}} = \vec{0} - ne \underline{\vec{v}}$, le terme $\vec{0}$ correspondant aux ions fixes. Or, $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ donc on obtient une **loi d'Ohm généralisée**

$$\underline{\vec{j}} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

Ainsi, $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont diphasés. A basses fréquences, il y a de l'effet Joule ; à hautes fréquences, $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont en quadrature et il n'y a pas d'effet Joule.

Remarque Si $\underline{\gamma} \in \mathbb{R}_+^*$, il y a de l'effet Joule. Si $\underline{\gamma} \in i\mathbb{R}$, il n'y a pas d'effet Joule.

1.f ARQS dans un conducteur ohmique

Électroneutralité La conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$. Or, $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ d'après la loi d'Ohm. En passant en notation complexe et en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient :

$$\underline{\rho} \left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} + i\omega \right) = 0$$

donc $\underline{\rho} = 0$.

Condition 1 Loi d'Ohm statique, $\omega\tau \ll 1$. Pour le cuivre, cela correspond à $\omega \ll 10^{14}$ rad/s, ce qui est peu restrictif.

Condition 2 Négliger le courant de déplacement : $\omega \ll \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0}$ Pour le cuivre, $\gamma_0 \approx 10^7$ S/m et $\varepsilon_0 = 8,89 \cdot 10^{-12}$ F/m, donc cela correspond à $\omega \ll 10^{18}$ rad/s, ce qui est très peu restrictif.

Résumé $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$; $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et $\text{div} \vec{E} = 0$

2 Actions de Laplace sur un conducteur

2.a Densité volumique de force de Laplace

Force de Laplace Un circuit Γ dans un champ \vec{B} subit une force locale appelée **force de Laplace**

$$\delta \vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Force de Laplace volumique La force volumique associée est donnée par

$$\vec{f}_v = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

2.b Application : ancienne définition de l'Ampère

La force de Laplace servait de définition à l'Ampère : 2 fils infinis parallèles espacés d'un mètre parcourus par 1 Ampère subissent une force linéique de $2.10^{-7} \text{ N.m}^{-1}$.

2.c Actions de Laplace en champ uniforme

Résultante et moment pour l'intégralité du circuit La résultante et le moment des forces de Laplace sont données par :

$$\vec{R} = \oint_C i d\vec{l} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \oint_C \vec{OP} \wedge \left(i d\vec{l} \wedge \vec{B}_{\text{ext}} \right)$$

La partie due au champ propre est nulle (elle peut déformer le circuit, mais est très faible). Ces expressions se simplifient :

- si \vec{B}_{ext} est uniforme, $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$
- si \vec{B}_{ext} varie peu, on est dans l'approximation dipolaire et alors $\vec{R} = -\vec{\text{grad}}(E_p) = \vec{\text{grad}}(\vec{M} \cdot \vec{B})$

Cela est faux si on ne considère qu'une partie du circuit.

Résultante et moment pour une portion de circuit Si on considère uniquement une portion du circuit, il faut dessiner les forces élémentaires de Laplace sur cette portion et intégrer uniquement sur la portion en question.

Exemple pour une portion de circuit On considère la partie du circuit qui est une barre en rotation autour d'un axe fixe et qui a un contact électrique sans frottement à l'autre bout. On a :

$$\delta \vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} = -I dr \vec{u}_\theta$$

On en déduit alors que

$$\vec{R} = \int_{\text{barre}} \delta \vec{F} = -ILB \vec{u}_\theta$$

Puis, avec un bras de levier, on a :

$$\delta \mathcal{M}_{Oz} = \left(\vec{OP} \wedge \delta \vec{F} \right) \cdot \vec{u}_z = -IrBdr$$

donc on obtient finalement **pour la barre** :

$$\mathcal{M}_{Oz} = -\frac{1}{2} IL^2 B$$

2.d Exemples

Exercice 12 TD7 On cherche à calculer le champ au voisinage de l'axe connaissant le champ sur l'axe. On utilise le fait que \vec{B} est à flux conservatif sur un cylindre de côtes z et $z + dz$ et de rayon r :

$$0 = \pi r^2 (B_0(z + dz) - B_0(z)) + B_r^{(1)}(r, z) 2\pi r dz$$

donc on en déduit qu'à l'ordre 1 :

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz}$$

Au voisinage de l'axe, il n'y a pas de courant donc \vec{B} y est à circulation conservative. On calcule alors la circulation sur un cadre rectangulaire de côtes z et $z + dz$ qui passe par l'axe Oz et dont la "hauteur" vaut r :

$$0 = B_0(z)dz + \int_0^r B_r(z + dz, r') dr' - B_z(z, r)dz - \int_0^r B_r(z, r') dr'$$

donc on en déduit que

$$B_z = B_0 + \frac{d}{dz} \int_0^r B_r(z, r') dr' = B_0 - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dz^2} + O(r^4)$$

Exemple : Action d'une spire sur une petite spire On considère une grande spire de rayon a parcourue par un courant i et une petite spire (assimilée à un moment magnétique) de rayon a' parcourue par un courant i' . Les spires sont coaxiales et à une distance d l'une de l'autre. On cherche à calculer la résultante des actions de la spire sur le dipôle. On admet que sur l'axe :

$$\overrightarrow{B_{\text{spire}}} = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Plan A On utilise $E_p = -\vec{M} \cdot \overrightarrow{B_{\text{spire}}}$ puis $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

Plan B On utilise la troisième loi de Newton et le champ créé par le dipôle (c'est la seule approche possible si on ne nous donne pas $\overrightarrow{B_{\text{spire}}}$)

Plan C Calculer $\overrightarrow{B_{\text{spire}}}$ au voisinage de l'axe (cf. exercice 12 TD 7, l'exemple précédent) puis intégrer les forces élémentaires de Laplace.

Résultat On trouve un résultat qui vaut

$$\vec{F} = -\frac{3\pi}{2} \mu_0 i i' a^2 a'^2 \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

3 Induction de Neumann

On considère ici \vec{B} variable et un circuit fixe.

3.a Loi de Faraday ; loi de Lenz

Loi de Faraday On dispose alors des lois de Faraday locale ou intégrale

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$$

Les orientations de \vec{n} et de e (pour $\Phi_{\vec{B}}$) sont liées.

Loi de Lenz L'induction, par ses effets, s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

Remarque Lors du calcul du flux $\Phi_{\vec{B}}$, on a par principe de superposition

$$\Phi_{\vec{B}} = \Phi_{\text{propre}} + \Phi_{\text{ext}}$$

3.b Auto-induction

Flux propre ; inductance propre Le flux propre est proportionnel à i , on note L l'inductance, le coefficient de proportionnalité associé :

$$\Phi_{\text{propre}} = Li$$

L est positif et s'exprime en Henry (H). L ne dépend pas de la convention d'orientation choisie pour i . L peut être calculé en exprimant le flux ou en utilisant une approche énergétique avec la formule :

$$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Exemple : un calcul d'inductance propre On considère un solénoïde quasi-infini de N spires et de longueur H parcouru par une intensité i . Le champ magnétique crée vaut alors :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{N}{H} i \vec{u}_z & \text{dans le solénoïde} \\ \vec{0} & \text{en-dehors} \end{cases}$$

Le flux propre vaut alors :

$$\Phi_{\text{propre}} = N \Phi_{\text{à travers une spire}} = N \pi a^2 \mu_0 \frac{N}{H} i$$

On en déduit que

$$L = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2}{H}$$

On vérifie bien que $L \geq 0$, que L s'exprime en H et que la dépendance est en N^2 .

3.c Couplage de deux circuits par induction mutuelle

Exemples de systèmes fonctionnant par induction mutuelle Les transformateurs, les chargeurs sans contact, les plaques à induction, etc.

Couplage de bobines En l'absence de flux extérieur, on a avec le théorème de superposition :

$$\Phi_{\text{à travers 1}} = \Phi_{\text{propre}} + \Phi_{2 \rightarrow 1} = L_1 i_1 + M_{2 \rightarrow 1} i_2$$

Théorème de Neumann (admis) Le théorème de Neumann stipule que

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$$

qu'on appelle alors l'**inductance mutuelle**, et qu'on note alors M . M s'exprime en Henry (H). L'inductance mutuelle dépend de la position relative des deux circuits et dépend des orientations de i_1 et i_2 : elle peut donc être négative.

Exemple : un calcul de M On considère deux solénoïdes quasi-infinis de même longueur H . Le solénoïde 1 a N_1 spires, est de rayon a_1 et est parcouru par une courant i_1 . Il contient le solénoïde 2 qui a N_2 spires, est de rayon a_2 et est parcouru par une courant i_2 . On a au niveau du circuit 2 :

$$\vec{B}_1 = \mu_0 i_1 \frac{N_1}{H} \vec{u}_z$$

donc on en déduit que

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \Phi_{1 \rightarrow \text{une spire de 2}} = \frac{1}{H} \mu_0 N_1 N_2 \pi a_2^2 i_1$$

et donc on obtient la valeur :

$$M = \pi \mu_0 N_1 N_2 \frac{a_2^2}{H}$$

si $a_2 < a_1$. M est bien en H et est positive. M a une dépendance en $N_1 N_2$ ce qui est rassurant si on augmente le nombre de spires de 1 ou de 2.

Énergie stockée L'énergie stockée dans un couplage par inductance mutuelle est

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

(faire un bilan électrique sur les deux circuits, puis sommer les équations électriques multipliées par la bonne intensité).

Inégalité sur M Or, on sait que E_{mag} est positive comme l'intégrale d'une énergie positive. Si on fixe $i_2 \neq 0$, on a alors pour tout i_1 :

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0$$

En termes de discriminant, cela se traduit par $\Delta = (M^2 - L_1 L_2) i_2^2 \leq 0$ et par conséquent on a l'inégalité :

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

Exemple du transformateur On utilise deux solénoïdes coaxiaux de rayons très proches $a_1 \approx a_2 \approx a$ et les expressions précédentes des inductances et de la mutuelle. On cherche à exprimer u_1 en secondaire ouvert. La loi de Faraday fournit :

$$e = -\frac{d}{dt}(\Phi_{\text{propre } 1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}) = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

La loi des mailles sur la maille 1 donne $u_1 + e_1 = R_1 i_1$ donc

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \underbrace{M \frac{di_2}{dt}}_{=0}$$

De même,

$$u_2 = \underbrace{L_2 \frac{di_2}{dt}}_{=0} + M \frac{di_1}{dt} + \underbrace{R_2 i_2}_{=0}$$

En passant en régime sinusoïdal forcé, on a les expressions :

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 \\ \underline{u}_2 = jM\omega\underline{i}_1 \end{cases}$$

D'où on en déduit la formule :

$$\underline{u}_2 = \frac{jM\omega}{R_1 + jL_1\omega} \underline{u}_1$$

Si $R_1 \ll L\omega$, on a

$$\underline{u}_2 = \frac{M}{L_1} \underline{u}_1 = \frac{N_2}{N_1} \underline{u}_1$$

Dans ce cas, si $N_2 > N_1$, alors $\underline{u}_2 > \underline{u}_1$, et on parle de transformateur élévateur de tension. Dans le cas contraire, on parle de transformateur abaisseur de tension.

3.d Courants de Foucault

Courants de Foucault Les courants de Foucault sont dus à l'induction dans un conducteur "massif". Il peuvent notamment servir au freinage magnétique et à la cuisson par induction.

Méthode On part de \vec{B} variable dans le temps. On en déduit \vec{E} avec l'équation de Maxwell-Faraday, puis on déduit \vec{j} de \vec{E} grâce à la loi d'Ohm statique. On peut ensuite obtenir la puissance volumique avec la formule

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

Exemple Voir l'exercice 13 du TD8, corrigé en séance de TD par VdC

4 Induction de Lorentz

4.a Loi de Faraday ; loi de Lenz

Loi de Lenz L'induction, par ses effet, s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

Loi de Faraday Pour un circuit filiforme, on a :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

le signe $-$ traduit la loi de Lenz.

Roue de Barlow Dans le cas de la roue de Barlow (le système est complété par une roue qui tourne sans frottement), il faut faire autrement car le circuit n'est plus filiforme.

Champ électro-moteur Pour se sortir du pétrin de la roue de Barlow, on peut appliquer la loi d'Ohm locale dans le référentiel lié au conducteur $\vec{j}' = \gamma \vec{E}'$ puis effectuer une transformation avec la force de Lorentz :

$$\vec{j}' = \gamma \left(\vec{E} + \underbrace{\vec{v}_{\text{conducteur}} \wedge \vec{B}}_{\text{champ électro-moteur}} \right)$$

4.b Exemple/recette

Analyse qualitative La force électromotrice E imposée par le générateur donne l'intensité i par la loi des mailles. Cette intensité permet d'exprimer les forces de Laplace élémentaires et/ou leur moment, puis on peut appliquer le théorème mécanique adapté (théorème de la résultante ou du moment cinétique) pour déterminer la grandeur géométrique qui varie (angle ou longueur). Cette variation géométrique du système fait changer le flux de \vec{B} , ce qui crée une force électromotrice induite d'après la loi de Faraday.

Recette Il faut expliquer tout cela à l'oral et mettre en forme les équations caractérisant les différentes étapes de ce processus pour répondre à la question posée. Notamment, on établira les équations électrique et mécanique, et on pourra ajouter l'équation électrique multipliée par i à l'équation mécanique multipliée par v ou θ pour obtenir le bilan de puissance.

Exemple On applique le théorème de la résultante à la tige dans le référentiel galiléen lié aux rails, en projection sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{l} = -k(l - l_0) + \underbrace{\vec{N}_1 \cdot \vec{u}_x + \vec{N}_2 \cdot \vec{u}_x}_{=0 \text{ (pas de frottement)}} + \vec{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{u}_x$$

Or, $\delta \vec{F}_{\text{Lap}} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = -idlB\vec{u}_x$ donc \vec{F}_{Lap} On obtient donc l'équation mécanique (M) :

$$m\ddot{l} = -k(l - l_0) - iBL$$

En appliquant la loi des mailles au circuit électrique équivalent, on obtient $E = Ri - e$. Or, d'après la loi de Faraday, on a

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec $\Phi = -LB(a + l)$, donc on obtient l'équation électrique (E) :

$$E = Ri - BL\dot{l}$$

En faisant (E) $\times i$ - (M) $\times \dot{l}$, on obtient finalement, après élimination des termes nuls et écriture sous forme primitive :

$$Ei - Ri^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{l}^2 \right)$$

4.c Puissance des actions de Laplace

Induction de Lorentz Couplage mécanique-électrique (alternateur, moteur) : \vec{B} est fixe et le circuit est mobile. La loi de Faraday reste vraie si l'on ne modifie pas le circuit (interrupteurs, boucles...). Deux approches classiques :

- Calculer Φ puis $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, établir l'équation électrique (E) puis l'équation mécanique (M) et effectuer le bilan de puissance $(E) \times i + (M) \times \dot{x}$
- Calculer la puissance des forces de Laplace et en déduire la force électromotrice induite (même puissance), si l'on ne peut pas calculer le flux.

Chapitre 12

Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

Table des matières

1	Rappels	104
1.a	Équation de la propagation dans le vide	104
1.b	Relation de dispersion dans le vide	104
2	Ondes électromagnétiques planes	104
2.a	Ondes sphériques et ondes planes	104
2.b	Solutions de l'équation de d'Alembert en dimension 1	104
2.c	Structure d'une OPP	105
3	Ondes planes progressives harmoniques	105
3.a	Modèle des OPPH	105
3.b	Utilisation de la notation complexe ; relations de structure d'une OPPH . . .	105
3.c	Intérêt et limites du modèle de l'OPPH	106
4	États de polarisation	106
4.a	Polarisation rectiligne	107
4.b	Polarisation circulaire	107
4.c	Autres états de polarisation (culture)	108
4.d	Ondes électromagnétiques émises par des sources réelles	108
4.e	Polariseur ; loi de Malus	108
5	Énergie associée à une onde électromagnétique	109
5.a	Compatibilité avec le théorème de Poynting	109
5.b	Puissance instantanée d'une OPP à travers une surface ; vitesse d'énergie . .	110
5.c	Notation complexe et moyennes de grandeurs quadratiques	110

1 Rappels

1.a Équation de la propagation dans le vide

Définition du vide Le vide est défini dans ce cadre comme l'absence de charge ($\rho = 0$) et l'absence de courant ($\vec{j} = \vec{0}$).

Propagation du champ électrique dans le vide Avec $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \overrightarrow{\Delta}$, on obtient :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Propagation du champ magnétique dans le vide Avec $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \overrightarrow{\Delta}$, on obtient :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

1.b Relation de dispersion dans le vide

Relation de dispersion C'est la relation qui lie ω et \vec{k} . Elle est obtenue en cherchant des solutions de la forme $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ dans l'équation de propagation. Dans l'équation de d'Alembert, on trouve, $k = \frac{\omega}{c}$ donc il n'y a pas de dispersion (même vitesse de propagation pour toutes les ondes).

Méthode Il faut injecter une OPPH dans l'équation de propagation pour trouver la relation de dispersion.

2 Ondes électromagnétiques planes

2.a Ondes sphériques et ondes planes

Ondes planes Il s'agit d'ondes uniformes dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation \vec{u} , ne dépend que de la coordonnée sur \vec{u} :

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r} \cdot \vec{u}, t) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{u}, t)$$

Limite du modèle Pas physiquement réalisable (infini), mais bonne approximation locale

2.b Solutions de l'équation de d'Alembert en dimension 1

On prend $E_x = f(x, t)$. L'équation de d'Alembert devient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

On vérifie alors que toute fonction de la forme $E_x = f(x - ct)$ ou $E_x = g(x + ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert en dimension 1. Réciproquement, on **admet** que toute solution de

l'équation de d'Alembert en dimension est somme de deux fonctions de la forme $f(x - ct)$ et $f(x + ct)$.

2.c Structure d'une OPP

Ondes planes progressives (OPP) Ce sont des ondes progressives donc

$$E, B = f(ct - \vec{r} \cdot \vec{u})$$

Dans le vide, les équations de Maxwell donnent pour ce type de solutions la relation de structure :

$$\vec{u} \wedge \vec{E} = c\vec{B}$$

L'onde est donc transverse et $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct.

3 Ondes planes progressives harmoniques

3.a Modèle des OPPH

OPPH harmoniques/sinusoidales/monochromatiques (OPPH) Toutes les composantes de \vec{E} et de \vec{B} sont des fonctions sinusoidales de $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$. On appelle **vecteur d'onde** le vecteur $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ et **pulsation** le scalaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En notation complexe, $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$. On a :

$$\underline{\vec{E}} = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \left(E_{0,x} e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0,y} e^{i\varphi_y} \vec{u}_y + E_{0,z} e^{i\varphi_z} \vec{u}_z \right)$$

3.b Utilisation de la notation complexe; relations de structure d'une OPPH

Astuces de calcul en notation complexe les relations suivantes simplifient les calculs en notation complexe :

- $\frac{d}{dt}(\underline{\vec{E}}) = i\omega \underline{\vec{E}}$
- $\text{div}(\underline{\vec{E}}) = -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}$
- $\text{rot}(\underline{\vec{E}}) = -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$
- $\Delta \underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$

Caractère transverse On considère $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$ et $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$ dans le vide où

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ et } \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Avec les équation de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson en notation complexe, on obtient $\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$ et $\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$ donc l'onde est transverse électrique et transverse magnétique.

Relation de structure Toujours avec les mêmes notations et dans le vide, en notant \vec{u} le renormalisé de \vec{k} , on obtient grâce aux équation de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday :

$$-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} i\omega \vec{E} \quad \text{et} \quad -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

Ce qui se réécrit, avec $\omega = kc$ (relation de dispersion dans le vide) et le vecteur \vec{u} :

$$\vec{u} \wedge \vec{E} = c\vec{B} \quad \text{et} \quad c\vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

Résumé Pour une OPPH dans le vide, on a :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{u} \wedge \vec{E} = c\vec{B} \\ c\vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E} \\ E = cB \end{cases}$$

Pour ces relations, **toujours** faire un petit schéma et bien se souvenir que le trièdre $(\vec{E}, c\vec{B}, \vec{u})$ est **direct**.

3.c Intérêt et limites du modèle de l'OPPH

Limite Une onde plane en général n'est pas réalisable expérimentalement car elle devrait être uniforme dans tout plan perpendiculaire à \vec{u} et posséderait alors une énergie infinie.

Intérêt En revanche, ces ondes présentent un intérêt car toute onde est une superposition d'OPPH (cf. décomposition de Fourier, admis).

4 États de polarisation

On rappelle ici que dans le vide, une onde électromagnétique est transverse électrique et transverse magnétique.

Polarisation de la lumière Cela correspond aux signaux sinusoïdaux en mode XY dans le plan perpendiculaire à la propagation à z fixé :

- la polarisation est rectiligne si les signaux dessinent un segment (si $E_x = 0$ ou $E_y = 0$ ou x et y en phase ou en opposition de phase)
- la polarisation est circulaire si les signaux selon x et y ont même norme et sont en quadrature
- sinon la polarisation est elliptique

Attention Ne pas confondre la direction de propagation et la direction de polarisation.

4.a Polarisation rectiligne

Onde polarisée rectilignement Une onde est polarisée rectilignement lorsque pour tout point M , $\vec{E}(M)$ garde une direction fixe.

Exemple $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x e^{i(\omega t - kz)}$ se propage selon z et est polarisée selon \vec{u}_x .

Remarque Toute OPPH $\vec{E} = (E_{0x} e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$ est la somme de deux ondes polarisées rectilignement.

Caractérisation des ondes polarisées rectilignement L'onde

$$(E_{0x} e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$$

est polarisée rectilignement si, et seulement si, au moins une des conditions suivantes est respectée :

- $\varphi_x \equiv \varphi_y [2\pi]$
- $\varphi_x \equiv \varphi_y + \pi [2\pi]$
- $E_{0x} = 0$
- $E_{0y} = 0$

Pour les deux premières conditions, penser au mode XY de l'oscilloscope.

4.b Polarisation circulaire

Onde polarisée circulairement Une onde est polarisée circulairement lorsque pour tout point M , l'extrémité de $\vec{E}(M, t)$ décrit un cercle. Lorsque le cercle est décrit dans le sens direct, l'onde est dite polarisée circulairement gauche, et lorsque le cercle est décrit dans le sens indirect, l'onde est dite polarisée circulairement droite (convention volant de voiture).

Caractérisation des ondes polarisées circulairement L'onde

$$(E_{0x} e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$$

est polarisée circulairement si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont respectées :

- $\varphi_x \equiv \varphi_y \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- et $E_{0x} = E_{0y}$

Autre formulation de la caractérisation L'onde précédente est polarisée circulairement droite si, et seulement si $\underline{E_{0x}} = i \underline{E_{0y}}$ et elle est polarisée circulairement gauche si, et seulement si, $\underline{E_{0x}} = -i \underline{E_{0y}}$. ET rappelons que $\underline{E_{0x}} = E_{0x} e^{i\varphi_x}$ et symétriquement pour y .

Remarque La somme de deux ondes polarisées circulairement droites est une onde polarisée circulairement droite.

Remarque Toute polarisation est la somme d'une onde polarisée circulairement gauche et d'une onde polarisée circulairement droite.

Exemple d'application de la remarque Par exemple, l'onde $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ polarisée rectilignement est la somme de

$$\vec{E}_1 = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}$$

(onde polarisée circulairement droite, passer en notation réelle pour le voir) et de l'onde

$$\vec{E}_2 = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}$$

(onde polarisée circulairement gauche, passer en notation réelle pour le voir). Cela résulte simplement des formules d'Euler.

Moyen mnémotechnique personnel Pour retenir ces histoires de droite et gauche, retenir que cela fonctionne à l'envers. Avec du +, c'est dans le sens négatif *ie* droite, et avec du -, c'est dans le sens positif, *ie* gauche (cf. la deuxième formulation de la caractérisation et l'exemple)

4.c Autres états de polarisation (culture)

Dans le cas général, l'onde

$$(E_{0x} e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$$

est polarisée elliptiquement.

4.d Ondes électromagnétiques émises par des sources réelles

Ondes radio/Wifi Les ondes monochromatiques sont un "bon" modèle pour ce type d'ondes. Ces ondes sont polarisées.

Ondes lumineuses cf les chapitres O2 et O2' et le modèle des trains d'onde : il est difficile d'obtenir des interférences en optique. La lumière émise par le Soleil ou une ampoule est non polarisée.

4.e Polariseur ; loi de Malus

Définition d'un polariseur Un polariseur/polaroïde idéal laisse passer tous les signaux dans la direction de polarisation et aucun perpendiculaire à cette direction. Il renvoie donc une lumière polarisée.

Cas des ondes centimétriques Comme leur nom l'indique, λ est de l'ordre du cm, et par conséquent f est de l'ordre de 10 GHz. Pour mettre en œuvre un polariseur, on place une sorte de peigne fin dont les dents sont espacées de quelques cm et orientés selon y et parallèles à x . La partie de l'onde polarisée selon x est transmise tandis que celle sur y est réfléchi. En sortie, l'onde est polarisée selon \vec{u}_x .

Cas des ondes lumineuses Le montage est constitué de deux polariseurs successifs : le premier est fixe, le deuxième, appelé analyseur, à une direction de polarisation formant un angle α avec le premier. On ne connaît pas \vec{E}_{avant} . On a

$$\vec{E}_{\text{après polariseur}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_1$$

et

$$\vec{E}_{\text{après analyseur}} = E_0 \cos(\alpha) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_2$$

En effet, $\vec{E}_{\text{après polariseur}} = \vec{E}_{\text{après analyseur}}$ donc en projetant avec on obtient l'expression.

Exemple Des molécules conductrices espacées de quelques centaines de nm forment un polariseur pour des ondes lumineuses.

Remarque Un polariseur permet de savoir si une onde est polarisée rectilignement : il suffit de tourner le polariseur et de voir si on observe une extinction (absence d'onde lumineuse transmise). S'il y a une extinction, c'est que l'onde initiale est polarisée rectilignement perpendiculairement à la direction sur laquelle on s'est arrêté avec le polariseur.

Loi de Malus Si l'analyseur forme un angle α avec le polariseur, alors :

$$I_{\text{après analyseur}} = \cos(\alpha)^2 I_{\text{avant analyseur}}$$

avec $I = \langle \vec{p}_i \cdot \vec{u}_z \rangle$. En effet, I est proportionnelle à $\langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$, par conséquent, on a une constante multiplicative près :

$$I_{\text{après analyseur}} = \langle \|E_0 \cos(\alpha) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x\|^2 \rangle = E_0^2 \cos^2(\alpha) \frac{1}{2} = \cos^2(\alpha) I_0$$

Polariseur-analyseur croisés Pour $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, on parle de **polariseur-analyseur croisés**.

Repérer un polariseur en TP En TP, on peut facilement repérer les polariseurs car ils sont toujours avec l'analyseur et se ressemblent. Il est donc facile de les distinguer sur le banc optique.

Montage alternatif Parfois, on considérera un polariseur-analyseur croisé et on intercalera un troisième polariseur au milieu.

5 Énergie associée à une onde électromagnétique

5.a Compatibilité avec le théorème de Poynting

Aspects énergétiques On s'intéresse à une OPPH se propageant selon \vec{u}_z pour une onde polarisée selon \vec{u}_x : on a

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

On peut alors déterminer \vec{B} avec la relation de structure dans le vide. On obtient :

$$c\vec{B} = \vec{u}_z \wedge \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

puis en notation réelle

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

et alors

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

Conclusions Le théorème de Poynting

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

est vérifié (calculer $\text{div}(\vec{\pi})$ et la dérivée partielle de l'énergie électromagnétique volumique par rapport au temps). Il y a **équiproportion de l'énergie pour une OPPH** :

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

5.b Puissance instantanée d'une OPP à travers une surface ; vitesse d'énergie

Vitesse de propagation de l'énergie On applique la relation de structure pour les OPPH dans le vide qui fournit en notation réelle :

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$$

Si on considère désormais l'énergie qui traverse une surface S de vecteur normal extérieur \vec{n} entre t et $t + dt$ en arrivant à \vec{v}_e , l'énergie vaut :

$$\vec{\pi} \cdot S \vec{n} dt = u_{em} S v_e dt \cos(\vec{v}_e \angle \vec{n}) = u_{em} S \vec{v}_e \cdot \vec{n} dt$$

Par conséquent, ceci valant pour tout vecteur \vec{n} , on en déduit que $\vec{\pi} = u_{em} \vec{v}_e$, si bien que

$$\vec{v}_e = c \vec{u}$$

5.c Notation complexe et moyennes de grandeurs quadratiques

Notation complexe et moyenne Pour f et g sinusoïdales synchrones, on a :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(f g^*)$$

On peut ainsi calculer les moyennes des grandeurs quadratiques en notation complexe :

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

Démonstration Il suffit d'effectuer le calcul avec la formule de trigonométrie $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ et de remarquer que cela coïncide effectivement avec la partie réelle recherchée.

Remarque Cette formule est bien homogène, les deux membres sont \mathbb{R} -linéaires en f et elle est invariante par échange de f et g .

Valeur efficace On rencontre parfois la **valeur efficace**, aussi appelée *Root Mean Square* en anglais (souvent alors abrégée en RMS), qui est définie par :

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

On a alors pour une fonction sinusoïdale d'amplitude A :

$$f_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Chapitre 13

Propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu dispersif

Table des matières

1	Modélisation plus réaliste des signaux	113
1.a	Insuffisance du modèle de l'OPPH	113
1.b	Exemple simple : superposition de deux ondes OPPH de pulsations voisines .	114
1.c	Forme générale d'un paquet d'ondes ; spectre en amplitude	114
1.d	Évolution d'un paquet d'ondes ; vitesses de phase et de groupe	114
2	Propagation d'un signal dans l'ionosphère	115
2.a	Modélisation de l'ionosphère	115
2.b	Réaction du plasma au passage d'une OPPH transverse	115
2.c	Relation de dispersion pour des ondes transverses ; pulsation plasma	116
2.d	Cas d'un paquet d'ondes $\omega_0 > \omega_p$	116
2.e	Cas d'un paquet d'ondes $\omega_0 < \omega_p$	117
2.f	Résumé : signal arrivant sur l'ionosphère	118
2.g	Comparaison avec les ondes électromagnétiques dans le vide	118

1 Modélisation plus réaliste des signaux

1.a Insuffisance du modèle de l'OPPH

Ces ondes ne sont pas réalisables expérimentalement puisqu'elles devraient posséder une énergie infinie.

1.b Exemple simple : superposition de deux ondes OPPH de pulsations voisines

Vitesse de propagation des OPPH seules On considère deux OPPH $f = 1 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$ et $g = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$. Alors, f se propage à $\frac{\omega_1}{k_1}$ et g se propage à $\frac{\omega_2}{k_2}$.

Somme des deux OPPH On a par formule de trigonométrie :

$$f + g = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right)}_{\text{porteuse}}$$

On observe donc des battements.

Vitesses de phase et de groupe dans ce cas particulier On définit la vitesse de phase par

$$v_\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$$

ainsi que la vitesse de groupe par

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

La porteuse se déplace à la vitesse de phase, l'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe.

1.c Forme générale d'un paquet d'ondes ; spectre en amplitude

Paquet d'ondes Pour un obtenir un signal borné dans le temps, on somme une infinité de sinusoides :

$$s = \sum_k \underline{a}(k) e^{i(\omega_k t - kx)} \quad \text{ou} \quad s = \int \underline{a}(k) e^{i(\omega_k t - kx)} dk$$

on admet qu'une distribution de $\underline{a}(k)$ en gaussienne autour d'une valeur k_0 donne pour enveloppe une bulle dont la longueur Δx est d'autant plus grande que Δk est faible.

1.d Évolution d'un paquet d'ondes ; vitesses de phase et de groupe

$$s = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \sum_k \underline{a}(k) e^{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)}$$

où le premier facteur correspond à la sinusoïde et la somme correspond à l'enveloppe. Si $\underline{a}(k)$ ne prend des valeurs significatives que sur $\Delta k \ll k_0$ autour de k_0 , alors $\omega_k - \omega_0 \approx (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}(k_0)$. Ainsi, l'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$$

et la sinusoïde à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$$

Cette approximation n'est valable que sur un temps très court car on la multiplie par t . On a bien une enveloppe car la longueur d'onde $\frac{1}{k - k_0}$ est très grande devant celle de la sinusoïde $\frac{1}{k}$.

2 Propagation d'un signal dans l'ionosphère

2.a Modélisation de l'ionosphère

Plasma Il s'agit d'un milieu ionisé où les électrons et les ions sont libres. Pour simplifier, on suppose que chaque ion est un proton. On a ainsi une unique densité n de charges pour les protons et électrons.

Ionosphère L'ionosphère est située entre 80 kilomètres et 800 kilomètres au-dessus de la Terre. C'est un milieu ionisé, c'est-à-dire un plasma, qui comporte notamment des électrons, des ions, du dioxygène, du néon, de l'hélium, ...

Nombre d'électrons par unité de volume Dans l'ionosphère et dans un plasma en général, la densité volumique d'électrons est $n = 10^{12} \text{m}^{-3}$.

Rappel On rappelle que pour un métal conducteur, la densité volumique d'électrons est de l'ordre de $n = 10^{30} \text{m}^{-3}$.

2.b Réaction du plasma au passage d'une OPPH transverse

Attention On prend ici une hypothèse supplémentaire *a priori* non nécessaire, celle du fait que l'onde est transverse.

Courant et charges On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron pour obtenir :

$$m_e \vec{a} = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \approx -e \vec{E}_{\text{onde}}$$

car pour un électron non relativiste, $vB \ll cB \approx E$, et puisque le plasma est dilué, $E \approx E_{\text{onde}}$. On en déduit \vec{j} puis \underline{j} :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = -i \frac{e^2 n}{\omega m_e}$$

où γ est la conductivité complexe. Il n'y a pas de loi d'effet Joule ici, la puissance moyenne vaut

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{j} \cdot \underline{E}^* \right) = 0$$

pour les charges, on montre grâce à la conservation de ρ que $\left(i\omega - \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)\rho = 0$ donc $\rho = 0$ sauf à la pulsation plasma :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{m_e \varepsilon_0}}$$

2.c Relation de dispersion pour des ondes transverses ; pulsation plasma

Équation de propagation On part de $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \Delta$ pour montrer

$$c^2 \Delta \overrightarrow{E} = \frac{d^2 \overrightarrow{E}}{dt^2} + \omega_p^2 \overrightarrow{E}$$

Relation de dispersion On en déduit, en injectant une OPPH dans l'équation de propagation, la relation dispersion :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

On remarque que cette relation est bien homogène et qu'on retrouve la relation de dispersion dans le vide lorsque $\omega_p = 0$, c'est-à-dire lorsque $n = 0$.

Analyse de la relation de dispersion Ainsi

- si $\omega < \omega_p$, il n'y a pas de solution avec k réel, on a une solution de la forme $e^{i\omega t} e^{-\frac{z}{\delta}}$ qui est une onde évanescence (stationnaire) ne se propageant pas, elle correspond à une réflexion d'énergie (TSF, radio basses fréquences réfléchies par l'ionosphère)
- si $\omega > \omega_p$, on a une solution correspondant à une onde se déplaçant à $\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} c > c$. Cette onde n'est pas réalisable car elle est infinie dans le temps et dans l'espace.

2.d Cas d'un paquet d'ondes $\omega_0 > \omega_p$

Dans cette sous-section, $\omega_0 > \omega_p$ est à comprendre au sens que toutes les pulsations du paquet d'ondes sont supérieures à ω_p .

Détermination des vitesses de phase et de groupe Dans un plasma, si $\omega > \omega_p$, on a $\omega^2 - \omega_p^2 = k^2 c^2$ donc

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} > c$$

mais en différenciant on trouve

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} < c$$

Remarque On est rassuré par le fait que $v_g < c$ car c'est la vitesse d'un paquet d'ondes réalisable expérimentalement. D'autre part, $v_\varphi > c$, ce qui n'est pas réellement un problème puisqu'une OPPH n'est pas réalisable expérimentalement et si la porteuse va plus vite que l'enveloppe, son amplitude devient rapidement négligeable.

Indice du plasma L'indice du plasma, défini par $n = \frac{c}{v_\varphi}$, est donc strictement inférieur à 1 dans un plasma avec $\omega_0 > \omega_p$, contrairement à ce dont on a l'habitude en optique !

Relation de structure On a les relations de structure suivantes dans ce cas (toujours faire le petit dessin du trièdre direct) :

- $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ (équation de Maxwell-Thomson) ;
- $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ (équation de Maxwell-Gauss) ;
- $\vec{u} \wedge \vec{E} = v_\varphi \vec{B}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$ (équation de Maxwell-Faraday).

Remarque On ne peut plus généraliser aux OPP (sans le H) puisque $v_\varphi = v_\varphi(k)$.

Méthode générale de détermination des vitesses de phase et de groupe En général, on peut trouver facilement la vitesse de phase à partir de la relation de dispersion. Pour la vitesse de groupe, il faut le plus souvent dériver par rapport à k la relation de dispersion et utiliser l'expression de la vitesse de phase trouvée précédemment.

2.e Cas d'un paquet d'ondes $\omega_0 < \omega_p$

Dans cette sous-section, $\omega_0 > \omega_p$ est à comprendre au sens que toutes les pulsations du paquet d'ondes sont inférieures à ω_p .

Calcul de \underline{k} On considère désormais une OPPH de la forme :

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$$

La relation de dispersion devient alors $c^2 \underline{k}^2 = \omega^2 - \omega_p^2$, ce qui donne

$$\underline{k} = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

Calcul de l'onde résultante En notation réelle, on obtient

$$\vec{E} \cdot \vec{u}_x = E_{0,x} e^{\pm iz \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

et un terme similaire sur \vec{u}_y . C'est une onde stationnaire puisque $E_x = f(t)g(z)$ **en notation réelle**.

Onde stationnaire Les ondes stationnaires sont celles qui présentent un découplage spatio-temporel **en notation réelle**. En effet, l'onde

$$e^{i(\omega t - kz)} = e^{i\omega t} e^{-ikz}$$

est bien découplée au niveau spatio-temporel, mais ce n'est pas une onde stationnaire.

Cas d'un plasma occupant le demi-espace $z > 0$, onde évanescence Pour un plasma occupant le demi-espace $z > 0$, le terme en $e^{+z\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$ divergerait lorsque $z \rightarrow +\infty$, donc on ne garde que le terme en $e^{-z\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$. On parle d'**onde évanescence** car son amplitude tend vers 0 lorsque z tend vers $+\infty$.

Relation de structure Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Faraday fournit :

$$\underline{k} \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$$

Ainsi, \underline{E}_x et \underline{B}_y sont en quadrature.

2.f Résumé : signal arrivant sur l'ionosphère

Antenne radio Il y a réflexion totale sur l'ionosphère pour les "ondes larges".

Cas où $\omega_0 > \omega_p$ Dans ce cas, une partie de l'onde est transmise dans le plasma et une autre partie de l'onde est réfléchi. La partie transmise possède alors une vitesse plus faible que la partie réfléchi puisque $c > v_g$ (logique, le plasma "ralentit" l'onde).

Cas où $\omega_0 < \omega_p$ Dans ce cas, l'onde est totalement réfléchi par le plasma, il n'y a pas de transmission.

Ordres de grandeur Avec $n = 10^{12} \text{m}^{-3}$, on a $f_p \approx 10 \text{ MHz}$. En guise de comparaison, la bande radio FM a une fréquence de l'ordre de 100 MHz, et la (regrettée par VdC) bande AM a une fréquence de l'ordre de 1 MHz.

2.g Comparaison avec les ondes électromagnétiques dans le vide

EM5 ou EM6 avec $\omega \gg \omega_p$ On a

$$c^2 \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Si $\underline{\vec{E}}$ est de la forme $e^{i(\omega t - kz)}$, alors on a la relation de dispersion

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

et on a $c \underline{\vec{B}} = \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}$. On a de plus $c \underline{\vec{B}} = \vec{u} \wedge \underline{\vec{E}}$ de façon générale pour les OPP.

EM6 avec $\omega > \omega_p$ On a

$$c^2 \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E}$$

Si $\underline{\vec{E}}$ est de la forme $e^{i(\omega t - kz)}$, alors on a la relation de dispersion

$$\omega^2 - \omega_p^2 = k^2 c^2$$

On dispose de la relation de structure suivante, valable uniquement pour des OPPH (on ne peut plus généraliser aux OPP) : $\vec{u} \wedge \underline{\vec{E}} = v_\varphi \underline{\vec{B}}$

EM6 avec $\omega < \omega_p$ On a

$$c^2 \vec{\Delta} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E}$$

Si \vec{E} est de la forme $e^{i(\omega t - kz)}$, alors on a la relation de dispersion

$$\omega^2 - \omega_p^2 = \underline{k}^2 c^2$$

On dispose de la relation de structure suivante $\underline{k} \vec{u} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ avec \underline{k} un imaginaire pur. \underline{E}_x et \underline{B}_y sont en quadrature.

Chapitre 14

Propagation d'ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique ; réflexion, guides d'ondes

Table des matières

1	Propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique	122
1.a	Position du problème ; discussion des approximations	122
1.b	Équation de propagation ; relation de dispersion	122
1.c	Forme des champs ; effet de peau	122
1.d	Bilan énergétique	123
2	Réflexion d'une onde sur un conducteur parfait	123
2.a	Cas limite du conducteur parfait	124
2.b	Existence d'une onde réfléchie	124
2.c	Structure de l'onde résultante	125
2.d	Charges et courants surfaciques ; pression de radiation	125
2.e	Réflexion sous incidence oblique sur un conducteur parfait	127
2.f	Méthode générale : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance	128
3	Cavité résonante ; propagation guidée	128
3.a	Cavité 1D, modes propres, forme des champs, aspects énergétique	128
3.b	Propagation guidée ; hyperfréquence entre deux plans conducteurs	129

1 Propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique

1.a Position du problème ; discussion des approximations

Trois approximations Dans le conducteur, on suppose :

- l'électroneutralité : $\rho = 0$. Cela est une bonne approximation si $\tau\omega \ll 1$;
- la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Cela est une bonne approximation si $\tau\omega \ll 1$;
- le courant de déplacement négligeable : $\vec{j} \gg \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Exemple Pour les ondes radio ou wifi, on peut utiliser la loi d'Ohm statique.

Résumé Ainsi dans cette section, on a :

- $\text{div} \vec{E} = 0$
- $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\text{div} \vec{B} = 0$
- $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
- $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$

1.b Équation de propagation ; relation de dispersion

Équation de propagation Avec ces trois approximations, on obtient l'équation de propagation en calculant $\text{rot} \text{rot} \vec{E}$ de deux façons différentes avec la formule ainsi que les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Thomson :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cette équation est linéaire, mais contrairement à l'équation de d'Alembert, elle n'est pas stable par renversement du temps : elle est donc irréversible, ce qui est bien en accord avec l'effet Joule dans le milieu.

Relation de dispersion En injectant une OPPH dans l'équation de propagation, on en tire l'équation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = -i\gamma\mu_0\omega$$

1.c Forme des champs ; effet de peau

Épaisseur de peau En posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma\mu_0\omega}}$, on obtient

$$\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

δ est l'**épaisseur de peau** : elle correspond à la distance sur laquelle le signal est non nul dans le conducteur.

Calcul de \vec{E} Si on se place dans le demi-espace $z > 0$ (on enlève la solution divergente en $+z/\delta$), on a pour une onde polarisée selon \vec{u}_x :

$$\vec{E} = \underbrace{E_0}_{\text{atténuation}} \underbrace{e^{-\frac{z}{\delta}}}_{\text{propagation}} \underbrace{e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}}_{\text{propagation}} \vec{u}_x$$

Calcul de \vec{B} On peut calculer \vec{B} à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday en complexes. On trouve que \vec{B} et \vec{E} sont déphasés de $\frac{\pi}{2}$: les relations de structure dans le vide ne sont pas valables.

Effet de peau Au-delà de quelques δ , les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls dans le conducteur : c'est l'**effet de peau**.

Ordres de grandeur Pour le cuivre :

- pour $f = 1$ GHz, on obtient $\delta = 2 \mu\text{m}$ et $\lambda_0 = 30 \text{ cm}$;
- pour $f = 10$ MHz, on obtient $\delta = 20 \mu\text{m}$ et $\lambda_0 = 30 \text{ m}$;
- pour $f = 10$ Hz, on obtient $\delta = 2 \text{ cm}$ et $\lambda_0 = 3.10^7 \text{ m}$

1.d Bilan énergétique

Bilan énergétique On se limite aux grandeurs moyennes dans le temps et on a :

$$\underbrace{\left\langle \frac{\partial u_{em}}{\partial t} \right\rangle}_{=0} + \text{div} \langle \vec{\pi} \rangle = - \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$$

En effet, \vec{E} et \vec{B} son périodiques, donc u_{em} aussi. On peut vérifier cette relation en calculant $\langle \vec{\pi} \rangle$ et $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ grâce à la formule

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

2 Réflexion d'une onde sur un conducteur parfait

Méthode L'onde \vec{E}_i arrivant sur un conducteur donne lieu à une onde transmise \vec{E}_t et une onde réfléchi \vec{E}_r (loi de Descartes). On se limite à une OPPM linéairement polarisée (les relations sont linéaires). On admet que les ondes transmises et réfléchies sont planes progressives et monochromatiques de même pulsation (l'onde agit les électrons à ω qui émettent alors une onde à ω).

Objectifs On souhaite avoir :

- $\delta \ll \lambda_0$;
- δ négligeable devant l'épaisseur du conducteur ;
- δ négligeable devant le rayon de courbure du conducteur.

2.a Cas limite du conducteur parfait

Modèle du conducteur parfait On se limite à une onde arrivant normalement sur un conducteur parfait ($\gamma \rightarrow \infty$). Les symétries donnent que les ondes transmises et réfléchies sont polarisées linéairement selon x et invariantes par translation selon x et y . On les écrit alors :

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x \\ \vec{E}_t &= \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_x\end{aligned}$$

et k_2 est donné par la relation de dispersion dans la milieu 2.

Calcul de \vec{E} et \vec{B} dans un conducteur parfait On utilise un argument énergétique. En effet, la puissance dissipée par effet Joule par unité de volume dans le conducteur est $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$. Or, $\gamma \rightarrow +\infty$ et comme la puissance dissipée par effet Joule est bornée, on a nécessairement $E \rightarrow 0$. L'équation de Maxwell-Faraday nous permet d'en conclure que \vec{B} est un indépendant du temps. Ainsi, dans un conducteur parfait :

- $\vec{E} = \vec{0}$;
- \vec{B} est stationnaire (au sens d'indépendant du temps) ;
- $\vec{B}_{\text{onde}} = \vec{0}$

2.b Existence d'une onde réfléchie

On considère une onde incidente

$$\vec{E}_i = \underline{E}_{0,i} e^{i(\omega t - kz)}$$

dans le vide qui arrive à incidence normale sur un plan $z = 0$ d'un conducteur parfait.

Première présentation La relation de passage en $z = 0$ fournit alors

$$\vec{E}_{\text{tot}}(0^+) - \vec{E}_{\text{tot}}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Or, puisqu'on a un conducteur parfait, $\vec{E}_{\text{tot}}(0^+) = \vec{0}$. Et s'il n'y a pas d'onde réfléchie, le terme $\vec{E}_{\text{tot}}(0^-)$ vaut $\vec{E}_i(0^-)$ qui est orthogonal à \vec{u}_z , donc tout est nul, ce qui est absurde. Ainsi, **il existe une onde réfléchie**.

Autre présentation Le champ électrique de l'onde incidente met les électrons dans le métal en mouvement. Ce mouvement d'électrons crée alors une onde électromagnétique.

2.c Structure de l'onde résultante

Calcul de \underline{r} et \underline{t} dans le conducteur parfait On cherche \underline{r} et \underline{t} dans le modèle du conducteur parfait. On a :

1. $\vec{E} = \vec{0}$ car $\vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ est borné alors que $\gamma \rightarrow \infty$;
2. $\vec{B} = \vec{0}$ car \vec{B} ne dépend pas du temps d'après l'équation de Maxwell-Faraday et le premier point, et on ne s'intéresse qu'à la partie variable ;
3. $\rho = 0$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss ;
4. $\vec{j} = \vec{0}$ d'après les premier et deuxième points.

Toutefois, il peut y avoir des densités surfaciques de charges et de courants. On utilise donc la relation de passage :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Dans le conducteur, il n'y a pas d'onde donc $\underline{t} = 0$. En projetant la relation de passage sur \vec{u}_x , on en déduit que $\underline{r} = -1$.

Calcul du champ électrique total On obtient le champ total en sommant les deux. On trouve une onde stationnaire pour \vec{E} lorsque $z < 0$:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = -2iE_0 e^{i\omega t} \sin(kz) \vec{u}_x$$

Remarque $\vec{E}_{\text{tot}}(z=0) = \vec{0}$ donc on est content d'avoir un sinus.

Attention Cette onde n'est pas progressive. On ne peut pas utiliser la relation de structure pour \vec{E}_{tot}

Calcul du champ magnétique total On utilise les relations de structure sur l'onde incidente et l'onde réfléchie, puis on somme les champs \vec{B} pour obtenir :

$$c\vec{B}_{\text{tot}} = 2E_0 e^{i\omega t} \cos(kz) \vec{u}_y$$

Expressions en notation réelle En prenant $E_0 = E_0 e^{i\varphi}$, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tot}} &= 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi) \vec{u}_x \\ \vec{B}_{\text{tot}} &= \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_y \end{aligned}$$

Ce sont des ondes **stationnaires**. Les nœuds de \vec{E}_{tot} sont les ventres de \vec{B}_{tot} et réciproquement.

Remarque Pour une onde stationnaire, on a $\{\vec{\pi}\} = \vec{0}$

2.d Charges et courants surfaciques ; pression de radiation

Charge surfacique Pour une onde à incidence normale, la relation de passage pour \vec{E} donne $\sigma = 0$ (voir partie précédente).

Courant surfacique Déterminons désormais \underline{j}_s . On applique la relation de passage pour \underline{B} en $z = 0$:

$$\underbrace{\overrightarrow{B}_{\text{tot}}(z = 0^+) - \overrightarrow{B}_{\text{tot}}(z = 0^-)}_{=\vec{0}} = \mu_0 \underline{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

Par conséquent, comme le courant surfacique ne présente pas de composante selon \vec{u}_z (car il est tangent à la surface), on a :

$$\underline{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

Pression de radiation La pression de radiation est la force exercée sur le conducteur par les photons réfléchis par unité de surface. On a envie d'écrire $\delta \vec{F} = \underline{j}_s dS \wedge \vec{B}$. Mais quel sens donner à \vec{B} ? En effet, $\overrightarrow{B}_{\text{tot}}(0)$ n'a pas de sens.

Première présentation : vision particulière L'onde émise par les électrons de l'interface n'exerce aucune force sur l'interface puisque l'émission est symétrique entre les $z < 0$ et les $z > 0$. Ainsi, on a :

$$\delta \vec{F} = \underline{j}_s dS \wedge \underbrace{\overrightarrow{B}_i(0)}_{\text{a un sens}}$$

Alors, en prenant la moyenne temporelle avec la valeur moyenne d'un \cos^2 qui vaut $1/2$, on obtient

$$\langle \delta \vec{F} \rangle = \frac{2}{\mu_0 c^2} E_0^2 \frac{1}{2} dS \vec{u}_z$$

Par conséquent, on obtient :

$$\langle \delta \vec{F}_{\text{sur le conducteur}} \rangle = dS \varepsilon_0 E_0^2 \vec{u}_z$$

On définit alors la pression de radiation par

$$P_{\text{radiation}} = \varepsilon_0 E_0^2$$

Deuxième présentation : vision corpusculaire On prend pour système les photons qui se réfléchissent sur dS entre t et $t + dt$. On calcule la variation de leur quantité de mouvement et on en déduit la force qu'ils ont subie, *ie* l'opposé de la force qu'ils ont exercé. (troisième loi de Newton).

Pour un photon dans le vide, les relations de De Broglie et de Planck-Einstein fournissent $p = \frac{E}{c}$. Or, on a

$$\vec{p}_{t+dt} - \vec{p}_t = \langle \delta \vec{F}_{\text{métal} \rightarrow \text{lumière}} \rangle dt$$

Les quantités de mouvement sont

$$\begin{cases} \vec{p}_t = ndS c dt \frac{E}{c} \vec{u}_z \\ \vec{p}_{t+dt} = -ndS c dt \frac{E}{c} \vec{u}_z \end{cases}$$

Ainsi, on obtient $\langle \delta \vec{F}_{\text{métal} \rightarrow \text{lumière}} \rangle = -2nEdS \vec{u}_x$ Par conséquent, la troisième loi de Newton fournit alors

$$P_{\text{radiation}} = 2nE$$

Or, $nE = \langle u_{em,i} \rangle$ et pour l'onde incidente on a $\langle u_{em,i} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$. Finalement, on retrouve bien :

$$P_{\text{radiation}} = \varepsilon_0 E_0^2$$

2.e Réflexion sous incidence oblique sur un conducteur parfait

On considère une onde incidente qui arrive sur un conducteur parfait avec un angle d'incidence i :

$$\vec{E}_i = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - k(x \sin(i) + z \cos(i)))} \vec{u}_y$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme

$$\vec{E}_r = \underline{E}_{0,r} e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}$$

où $\vec{E}_{0,r}$ est selon \vec{u}_y par symétrie. La relation de passage à l'interface s'écrit

$$\vec{E}_{\text{tot}}(z = 0^+) - \vec{E}_{\text{tot}}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

soit ici avec nos expressions

$$-(\vec{E}_i(0) + \vec{E}_r(0)) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Après projection sur \vec{u}_y , on obtient :

$$\underline{E}_0 e^{i(\omega t - k(x \sin(i) + z \cos(i)))} = -\underline{E}_{0,r} e^{i(\omega' t - (k'_x x + k'_y y))}$$

Calcul du coefficient de réflexion En $x = y = 0$ et en $t = 0$, la formule précédente donne $\underline{E}_0 = -\underline{E}_{0,r}$, soit $\underline{r} = -1$.

Calcul de ω' En dérivant l'expression précédente par rapport au temps puis en évaluant de même pour $x = y = 0$ et $t = 0$, on obtient :

$$\omega' = \omega$$

Calcul de k'_x et k'_y De même, en dérivant par rapport à x et y puis en évaluant en $x = y = 0$ et $t = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} k'_x = k \sin(i) \\ k'_y = 0 \end{cases}$$

Calcul de k'_z Les relations de dispersion dans le vide pour l'onde incidente et l'onde réfléchie ainsi que l'égalité $\omega' = \omega$ fournissent :

$$k^2 = k'^2$$

On obtient alors $k'_z = -k \cos(i)$. En effet, la solution en $+k \cos(i)$ correspond à $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{0}$, ce qui est assez peu passionnant (pour citer le goat).

Calcul de l'onde totale En sommant et avec les formules d'Euler, on obtient l'onde totale :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = -2iE_0 \sin(kz \cos(i)) \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kx \sin(i))} \vec{u}_y$$

D'où l'expression finale de l'onde totale réelle :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = 2E_0 \sin(kz \cos(i)) \sin(\omega t - kx \sin(i) + \varphi) \vec{u}_y$$

Cette onde est :

- harmonique
- progressive de vitesse $\frac{\omega}{k \sin(i)} \vec{u}_x$;
- stationnaire selon z à x fixé ;
- polarisée rectilignement selon \vec{u}_y .

2.f Méthode générale : coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en puissance

Voici les étapes à suivre pour un exercice qui traite des coefficients de réflexion et de transmission :

1. Lire le sujet pour avoir la forme des champs.
2. Utiliser la relation de passage pour \vec{E} .
3. Si cela ne suffit pas, calculer \vec{B}_{inc} , \vec{B}_{trans} et \vec{B}_{tot} à l'aide des relations de structure dans les différents milieux (au besoin utiliser Maxwell-Faraday).
4. Utiliser la relation de passage pour \vec{B} .

On rencontrera parfois aussi les coefficients de réflexion et de transmission en puissance R et T , voire le coefficient d'absorption en puissance A . On doit toujours avoir $R + A + T = 1$ à la fin.

3 Cavité résonante ; propagation guidée

3.a Cavité 1D, modes propres, forme des champs, aspects énergétique

Cavité On appelle cavité une portion vide de l'espace délimitée par des conducteurs parfaits.

Cas de la cavité à 1D On cherche une solution sous la forme $\vec{E} = f(z)g(t)\vec{u}_x$ et on en déduit que dans la cavité

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = A = \text{cte}$$

L'onde respectant les conditions aux limites $f(0) = f(L) = 0$ (relations de passage en $z = 0$ et $z = L$ projetée sur \vec{u}_x), elle est non-nulle si $A < 0$. Dans ce cas, c'est alors une sinusoïde quantifiée :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right)$$

Il existe des solutions non stationnaires, mais ce sont alors des sommes des modes propres précédents.

Calcul de \vec{B} Dans ce cas, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En projection sur \vec{u}_y , cela donne

$$-kE_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kz) = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

Après primitivation et avec la relation de dispersion $\omega = kc$, on obtient finalement :

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t + \varphi) \cos(kz) \vec{u}_y$$

3.b Propagation guidée; hyperfréquence entre deux plans conducteurs

Propagation guidée Cette fois, on s'intéresse à la propagation d'une onde selon \vec{u}_z entre deux conducteurs parfaits entre $x < 0$ et $x > L$:

$$\vec{E} = f(x) e^{i(\omega t - k_z z)} \vec{u}_y$$

En effet, il peut y avoir une discontinuité du champ selon \vec{u}_x donc il n'y a pas de conditions aux limites sur cette polarité; et on choisit une invariance selon \vec{u}_y . L'équation de d'Alembert fournit alors une condition sur f :

$$f''(x) = - \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)}_{=A} f(x)$$

Les conditions aux limites sont $f(0) = f(L) = 0$ (avec la relation de passage en $x = 0$ et $x = L$ projetée sur \vec{u}_y). Si $A > 0$, f est non nulle et A est quantifiée :

$$\omega^2 - \omega_{c,n}^2 = c^2 k_z^2 \text{ avec } \omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{L} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

La relation de dispersion est semblable à celle du plasma. On fixe n expérimentalement : le système est alors un passe-bas de pulsation de coupure $\omega_{c,n}$. Le calcul de \vec{B} montre que \vec{B} n'est pas transverse car $\vec{B} \cdot \vec{u}_z \neq 0$. Enfin, on peut calculer les vitesses de propagation v_g et v_φ .

Remarque : "vrai" guide d'onde Un vrai guide d'onde est plutôt un parallélépipède rectangle. Si on le prend de longueur b selon y , de hauteur a selon x et de profondeur selon z , on a une expression générale de \vec{E} de la forme

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos(\omega t - k_z z + \varphi) \vec{u}_x$$

ou avec un \vec{u}_y à la place du \vec{u}_x .

Remarque : base des modes propres sur l'exemple de la cavité Il n'existe pas d'autres modes propres que ceux que l'on a trouvés. Une solution du problème (EDP et CL) n'est pas nécessairement un mode propre, nous les avons simplement cherchés ici sous la forme d'un mode propre. On admet que toute solution est une superposition des modes propres trouvés précédemment (il s'agit d'une décomposition de Fourier, admise).

Chapitre 15

Rayonnement dipolaire électrique

Table des matières

1	Les trois échelles de longueur pertinentes	131
1.a	Modèle du dipôle oscillant	131
1.b	Approximation dipolaire	132
1.c	Approximation non relativiste	132
1.d	Zones d'observation	133
2	Champ rayonné	133
2.a	Expression dans la zone de rayonnement	133
2.b	Invariances et symétries	133
2.c	Temps de propagation	134
2.d	Structure locale d'onde plane progressive	134
2.e	Polarisation	134
3	Puissance rayonnée	134
3.a	Décroissance de l'amplitude	134
3.b	Dépendance en $1/\lambda^4$	135
3.c	Anisotropie ; dépendance en θ ; indicatrice de rayonnement	136
3.d	Puissance totale	136
3.e	Formule de Larmor ; rayonnement synchrotron ; rayonnement de freinage . . .	136
4	Approche documentaire : diffusion Rayleigh	136
4.a	Modèle de l'électron élastiquement lié	136
4.b	Diffusion d'un rayonnement par un électron atomique	137
4.c	Le bleu du ciel, la couleur rouge du Soleil au couchant	137
4.d	Polarisation de la lumière du ciel	138

1 Les trois échelles de longueur pertinentes

1.a Modèle du dipôle oscillant

Trois modèles Pour créer un moment dipolaire oscillant, on dispose de trois modèles :

- Deux charges identiques constantes mobiles : $-q$ en $x = 0$ et $+q$ en $x = d \cos(\omega t)$. On obtient un moment dipolaire oscillant $\vec{p} = qd \cos(\omega t) \vec{u}_x$;
- Deux charges variables fixes : $Q(t) = q \cos(\omega t)$ en $x = d$ et $-Q(t)$ en $x = 0$. On obtient un moment dipolaire oscillant $\vec{p} = qd \cos(\omega t) \vec{u}_x$;
- Un petit élément de courant avec $i = \frac{dQ}{dt}$: on a alors $\frac{d}{dt} \vec{p} = Idz \vec{u}_z$

Applications des modèles Les atomes et les antennes.

Trois échelles de longueur On note l la taille du dipôle, r la distance entre l'observateur et le dipôle, et λ la longueur d'onde correspondant à l'oscillation.

1.b Approximation dipolaire

Dans la suite du chapitre, on se placera toujours dans l'approximation dipolaire.

Approximations dipolaire On parle de l'approximation **dipolaire** lorsque $d \ll r$.

Exemple de validité de l'approximation dipolaire Elle est valable pour les atomes et les antennes.

1.c Approximation non relativiste

Dans la suite du chapitre, on se placera toujours dans l'approximation non relativiste.

Approximation non relativiste On parle de l'approximation **non relativiste** lorsque $l \ll \lambda$.

Exemple de validité (ou non) de l'approximation non relativiste Elle est valable pour les atomes (car $10^{-10} \ll 10^{-7}$) mais n'est pas valable pour les antennes : il faut alors considérer des petits éléments d'antenne et intégrer.

Explication de l'origine du nom "non relativiste" Cette approximation provient de l'approximation $v \ll c$ dans laquelle on prend $c = lf$ et $c = \lambda f$.

Remarque L'approximation non relativiste est toujours respectée dans le cas statique.

Ordres de grandeur Pour les ondes lumineuses et les atomes, $l \approx 10^{-10}$ m et $\lambda \approx 100$ nm donc on respecte bien l'approximation non relativiste. Pour les antennes radio/wifi, on a $f \approx 1$ GHz et $\lambda = 30$ cm. l est de l'ordre du cm donc l'approximation non relativiste n'est pas valable.

Cas des antennes Pour traiter le cas des antennes, il faut considérer une portion infinitésimale d'antenne dz , établir des relations sur cette portion puis intégrer ces relations.

1.d Zones d'observation

Trois zones d'observation On distingue trois zones d'observation :

- **quasi statique** lorsque $l \ll r \ll \lambda$. On retrouve alors les résultats des chapitres précédents.
- **cas intermédiaire** lorsque $l \ll r \approx \lambda$
- **rayonnement** lorsque $l \ll \lambda \ll r$

2 Champ rayonné

Champs rayonnés En coordonnées sphériques pour un dipôle en O orienté selon \vec{u}_z , on a :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(p(t') + \frac{r}{c} \dot{p}(t') \right) 2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \left(p(t') + \frac{r}{c} \dot{p}(t') + \frac{r^2}{c^2} \ddot{p}(t') \right) \sin(\theta) \vec{u}_\theta \right]$$

où $t' = t - \frac{r}{c}$ est le temps de retard ou temps de propagation. Dans la limite statique, les dérivées s'annulent et on retrouve la formule connue pour le dipôle électrostatique. Dans la limite $\lambda \ll r$, cela devient :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{r^2}{c^2} \ddot{p}(t') \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

2.a Expression dans la zone de rayonnement

Champs rayonnés dans la limite $\lambda \ll r$ Dans la limite $\lambda \ll r$, les expressions des champs sont alors :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t')}{4\pi r} \sin(\theta) \vec{u}_\theta = c \vec{B} \wedge \vec{u}_r$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t')}{4\pi r c} \sin(\theta) \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \vec{p}(t') \wedge \vec{u}_r$$

où $t' = t - \frac{r}{c}$ est le temps de retard, ou temps de propagation (voire temps retardé).

2.b Invariances et symétries

Symétries Quel que soit le point M , le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie du dipôle (donc des courants et des charges) et par conséquent \vec{B} est selon \vec{u}_φ et que \vec{E} a une composante nulle selon \vec{u}_φ . Cela ne permet pas de prouver que \vec{E} est selon \vec{u}_θ , on ne peut pas le prouver et on l'admet.

Invariances La distribution de charges et de courants est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) donc :

$$\begin{cases} E_\theta = E_\theta(r, \theta, \cancel{\varphi}) \\ B_\varphi = B_\varphi(r, \theta, \cancel{\varphi}) \end{cases}$$

Dépendance en θ La dépendance en $\sin(\theta)$ se retient avec les symétries : par exemple, les champs doivent être nuls sur l'axe.

2.c Temps de propagation

Temps de propagation Le temps de propagation

$$t' = t - \frac{r}{c}$$

correspond à la date d'émission. Le terme $\frac{r}{c}$ correspond au temps de propagation de l'onde.

Cas d'un moment dipolaire sinusoïdal Pour un moment dipolaire $p = p_0 \cos(\omega t)$, on a :

$$\ddot{p}(t') = -\omega^2 \cos\left(\omega t - \omega \frac{r}{c}\right)$$

On retrouve donc la relation de dispersion des OPPH dans le vide $\omega = kc$, ce qui n'était pas évident au premier abord.

2.d Structure locale d'onde plane progressive

Justification qualitative Loin du dipôle, les ondes sphériques doivent paraître planes ($\vec{u}_r \approx \vec{cte}$ et $1/r \approx cte$).

Relations de structure On a les relations de structure :

$$\begin{cases} \vec{u}_r \wedge \vec{E} = c\vec{B} \\ \vec{u}_r \cdot \vec{E} = 0 \\ c\vec{B} \wedge \vec{u}_r = \vec{E} \end{cases}$$

Ce sont les mêmes relations de structure que pour les OPPH de direction de propagation \vec{u}_r . Cependant, cette relation n'est que locale puisque \vec{u}_r peut changer en fonction de la position.

Application Ces relations de structure permettent de calculer \vec{B} à partir de \vec{E} et réciproquement, sans avoir à passer par la formule admise.

2.e Polarisation

Polarisations L'onde est polarisée rectilignement. Précisément, \vec{E} est polarisé rectilignement selon \vec{u}_θ et \vec{B} est polarisé rectilignement selon \vec{u}_φ .

Attention Cela signifie bien que, pour une **position fixée**, \vec{E} et \vec{B} gardent des directions constantes au cours du temps.

3 Puissance rayonnée

3.a Décroissance de l'amplitude

Attention Cela n'est pas de l'absorption.

Calcul de la puissance moyenne On calcule tout d'abord le vecteur de Poynting avec les expressions admises, ce qui donne :

$$\vec{\pi} = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{\sin(\theta)}{4\pi r} \ddot{p}(t') \right)^2 \vec{u}_r$$

La puissance moyenne sortant de la sphère de rayon r et de centre O est alors :

$$P_{\text{moy}} = \frac{\mu_0}{c(4\pi)^2} \langle (\ddot{p})^2 \rangle \iint \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} r d\theta r \sin(\theta) d\varphi$$

soit en simplifiant :

$$P_{\text{moy}} = \frac{\mu_0}{8\pi c} \langle (\ddot{p})^2 \rangle \int_0^{2\pi} \sin^3(\theta) d\theta$$

Or, en linéarisant le sinus, on trouve $\sin^3(\theta) = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta)$ et l'intégrale cherchée vaut alors $\frac{4}{3}$. On a donc

$$P_{\text{moy}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle (\ddot{p})^2 \rangle$$

Dépendance en r La dépendance en r s'explique par le fait que l'onde ne perd pas d'énergie entre deux sphères puisqu'il n'y a pas d'absorption. Par conséquent, le flux du vecteur de Poynting vérifie $\phi_r = \phi_{r+dr}$ en moyenne. En intégrant cette relation, on trouve :

$$\phi_r = \frac{\omega^4 \mu_0 p^2}{12\pi c}$$

ω^4 explique la diffusion de Rayleigh : il y a 16 fois plus de diffusion dans le bleu-violet que dans le rouge.

3.b Dépendance en $1/\lambda^4$

Comprendre ici une dépendance en ω^4 .

Diffusion de Rayleigh On a :

$$\phi_r = \frac{\omega^4 \mu_0 p^2}{12\pi c}$$

ω^4 explique la diffusion de Rayleigh : il y a 16 fois plus de diffusion dans le bleu-violet que dans le rouge.

Conséquence : le ciel est bleu Les centres diffuseurs de l'atmosphère sont O_2 , N_2 , etc. sont de taille $l \approx 1$ nm donc $l \ll \lambda \ll r$ avec $\lambda \approx 600$ nm et $r \approx 1$ km. Par conséquent, les courtes longueurs d'onde ($\lambda_V = 400$ nm) sont $16 = 2^4$ fois mieux déviées que les grandes ($\lambda_R = 800$ nm). Ainsi le spectre du Soleil s'équilibre autour du bleu. On pourrait se demander si p_0 est indépendant de ω . On aura pour cela besoin d'introduire le modèle de l'électron élastiquement lié. Tout cela est détaillé dans la dernière partie.

3.c Anisotropie ; dépendance en θ ; indicatrice de rayonnement

Indicatrice de rayonnement Elle permet de caractériser quelles directions reçoivent bien le rayonnement du dipôle. Un dipôle oscillant **de direction fixe** n'émet pas selon son axe (*cf* polarisation de la lumière diffusée par l'atome).

3.d Puissance totale

On a la formule :

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{c^3}$$

3.e Formule de Larmor ; rayonnement synchrotron ; rayonnement de freinage

Rayonnement synchrotron Une particule chargée accélérée rayonne comme un dipôle (enlever la particule fixe revient à soustraire un champ en $-1/r^2$). Par conséquent, pour une particule de charge q et d'accélération a , on a $p_0 \omega^2 = dq \omega^2 = qa$ car $a = d\omega^2$ pour un mouvement sinusoïdal. On obtient donc la **formule de Larmor** qui donne la puissance émise :

$$P = \frac{q^2}{6\pi c^3} \langle a^2 \rangle$$

Remarque Le rayonnement synchrotron est utilisé dans le Soleil du plateau de Saclay.

Si le dipôle n'a pas de direction fixe On a alors la relation de structure suivante, où \vec{u}_r est le vecteur position :

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}_r$$

On dispose alors aussi de l'expression suivante pour \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}(t') \wedge \vec{u}_r$$

4 Approche documentaire : diffusion Rayleigh

4.a Modèle de l'électron élastiquement lié

Description et validité du modèle Le modèle de l'électron élastiquement lié provient initialement de la modélisation de Thomson de l'atome, proposée en 1904 suite à sa découverte de l'électron en 1897. Celui-ci proposa que les électrons étaient plongés dans une boule de rayon R (de l'ordre de 10^{-10} m), uniformément chargée de charges positives qui équilibrent la charge négative des électrons. Ce modèle fut invalidé en 1911 lorsque Rutherford découvrit, grâce à ses expériences de diffusion de particules α à travers une très fine feuille d'or, l'existence du noyau atomique, dont la taille est très petite devant le rayon des orbites électroniques.

Inventaire des forces Selon ce modèle, un électron atomique est rappelé vers le centre de l'atome par une force élastique $-k\vec{r}$. Les pertes d'énergie dues au rayonnement sont modélisées par une force de frottement fluide $-\beta\vec{v}$. On pose alors $\tau = \frac{m_e}{\beta}$ le temps caractéristique d'amortissement

et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$.

Ordre de grandeur Les électrons des molécules de dioxygène, de diazote ou d'ozone présentes dans la haute atmosphère ont des fréquences propres d'oscillation de l'ordre de 10^{17} Hz, et un temps caractéristique d'amortissement de l'ordre de 10^{-8} s.

4.b Diffusion d'un rayonnement par un électron atomique

Considérons une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, qui arrive sur un atome ou une molécule initialement non polaire, mais polarisable. Sous l'action du champ électrique incident \vec{E}_{inc} de cette onde, l'atome ou la molécule acquiert en régime sinusoïdal forcé un moment dipolaire électrique induit \vec{p} . Si on note $\vec{E}_{\text{inc}} = E_m e^{j\omega t} \vec{u}_x$, alors on a :

$$\vec{p} = p_0 e^{j\omega t} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad p_0 = \alpha(\omega) E_m$$

où $\alpha(\omega)$ est un coefficient complexe de polarisabilité. Ce dipôle électrique oscillant induit rayonne dans tout l'espace un champ magnétique qui transporte une puissance dont la moyenne temporelle obéit à la formule de Larmor :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |p_0|^2}{12\pi c}$$

On note en général, pour la diffusion par un électron atomique oscillant : $\langle P \rangle = \sigma(\omega) I_{\text{inc}}$ où

$$I_{\text{inc}} = \langle \|\vec{\pi}_{\text{inc}}\| \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_m^2}{2}$$

est la puissance surfacique moyenne de l'onde incidente et

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi r_e^2}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

la section efficace de diffusion, où $r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$. Cette puissance $\langle P \rangle$ est dite "diffusée" car elle provient de l'onde incidente qui excite le moment dipolaire.

Comment faire les calculs pour le prouver ? Déterminer le champ électrique selon le modèle de Thomson. Appliquer le PFD à un électron puis passer en notation complexe. Utiliser le fait qu'on est en optique donc $\omega \ll \omega_0$ pour simplifier grossièrement $\sigma(\omega)$, ce qui servira dans la suite.

4.c Le bleu du ciel, la couleur rouge du Soleil au couchant

Le bleu du ciel Le jour et sans nuage, le ciel apparaît bleu pour un observateur terrestre qui ne regarde pas dans la direction du Soleil. En effet, la lumière reçue par l'œil a été diffusée par les molécules de l'atmosphère éclairées par le Soleil, et le spectre de la lumière diffusée est celui du

spectre solaire pondéré par un facteur $\frac{1}{\lambda^4}$, ce qui fait que le bleu y est beaucoup plus représenté que le rouge.

Le rouge du Soleil levant et du Soleil couchant Lorsque l'observateur regarde le soleil couchant (ou levant), la lumière qui lui parvient arrive avec une faible inclinaison par rapport au sol. Elle traverse une grande longueur d'atmosphère et subit donc une absorption considérable à cause de la diffusion (la puissance diffusée est prélevée à celle de l'onde incidente) : si l'on note $I(\omega, z)$ l'intensité lumineuse d'une OPPH de pulsation ω se propageant vers les z croissants, on a :

$$I(\omega, z) = I_0 e^{-z/\delta(\omega)}$$

où I_0 est l'intensité de cette onde avant de rentrer dans l'atmosphère et $\delta(\omega)$ est la distance caractéristique d'absorption, inversement proportionnelle à $\sigma(\omega)$. Cette absorption est d'autant plus forte que la distance traversée est grande et que la longueur d'onde est faible : la lumière transmise devient donc de plus en plus rouge.

Comment faire les calculs pour le prouver ? Effectuer un bilan de puissance à un cylindre de section S et de longueur dz . On note n le nombre de centre diffuseurs par unité de volume. La puissance diffusée vaut alors $Sndz\sigma(\omega)I$ et entre $SI(z)$ et sort $SI(z+dz)$. On obtient une équation différentielle qui se résout en une exponentielle.

Remarque : et les nuages ? Les nuages diffusent la lumière selon un autre processus appelé "diffusion de Mie". La diffusion Rayleigh n'est plus valable pour les particules diffusantes des nuages, car ce sont des gouttes d'eau dont la taille n'est pas petite devant les longueurs d'onde de la lumière visible. Donc **les nuages ne sont pas bleus**.

Remarque : de sages paroles "Si vous arrivez à m'expliquer grâce au cours que les nuages sont bleus, soit vous avez un problème de vue, soit vous avez un problème d'honnêteté." Niels VDC

4.d Polarisation de la lumière du ciel

La lumière émise par le Soleil n'est pas polarisée. On peut décomposer chaque composante monochromatique de l'onde arrivant du Soleil sur une molécule en deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions orthogonales arbitraires d'un plan transverse, sans relation de phase entre elles (incohérentes). Notons O la position d'une molécule et M la position de l'observateur. On choisit de décomposer le champ électrique d'une telle onde incidente \vec{E}_{inc} en une composante $\vec{E}_{\text{inc}\parallel}$ contenue dans le plan qui contient la direction de propagation de l'onde incidente et la droite (OM) , et une composante $\vec{E}_{\text{inc}\perp}$ orthogonale à ce plan. Les puissances surfaciques moyennes associées à ces deux ondes incidentes polarisées rectilignement sont égales :

$$\langle \|\vec{E}_{\text{inc}\parallel}\|^2 \rangle = \langle \|\vec{E}_{\text{inc}\perp}\|^2 \rangle$$

Les deux champs électriques ainsi considérés excitent des composantes orthogonales $\vec{p}_{\parallel}(t)$ et $\vec{p}_{\perp}(t)$ du moment dipolaire de la molécule, également incohérentes entre elles, de sorte que l'on peut sommer les puissances diffusées par ces deux composantes. On note α l'angle que fait (OM) avec la direction de propagation de l'onde incidente. Comme la puissance surfacique moyenne rayonnée

par un dipôle de moment dipolaire \vec{p} est proportionnelle à $\sin^2(\theta)$ où $\theta = (\vec{p}, \vec{OM})$, les puissances surfaciques moyennes rayonnées par $\vec{p}_{||}(t)$ et $\vec{p}_{\perp}(t)$ ne seront généralement pas les mêmes en M :

$$\frac{\langle \|\vec{\pi}_{\text{diff}||}\| \rangle}{\langle \|\vec{\pi}_{\text{diff}\perp}\| \rangle} = \cos^2(\alpha) \leq 1 \quad \text{dans la direction de } M$$

Ce rapport est indépendant de la longueur d'onde. Il en résulte que la lumière diffusée par l'atmosphère et reçue par l'observateur M est partiellement polarisée, sauf théoriquement si $\alpha = 0$ (inobservable alors car l'observateur regarde dès lors le Soleil), ou si $\alpha = \pi$ (tout autant inobservable car l'observateur ne peut regarder le ciel dans la direction opposée au Soleil). Selon cette analyse, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on devrait observer une lumière polarisée rectilignement dans la direction de \vec{p}_{\perp} : en fait, il existe d'autres mécanismes de diffusion de la lumière solaire par les particules de l'atmosphère et la polarisation observée n'est pas rigoureusement rectiligne.

Troisième partie

Thermodynamique

Chapitre 16

Principes de la thermodynamique

Table des matières

1	Modélisation des systèmes thermodynamiques	143
1.a	Systèmes thermodynamiques	143
1.b	Modèle du gaz parfait	144
1.c	Modèle du gaz de Van der Waals (complément)	144
1.d	Modèle de la phase condensée idéale	145
2	Premier principe; bilans d'énergie	145
2.a	Énergie interne; enthalpie; capacités thermiques	145
2.b	Échanges d'énergie	146
2.c	Modèles de transformation	146
2.d	Énoncés du premier principe	147
2.e	Lois de Laplace	147
3	Deuxième principe; bilans d'entropie	147
3.a	Réversibilité - irréversibilité	148
3.b	Énoncés du deuxième principe	148
3.c	Interprétation de l'entropie (culture)	148
3.d	Calculs de variation d'entropie	148
4	Applications	149
4.a	Comparaison de deux détentes	149
4.b	Transfert thermique spontané	150
5	Troisième principe de la thermodynamique (complément)	150

1 Modélisation des systèmes thermodynamiques

1.a Systèmes thermodynamiques

On utilise trois échelles différentes :

- macroscopique (mm et plus);
- mésoscopique (μm);

- microscopique (nm et moins).

Ordre de grandeur à connaître : dans $1 \mu m^3$ d'air, en supposant l'air un gaz parfait et en se plaçant à $P = 1 \text{ bar}$ et $T = 300 \text{ K}$, on a dans ce volume d'air environ $N = 25 \cdot 10^6$ molécules.

On distingue les systèmes :

- ouverts ;
- fermés : pas d'échange de matière avec l'extérieur ;
- isolés : pas d'échange de matière ni d'énergie avec l'extérieur.

Ne pas confondre :

- équilibre : pas d'évolution des paramètres intensifs et pas d'échange aux frontières ;
- état stationnaire : pas d'évolution temporelle.

Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local : T , P sont définies localement mais ne sont pas nécessairement uniformes sur l'ensemble du système

1.b Modèle du gaz parfait

Point de vue microscopique :

- On néglige la taille des particules devant la distance entre les particules.
- On néglige les interactions à distance entre les particules.

Point de vue macroscopique :

- Équation d'état : $PV = nRT$
- Vérifie la première loi de Joule : $U_m = U_m(T)$
- Vérifie la deuxième loi de Joule : $H_m = H_m(T)$

On note $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ la vitesse quadratique moyenne en $m.s^{-1}$. On définit alors la température cinétique par :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

et la pression cinétique par

$$P = \frac{1}{3}n^*mu^2$$

avec n^* la densité particulaire en m^{-3} . On en déduit alors $PV = nRT$ en posant $R = N_A \times k_B$.

1.c Modèle du gaz de Van der Waals (complément)

$$\left(P + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

où a et b sont des constantes strictement positives qui dépendent du gaz mais ne dépendent pas de n , P , T , etc.

Attention : penser à vérifier "l'homogénéité intensive/extensive" des grandeurs.

Le but de ce modèle est de :

- prendre en compte le volume des particules ;
- prendre en compte les interactions à distance.

1.d Modèle de la phase condensée idéale

Il s'agit d'un modèle où la phase condensée est :

- **incompressible** : V ne varie pas lorsque P varie ;
- **indilatable** : V ne varie pas lorsque T varie.

On définit le coefficient de compressibilité isotherme par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T$$

On définit le coefficient de compressibilité isentropique par

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S$$

Pour une phase condensée idéale, $U_m = U_m(T)$ car on ne peut pas faire varier V .

2 Premier principe ; bilans d'énergie

2.a Énergie interne ; enthalpie ; capacités thermiques

L'**énergie interne** U est une fonction d'état extensive qui s'exprime en Joule. Son existence et les propriétés sus-citées forment la première partie du premier principe.

L'**enthalpie** $H = U + PV$ est une fonction d'état extensive. Elle s'exprime en Joule.

Pour un système fermé, on définit la **capacité thermique à volume constant** (ou **capacité calorifique**) par

$$C_p = \frac{\partial U}{\partial T} \Big|_V$$

Pour un système fermé, on définit la **capacité thermique à pression constante** par :

$$C_P = \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_P$$

On rappelle que si X est une grandeur extensive, alors :

- x est la grandeur massique associée ;
- X_m est la grandeur molaire associée.

Les seules exceptions sont n , m et M .

Pour une phase condensée idéale, on a $C_V \approx C_P$.

Pour l'eau, on a $c = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.K^{-1}$.

Pour un **gaz parfait monoatomique** :

$$\begin{cases} U = \frac{3}{2}nRT \\ U_m = \frac{3}{2}RT \\ u = \frac{3}{2} \frac{RT}{M} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C_V = \frac{3}{2}nR \\ C_{V,m} = \frac{3}{2}R \\ c_m = \frac{3}{2} \frac{R}{M} \end{cases}$$

Pour un **gaz parfait diatomique** lorsque $T_{rot} \ll T \ll T_{vib}$ (avec en pratique $T_{rot} = 10 \text{ K}$ et $T_{vib} = 1000 \text{ K}$), on a :

$$C_V \approx \frac{5}{2}nR$$

Pour un gaz parfait, on définit le **coefficient de Laplace**, ou **exposant adiabatique**, ou encore **rapport des capacités thermiques** γ , par :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Pour un gaz parfait, on a la **relation de Mayer** :

$$C_p = C_V + nR$$

Pour un **gaz parfait** :

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

2.b Échanges d'énergie

Travail des forces de pression (qui doivent être uniformes sur l'ensemble du système pour que la formule soit valable) :

$$\delta W = -P_{ext} \times dV$$

Travail électrique en convention récepteur :

$$\delta W = ui \times dt$$

Transfert thermique : cf. premier principe

2.c Modèles de transformation

Une transformation est dite :

- **adiabatique** si elle a lieu sans transfert thermique ;
- **monotherme** si tous les transferts thermiques se font avec un même thermostat porté à une température constante ;
- **isotherme** si la température du système est définie uniformément sur le système et est indépendante du temps ;

- **monobare** si la pression extérieure est constante ;
- **isobare** si la pression du système est définie uniformément et indépendante du temps ;
- **isochore** si le volume du système est constant ;
- **mécaniquement réversible** si à tout instant $P_{ext} = P$;
- **quasistatique** si le système est à tout instant infiniment proche d'un état d'équilibre ;
- **réversible** si elle est quasistatique, mécaniquement réversible, et que tout chemin emprunté entre deux états d'équilibre infiniment proches peut être emprunté dans l'autre sens.

2.d Énoncés du premier principe

Théorème 32 (Premier principe). *Lors d'une transformation $I \rightarrow F$ d'un système fermé :*

$$E_F - E_I + U_F - U_I = W + Q$$

Très souvent, le terme $E_F - E_I$ est négligeable.

Théorème 33 (Premier principe infinitésimal). *Lors d'une transformation d'un système fermé :*

$$dE + dU = \delta W + \delta Q$$

Ordre de grandeur : pour une masse m d'eau, on a, lorsque $\Delta T = 1 \text{ K}$ et $\Delta z = 400 \text{ m}$, $\Delta E_{pp} = \Delta U$.

Théorème 34 (Premier principe monobare avec équilibre mécanique initial et final). *Pour une transformation monobare avec équilibre mécanique initial et final d'un système fermé :*

$$E_F - E_I + H_F - H_I = W_{utile} + Q$$

où $W_{utile} = W - W_{pression}$

2.e Lois de Laplace

Théorème 35 (Lois de Laplace). *Lors d'une transformation $I \rightarrow F$ adiabatique, mécaniquement réversible d'un gaz parfait avec γ constant, immobilité macroscopique et sans travail utile, on a :*

$$P_I V_I^\gamma = P_F V_F^\gamma \quad \text{et} \quad T_I^\gamma P^{1-\gamma} = T_F^\gamma P^{1-\gamma} \quad \text{et} \quad T_I V_I^{\gamma-1} = T_F V_F^{\gamma-1}$$

On rappelle que pour un gaz parfait monoatomique $\gamma = \frac{5}{3}$ et que pour un gaz parfait diatomique avec $T_{rot} \ll T \ll T_{vib}$ $\gamma = \frac{7}{5}$.

3 Deuxième principe ; bilans d'entropie

Pourquoi la nécessité d'un deuxième principe ? Le premier principe est un principe de conservation : pour un système isolé, $U_F = U_I$. Le premier principe ne permet alors pas de savoir si la transformation se déroule dans le sens $I \rightarrow F$ ou dans le sens $F \rightarrow I$.

On a alors la nécessité d'un principe d'évolution, le second principe, pour savoir dans quel sens se déroule la transformation.

3.a Réversibilité - irréversibilité

Idée intuitive de l'irréversibilité : le film est complètement incohérent si on le projette à l'envers.

Par exemple, une solution de l'équation $m\ddot{x} = kx$ est réversible car si $t \mapsto x(t)$ est solution, alors $t \mapsto x(-t)$ est aussi solution. En revanche, ce n'est plus le cas pour $m\ddot{x} = \lambda\dot{x}$, sauf si on prend la solution nulle.

Le caractère réversible ou non est une question d'échelle des temps : si on prend l'exemple d'un oscillateur très faiblement amorti que l'on observe sur une courte période de temps, alors on ne voit pas l'irréversibilité car l'amortissement est trop faible. En revanche, si on prend une échelle de temps beaucoup plus importante, on peut commencer à apercevoir l'irréversibilité.

3.b Énoncés du deuxième principe

Théorème 36 (Deuxième principe). *Il existe une fonction d'état extensive appelée **entropie** et notée S qui s'exprime en $J.K^{-1}$ telle que pour toute transformation $I \rightarrow F$ d'un système fermé :*

$$S_F - S_I = S_{ech} + S_{créée}$$

avec $S_{créée} \geq 0$ et S_{ech} l'entropie d'échange qui vaut 0 si la transformation est adiabatique et $\sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ si le système reçoit Q_i du thermostat T_i

Théorème 37 (Deuxième principe infinitésimal). *Pour une transformation élémentaire d'un système fermé :*

$$dS = \delta S_{ech} + \delta S_{créée}$$

avec $\delta S_{ech} = \frac{\delta Q}{T}$ si la transformation est thermiquement réversible.

3.c Interprétation de l'entropie (culture)

Attention, l'entropie n'est pas une mesure du désordre. Elle est plutôt une **mesure du manque d'information** (exemple simple du nombre de complexions lors d'une détente de Joule Gay-Lussac).

3.d Calculs de variation d'entropie

Cas du gaz parfait En empruntant un chemin réversible et appliquant les deux premiers principes et l'équation d'état, on trouve

$$dS = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

et donc

$$S - S_0 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

Cas de la phase condensée idéale On a :

$$dS = mc \frac{dT}{T}$$

et donc en supposant c indépendante de T

$$S - S_0 = mc \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)$$

Si c n'est plus supposée indépendante de T , il faut alors intégrer la relation infinitésimale.

4 Applications

4.a Comparaison de deux détente

Détente de Joule et Gay-Lussac Compartiment calorifugé rigide de volume $2V_0$. Initialement, un gaz parfait est contenu dans le volume V_0 avec n moles à la température T_I .

Premier principe : $U_F - U_I = Q + W$ avec $Q = 0$ car les parois sont calorifugées. $W = 0$ car la détente s'effectue dans du vide. Donc $\Delta U = 0$. On en déduit $T_F = T_I$ car $\Delta U = C_V \Delta T$.

Or, $S_{ech} = 0$ car la transformation est adiabatique, donc $\Delta S = S_{créée} = nR \ln(2)$ car $T_F = T_I$ et $V_F = 2V_0$ alors que $V_I = V_0$.

Détente isotherme mécaniquement réversible d'un gaz parfait Un piston détend lentement un gaz parfait d'un état initial (V_0, T_0, n) vers un état final $(2V_0, T_0, n)$ avec une transformation monotherme avec l'atmosphère à T_0 .

On a $\Delta U = C_V \Delta T = 0$ donc $Q = -W$ d'après le premier principe. Or, $\delta W = -nRT \frac{dV}{V}$ car on a un gaz parfait et la transformation est mécaniquement réversible, donc $W = -nRT \ln(2)$ et $Q = nRT \ln(2)$.

$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_0}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{2V_0}{V_0} \right) = nR \ln(2)$. Or, $\delta S_{ech} = \frac{\delta Q}{T_0}$ donc $S_{ech} = nR \ln(2)$ d'où $S_{créée} = 0$ si bien que la transformation est réversible.

Comparaison

	Joule et Gay-Lussac	Isotherme mécaniquement réversible
ΔU	0	0
W	0	$-nRT_0 \ln(2)$
Q	0	$nRT_0 \ln(2)$
S_{ech}	0	$nR \ln(2)$
ΔS	$nR \ln(2)$	$nR \ln(2)$
$S_{créée}$	$nR \ln(2)$	0

4.b Transfert thermique spontané

On considère deux compartiments (C_1, T_1) et (C_2, T_2) qui sont "en contact thermique et rien d'autre". On suppose $T_1 > T_2$ initialement et on veut montrer $dT_1 < 0$.

Premier principe à 1, 2 : $dU = C_1 dT_1 + C_2 dT_2 = \delta W + \delta Q$ avec $\delta W = 0$ et $\delta Q = 0$ car on considère que le système est isolé de tout.

Deuxième principe à 1, 2 : $dS = \delta S_{ech} + \delta S_{créée}$ avec δS_{ech} car la transformation de 1, 2 est adiabatique. On a donc $dS \geq 0$. Or, $dS = dS_1 + dS_2 = C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2}$

Si $C_1 = C_2 = C$, alors $dS = C \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dT_1$ et comme $dS \geq 0$, $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \leq 0$ et $C \geq 0$, alors $dT_1 \leq 0$.

5 Troisième principe de la thermodynamique (complément)

Le troisième principe de la thermodynamique, aussi appelé principe de Nernst, énonce que

La valeur de l'entropie de tout corps pur dans l'état de cristal parfait est nulle à la température de 0 Kelvin.

Ce principe permet d'avoir une valeur déterminée de l'entropie, et non pas une valeur à constante additive près. Ce principe a été généralisé aux solides quelconques, aux liquides et aux gaz. En revanche, il ne s'applique pas aux systèmes quantiques : il est lié à l'indiscernabilité quantique des particules identiques.

Chapitre 17

Changements d'état d'un corps pur

Table des matières

1	Variance	151
2	Diagramme $P - T$	152
2.a	Rappels	152
2.b	Formule de Clapeyron	152
3	Diagramme $P - v$	152
3.a	Rappels	152
3.b	Loi des moments	152
4	Enthalpie et entropie de changement d'état	153
4.a	Enthalpie de changement d'état	153
4.b	Entropie de changement d'état	153
5	Exemples	153
5.a	Cessation d'un état métastable	153
5.b	Exemple de changement d'état irréversible	154
5.c	Refroidissement isochore d'un mélange liquide - vapeur	154

1 Variance

La variance est le nombre maximum de paramètres intensifs qu'un opérateur peut fixer sans rompre l'équilibre du système.

2 Diagramme $P - T$

2.a Rappels

Diagramme P en fonction de T . La zone solide se trouve à gauche, celle liquide au milieu en haut et celle du gaz en bas à droite. Le point d'intersection des trois courbes est le **point triple**. Le point au bout de la courbe d'équilibre liquide-vapeur est le **point critique**. La variance est nulle au point triple. Pour un équilibre entre deux états, la variance vaut 1 : usuellement, on prend alors la pression en fonction de la température.

Pour l'eau (et aussi pour le bismuth Bi, le gallium Ga, etc.), la pente de l'équilibre solide-liquide est négative, contrairement à celle pour la plupart des autres corps purs.

2.b Formule de Clapeyron

Pour une transition de phase $1 \rightarrow 2$, on a la **formule de Clapeyron** :

$$\frac{dP_{1 \rightarrow 2}}{dT} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{T(v_2 - v_1)}$$

où v_1 et v_2 sont pris à T et $P_{1 \rightarrow 2}(T)$, et où $L_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1$ est la chaleur latente de changement d'état.

En particulier, on sait que $\rho_S < \rho_L$ pour l'eau, donc $v_S > v_L$ ce qui explique la pente négative annoncée précédemment.

3 Diagramme $P - v$

3.a Rappels

Le diagramme représente la pression P en fonction du volume massique v . La courbe s'appelle **courbe de saturation**. Son point culminant est le **point critique**. La partie de la courbe à gauche du point critique est la **courbe d'ébullition**. La partie de la courbe à droite du point critique est la **courbe de rosée**. Pour la température critique, l'isotherme est une courbe qui frôle le diagramme au point critique en y faisant un point d'inflexion. Pour une température inférieure à la température critique, elle est quasiment verticale dans le domaine de liquide, horizontale dans le domaine liquide-vapeur (à température constante, le changement d'état d'un corps pur se fait à pression constante) et redevient courbe décroissante dans le domaine vapeur. Pour une température plus grande que la température critique, l'isotherme est au-dessus de la courbe $P - v$, dans la zone du fluide supercritique.

3.b Loi des moments

On appelle titre massique la quantité :

$$x_L = \frac{m_L}{m_L + m_V}$$

La loi des moments stipule que :

$$x_L = \frac{v_M - v_B}{v_A - v_B}$$

sur une isotherme dans un diagramme $P - v$. Le résultat est identique pour un diagramme $T - s$ sur une isobare.

4 Enthalpie et entropie de changement d'état

En réalité, on parle ici d'enthalpies et d'entropies **massiques** de changement d'état.

4.a Enthalpie de changement d'état

Il s'agit de :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} h = h_2(T, P_{1 \rightarrow 2}(T)) - h_1(T, P_{1 \rightarrow 2}(T))$$

Ordres de grandeur pour l'eau :

- $\Delta_{\text{fus}} h \approx 300 \text{ kJ/kg}$
- $\Delta_{\text{vap}} h \approx 2000 \text{ kJ/kg}$

4.b Entropie de changement d'état

Il s'agit de :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} s = s_2(T, P_{1 \rightarrow 2}(T)) - s_1(T, P_{1 \rightarrow 2}(T))$$

Elle est reliée à l'enthalpie massique de changement d'état par :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} s(T) = \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T}$$

(imaginer un chemin réversible, appliquer le premier principe monobare et utiliser le fait qu'on a un thermostat).

5 Exemples

5.a Cessation d'un état métastable

TD4, exercice 13 : exemple de la surfusion.

Il faut faire des hypothèses sur la constitution finale du système (équilibre diphasé ou non), puis, en remarquant que cette transformation étant rapide, on peut la considérer comme adiabatique et alors puisqu'elle est monobare, la variation d'entropie est nulle.

Il faut alors imaginer une suite de transformation fictives simples (échauffements ou refroidissements sans changement d'état, ou changement d'état à pression et température constante) pour calculer la variation d'enthalpie d'une autre manière en utilisant que l'enthalpie est une fonction d'état, ce qui permet alors d'obtenir le titre en liquide ou en masse.

Il convient alors de vérifier la validité de l'hypothèse effectuée au départ.

Ensuite, pour calculer la variation d'entropie, on suit les mêmes transformation fictives en disant que l'entropie est une fonction d'état.

5.b Exemple de changement d'état irréversible

Exemple : Fusion d'un glaçon en contact avec un thermostat à T_{ext} . Le glaçon est initialement à T_{fus} . On applique le deuxième principe qui donne

$$S_{créée} = \Delta S - S_{ech}$$

Or, le premier principe monobare donne $\Delta H = Q = m\Delta_{fus}h$ et on a $\Delta S = m\Delta_{fus}s = m\frac{\Delta_{fus}h}{T_{fus}}$. On en tire

$$S_{créée} = m\Delta_{fus}h \left(\frac{1}{T_{fus}} - \frac{1}{T_{ext}} \right)$$

comme $T_{fus} < T_{ext}$, on en déduit que la transformation est irréversible.

5.c Refroidissement isochore d'un mélange liquide - vapeur

cf TP du vendredi 08/11/2024 : exemple du fluide à très haute pression dans un tube et de sa transformation isochore (ce sont des droites verticales sur le diagramme $P - v$). Notamment, on observe un brouillard étrange à la température critique et au volume correspondant au point critique.

Chapitre 18

Systèmes ouverts ; machines thermiques

Table des matières

1	Bilans pour un système ouvert en régime stationnaire	155
1.a	Choix d'un système fermé	155
1.b	Bilan d'une grandeur extensive quelconque	156
1.c	Bilan énergétique	156
1.d	Bilan entropique	157
1.e	Exemples	157
2	Machines thermiques	158
2.a	Rappels	158
2.b	Écoulements dans les principaux éléments d'une machine thermique	159
2.c	Utilisation du diagramme de Clapeyron	159
2.d	Utilisation du diagramme entropique	159
2.e	Utilisation du diagramme enthalpique (ou des "frigoristes")	160
3	Parentèse : identités thermodynamiques	160

1 Bilans pour un système ouvert en régime stationnaire

1.a Choix d'un système fermé

On prend Σ^* le fluide qui est présent dans la machine à t et entre dans la machine à t , et qui est présent dans la machine à $t + dt$ et sort de la machine à $t + dt$. Ce système est fermé.

Puisque Σ^* est un système fermé, on a :

$$m_{\Sigma^*}(t) = m_{\Sigma^*}(t + dt)$$

Par extensivité de la masse, cela donne :

$$\delta m_e + m_{\Sigma}(t) = m_{\Sigma}(t + dt) + \delta m_s$$

Or, en régime permanent, on a : $m_\Sigma(t) = m_\Sigma(t + dt)$. On en déduit :

$$\delta m_e = \delta m_s$$

que l'on notera δm dans la suite. On définit alors le **débit massique** par :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt}$$

1.b Bilan d'une grandeur extensive quelconque

Le but est de calculer $X_{\Sigma^*}(t + dt) - X_{\Sigma^*}(t)$ où X est une grandeur extensive. On a :

$$\begin{aligned} X_{\Sigma^*}(t + dt) - X_{\Sigma^*}(t) &= (X_\Sigma(t + dt) + \delta m_s x_s) - (X_\Sigma(t) + \delta m_e x_e) \\ &= \delta m (x_s - x_e) \end{aligned}$$

car en régime permanent $X_\Sigma(t + dt) = X_\Sigma(t)$.

1.c Bilan énergétique

On applique le premier principe au système **fermé** Σ^* . On obtient alors :

$$\delta m [e_m + u]_e^s = \delta W + \delta Q$$

Calcul du travail d'admission En notant σ_e la section du tuyau d'entrée, on a :

$$\delta W_{\text{admission}} = P_e \sigma_e \vec{n} \cdot \vec{dl}_e$$

soit

$$\delta W_{\text{admission}} = P_e v_e \delta m$$

Calcul du travail de refoulement En notant σ_s la section du tuyau de sortie, on a :

$$\delta W_{\text{refoulement}} = P_s \sigma_s \vec{n} \cdot \vec{dl}_s$$

soit

$$\delta W_{\text{refoulement}} = -P_s v_s \delta m$$

Premier principe pour les écoulement permanents En réinjectant dans l'expression trouvée précédemment, on obtient ce qu'on appelle aussi parfois le "premier principe industriel" : en régime permanent, on a :

$$\delta m [e_m + h]_e^s = \delta W_{\text{utile}} + \delta Q$$

En notant w_{utile} le travail utile massique et q le transfert thermique massique, cela peut se réécrire :

$$[e_m + h]_e^s = w_{\text{utile}} + q$$

Encore, en notant P_{utile} la puissance utile et en notant Φ le flux thermique (puissance thermique), cela peut finalement s'écrire :

$$D_m [e_m + h]_e^s = P_{\text{utile}} + \Phi$$

Exemple Si la seule énergie "macroscopique" est l'énergie potentielle de pesanteur, on a :

$$e_m = \frac{\delta m \frac{c^2}{2} + gz \delta m}{\delta m} = \frac{c^2}{2} + gz$$

avec c la vitesse d'ensemble du fluide et z l'altitude en prenant l'axe \vec{u}_z vertical orienté vers le haut.

1.d Bilan entropique

On applique le deuxième principe au système **fermé** Σ^* pour obtenir la formule :

$$\delta m [s]_e^s = \delta S_{\text{ech}} + \delta S_{\text{créée}}$$

1.e Exemples

Détente de Joule Kelvin Un fluide traverse en régime permanent un compartiment actif ou un matériau poreux en circulant dans un tuyau calorifugé. On note P_e et P_s les pressions d'entrée et de sortie, et T_e et T_s les températures d'entrée et de sortie. On applique le premier principe pour un écoulement permanent :

$$\delta [h]_e^s = \delta W_{\text{utile}} + \delta Q$$

Or, $\delta W_{\text{utile}} = 0$ car il n'y a pas de paroi mobile, et $\delta Q = 0$ car les parois du tuyau sont calorifugées. On a donc

$$h_e = h_s$$

On dit que la détente de Joule-Kelvin est une détente **isenthalpe**. Si on rajoute l'hypothèse "gaz parfait", on obtient

$$T_e = T_s$$

Montrons que la détente de Joule-Kelvin est irréversible. Puisque la transformation est adiabatique, le deuxième principe donne :

$$\delta m [s]_e^s = S_{\text{créée}}$$

Or, pour n moles d'un gaz parfait, on a :

$$S - S_0 = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

si bien que

$$S_{\text{créée}} = \frac{\delta m R}{M} \ln \left(\frac{P_e}{P_s} \right)$$

Or, l'expérience avec ce sens d'écoulement n'est possible que si $P_e > P_s$, donc $S_{\text{créée}} > 0$ et la détente est irréversible.

Tuyère Le fluide traverse une tuyère calorifugée. Les paramètres à l'entrée de la tuyère sont T_e , P_e et c_e . Les paramètres à la sortie de la tuyère sont T_s , P_s et c_s . c_s n'est alors plus négligeable, et c'est même précisément ce qui nous intéresse.

On applique le premier principe pour les écoulements permanents en négligeant les variations d'énergie potentielle devant les variations d'énergie cinétique, qui donne

$$\delta m [e_c + h]_e^s = \delta W_{\text{utile}} + \delta Q$$

Or, $\delta W_{\text{utile}} = 0$ car il n'y a pas de paroi mobile, et $\delta Q = 0$ car la tuyère est calorifugée. On obtient donc, en supposant que le fluide est un gaz parfait d'exposant adiabatique γ et de masse molaire M :

$$c_s = \sqrt{\frac{2R\gamma}{(\gamma - 1)M} (T_e - T_s)}$$

2 Machines thermiques

2.a Rappels

On a le

Théorème 38 (2ème principe de Kelvin). *Il n'existe pas de moteur cyclique monotherme.*

Démonstration. On applique le premier principe sur un cycle au fluide caloporteur :

$$\Delta U = W + Q$$

Or, U est une fonction d'état, donc sur un cycle, $\Delta U = 0$ et on en déduit que $W = -Q$. On applique le deuxième principe sur un cycle au fluide caloporteur :

$$\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{créée}}$$

Or, on a de même $\Delta S = 0$, et on sait que $S_{\text{ech}} = \frac{Q}{T}$. On en déduit que $W = TS_{\text{créée}} \geq 0$. Ainsi, on peut avoir un radiateur, mais pas un moteur cyclique monotherme. \square

Rappelons ici le résumé des formules à connaître pour les moteurs, pompes à chaleur et machines frigorifiques :

	Intérêt	Coût	Rendement ou efficacité	Rendement ou efficacité de Carnot
Moteur	$-W$	Q_C	$\eta = \frac{-W}{Q_C}$	$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$
PAC	$-Q_C$	W	$e_{\text{PAC}} = \frac{-Q_C}{W}$	$e_{\text{PAC, Carnot}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$
Frigo	Q_F	W	$e_{\text{Frigo}} = \frac{Q_F}{W}$	$e_{\text{Frigo, Carnot}} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$

Remarque : Si $T_F = T_C$, alors :

- $\eta_{\text{Carnot}} = 0$ (en accord avec le deuxième principe de Kelvin)
- $e_{\text{PAC, Carnot}} \longrightarrow +\infty$
- $e_{\text{Frigo, Carnot}} \longrightarrow +\infty$

Cycle de Carnot C'est un cycle réversible avec 2 adiabatiques et 2 isothermes (une à T_F et une à T_C). Remarque : sa puissance est nulle...

2.b Écoulements dans les principaux éléments d'une machine thermique

Détendeur Le premier principe industriel donne en négligeant les variations d'énergie mécanique macroscopique $\delta m [h]_e^s = \delta Q + \delta W_{\text{utile}}$. Or, on a souvent $\delta Q = 0$ et $\delta W_{\text{utile}} = 0$, donc on a souvent

$$h_e = h_s$$

Échangeurs thermiques Par exemple, ce sont les évaporateurs, les condenseurs, etc. Le premier principe industriel donne $h_s - h_e = q + w_{\text{utile}}$ avec très souvent $w_{\text{utile}} = 0$.

Tuyère On néglige plus les variations d'énergie cinétique. On a alors :

$$[e_c + h]_e^s = q + w_{\text{utile}}$$

avec souvent $q = 0$, $w_{\text{utile}} = 0$ et $c_e \ll c_s$.

Pompe/compresseur/turbine On a $h_s - h_e = q + w_{\text{utile}}$ avec $q = 0$. Pour une turbine, $w_{\text{utile}} < 0$.

2.c Utilisation du diagramme de Clapeyron

Pour une machine thermique, la machine est un moteur si elle décrit son cycle dans le sens horaire dans le diagramme de Clapeyron (diagramme $P - v$). Et on a les machines frigorifiques (et donc les PAC) qui correspondent au sens trigonométrique. Retenir **frigo/trigo**. La démonstration est la même que dans le paragraphe suivant.

2.d Utilisation du diagramme entropique

Pour une machine thermique, la machine est un moteur si elle décrit son cycle dans le sens horaire dans le diagramme entropique (diagramme $T - s$). Et on a les machines frigorifiques (et donc les PAC) qui correspondent au sens trigonométrique. Retenir **frigo/trigo**.

Preuve : On réalise la preuve pour un cycle de Carnot. On a alors : $Q_C + Q_F = -W$ d'après le premier principe appliqué sur un cycle. Or, on a

$$\oint_{\text{Cycle}} T \, ds = Q_C + Q_F$$

En parcourant le cycle dans le sens horaire, on trouve $Q_F + Q_C > 0$ donc $W < 0$. Dans le sens trigonométrique, on trouve $W > 0$.

2.e Utilisation du diagramme enthalpique (ou des "frigoristes")

cf DM sur le diagramme des frigoristes et le cours de sup

Prendre au garde que parfois le diagramme représente P en fonction de h , mais le plus souvent, bien qu'on le note encore $P - h$, il s'agit en réalité de $\ln(P)$ en fonction de h . Il faut savoir quelles sont les différentes courbes remarquables de ce diagramme. Souvent, placer les points remarquables de la transformation grâce aux courbes remarquables et appliquer le premier principe industriel permettra par lecture graphique d'arriver très vite au rendement de la machine.

Les **isothermes** sont des droites verticales dans le domaine liquide (le modèle de la phase condensée idéale est applicable et l'enthalpie est alors constante si T est constante). Dans le domaine liquide-vapeur, ce sont des droites horizontales car à température donnée, un changement d'état s'effectue à pression fixée. Dans le domaine gazeux, pour un gaz parfait, ce doit être une droite verticale. Ainsi, c'est une courbe concave qui tend à devenir une droite verticale à mesure que la pression diminue, le gaz tendant alors à se comporter comme un gaz parfait (*cf* le diagramme d'Amagat $PV - P$)

Les **isotitres** sont de courbes qui partent du point critique et descendent dans la zone liquide-vapeur jusqu'à l'axe des abscisses sans se croiser.

Dans le modèle du gaz parfait, les **isentropiques** ont dans la zone du gaz une équation de la forme

$$\ln(P) = \frac{c_P M}{R} \ln\left(\frac{h}{c_P} + A\right) + B$$

où A et B sont des constantes.

3 Parenthèse : identités thermodynamiques

Première identité thermodynamique Pour un système fermé sans changement de constitution, on a :

$$dU = TdS - PdV$$

(appliquer le premier et le deuxième principe pour une réversible fictive)

Deuxième identité thermodynamique Pour système fermé sans changement de constitution, on a :

$$dH = TdS + VdP$$

($dH = dU + PdV + VdP$ et utiliser la première identité thermodynamique)

Chapitre 19

Transferts thermiques

Table des matières

1	Modes de transferts thermique : diffusion (<i>ie</i> conduction), convection et rayonnement	162
2	Conduction thermique	162
2.a	Vecteur densité de courant thermique; flux thermique à travers une surface orientée	162
2.b	Loi de Fourier; conductivité thermique	162
3	Bilans d'énergie ou de puissance	163
3.a	Cas sans terme source ni puits dans les trois géométries	163
3.b	Cas avec production ou disparition d'énergie thermique	163
4	Équation de la diffusion thermique; diffusivité thermique	164
4.a	Sans sources ni puits	164
4.b	Avec sources ou puits	164
4.c	Irréversibilité	164
4.d	Analyse en ordre de grandeur, temps caractéristique de diffusion	165
5	Conditions aux limites	165
5.a	Sur le vecteur densité de courant	165
5.b	Contact parfait entre deux solides	165
5.c	Transferts conducto-convectifs à l'interface avec un fluide; loi de Newton	165
6	Résolution en régime stationnaire : exemple de solutions	165
7	Régime stationnaire; résistance thermique	166
7.a	Résistances thermiques dans les trois géométries	166
7.b	Analogie résistance thermique / résistance électrique / capacité	167
7.c	Résistance thermique conducto-convective	168
7.d	Associations de résistances thermiques	168
7.e	Résolution avec source d'énergie	169
8	Compléments	171
8.a	Production d'entropie par conduction thermique : entropie massique créée par unité de temps	171
8.b	Un exemple de résolution numérique approchée de l'équation de la chaleur	172

1 Modes de transferts thermique : diffusion (*ie* conduction), convection et rayonnement

Modes de transfert Il y en a trois

- la **conduction**, de proche en proche sans mouvement d'ensemble
- la **convection**, de proche en proche avec mouvement macroscopique
- le **rayonnement**, possible sans support matériel

Exemple Le vase Dewar contient une partie de vide pour éliminer la conduction et la convection qui nécessitent un support matériel, et est recouvert par une paroi métallique pour éliminer le rayonnement.

2 Conduction thermique

2.a Vecteur densité de courant thermique ; flux thermique à travers une surface orientée

On note ϕ le flux thermique, c'est une puissance en W. Le flux thermique à travers une surface orientée S vérifie :

$$\phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}$$

où \vec{j}_{th} est le vecteur densité de courant thermique en W.m^{-2} .

Analogie On a une analogie avec le courant électrique : ϕ s'apparente à I et \vec{j}_{th} s'apparente à \vec{j}_{el} . En effet, pour des électrons circulant à la vitesse \vec{v} à travers une surface S , on a :

$$\delta Q = -en_{\text{el}}vS \cos(\theta)dt$$

où n_{el} est la densité électronique et θ est l'angle entre la normale à S et \vec{v} . Ici, le terme $vS \cos(\theta)dt$ représente donc un volume. Or, $I = \vec{j}_{\text{el}} \cdot S\vec{n}$ car \vec{j}_{el} est constant ici. Donc $\vec{j}_{\text{el}} = -en_{\text{el}}\vec{v}$.

2.b Loi de Fourier ; conductivité thermique

Loi de Fourier Dans le cas de la conduction, on a :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

où λ est la conductivité thermique du milieu en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. \vec{j}_{th} est donc perpendiculaire aux isothermes et orienté vers les zones froides (transfert spontané). Cette loi nécessite un équilibre thermodynamique local pour que T soit définie localement. Cette loi est **phénoménologique** : elle n'est valable que si la température ne varie pas sur des échelles trop petites et à basses fréquences de variations de T .

Ordres de grandeurs de conductivités thermiques Sans convection, on a :

- $\lambda_{\text{isolant parfait}} = 0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- $\lambda_{\text{air}} = 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (valable plus généralement pour un gaz parfait dans les CNTP sans la convection) ;
- $\lambda_{\text{bois}} = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- $\lambda_{\text{cuivre}} = 4.10^2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

3 Bilans d'énergie ou de puissance

3.a Cas sans terme source ni puits dans les trois géométries

Bilan thermique S'il n'y a que de la conduction, on a :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}_{\text{th}})$$

avec μ la masse volumique du solide et c sa capacité thermique massique.

Méthode On a appliqué le premier principe industriel qui fournit

$$dH = \phi dt$$

puis le théorème de Green-Ostrogradski fournit :

$$\iiint_V \mu_M c_M \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = - \iiint_V \text{div}(\vec{j}_{\text{th}}) d\tau = \oint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS}$$

En pratique, on choisit un petit volume pour que T soit définie et on choisit ce volume adapté aux éventuelles symétries du problème. On exprime alors ϕ en fonction de \vec{j}_{th} pour se ramener à l'expression de la divergence.

3.b Cas avec production ou disparition d'énergie thermique

Avec des termes source, on rajoute le travail ou transfert thermique additionnel dans le bilan enthalpique.

Attention L'énergie totale est conservée. On convertit une autre forme d'énergie en énergie thermique via :

- des réactions chimiques ;
- des changements d'états ;
- des réactions nucléaires ;
- l'effet Joule ;
- des frottements.

Exemple : Crayon d'uranium pour une réaction nucléaire On considère un crayon d'uranium, ie un cylindre de section S d'uranium, orienté selon une direction x . On note ρ sa masse volumique et c sa capacité thermique massique. Un volume élémentaire $\delta\tau$ reçoit la puissance thermique $p_v\delta\tau$ avec p_v en W.m^{-3} . Quelle est l'équation vérifiée par $\vec{j} = j_x(x)\vec{u}_x$ en régime permanent ?

On effectue un bilan de puissance à la portion de crayon nucléaire entre x et $x + dx$:

$$\frac{U(t + dt) - U(t)}{dt} = p_v S dx + \Phi_x - \Phi_{x+dx}$$

ce qui se réécrit en régime permanent et avec les expressions des flux en fonction de la section et des densités de courant thermique :

$$0 = p_v S dx + S j_x(x) - S j_x(x + dx)$$

On en tire alors la relation :

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = p_v$$

4 Équation de la diffusion thermique ; diffusivité thermique

4.a Sans sources ni puits

Équation de la chaleur En combinant la loi de Fourier et les bilans thermiques, sans source ni puits, on obtient

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \Delta T$$

et on pose alors $D := \frac{\lambda}{\mu c}$ la diffusivité thermique en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$. Plus D est grand, plus la température s'homogénéise rapidement.

Remarque Cette équation est **linéaire** : on peut donc utiliser le principe de superposition et les conditions aux limites.

4.b Avec sources ou puits

On reprend l'exemple du crayon d'uranium et on a dès lors :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p_v$$

4.c Irréversibilité

Cette équation est irréversible : si $t \mapsto T(t)$ est solution, alors $t \mapsto T(-t)$ ne l'est pas (sauf si la solution est constante par rapport à T). Cela est dû à la "dérivée seconde" qu'est le Laplacien d'un côté, par rapport à l'unique dérivée partielle de l'autre côté.

4.d Analyse en ordre de grandeur, temps caractéristique de diffusion

Si on multiplie la longueur caractéristique par 2, le temps caractéristique est multiplié par 4 : en effet, si $T(x, t)$ est solution, alors $T(2x, 4t)$ est aussi solution.

On note τ la durée caractéristique et L la longueur caractéristique. "En ordre de grandeur", l'équation de la chaleur donne $\frac{1}{\tau} = \frac{D}{L^2}$, ou de façon plus claire :

$$\tau = \frac{L^2}{D}$$

5 Conditions aux limites

On analyse ce qui se passe aux bords du système, là où l'équation de la chaleur n'est plus valable.

5.a Sur le vecteur densité de courant

Paroi calorifugée Pour une paroi calorifugée, on a $\vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{n} = 0$.

Continuité du flux A travers toute surface, on a :

$$\vec{j}_{\text{th}}(0^-) = \vec{j}_{\text{th}}(0^+)$$

5.b Contact parfait entre deux solides

Pour un contact parfait entre deux solides, on a $T(z = 0, t) = T_0$.

5.c Transferts conducto-convectifs à l'interface avec un fluide; loi de Newton

On considère un solide et un fluide. Une couche limite d'épaisseur e du fluide à la surface du solide est immobile (seulement de la conduction). Au-delà, la convection est parfaite (température homogène). La **loi de Newton** s'écrit alors :

$$\vec{j}_{\text{th}} = h (T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}}) \vec{n}_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}}$$

avec $h = \frac{\lambda}{e}$. En effet, un bilan puis une loi de Fourier sur la couche limite donne une loi de température affine.

6 Résolution en régime stationnaire : exemple de solutions

Pour trouver des solutions en régime variable, penser au principe de superposition et à découpler les variables temporelle et spatiale. Il faut essayer de transformer $T(x, t)$ en $f(x)g(t)$.

7 Régime stationnaire ; résistance thermique

En régime permanent, sans terme source, l'énergie thermique est conservée. On a par analogie avec la loi d'Ohm : $V_1 - V_2 = RI$ la relation $T_1 - T_2 = R_{th}\phi$ (en convention récepteur). Dans le cas d'un cylindre d'axe z , de section S , longueur L et conductivité λ avec $T = f(z)$, on a

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Partir du bilan $\Delta H = 0$ donc $\phi(z) = \phi(0)$ d'où $S_z j_z(z) = S(0)j_z(0)$... Raisonner sur les cylindre-résistances en série/parallèle pour trouver la proportionnalité en L et $\frac{1}{S}$ ainsi que la proportionnalité entre R_{th} et $\frac{1}{\lambda}$.

7.a Résistances thermiques dans les trois géométries

Attention La notion de résistance thermique nécessite un régime permanent (ou l'approximation des régimes permanents, dite ARQP) ainsi que l'absence de terme source.

Géométrie cartésienne On suppose $T = T(x)$. Notre système traversé par un flux Φ et ayant une température d'entrée T_0 et une température de sortie T_1 est assimilable à un dipôle électrique où la différence de potentiel joue le rôle de la différence de température et l'intensité joue le rôle du flux thermique et on cherche à déterminer l'expression de la résistance thermique, qui joue un rôle analogue à la résistance électrique. On note

$$\Phi_x = \iint_{\text{section}} \vec{j}(x) \cdot dS \vec{u}_x$$

On effectue un bilan de puissance au solide entre 0 et x :

$$\frac{U(t+dt) - U(t)}{dt} = \Phi_0 - \Phi_x + \Phi_{lat} + P_{source}$$

avec $P_{source} = 0$ car il n'y a pas de terme source et $\Phi_{lat} = 0$. Or, $\frac{U(t+dt) - U(t)}{dt} = 0$ car on est en régime permanent. Ainsi : $\Phi_x = \Phi_{x=0}$, ce qui se traduit par $S j_x(x) = S j_x(0)$ car la section est constante. On en déduit que $j_x(x) = j_x(0)$ est constant. D'après la loi de Fourier, on a donc T affine en fonction de x . En notant L la longueur de notre solide (ou plutôt son épaisseur), on a :

$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x}{L}$$

Ainsi, on a :

$$j(x) = \lambda \frac{T_0 - T_1}{L}$$

et on en déduit que

$$\Phi = \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_1)$$

On a donc

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S} \quad \text{et} \quad G_{\text{th}} = \frac{\lambda S}{L}$$

avec R_{th} en K.W^{-1} et G_{th} en W.K^{-1} .

La résistance thermique quantifie la qualité de l'isolation par le solide.

Avec cette expression, pour augmenter R_{th} , on peut :

- augmenter l'épaisseur d'isolant (augmenter L) ;
- diminuer la surface d'échange (diminuer S) ;
- choisir un matériau plus isolant (diminuer λ).

Géométrie cylindrique Pour un cylindre de rayon R_1 et de hauteur L dans un cylindre de rayon R_2 ($R_2 > R_1$) de hauteur L et de conductivité thermique λ , on a en régime permanent si $T = T(r)$:

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad \text{et} \quad G_{\text{th}} = \frac{2\pi\lambda L}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Dans la limite $R_2 = R_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll R_1$, on a

$$R_{\text{th}} \approx \frac{\varepsilon}{2\pi L R_1 \lambda}$$

et on reconnaît au dénominateur la surface, ce qui approxime l'expression qu'on obtient dans le cas cartésien.

Pour la démonstration, adapter celle du cas cartésien en prenant garde au fait que la section n'étant plus constante, j_r dépend de r

Géométrie sphérique Pour une boule de rayon R_1 dans une boule de rayon R_2 ($R_2 > R_1$) et de conductivité thermique λ , on a en régime permanent si $T = T(r)$:

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Dans la limite $R_2 = R_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll R_1$, on a

$$R_{\text{th}} \approx \frac{\varepsilon}{4\pi R_1^2 \lambda}$$

et on reconnaît au dénominateur la surface, ce qui approxime l'expression qu'on obtient dans le cas cartésien.

7.b Analogie résistance thermique / résistance électrique / capacité

Rappel On rappelle (conductimétrie de sup et chapitre EM4 de spé) qu'on a, pour une résistance électrique de longueur L , de section S et de résistivité électrique ρ_{el} , la formule :

$$R_{\text{el}} = \rho_{\text{el}} \frac{L}{S}$$

Analogies On a les analogies suivantes :

Capacité	Résistance thermique
$Q = Cu$	$\Phi = \frac{1}{R_{th}}(T_0 - T_1)$
Potentiel électrique	Température
Q : flux de $\vec{\varepsilon}_0 \vec{E}$	Φ : flux de \vec{j}_{th}
Théorème de Gauss	Bilan de puissance
Condensateur plan	Résistance thermique "plane"
$C = \frac{\varepsilon_0 S}{L}$	$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$
$\frac{1}{C}$	R_{th}

Pour retenir tout cela, il est capital de retenir la dernière ligne du tableau. Pour la retenir plus facilement, on pourra penser aux impédances complexes.

7.c Résistance thermique conducto-convective

Si \vec{n} est le vecteur unitaire orienté du solide vers le fluide avec une interface de surface S , T_S est la température du solide et T_L est la température loin de l'interface dans le fluide, on rappelle que la loi de Newton fournit :

$$\vec{j} = h(T_S - T_L)\vec{n}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\Phi = hS(T_S - T_L)$$

c'est-à-dire que

$$R_{th} = \frac{1}{hS}$$

7.d Associations de résistances thermiques

Association en série Deux résistances thermiques en série R_1 et R_2 en série sont équivalentes à une résistance thermique $R_{eq} = R_1 + R_2$ (le flux se conserve). On généralise à R_1, \dots, R_n en série :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Association en parallèle Deux résistances thermiques en série R_1 et R_2 en parallèle sont équivalentes à une résistance thermique $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (le flux se sépare selon la loi des nœuds et les températures en entrée et en sortie ne changent pas). On généralise à R_1, \dots, R_n en parallèle :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Application : Résistance thermique d'un igloo on considère un sol parfaitement isolant. Un igloo est formé par une demi-sphère de rayon R et une demi-sphère de rayon $R + e$. La neige qui forme la coquille a une conductivité thermique λ . On observe des transferts conducto-convectifs entre l'igloo et l'air extérieur avec un coefficient h_{ext} et un transfert conducto-convectif entre l'igloo et l'air intérieur avec un coefficient h_{int} . Calculer la résistance thermique totale R_{th} de l'igloo.

Il s'agit en fait de l'association en série de deux résistances conducto-convectives et d'une résistance thermique due à la neige de la coquille. Calculons celle de la coquille :

$$R_{]R, R+e[} = \int_R^{R+e} \delta R$$

avec δR la résistance thermique de la coquille située entre r et $r + dr$. Or,

$$\delta R = \frac{dr}{2\pi\lambda r^2}$$

donc on a :

$$R_{]R, R+e[} = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e} \right)$$

le résultat final de la résistance thermique totale de l'igloo est donc, puisqu'il s'agit d'une association en série :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{h_{\text{int}}R^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+e} \right) + \frac{1}{h_{\text{ext}}(R+e)^2} \right)$$

Application : Intérêt du double vitrage On place du gaz entre deux épaisseurs de vitrage. Ce gaz (du vide dans l'idéal) a une grande résistance thermique ce qui permet d'isoler de façon très performante si on néglige le rayonnement. Afin d'éviter le rayonnement, on réalise le vitrage de façon à ce que le rayonnement visible puisse traverser le vitrage mais de façon à ce que le rayonnement infrarouge (celui qui transporte le plus d'énergie thermique) soit stoppé.

7.e Résolution avec source d'énergie

Exemple 1 On considère un cylindre isolé de l'extérieur de résistance électrique R , de conductivité thermique λ , de section $S = \pi b^2$ et de longueur L . Il est parcouru par une intensité électrique I et l'extérieur est à la température T_0 . On suppose $T = T(x)$. On veut :

1. Calculer δR entre x et $x + dx$;
2. Le graphe de $T(x)$;
3. L'expression de $T(x)$.

Voici la résolution.

1. Puisqu'il s'agit d'une association en série, on a :

$$\delta R = \frac{R}{L} dx$$

2. On veut que cela soit une parabole dans le cylindre, qui atteint son maximum au milieu du cylindre par symétrie. On veut que la température soit constante égale à T_0 à l'extérieur. Il y a des points anguleux en $x = 0$ et $x = L$.

3. On effectue un bilan de puissance à la portion de résistance entre x et $x + dx$:

$$\underbrace{\frac{U(t+dt) - U(t)}{dt}}_{=0 \text{ (régime permanent)}} = \underbrace{\Phi_{\text{reçu en } x}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{\text{reçu en } x+dx}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{\text{latéral}}}_{=0} + P_{\text{Joule}}$$

$$= \pi b^2 j_x(x) - \pi b^2 j_x(x+dx) + \frac{R}{L} I^2 dx$$

Par conséquent, $\frac{dj_x}{dx} = \frac{RI^2}{\pi b^2 L}$. Or, par symétrie, on a nécessairement $j_x\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ donc on en déduit que

$$j_x(x) = \frac{RI^2}{\pi b^2 L} \left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Or, d'après la loi de Fourier, on a : $j_x = -\lambda \frac{dT}{dx}$. En intégrant une fois de plus et en utilisant le fait que $T(0) = T_0$, on obtient finalement l'expression :

$$T(x) = -\frac{RI^2}{2\pi b^2 L} x(x-L) + T_0$$

Exemple 2 On considère un cylindre de longueur L , de rayon b , de résistance électrique R et de conductivité thermique λ . On considère que ses faces gauche et droite (celles circulaires) sont isolées thermiquement et qu'il effectue un échange thermique avec l'air extérieur à la température T_0 avec un coefficient conducto-convectif h . Il est parcouru par une intensité électrique I . On suppose cette fois que $T = T(r)$. Exprimer $T(b^-)$ et donner l'équation vérifiée par T .

On effectue un bilan de puissance à l'ensemble de la résistance :

$$\underbrace{\frac{U(t+dt) - U(t)}{dt}}_{=0 \text{ (régime permanent)}} = \underbrace{\Phi_{\text{gauche}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{\text{droite}}}_{=0} + \Phi_{\text{latéral}} + \underbrace{P_{\text{Joule}}}_{=RI^2}$$

Or, d'après la loi de Newton, $\Phi_{\text{latéral}} = -2\pi b L h (T - T_0)$. On en déduit que

$$T(b^-) = T_0 + \frac{RI^2}{2\pi b L h}$$

Ensuite, la résistance d'une portion de cylindre comprise entre les rayons 0 et r vaut :

$$R_{[0,r]} = R \frac{b^2}{r^2}$$

(résistance en parallèle). La puissance dissipée par effet Joule vaut :

$$P_{\text{Joule}} = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

et sur une telle portion :

$$P_{\text{Joule}, [0,r]} = \frac{U^2}{R_{[0,r]}}$$

En faisant le quotient pour éliminer U^2 , on trouve que, sur une telle portion :

$$P_{\text{Joule}, [0,r]} = \frac{r^2 RI^2}{b^2}$$

On effectue ensuite un bilan de puissance à la portion de résistance entre 0 et r , qui, toujours en régime permanent, donne :

$$0 = -2\pi r L j_r + \frac{r^2 RI^2}{b^2}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$j_r = \frac{RI^2}{2\pi L b^2} r$$

Or, d'après la loi de Fourier : $j_r = -\lambda \frac{dT}{dr}$. Par conséquent, T vérifie l'équation :

$$\frac{dT}{dr} + \frac{RI^2}{2\pi \lambda L b^2} r = 0$$

On peut ensuite intégrer pour obtenir l'expression de T en fonction de r et $T(b^-)$.

Remarque Remarquer comment nous avons eu des approches totalement différentes pour les deux exemples en changeant simplement quelques données dans le problème.

8 Compléments

8.a Production d'entropie par conduction thermique : entropie massique créée par unité de temps

On la détermine à partir d'une application du deuxième principe et d'un bilan thermique. Pour simplifier, on suppose que $T = T(x, t)$. On s'intéresse à un cylindre se situant entre des abscisses x et $x + dx$, de section Σ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ et de conductivité thermique λ . Le deuxième principe de la thermodynamique infinitésimal appliqué à ce système entre t et $t + dt$ donne :

$$dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}}$$

Or, on sait aussi que

$$dS = \Sigma dx \times \rho c \frac{dT}{T}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{échangée}}}{dt} &= \frac{\Phi_{\text{reçu en } x}}{T_x} + \frac{\Phi_{\text{reçu en } x+dx}}{T_{x+dx}} \\ &= \frac{j_x(x)\Sigma}{T_x} - \frac{j_x(x+dx)\Sigma}{T_{x+dx}} \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit d'après la loi de Fourier que

$$\frac{\delta S_{\text{échangée}}}{dt} = -\Sigma \lambda \left(\frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) - \frac{1}{T(x+dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right)$$

Montrons que $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$. Puisqu'on sait que

$$dS = \Sigma dx \rho c \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

on calcule brutalement en utilisant les expressions précédentes :

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{créée}} &= dS - \delta S_{\text{échangée}} \\ &= \left[\frac{\Sigma dx \rho c}{T} \frac{\partial T}{\partial t} + \Sigma \lambda \left(\frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) - \frac{1}{T(x+dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right) \right] dt \\ &= \Sigma \lambda \left[\frac{dx}{T} \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) - \frac{1}{T(x+dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right] dt \\ &= \Sigma \lambda \left[\frac{dx}{T} \Delta T + \frac{1}{T(x)} \frac{\partial T}{\partial x}(x) - \frac{1}{T(x+dx)} \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx) \right] dt \\ &= \Sigma \lambda \left[\frac{\Delta T}{T} dx + -\frac{\partial \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} dx \right] dt \\ &= \Sigma \lambda \times \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2}{T^2} dt dx \\ &\geq 0 \\ &> 0 \text{ si } T \text{ n'est pas uniforme et } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

8.b Un exemple de résolution numérique approchée de l'équation de la chaleur

Le but est de trouver une solution numérique approchée de l'équation de la chaleur :

$$\forall t > 0, \forall z \in]0, L[, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)$$

avec la condition initiale

$$\forall z \in]0, L[, \quad T(z, t = 0) = 20^\circ\text{C}$$

et les conditions aux limites :

$$\forall t > 0, \quad T(z = 0, t) = T(z = L, t) = 10^\circ\text{C}$$

Pour cela, on commence par procéder à une discrétisation du problème. On pose

$$z_i = ia \quad \text{et} \quad t_j = j\tau$$

avec a le pas spatial et τ le pas temporel. On veut calculer les $T_{i,j}$. Idéalement,, on souhaiterait que $T_{i,j} \approx T(z_i, t_j)$. On remplace les dérivées partielles par des "différences finies" :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z_i, t_j) \longrightarrow \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\tau}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \longrightarrow \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{a^2}$$

(effectuer des DL en ces points pour vérifier la cohérence). Par conséquent, l'équation de la chaleur est approchée par l'équation :

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\tau} = D \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{a^2}$$

En posant $\alpha = \frac{D\tau}{a^2}$, on peut enfin réécrire cette équation sous la forme :

$$T_{i,j+1} = \alpha T_{i-1,j} + (1 - 2\alpha)T_{i,j} + \alpha T_{i+1,j}$$

Cette équation appelle une résolution numérique : si on affiche la résolution au cours du temps (j varie), on observera une propagation de la chaleur. Remarquons que si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors le système est stable et $T_{i,j+1} \leq \max(T_{i-1,j}, T_{i,j}, T_{i+1,j})$: logique, la température diminue à cause de la condition aux bords.

Quatrième partie

Thermochimie

Chapitre 20

Enthalpie libre ; potentiel chimique

Table des matières

1	Notion de potentiel thermodynamique ; enthalpie libre	177
1.a	Potentiels thermodynamiques	177
1.b	Identités thermodynamiques pour un système de composition constante . . .	178
1.c	Cas des systèmes de composition variable	179
1.d	Cas du corps pur monophasé	179
1.e	Application au changement d'état d'un corps pur ; formule de Clapeyron . . .	180
1.f	Identité d'Euler	181
2	Expressions du potentiel chimique	181
2.a	État standard d'un constituant physico-chimique	181
2.b	Potentiel chimique d'un gaz parfait	181
2.c	Potentiel chimique d'une phase condensée	182
2.d	Potentiel chimique d'un soluté dans une solution diluée idéale	182
2.e	Activité d'un constituant physico-chimique	183

1 Notion de potentiel thermodynamique ; enthalpie libre

1.a Potentiels thermodynamiques

Analogie mécanique Lors d'une évolution "spontanée" (*ie* sans apport extérieur), l'énergie mécanique d'un système ne peut que diminuer, c'est l'analogie à connaître.

Potentiel thermodynamique Un potentiel thermodynamique est une fonction des paramètres du système et des "réservoirs" (thermostats et barostats), et qui ne peut que décroître.

Exemple 1 : Néguentropie On considère un système isolé. Dans ce cas, S ne peut qu'augmenter en vertu du deuxième principe. Ainsi, $-S$ est un potentiel thermodynamique, qu'on appelle **néguentropie**.

Exemple 2 : Énergie libre On considère tout d'abord l'évolution isochore et monotherme (thermostat à la température T_0) d'un système fermé, sans variation d'énergie mécanique et sans travail utile.

Alors, en vertu du premier et du deuxième principe, on obtient :

$$(U_F - T_0 S_F) - (U_I - T_0 S_I) = -T_0 S_{\text{créée}} \leq 0$$

Ainsi, $U - T_0 S$ est un potentiel thermodynamique **pour une évolution monotherme et isochore**.

De la même façon, on montre que

$$F = U - TS$$

est un potentiel thermodynamique **pour une évolution isochore et isotherme**. On l'appelle **l'énergie libre**.

Exemple 3 : Enthalpie libre On considère une transformation isotherme et isobare d'un système fermé, sans variation d'énergie mécanique et sans travail utile.

Alors, en vertu du premier principe pour une isobare et du deuxième principe, on obtient que

$$G = H - TS = U + PV - TS$$

est un potentiel thermodynamique **pour une transformation isotherme et isobare**, appelé **enthalpie libre**. C'est une fonction d'état extensive qui s'exprime en Joule.

Résumé Voici un résumé des différents potentiels thermodynamiques intéressants selon les différents types de transformations **pour un système fermé** :

Type de transformation	Nom du potentiel	Expression
Adiabatique	Néguentropie	$-S$
Isochore et isotherme	Énergie libre	$F = U - TS$
Isobare et isotherme	Enthalpie libre	$G = H - TS$

Le potentiel thermodynamique qui nous intéressera le plus est l'enthalpie libre grâce à ses applications en chimie, puisque la plupart des réactions chimiques peuvent être considérées comme isobares et isothermes.

1.b Identités thermodynamiques pour un système de composition constante

Constituant physico-chimique On appelle constituant physico-chimique une espèce chimique dans un état physique précis.

Composition constante On dit d'un système qu'il est de composition constante lorsque pour tout constituant physico-chimique i , la quantité de matière de ce constituant physico-chimique est une constante. Cela implique notamment que les constituants physico-chimiques ne changent pas d'état physique au cours de la transformation du système.

Première identité thermodynamique Pour un système de composition constante, une transformation réversible ou infinitésimale et de variance 2, alors on a :

$$dU = TdS - PdV$$

Deuxième identité thermodynamique Pour un système de composition constante, une transformation réversible ou infinitésimale et de variance 2, alors on a :

$$dH = TdS + VdP$$

Troisième identité thermodynamique Pour un système de composition constante, une transformation réversible ou infinitésimale et de variance 2, alors on a :

$$dG = VdP - SdT$$

1.c Cas des systèmes de composition variable

On note n_i les quantités de matière des différents constituants physico-chimiques. On a :

$$dG = VdP - SdT + \sum_i \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_{j \neq i}} dn_i$$

et on note

$$\mu_i := \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_{j \neq i}}$$

le **potentiel chimique** du constituant physico-chimique i . Il s'exprime en J/mol et est une fonction d'état intensive. La relation précédente se réécrit donc

$$dG = VdP - SdT + \sum_i \mu_i dn_i$$

On remarquera que l'on a alors :

$$V = \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_{T, n_i} \quad \text{et} \quad -S = \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_{P, n_i}$$

De même, puisqu'on avait $dU = TdS - PdV$, on remarquera que l'on a les relations :

$$T = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V \quad \text{et} \quad -P = \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S$$

1.d Cas du corps pur monophasé

On se place ici dans le cas d'un unique constituant physico-chimique. On a alors :

$$G(T, P, n) = nG_m(T, P)$$

car G est une fonction d'état extensive. Dans le cas d'un corps pur monophasé, on note μ^* son potentiel chimique, et on a alors :

$$\mu^*(T, P) = G_m(T, P)$$

Et puisque $dG_m = V_m dP - S_m dT$, on a alors les relations :

$$-S_m = \left. \frac{\partial \mu^*}{\partial T} \right|_P \quad \text{et} \quad V_m = \left. \frac{\partial \mu^*}{\partial P} \right|_T$$

1.e Application au changement d'état d'un corps pur ; formule de Clapeyron

On se place dans le cas où on est en présence de deux constituants physico-chimiques de la même espèce sous forme liquide l et sous forme gazeuse g . On a alors par extensivité :

$$G = n_l G_{m,l}(T, P) + n_g G_{m,g}(T, P)$$

Lors d'une évolution isotherme et isobare (un changement d'état par exemple tiens!), on sait que $dG \leq 0$ puisque G est alors un potentiel thermodynamique. Or, puisque T et P sont alors constantes, on a :

$$dG = G_{m,l}(T, P) dn_l + G_{m,g}(T, P) dn_g$$

avec $G_{m,l}(T, P) = \mu_L^*$ et $G_{m,g}(T, P) = \mu_G^*$. Or, $n_l + n_g$ est une constante par conservation de la matière, donc $dn_l = -dn_g$. On en déduit que

$$dG = dn_l(\mu_l^* - \mu_g^*)$$

Démonstration de la formule de Clapeyron Si on prend T et P tels que $\mu_l^* > \mu_g^*$, alors on a nécessairement $dn_l \leq 0$ si bien qu'il y a alors une vaporisation.

Précisément, sur la courbe de vaporisation, on a : $\mu_l^*(T, P) = \mu_g^*(T, P)$. En différenciant cette relation, on obtient :

$$\left. \frac{\partial \mu_l^*}{\partial T} \right|_P dT + \left. \frac{\partial \mu_l^*}{\partial P} \right|_T dP = \left. \frac{\partial \mu_g^*}{\partial T} \right|_P dT + \left. \frac{\partial \mu_g^*}{\partial P} \right|_T dP$$

ce qui se réécrit en vertu de la fin de la sous-partie précédente :

$$-S_{m,l} dT + V_{m,l} dP = -S_{m,g} dT + V_{m,g} dP$$

On en déduit la **formule de Clapeyron** :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{sat}}}{dT} &= \frac{S_{m,g} - S_{m,l}}{V_{m,g} - V_{m,l}} \\ &= \frac{H_{m,g} - H_{m,l}}{T(V_{m,g} - V_{m,l})} \end{aligned}$$

qu'on préfère écrire en thermodynamique sous la forme :

$$\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T \Delta_{\text{vap}} v}$$

1.f Identité d'Euler

On considère une fonction de deux variables $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ qui vérifie $f(\alpha a, \alpha b) = \alpha f(a, b)$. En lui appliquant la règle de la chaîne en dérivant par rapport à α , on obtient :

$$a\partial_x f(\alpha a, \alpha b) + b\partial_y f(\alpha a, \alpha b) = f(a, b)$$

ce qui donne, après évaluation en $\alpha = 1$:

$$a\partial_x f(a, b) + b\partial_y f(a, b) = f(a, b)$$

Dans le cas de l'enthalpie libre pour une transformation isobare et isotherme, cela donne :

$$\begin{aligned} G(T, P, n_i) &= \sum_i n_i \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T, P, n_{j \neq i}} \\ &= \sum_i n_i \mu_i(T, P, n_i) \end{aligned}$$

2 Expressions du potentiel chimique

Le but de cette section est de montrer que $\mu_i = \mu_i^\circ + RT \ln(a_i)$ avec a_i l'activité du constituant physico-chimique i .

2.a État standard d'un constituant physico-chimique

Cas d'un gaz Pour un gaz se comportant comme un gaz parfait, l'état standard de ce gaz correspond au fait que sa pression partielle P vaut $P = P^\circ$ la pression standard telle que $P^\circ = 1$ bar.

Il y a donc autant d'états standards que de températures pour un gaz.

Cas d'un soluté Pour un soluté "extrapolé" des solutions diluées, l'état standard de ce soluté (état théorique jamais atteint en pratique) est lorsque sa concentration vérifie $c_i = c^\circ$ où c° est la concentration standard valant $c^\circ = 1$ mol/L.

Cas d'une phase condensée Pour une phase condensée, l'état standard de cette phase condensée correspond au fait qu'elle soit seule dans sa phase et que $P = P^\circ$.

2.b Potentiel chimique d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait, on a par définition des différentielles et d'après l'équation d'état :

$$\begin{aligned}
\mu(T, P) &= \mu^\circ(T, P^\circ) + \int_{P^\circ}^P \left. \frac{\partial \mu}{\partial P} \right|_T dP \\
&= \mu^\circ(T, P^\circ) + \int_{P^\circ}^P V_m dP \\
&= \mu^\circ(T, P^\circ) + \int_{P^\circ}^P \frac{RT}{P} dP \\
&= \mu^\circ(T, P^\circ) + RT \ln \left(\frac{P}{P^\circ} \right)
\end{aligned}$$

Cela est bien en accord, dans le gaz du gaz parfait (et donc du gaz dans son état standard) avec le résultat annoncé en début de partie.

On admet la généralisation pour un mélange idéal de gaz parfaits :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln \left(\frac{P_i}{P^\circ} \right)$$

avec μ_i le potentiel chimique du gaz parfait i et P_i la pression partielle du gaz parfait i .

2.c Potentiel chimique d'une phase condensée

De même, on a

$$\mu(T, P) = \mu^\circ(T, P^\circ) + \int_{P^\circ}^P V_m dP$$

Or, pour une phase condensée, le volume molaire est négligeable devant le volume molaire de la même espèce à l'état gazeux (on a environ un facteur 1000 entre les deux). Et on en déduit/constate par les observations expérimentales que $\int_{P^\circ}^P V_m dP$ est négligeable devant $\mu^\circ(T)$. Ainsi, pour une phase condensée :

$$\mu(T, P) \approx \mu^\circ(T)$$

Mélange de phases condensées Pour un mélange de phases condensées (un alliage par exemple), on admet que

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(x_i)$$

avec μ_i le potentiel chimique du constituant i de l'alliage et x_i la fraction molaire en constituant i de l'alliage.

2.d Potentiel chimique d'un soluté dans une solution diluée idéale

On admet que

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln \left(\frac{c_i}{c^\circ} \right)$$

avec c_i la concentration molaire du soluté et c° la concentration standard qui vaut 1 mol/L.

2.e Activité d'un constituant physico-chimique

Dans tous les cas, on a :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln(a_i)$$

où a_i est l'**activité** du constituant physico-chimique i . C'est une grandeur sans dimension.

Pour un gaz parfait seul, $a = \frac{P}{P^\circ}$

Pour un mélange idéal de gaz parfaits, $a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$ avec P_i la pression partielle du gaz i .

Pour une phase condensée seule ou pour le solvant d'une solution diluée, $a = 1$.

Pour une solution dans une solution diluée $a_i = \frac{c_i}{c^\circ}$ avec c_i sa concentration et c° la concentration standard.

Chapitre 21

Évolution d'un système lors d'une réaction chimique

Table des matières

1	Condition d'évolution spontanée lors d'une réaction chimique	185
1.a	Enthalpie libre de réaction ; opérateur de Lewis	186
1.b	Critère d'évolution d'un système lors d'une réaction chimique isotherme et isobare	186
1.c	Arrêt de la réaction chimique : équilibre chimique, réaction totale ou blocage cinétique	187
1.d	Enthalpie libre standard de réaction ; quotient de réaction	187
2	Calcul des grandeurs standards de réaction	187
2.a	Entropie et enthalpie standards de réaction	187
2.b	Variations avec la température ; approximation d'Ellingham	188
2.c	Utilisation de grandeurs tabulées ; loi de Hess	188
2.d	Exemples	188
3	Interprétation et utilisation des grandeurs standards de réaction	189
3.a	Constante d'équilibre standard ; loi de Van't Hoff	189
3.b	Évolution vers un équilibre ou réaction totale ?	189
3.c	Effets thermiques associés à la réaction ; interprétation du signe de $\Delta_r H^\circ$. .	189
3.d	Interprétation et prévision du signe de $\Delta_r S^\circ$	190

1 Condition d'évolution spontanée lors d'une réaction chimique

On travaille sur une **unique** réaction, caractérisée par l'avancement ξ (variable de De Donder).
On la note

$$\sum_i \nu_i A_i = 0$$

avec A_i les constituants physico-chimiques et ν_i les coefficients stœchiométriques algébriques (négatifs pour les réactifs).

1.a Enthalpie libre de réaction ; opérateur de Lewis

Enthalpie libre de réaction On la définit par

$$\Delta_r G(T, P, \xi) = \frac{\partial G}{\partial \xi}$$

Elle dépend de l'équation de réaction (coefficients stœchiométriques) et s'exprime en J/mol. On a $dG \leq 0$ pour une isobare et isotherme donc $\Delta_r G \leq 0$.

Expression pendant une réaction Pour l'espèce s : $n_s = n_{s,0} + \nu_s \xi$. On a alors en dérivant l'identité d'Euler $G = \sum_i n_i \mu_i$ par rapport à ξ :

$$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

Pour une réaction isotherme et isobare, on a :

$$dG = \Delta_r G \times d\xi$$

Opérateur de Lewis On généralise à toute grandeur extensive X grâce à l'identité d'Euler :

$$\Delta_r X = \frac{\partial X}{\partial \xi} \Big|_{T,P} = \sum_i \nu_i \frac{\partial X}{\partial n_i} \Big|_{T,P,n_{j \neq i}}$$

Par exemple, on peut écrire :

$$\Delta_r G = \Delta_r H - T \Delta_r S$$

1.b Critère d'évolution d'un système lors d'une réaction chimique isotherme et isobare

Critère d'évolution Pour une réaction isotherme et isobare, $dG \leq 0$ donc, comme pour une réaction isotherme et isobare, $dG = \Delta_r G d\xi$, on en déduit que

$$\Delta_r G d\xi \leq 0$$

Ainsi :

- si $\Delta_r G < 0$, la réaction se produit dans le sens direct ;
- si $\Delta_r G > 0$, la réaction se produit dans le sens indirect ;
- si $\Delta_r G = 0$, il y a équilibre.

La bonne analogie consiste à voir G du milieu comme une énergie potentielle de réaction et $\Delta_r G$ comme l'opposé d'une force.

1.c Arrêt de la réaction chimique : équilibre chimique, réaction totale ou blocage cinétique

Attention aux blocages cinétiques et aux équilibres inatteignables (solides). Vérifier que $\xi_{eq} \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$.

Une réponse usuelle à la question "Pourquoi ça ne marche pas ?" en fin de sujet de chimie après des tonnes de calculs de thermodynamique bourrins est souvent "car il peut y avoir un blocage cinétique".

1.d Enthalpie libre standard de réaction ; quotient de réaction

Enthalpie libre standard de réaction On définit l'enthalpie libre standard de réaction par :

$$\Delta_r G^\circ = \sum_i \mu_i^\circ \nu_i$$

Quotient de réaction On définit le quotient de réaction par :

$$Q = \prod_i a_i^{\nu_i}$$

Lien avec le quotient de réaction On a :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln(Q)$$

En effet, $\mu_i = \mu_i^\circ + RT \ln(a_i)$ donc $\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i = \sum_i \nu_i \mu_i^\circ + RT \ln(Q)$

2 Calcul des grandeurs standards de réaction

2.a Entropie et enthalpie standards de réaction

On a :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

avec $\Delta_r H^\circ$ l'enthalpie standard de réaction et $\Delta_r S^\circ$ l'entropie standard de réaction.

Enthalpie standard de formation On définit l'état de référence comme celui du corps pur simple monophasé le plus stable à la température T et à une pression de 1 bar. Par exemple, pour l'oxygène, on considère $O_{2(g)}$ à 25°C. Pour un composant C , l'enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ(C)$ est l'enthalpie de la réaction :

composants de C dans leur état standard $\longrightarrow C$

Entropie standard de réaction Pas besoin de définir un état arbitraire de référence (principe de Nernst). On a donc simplement, avec les S_m° les entropies molaires absolues, pour $\alpha A \rightarrow \beta B$:

$$\Delta_r S^\circ = -\alpha S_m^\circ(A) + \beta S_m^\circ(B)$$

2.b Variations avec la température ; approximation d'Ellingham

Approximation d'Ellingham Dans l'approximation d'Ellingham :

- $\Delta_r H^\circ$ est indépendant de T
- $\Delta_r S^\circ$ est indépendant de T

car on considère que tant que la réaction a lieu, les réactifs et les produits n'ont pas changé d'état.

Variation avec la température On a alors la **relation de Gibbs-Helmoltz** :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta_r G^\circ}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2}$$

et aussi la relation :

$$\frac{d\Delta_r G^\circ}{dT} = -\Delta_r S^\circ$$

En effet, dans l'approximation d'Ellingham, il suffit alors de dériver par rapport à la température la relation

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$$

et de dériver son analogue divisé par T puisque l'on considère que $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont indépendantes de T . On admet que cette relation reste valable hors de l'approximation d'Ellingham.

2.c Utilisation de grandeurs tabulées ; loi de Hess

Loi de Hess Pour $\alpha A \rightarrow \beta B$, l'enthalpie standard de réaction est donné par

$$\Delta_r H^\circ = -\alpha \Delta_f H^\circ(A) + \beta \Delta_f H^\circ(B)$$

(on éclate tous les composants pour les recréer). On a une variante identique pour G . Aussi, on a ce que l'on pourrait appeler une "loi de Hess pour S " :

$$\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_{m,i}^\circ$$

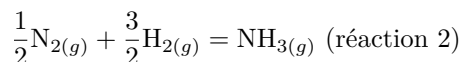
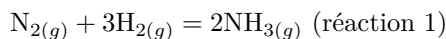
avec $S_{m,i}^\circ$ l'entropie molaire absolue du constituant physico-chimique i .

2.d Exemples

On donne

	NH _{3(g)}	N _{2(g)}	O _{2(g)}	H _{2(g)}
$\Delta_f H^\circ$	α	$\beta (= 0)$	$\gamma (= 0)$	$\delta (= 0)$
S_m°	a	b	c	d

Exprimer les entropies et les enthalpies standards des réactions :



D'après la loi de Hess, on a alors :

$$\begin{cases} \Delta_r H_1^\circ = 2\alpha \\ \Delta_r H_2^\circ = \alpha \\ \Delta_r S_1^\circ = 2a - b - 3d \\ \Delta_r S_1^\circ = a - \frac{1}{2}b - \frac{3}{2}d \end{cases}$$

3 Interprétation et utilisation des grandeurs standards de réaction

3.a Constante d'équilibre standard ; loi de Van't Hoff

Constante d'équilibre standard On rappelle que $\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln(Q)$. Or, à l'équilibre, $\Delta_r G = 0$ et $Q = K^\circ$, où K° est la constante de réaction standard. On en déduit alors que

$$0 = \Delta_r G^\circ + RT \ln(K^\circ)$$

ou autrement dit

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right)$$

Cette dernière ressemble **visuellement** à la loi d'Arrhénius, mais n'a rien à voir avec celle-ci. Cela peut cependant être un bon moyen de retenir la formule.

Loi de Van't Hoff Réciproquement, puisque $\Delta_r G^\circ = -RT \ln(K^\circ)$ et d'après la relation de Gibbs-Helmoltz $\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta_r G^\circ}{T}\right) = -\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2}$, on obtient la **loi de Van't Hoff** :

$$\frac{d}{dT}(\ln(K^\circ)) = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

3.b Évolution vers un équilibre ou réaction totale ?

Il faut bien comprendre que $\Delta_r G \neq \Delta_r G^\circ$.

Lorsque $\xi_{eq} \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, il y a équilibre (sauf en cas de blocage cinétique). Dans le cas contraire, la réaction est totale (sauf en cas de blocage cinétique là encore).

3.c Effets thermiques associés à la réaction ; interprétation du signe de $\Delta_r H^\circ$

Utilisation de la loi de Van't Hoff Lors d'une réaction isotherme et isobare, on a

$$Q = \Delta H = \int_{\xi_0}^{\xi_\infty} \Delta_r H \, d\xi$$

Or $\Delta_r H$ varie peu donc on peut considérer que $\Delta_r H \approx \Delta_r H^\circ$ et on a alors

$$Q = (\xi_\infty - \xi_0) \Delta_r H^\circ$$

. On a alors différents cas :

- si $\Delta_r H^\circ > 0$, la réaction dans le sens direct est endothermique ;
- si $\Delta_r H^\circ < 0$, la réaction dans le sens direct est exothermique ;
- si $\Delta_r H^\circ \approx 0$, la réaction dans le sens direct est athermique.

En général, $\Delta_r H^\circ$ est de l'ordre de 100 kJ.mol^{-1} (énergie de liaison). Pour une réaction **adiabatique et isobare**, on effectue d'abord fictivement la réaction, puis dans un second temps le transfert thermique. On a alors $\Delta H = Q = 0$, et l'expression obtenue par le chemin fictif nous permet d'obtenir la température finale en fonction des données.

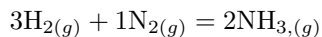
3.d Interprétation et prévision du signe de $\Delta_r S^\circ$

Interprétation de $\Delta_r S$ On a $\Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_{m,i}$. Or, $S_{m,i}$ est négligeable si i n'est pas un gaz et est de l'ordre de grandeur de $200 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ si i est un gaz. On a donc :

$$\Delta_r S^\circ \approx \Delta \nu_{\text{gaz}} \times C$$

avec $C \approx 200 \text{ J/K/mol}$.

Exemple Si on considère la réaction



on a alors $\Delta \nu_{\text{gaz}} = -2$, si bien que

$$\Delta_r S^\circ = -2C < 0$$

Chapitre 22

Déplacement et rupture d'équilibre

Table des matières

1	Caractérisation de l'état intensif d'un système en équilibre	191
1.a	Variance	191
1.b	Exemples	192
2	Rupture ou déplacement d'équilibre	192
2.a	Exemple de rupture d'un équilibre	192
2.b	Méthode générale d'étude des déplacements d'équilibre	192
2.c	Influence de la température ; loi de Van't Hoff	193
2.d	Influence de la pression ; loi de Le Châtelier	193
2.e	Influence de l'introduction d'un constituant	194
3	Optimisation d'un procédé chimique	195

1 Caractérisation de l'état intensif d'un système en équilibre

1.a Variance

La **variance** est le nombre maximal de paramètres intensifs indépendants qu'un opérateur peut fixer sans rompre l'équilibre.

- Les paramètres intensifs sont P, T et les fractions molaires de chaque espèce
- Ils sont relié par une équation pour chaque réaction et une pour chaque phase $\left(\sum_{\varphi} x = 1 \right)$

La variance est donc

$$v = 2 + \sum_i 1 - \text{nbr}_{\text{réactions}} - \text{nbr}_{\text{phases}}$$

où les i sont les différents constituants physico-chimiques.

1.b Exemples

$\text{N}_{2(l)} = \text{N}_{2(g)}$ Les paramètres intensifs sont T et P . La seule relation entre ces paramètres provient de la loi d'action des masses qui donne $P_{\text{N}_{2(g)}} = K^\circ(T)$. La variance est donc 1 (en accord avec la formule de la première section).

$\text{C}_{(s)} + \text{ZnO}_{(s)} = \text{Zn}_{(s)} + \text{CO}_{2(s)}$ Les paramètres intensifs sont T et P (tous les constituants sont seul dans leur phase). La seule relation entre les paramètres est la loi d'action des masses. La variance vaut donc 1 (en accord avec la formule de la première section).

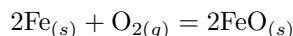
$3\text{H}_{2(g)} + \text{N}_{2(g)} = 2\text{NH}_{3(g)}$ Les paramètres intensifs sont T , P , x_{N_2} , x_{H_2} et x_{NH_3} . Les relations entre ces paramètres sont la loi d'action des masses et la relation $x_{\text{N}_2} + x_{\text{H}_2} + x_{\text{NH}_3} = 1$. La variance est donc de 3 (en accord avec la formule de la première section).

2 Rupture ou déplacement d'équilibre

2.a Exemple de rupture d'un équilibre

Rupture d'équilibre Si la variance est de 1, on peut faire varier le paramètre pour empêcher l'équilibre d'être atteint et ainsi obtenir une transformation totale.

Exemple : réaction d'oxydation du fer On considère la réaction d'oxydation du fer :



2.b Méthode générale d'étude des déplacements d'équilibre

On part de $Q_{\text{eq},1} = K_1^\circ(T_1)$ et on modifie soit K_1 (température) soit Q_1 (le reste).

Moyens de déplacer un équilibre On perturbe un système à l'équilibre pour voir sa réaction par :

- Ajout d'un réactif/produit (à P , T et autres concentrations fixés)
- Modification de T (à P et composition constantes)
- Modification de P (à T et composition constantes)
- Ajout d'une espèce inerte

Méthode On donne un nom aux différents états : l'état d'équilibre initiale sera ici noté (1) ; l'état hors équilibre juste après la perturbation sera noté (int) et le nouvel état d'équilibre sera noté (2).

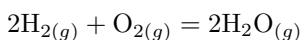
Comme (1) et (2) sont des états d'équilibre, on aura toujours $K^\circ(T_1) = Q_1$ et $K^\circ(T_2) = Q_2$. Comme l'état (int) est hors équilibre, on a aura toujours $K^\circ(T_{\text{int}}) \neq Q_{\text{int}}$. Il faut comparer le quotient de réaction juste après la perturbation à la nouvelle constante d'équilibre.

2.c Influence de la température ; loi de Van't Hoff

Modification de T : regarder l'évolution de K° avec la loi de Van't Hoff

$$\frac{d}{dT} (\ln(K^\circ)) = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

Exemple On considère la réaction



dont on sait qu'elle est exothermique. On part d'un état d'équilibre (T_1, P_1) puis on change la température de contrôle jusqu'à T_2 en gardant $P_2 = P_1$. On a alors :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}^2 P^\circ}{P_{\text{H}_2}^2 P_{\text{O}_2}} \\ &= \frac{x_{\text{H}_2\text{O}}^2}{x_{\text{H}_2}^2 x_{\text{O}_2}} \times \frac{P^\circ}{P_{\text{tot}}} \end{aligned}$$

Or, $\frac{d}{dT} (\ln(K^\circ)) = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} < 0$ car la réaction est exothermique et on sait que $Q_{\text{int}} = Q_1$ car on ne change pas la pression de contrôle ni n'ajoute de composant, et $Q_1 = K^\circ(T_1)$ car il y a équilibre.

Ainsi, si on suppose $T_2 > T_1$, on a alors $K^\circ(T_2) > K^\circ(T_1)$ et $Q_{\text{int}} > K^\circ(T_2)$, si bien que la réaction a lieu dans le sens indirect.

Loi de modération liée à la température Il faut retenir la loi de Van't Hoff qualitative :

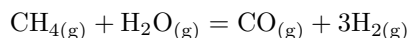
Élévation de $T \rightarrow$ réaction endothermique (loi de Van't Hoff)

Ou encore : une réaction exothermique est favorisée par une diminution de la température.

2.d Influence de la pression ; loi de Le Châtelier

Modification de P : $K_2 = K_1$, écrire le quotient de réaction avec les fractions molaires pour faire apparaître P_{tot}

Exemple On considère la réaction :



On se place dans l'état (1) à P_1 et T_1 , puis on change la pression de contrôle à $P_2 > P_1$ sans changer la température de contrôle ni ajouter de constituant. Juste après la perturbation, on a :

$$Q = \frac{x_{\text{CO}} x_{\text{H}_2}^3}{x_{\text{CH}_4} x_{\text{H}_2\text{O}}} \times \frac{P_{\text{tot}}^2}{P^\circ^2}$$

Or, le facteur $\frac{x_{\text{CO}}x_{\text{H}_2}^3}{x_{\text{CH}_4}x_{\text{H}_2\text{O}}P^{\circ 2}}$ n'est pas modifié par la modification de pression, donc on a ici

$$Q_{\text{int}} > Q_1 = K^\circ(T_1) = K^\circ(T_2)$$

car la température ne change pas donc les constantes d'équilibre sont les mêmes, et $Q_1 = K^\circ(T_1)$ car l'état (1) est un état d'équilibre. Ainsi, la réaction est déplacée dans le sens inverse.

Généralisation On a

$$Q = C \times P_{\text{tot}}^{\Delta_{\text{gaz}}\nu}$$

où C est une constante indépendante de la pression. On en déduit la :

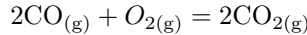
Loi de Le Châtelier Si $\Delta_{\text{gaz}}\nu > 0$, une diminution de la pression favorise la réaction dans le sens direct.

Principe de modération (principe de Le Châtelier) "La réaction essaye de diminuer l'effet de la perturbation" → Ici, la réaction consomme du gaz pour essayer de diminuer la pression.

2.e Influence de l'introduction d'un constituant

Modification de la composition : écrire Q avec les fractions puis quantités de matières. Exprimer dQ

Cas d'un constituant actif On prend l'exemple de la réaction

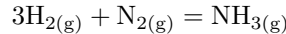


avec ajout d'une petite quantité de CO. L'état d'équilibre initial est à P_1 et T_1 , on ajoute un peu de CO et on ne change pas la pression ni la température de contrôle ($P_2 = P_1$ et $T_2 = T_1$). En notant n_1 , n_2 et n_3 les quantités de matière des différents constituants à l'état initial et dn_1 la quantité ajoutée, on a :

$$\ln(Q_{\text{int}}) - \ln(Q_1) = \frac{dn_1}{n_{\text{tot gaz}}} - \frac{2dn_1}{n_1 + dn_1} = \frac{n_1 + dn_1 - 2n_{\text{tot gaz}}}{n_{\text{tot gaz}}(n_1 + dn_1)} dn_1 < 0$$

Ainsi, $Q_{\text{int}} < Q_1 = K^\circ(T_1) = K^\circ(T_2)$ (l'état (1) est un état d'équilibre et $T_2 = T_1$), donc la réaction est déplacée dans le sens direct.

Cas d'un constituant inerte On prend l'exemple de la réaction :



On part d'un équilibre à T_1 et P_1 et on ajoute dn d'hélium sans changer la température ni la pression de contrôle. On a alors juste après la perturbation :

$$Q_{\text{int}} = \frac{n_{\text{NH}_3}^2}{n_{\text{H}_2}^3 n_{\text{N}_2}} \times (n_{\text{NH}_3} + n_{\text{N}_2} + n_{\text{H}_2} + dn) \times \frac{P^{\circ 2}}{P_{\text{tot}}^2}$$

où le seul terme qui a changé par rapport à Q_1 est $n_{\text{NH}_3} + n_{\text{N}_2} + n_{\text{H}_2}$ qui a été remplacé par $n_{\text{NH}_3} + n_{\text{N}_2} + n_{\text{H}_2} + dn$. Ainsi, on a donc

$$Q_{\text{int}} > Q_1 = K^\circ(T_1) = K^\circ(T_2)$$

car il y a équilibre à l'état (1) et $T_2 = T_1$. La réaction est donc déplacée dans le sens indirect.

3 Optimisation d'un procédé chimique

Lire le document sur la synthèse de l'ammoniac et répondre aux question.

Lois de modération Le système tend à limiter la perturbation :

- Élévation de $T \rightarrow$ réaction endothermique (loi de Van't'Hoff) ;
- Élévation de $P \rightarrow$ consommation de gaz (principe de modération Le Châtelier) ;
- Ajout d'une espèce \rightarrow consommation de cette espèce.

Cinquième partie

Optique

Chapitre 23

Optique géométrique

Table des matières

1	Lois de l'optique géométrique	199
1.a	Lois fondamentales	199
1.b	Applications	200
2	Systèmes optiques centrés	202
2.a	Définitions	202
2.b	Dioptre plan ; lame à faces parallèles	203
2.c	Lentilles minces	204
3	Instruments d'optique	205
3.a	L'œil humain : performances et limites, modélisation	205
3.b	Lunettes et viseurs	205

1 Lois de l'optique géométrique

1.a Lois fondamentales

Notion de rayon lumineux Un rayon lumineux est une ligne de champ du vecteur de Poynting de l'onde lumineuse électromagnétique : en effet, le rayon lumineux nous amène l'énergie de cette onde.

Négligeabilité de la diffraction Dans le cadre de l'optique géométrique, on néglige la diffraction.

Principe de la propagation rectiligne Dans un milieu homogène et isotrope, les rayons lumineux sont des portions de droites.

Principe d'indépendance des rayons lumineux Les rayons lumineux sont indépendants les uns des autres. Ainsi, lors des tracés de rayons lumineux, on ne se préoccupe pas du nombre de rayons lumineux et des conséquences potentielles de leurs intersections. \implies Ce principe est faux

en général : en effet, une onde peut influencer la propagation d'une autre, se référer à la pôle sur le sujet X PC 2017 avec l'onde sonde et l'onde porteuse (trauma).

Principe du retour inverse de la lumière Le trajet suivi par la lumière entre deux points sur le même rayon est indépendant du sens de parcours. \implies Pour un exercice d'optique géométrique, **soit on ne connaît pas son cours, soit on n'a pas pensé au retour inverse de la lumière** : ce principe permet bien souvent de symétriser les problèmes pour en faciliter la résolution.

Lois de Snell-Descartes Pour la réflexion sur un miroir plan

- Les rayons incidents, réfléchis et la normale au miroir au point d'incidence sont dans le même plan ;
- L'angle du rayon incident avec la normale i est égal à l'opposé de l'angle du rayon réfléchi r par rapport à la normale (avec des angles orientés) : $i = -r$

Pour la réfraction entre deux milieux transparents, homogènes, isotropes et linéaires :

- Les rayons incidents, réfractés et la normale au dioptré au point d'incidence sont dans le même plan ;
- $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$

Si $n_1 \leq n_2$, il y a toujours réfraction. Sinon, il y a réflexion totale pour $\sin(i_1) \geq \frac{n_2}{n_1}$

Principe de Fermat On définit un chemin optique à partir d'un chemin $[AA']$ par

$$(AA') = \int_{[AA']} n \vec{r} dr$$

avec n l'indice du milieu au point r . C'est la distance que parcourrait un photon dans le vide pendant la même durée. Le principe de Fermat s'énonce :

- Historiquement : le chemin optique est minimal sur le trajet du vrai rayon comparé aux autres trajets propre
- Correspond à une dérivée nulle du chemin optique sur le trajet du rayon.

Ce principe contient la propagation rectiligne, le retour inverse et les lois de Snell.

1.b Applications

Lentille Dans une lentille avec un bord droit et un bord convexe, il n'y a pas stigmatisme car des rayons parallèles à l'axe sont déviés différemment. Cependant, dans les conditions de Gauss, il y a stigmatisme approché.

Le prisme On considère un prisme d'angle au sommet α . Le premier rayon incident arrive avec un angle i , est réfracté avec un angle r . Ce rayon réfracté arrive avec un angle r' sur la dernière face et est réfracté avec un angle i' . Les lois de Snell-Descartes aux deux points de réfraction donnent :

$$\begin{cases} \sin(i) = n \sin(r) \\ \sin(i') = n \sin(r') \end{cases}$$

Ensuite, la somme des angles d'un triangle vaut π radians, donc $\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$, ce qui fournit

$$\alpha = r + r'$$

Enfin, la déviation D est l'angle entre le prolongement du premier rayon incident et le prolongement du rayon émergent du prisme. On a donc $D = (i-r) + (i'-r')$. Cela donne avec la formule précédente :

$$D = i + i' - \alpha$$

Résumé : les 4 formules du prisme Pour le prisme considéré précédemment, on a donc les formules du prisme :

$$\begin{cases} \sin(i) = n \sin(r) \\ \sin(i') = n \sin(r') \\ \alpha = r + r' \\ D = i + i' - \alpha \end{cases}$$

Ces formules sont **à connaître par cœur** (accompagnées du schéma qui convient) : certains concours ne sont pas au courant qu'elles ne sont pas au programme...

Condition de non réflexion totale sur le prisme Il n'y a pas de réflexion totale en I' si $n \sin(r) \leq 1$. La loi de la réfraction en I donne $n \sin(r) = \sin(i) \leq 1$. Donc $r \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $r' \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$, si bien que

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Variation de la déviation du prisme en fonction de l'incidence On obtient une courbe parabolique numériquement. Déterminons le minimum de déviation. Par unicité du minimum de déviation et d'après le principe du retour inverse de la lumière, on a $i = i'$ au minimum de déviation. Par conséquent, les deux premières formules du prisme donnent $r = r'$ puis la troisième fournit :

$$r = r' = \frac{\alpha}{2}$$

Or, on a $\sin(i) = n \sin(r)$ donc

$$\sin\left(\frac{D_m + \alpha}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Formation d'un halo lumineux Pour simplifier, on suppose que presque tous les rayons sont déviés de D_m . Pour l'arc-en-ciel, on doit tourner le dos au soleil pour le voir car les gouttes d'eau diffusent dans la direction vers la direction d'où elles reçoivent la lumière, tandis que pour voir un halo lumineux, il faut regarder vers la source de lumière (retenir que c'est opposé pour l'arc-en-ciel et qu'il est logique de regarder la source pour voir le halo). Ensuite, dispersion $n = n(\omega)$ et $D_m = f(\omega)$.

2 Systèmes optiques centrés

2.a Définitions

Système centré Un système optique est dit **centré** lorsqu'il est invariant par rotation autour d'un axe, alors appelé **axe optique**. Attention, il peut y avoir plusieurs axes optiques pour le miroir plan, mais c'est essentiellement le seul cas où cela peut arriver.

Exemples Une lentille est en général un système centré. Un miroir plan est un système centré. Un dioptré plan est un système centré.

Foyer objet d'un système centré Pour un système centré, si les rayons incidents (ou leurs prolongements) passent par le foyer objet F du système, alors les rayons émergents (ou leurs prolongements) sont parallèles à l'axe optique.

Foyer image d'un système centré Pour un système centré, si les rayons incidents (ou leurs prolongements) arrivent parallèlement à l'axe optique, alors les rayons émergents passent par le foyer image F' du système.

Centre optique pour une lentille mince Pour une lentille mince, le **centre optique** est l'intersection de l'axe optique et de la lentille. Pour une association de lentilles, il n'est pas évident qu'un tel point existe.

Plan focal objet Le **plan focal objet** est le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F . On dit aussi que c'est le plan de front de F .

Plan focal image Le **plan focal image** est le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F' . On dit aussi que c'est le plan de front de F' .

Foyer secondaire objet C'est un point du plan focal objet différent du foyer objet.

Foyer secondaire image C'est un point du plan focal image différent du foyer objet.

Stigmatisme et conjugaison On dit qu'il y a stigmatisme rigoureux lorsque tout rayon passant par A (ou dont le prolongement passe par A) passe après traversée du système optique par A' (ou leur prolongement). A est l'objet, A' l'image, A et A' sont conjugués. Il y a stigmatisme approché si tout rayon passant par A passe au voisinage de A' (plus petit que le grain du détecteur).

Aplanétisme On dit d'un système centré qu'il est **aplanétique** lorsque l'image de tout objet dans un plan de front est contenue dans un plan de front.

Conditions de Gauss Un système centré est dans les **conditions de Gauss** si on se limite aux rayons paraxiaux (proche de l'axe et à faible incidence par rapport à celui-ci). Dans ces conditions, il y a stigmatisme approché et aplanétisme approché.

2.b Dioptre plan ; lame à faces parallèles

Dioptre plan Pour A l'objet et H l'intersection entre la normale au dioptre passant par A et le dioptre, on a dans les conditions de Gauss :

$$\frac{\overline{HA}}{n_1} = \frac{\overline{HA'}}{n_2}$$

Le grandissement transversal vaut 1.

Démonstration de la relation de conjugaison du dioptre En effet, on note i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction. Alors :

$$HA \tan(i) = HA' \tan(r)$$

et d'après la loi de Descartes sur la réfraction, on a

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$$

Le quotient de ces deux relations dans les conditions de Gauss (donc dans l'approximation des petits angles) fournit la formule recherchée.

Lame à faces parallèles Deux lames à faces parallèles espacées d'une épaisseur e délimitent un milieu d'indice n de l'air. Avec le diagramme

$$A \xrightarrow{D_1} A_1 \xrightarrow{D_2} A'$$

on a, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison :

$$\overline{AA'} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Remarques Cette relation est homogène. Pour $e = 0$ ou $n = 1$, on trouve $\overline{AA'} = 0$, ce qui est cohérent car c'est alors comme s'il n'y avait pas de lame.

Démonstration de la relation de conjugaison pour la lame à faces parallèles On applique les relations de conjugaison aux deux dioptries plans. Pour le premier :

$$\frac{\overline{H_1 A}}{1} = \frac{\overline{H_1 A_1}}{n}$$

Pour le deuxième :

$$\frac{\overline{H_2 A_1}}{n} = \frac{\overline{H_2 A'}}{1}$$

On obtient alors :

$$\overline{AA'} = \overline{AH_1} + \overline{H_1 H_2} + \overline{H_2 A'} = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

2.c Lentilles minces

Tracés par les rayons particuliers On peut utiliser plusieurs rayons particuliers :

- le rayon passant par l'axe optique qui n'est pas dévié ;
- le rayon incident parallèle à l'axe optique qui émerge par le foyer image ;
- le rayon incident passant par le foyer objet qui émerge parallèle à l'axe optique.

Tracés par les foyers secondaires Sinon, on peut utiliser les foyers secondaires : si deux rayons incidents sont parallèles entre eux, alors les rayons émergents se croisent en un foyer secondaire image (et on le contraire pour des rayons émergents parallèles entre eux et un foyer secondaire objet).

Tracés par stigmatisme et aplanétisme Enfin, on peut utiliser le stigmatisme et surtout l'aplanétisme : lorsqu'on a un point sur l'axe, placer un objet dans le plan de front, dont il est plus facile de déterminer l'image ou l'antécédent, ce qui permet de trouver la position de l'image ou de l'antécédent du point sur l'axe par aplanétisme.

Remarque Si $\overline{OA} = 2f$, alors $\overline{OA'} = 2f'$: c'est la méthode de Bessel, aussi appelée méthode des "2f-2f".

Rappel 1 Avec une unique lentille convergente, la distance minimale entre l'objet et l'écran vaut $4f'$. Pour ne pas passer pour un guignol en TP, écarter l'objet et l'écran d'au plus $4f'$.

Formule de conjugaison de Newton Elle s'énonce :

$$\overline{FO} \times \overline{F'O} = \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

Formule de conjugaison de Descartes Elle s'énonce :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Grandissement Le grandissement transversal est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Si $|\gamma| > 1$, l'image est agrandie. Si $\gamma > 0$, l'image est droite. Si $\gamma < 0$, l'image est renversée.

Formule de grandissement de Newton Elle s'énonce :

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

Formule de grandissement de Descartes Elle s'énonce :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

3 Instruments d'optique

3.a L'œil humain : performances et limites, modélisation

Modélisation de l'œil L'œil est constitué de :

- la pupille, trou qui laisse passer la lumière ;
- le cristallin, modélisé par une lentille ;
- la rétine, modélisée par un écran dont la distance à la lentille/au cristallin est fixe ;
- le diaphragme qui contrôle l'ouverture de l'œil et la quantité de lumière admise.

Punctum proximum C'est le point le plus proche que peut voir l'œil en accommodant. En général sans défaut de l'œil, il est situé à 15 cm.

Punctum remotum (*Remote* c'est la télécommande de la télé, qui est donc loin de moi quand j'en ai besoin) C'est le point le plus loin visible à l'œil sans accommoder. En général, sans défaut de l'œil

Œil emmétrope Un œil emmétrope (prononcer "an-mé-trope) est un œil sans défaut.

Myopie La myopie correspond à un rapprochement du punctum proximum et du punctum remotum. C'est lorsque le cristallin est trop convergent.

Hypermétropie L'hypermétropie correspond à un éloignement du punctum remotum et du punctum proximum. C'est lorsque le cristallin n'est pas assez convergent.

Astigmatie L'astigmatie correspond au fait que le cristallin n'est alors pas exactement un système centré, ce qui peut créer des déformations de visions des lignes droites car l'œil n'est plus aplanétique dans les conditions de Gauss.

Pouvoir séparateur de l'œil Le pouvoir séparateur de l'œil ε est le plus petit angle sous lequel un œil humain peut distinguer deux objets. ε vaut pour un œil normal une minute d'arc, soit environ 3.10^{-5} radians.

3.b Lunettes et viseurs

Lunettes, viseurs, collimateurs cf TP. Il faut connaître :

- la composition de ces appareils ;
- leur réglage ;
- leur utilité.

A COMPLETER AVEC LE POLY DE TP

Chapitre 24

Introduction à l'optique physique

Table des matières

1	Modèle scalaire des ondes lumineuses	207
1.a	Grandeur lumineuse ou grandeur scalaire de l'optique	207
1.b	Domaine de validité du modèle scalaire	208
2	Émission et réception de la lumière	208
2.a	Modèle des trains d'onde aléatoires ; durée de cohérence de la source	208
2.b	Détecteurs ; éclairage et intensité lumineuse	209
2.c	Densité spectrale ; largeur spectrale	209
2.d	Émission d'une lampe spectrale ; causes de l'élargissement spectral	210
2.e	Émission de lumière par un laser (culture)	211
3	Résumé	211
3.a	Retour sur les deux approches	211
3.b	Les trois temps caractéristiques	211

1 Modèle scalaire des ondes lumineuses

1.a Grandeur lumineuse ou grandeur scalaire de l'optique

Modèle scalaire de la lumière On définit :

$$s(x, t) = \vec{E} \cdot \vec{u}$$

s est une des composantes transverses du champ électrique.

Surfaces d'onde Les surfaces d'onde correspondent alors au même chemin optique et à la même phase.

Cas particuliers des ondes planes et sphériques On a :

- pour une onde sphérique : $s(r, t) = \frac{s_0}{r} e^{i(\omega t - kr)}$;
- pour une onde plane : $s(z, t) = s_0 e^{i(\omega t - kz)}$

Cas général De façon générale, pour A et B sur le même rayon, on a la formule :

$$\left| \frac{\varphi(A, t) - \varphi(B, t)}{2\pi} \right| = \frac{(AB)}{\lambda}$$

Principe de superposition Pour des sources 1 et 2, s qui résulte des sources 1 et 2 à la fois vérifie :

$$s = s_1 + s_2$$

grâce à la linéarité des équations de Maxwell et aux directions de propagation "proches".

1.b Domaine de validité du modèle scalaire

Limite On oublie le caractère transverse et polarisé de la lumière, ce qui est valable pour des sources non polarisées. On ne peut donc pas étudier des sources polarisées avec ce modèle.

2 Émission et réception de la lumière

Le but est de s'intéresser à :

- T la période de l'onde ;
- τ_C le temps de cohérence de la source ;
- τ_R le temps de cohérence du détecteur.

On cherche à comprendre ce que représentent ces grandeurs, quelles limites elles imposent dans nos études et quelles relations elles entretiennent entre elles.

2.a Modèle des trains d'onde aléatoires ; durée de cohérence de la source

Train d'onde Il est émis lors de la désexcitation d'un atome : c'est une sinusoïde de période T pendant une durée ΔT . On considère un ΔT moyen sur tous les trains d'ondes. Les trains d'ondes expliquent le fait que la lumière est non polarisée : en effet, c'est la somme de trains polarisés aléatoirement.

Modèle du train d'onde aléatoire Tous les τ_C , on tira aléatoirement :

- l'amplitude ;
- la phase à l'origine ;
- la polarisation

mais pas la période.

Longueur de cohérence La longueur de cohérence est définie par :

$$l_C = \tau_C \times c$$

En TP, l_C est la précision avec laquelle il faut placer les miroirs du Michelson pour obtenir des interférences.

2.b Détecteurs ; éclairage et intensité lumineuse

Détecteurs Les détecteurs sont sensibles à l'énergie reçue.

Intensité lumineuse On définit l'intensité lumineuse I résultant d'une onde s par :

$$I = \langle s^2 \rangle_{\tau_R}$$

avec τ_R le temps de réponse du détecteur.

Ordres de grandeur de temps de réponse Pour l'œil humain, le temps de réponse est d'environ $1/24$ s, soit environ 4.10^{-2} s. Pour une photodiode, on a $\tau_R = 10^{-6}$ s.

Condition pour observer des interférences Pour observer (ou détecter) des interférences, il faut avoir $\tau_R \ll T$. Or, pour la lumière visible, $T \approx 2.10^{-15}$ s, donc il est très difficile d'obtenir des interférences pour les ondes lumineuses.

Éclairement On définit l'éclairement ξ par

$$\xi = \langle \pi \rangle$$

En optique, on moyenne avec τ_R , tandis qu'en électromagnétisme, on moyenne avec T . Avec les bonnes approximations, cela revient essentiellement au même.

Rappel Pour l'OPPH $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$, on rappelle qu'on a :

$$\langle \pi \rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2} |\underline{E}_0|^2$$

2.c Densité spectrale ; largeur spectrale

Densité spectrale On définit I_λ l'intensité spectrale, ou densité spectrale, telle que

$$I = \int I_\lambda d\lambda$$

Largeur spectrale On considère $s(t) = \sum_{\omega} \underline{g}(\omega) e^{i\omega t}$. On a alors :

$$\Delta\omega \Delta T \geq 1$$

donc plus $\Delta\omega$ est petit, plus ΔT est grand. Pour une sinusoïde parfaite, $\Delta\omega = 0$ et $\Delta T = +\infty$.

Largeur spectrale version énergétique On a $E_{\text{après}} = E_{\text{avant}} + E_{\text{photon}} = E_{\text{avant}} + \hbar\omega_0$ et $\Delta E = \hbar\Delta\nu$, donc :

$$\Delta E \Delta T \geq \hbar$$

Cas de la lampe spectrale Pour une lampe spectrale, la largeur spectrale en longueur d'onde vérifie :

$$\Delta\lambda \ll \lambda_m$$

où λ_m est la longueur d'onde moyenne du train d'onde. On admet alors que

$$\Delta f \times \tau_C \approx 1$$

où Δf est la largeur spectrale en fréquence.

Cas de la lampe au sodium et des lampes spectrales de TP Le doublet jaune du sodium a pour longueurs d'onde 589,0 nm et 589,6 nm. En général, $\Delta\lambda \approx 0,1$ nm pour les lampes spectrales de TP.

cas de la lampe à lumière blanche Dans ce cas, on a $\Delta\lambda \approx \lambda_m$.

Relation entre largeurs spectrales en fréquence et en longueur d'onde Pour $f = \frac{c}{\lambda_0}$, on a la relation :

$$\Delta f = \frac{c\Delta\lambda_0}{\lambda_{0,m}^2}$$

(le signe $-$ a disparu). On en déduit avec la relation admise que

$$l_C \approx \frac{\lambda_{0,m}^2}{\Delta\lambda}$$

Pour une lampe spectrale de TP, l'application numérique donne $l_C \approx 4.10^{-3}$ m.

2.d Émission d'une lampe spectrale ; causes de l'élargissement spectral

Voici les différentes causes de la largeur spectrale.

Effet Doppler Les atomes étant agités, ils n'ont pas le même mouvement par rapport à l'observateur donc n'émettent pas la même lumière. On a :

$$v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \text{ avec } k_B = \frac{R}{N_A}$$

ce qui donne un décalage de fréquence $\Delta\nu = \nu_0 \frac{v^*}{c}$

Collisions Si le nombre de chocs par unité de temps (pression) augmente, ΔT diminue donc $\Delta\omega$ augmente et τ_C diminue.

Largeur spectrale intrinsèque C'est un exercice classique où on mélange :

- la formule de Larmor ;
- l'exercice classique du satellite qui frotte dans l'atmosphère et tombe sur la Terre (appliquer le théorème de la puissance cinétique).

2.e Émission de lumière par un laser (culture)

On a une relation de phase entre les deux photons qui augmente τ_C .

3 Résumé

3.a Retour sur les deux approches

Approche scalaire On a la courbe de s en fonction de t . Dans le modèle des trains d'ondes aléatoires, on a toujours la même période, mais l'amplitude, la phase et la polarisation changent tous les τ_C .

Approche spectrale On a le graphe de I_λ en fonction de f . Δf est la largeur spectrale en fréquence et f_m est la fréquence moyenne du train d'ondes. On a les relations :

$$f_m = \frac{1}{T} \text{ et } \Delta f \times \tau_C \approx 1$$

3.b Les trois temps caractéristiques

Trois temps caractéristiques Les trois temps caractéristiques sont :

- la période T de l'onde ;
- le temps de cohérence τ_C de la source, qui correspond dans le modèle des trains d'onde aléatoires à la période de réinitialisation de l'onde (en tout cas de sa phase et de son amplitude).
- le temps de réponse τ_R du détecteur, qui définit jusqu'à quel point le détecteur perçoit le signal comme étant continu.

Ordres de grandeur On a :

- $T = 10^{-15}$ s pour le visible ;
- $\tau_C = 10^{-11}$ s pour une lampe spectrale et 10^{-8} s pour un laser ;
- Détecteurs : photodiode à $\tau_R = 10^{-6}$ s et œil humain à $\tau_R = 0,1$ s

Chapitre 25

Interférences lumineuses

Table des matières

1	Différence de phase entre deux points	213
1.a	Chemin optique ; surfaces d'onde	213
1.b	Théorème de Malus ; stigmatisme	214
1.c	Déphasage additionnels (culture)	215
2	Superposition de deux ondes lumineuses	215
2.a	Critère de cohérence temporelle	215
2.b	Superposition de deux ondes cohérentes ; formule de Fresnel ; contraste	216
2.c	Superposition de deux ondes incohérentes	217
3	Résumé	217

1 Différence de phase entre deux points

1.a Chemin optique ; surfaces d'onde

Chemin optique Si Γ est un chemin reliant A à B , on définit le chemin optique :

$$(AB)_\Gamma = \int_\Gamma n(s) ds$$

où n est l'indice optique et ds est le dl de la mécanique, l'abscisse curviligne. C'est la distance que parcourrait la lumière dans le vide pendant la durée qu'elle met à aller de A à B .

Chemin optique dans deux cas particuliers Pour un milieu homogène d'indice optique constant n et si Γ est la ligne droite entre A et B , on a :

$$(AB)_\Gamma = nAB$$

Si on prend deux milieux homogènes d'indices constants n_1 et n_2 avec A dans le premier milieu, B dans le deuxième et I à l'interface, on a :

$$(AB) = n_1 AI + n_2 IB = (AI) + (IB)$$

Surface d'onde C'est une surface définie par rapport à un point telle que tous les points de cette surface ont le même chemin optique par rapport au point de définition.

Différence de marche et différence de phase On a :

$$\frac{\varphi_B - \varphi_A}{2\pi} = \frac{(AB)}{\lambda_0} = \frac{p}{1}$$

où p est l'ordre d'interférence.

Principe de Fermat (culture) "Le chemin optique effectivement suivi par la lumière minimise le chemin optique" (version historique). En réalité, ce serait plutôt "rend stationnaire" (de dérivée nulle) à la place de minimise \rightarrow cela peut servir dans l'exercice des miroirs elliptiques. Le principe de Fermat permet de retrouver :

- le principe de propagation rectiligne
- le principe de retour inverse
- les 4 lois de Snell-Descartes

1.b Théorème de Malus ; stigmatisme

Théorème de Malus Après un nombre arbitraire de réflexions et de réfractions, les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. Autre présentation : pour A et B sur le même rayon, A' et B' sont sur le même rayon ; A et A' sont sur la même surface d'onde et B et B' sont sur la même surface d'onde. On a donc $(AB) = (A'B')$

Onde sphérique Pour une onde sphérique :

$$s(r, t) = \frac{s_0}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

avec $\frac{\omega}{k} = v_\varphi = \frac{c}{n}$ donc on a

$$s(r, t) = \frac{s_0}{r} e^{i\omega(t - \frac{nr}{c})}$$

En prenant des points A et B alignés correspondant à des rayons r_A et r_B , on trouve :

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \left(\frac{nr_B}{c} - \frac{nr_A}{c} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(r_B - r_A) = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

On retrouve bien la formule donnée précédemment.

Onde plane Pour une onde plane $\underline{s} = \underline{s_0} e^{i(\omega t - k_z)}$, on retrouve aussi la formule

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{(AB)}{\lambda_0}$$

Stigmatisme Le théorème de Malus permet-il de déterminer les surfaces d'onde à partir de quelques rayons ? Cela est complexe. En revanche, il permet de montrer que deux chemins optiques sont égaux.

Cas problématique des trous d'Young On a une source qui émet vers des trous d'Young T_1 et T_2 , puis tous cela passe dans une lentille convergente qui donne une image M sur un écran. But : exprimer $(SM)_{T_2} - (SM)_{T_1}$.

1.c Déphasage additionnels (culture)

Une réflexion ou une transmission peut induire un déphasage supplémentaire.

Réflexion sur un métal Pour une réflexion normale sur un métal, on a $\underline{r} = -1$, soit un déphasage de π .

Réflexion entre deux diélectriques (HP) Pour une réflexion entre deux diélectriques, dont le premier est d'indice n_1 et le deuxième d'indice n_2 , on a la formule :

$$\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Si $n_2 > n_1$, la réflexion introduit un déphasage de π .

2 Superposition de deux ondes lumineuses

On dit que les sources 1 et 2 interfèrent si $I_1 \text{ et } 2 \neq I_1 + I_2$. Dans la suite, on note :

$$\begin{cases} s_1 = S_1^\circ \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \\ s_2 = S_2^\circ \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases}$$

2.a Critère de cohérence temporelle

Condition de réalisation d'interférences, sources cohérentes On a par le calcul

$$\langle s_1 s_2 \rangle = \frac{S_1^\circ S_2^\circ}{2} \left\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \right\rangle$$

Cela est nul en moyenne à condition que $\frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \ll T_{\text{détecteur}}$. Or, $T_{\text{détecteur}} \approx 10^{-6}\text{s}$ et $\frac{1}{\omega} \approx 10^{-15}\text{rad.s}^{-1}$, donc les interférences ne sont pas réalisables avec des sources distinctes. Pour réaliser des interférences, on utilise donc la même source et on a

$$I = I_1 + I_2 + (S_1^\circ)^2 \left\langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \right\rangle$$

Mais φ varie aléatoirement d'un train d'onde à l'autre donc il faut attendre que la différence de marche δ soit inférieure à la longueur de cohérence $c\tau_c \approx 3\mu\text{m}$. On dit alors que les sources sont **cohérentes**.

2.b Superposition de deux ondes cohérentes ; formule de Fresnel ; contraste

Interférences à deux ondes On considère deux sources s_1 et s_2 ainsi qu'un point M :

$$s_1(M, t) = S_1^\circ \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{S_1 M}{\lambda_1}\right) \quad \text{et} \quad s_2(M, t) = S_2^\circ \cos\left(\omega t + \varphi_2 + \frac{S_2 M}{\lambda_2}\right)$$

L'interférence de ces deux ondes résulte en une onde s telle que $s = s_1 + s_2$. En effet, on peut appliquer le principe de superposition car ce sont des composantes du champ \vec{E} .

Interférences constructives et destructives On a donc $I = I_1 + I_2 + 2\langle s_1 s_2 \rangle$. On dit qu'on a des interférences **constructives** lorsque $I > I_1 + I_2$, et **destructives** lorsque $I < I_1 + I_2$.

Formule de Fresnel Pour deux sources cohérentes, on a :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

Démonstration La formule se démontre proprement en réutilisant les calculs faits au début de la section. Sinon, pour la retrouver rapidement, on peut passer en notation complexe. La démonstration est alors bancale car elle n'utilise pas toutes les hypothèses, mais permet d'aboutir rapidement au résultat.

Cas particulier de la formule de Fresnel Si de plus $I_1 = I_2 = I_0$, cela se réécrit :

$$I = 2I_0(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right)$$

Remarque Pour vérifier la formule, on peut vérifier :

- qu'elle est homogène ;
- que si φ_1 et φ_2 sont en opposition de phase et $I_1 = I_2$, alors $I = 0$;
- que si φ_1 et φ_2 sont en phase et $I_1 = I_2$, alors $I = 4I_0$.

Contraste On définit le contraste C par

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

C'est une grandeur sans dimension. Le contraste est inchangé si on multiplie par deux les intensités. Enfin, $C = 0$ pour un éclairage uniforme (attention, cela ne veut pas dire que tout est sombre!).

Expression du contraste avec la formule de Fresnel La formule de Fresnel permet directement d'établir que

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

On en déduit que $C \leq 1$ et que $C = 1$ pour $I_1 = I_2$ avec l'inégalité arithmético-géométrique.

2.c Superposition de deux ondes incohérentes

On a dans ce cas : $I = I_1 + I_2$.

3 Résumé

Résumé On a :

- Si S_1 et S_2 sont cohérentes : $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$;
- Si S_1 et S_2 sont incohérentes : $I = I_1 + I_2$.

Chapitre 26

Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous d'Young

Table des matières

1	Description : les deux montages classiques	219
1.a	Le rôle de la diffraction	220
1.b	Calcul de la différence de marche ; intensité lumineuse	220
1.c	Frange d'interférences ; interfrange	220
1.d	Non localisation des franges	221
2	Effet du déplacement et de l'élargissement spatial de la source	221
2.a	Déplacement de la source	221
2.b	Deux sources ponctuelles	221
2.c	Source rectangulaire ; contraste	222
2.d	Cohérence spatiale ; critère semi-qualitatif de brouillage	223
2.e	Fentes d'Young	223
3	Influence de la largeur spectrale de la source	223
3.a	Doublet	223
3.b	Profil spectral rectangulaire en σ ; contraste	224
3.c	Lumière blanche	224
3.d	Cohérence temporelle ; critère semi-qualitatif de brouillage	224

1 Description : les deux montages classiques

Dispositif des fentes d'Young Fentes d'Young séparées de $a \approx 1\mu\text{m}$ et placées à $D \approx 1\text{m}$ d'un écran. On peut placer une lentille entre les fentes et l'écran telle que l'écran soit le plan focal image.

1.a Le rôle de la diffraction

Rôle de la diffraction La diffraction donne la zone d'interférence : c'est l'intersection des deux cônes de diffraction, $\sin(\theta) = \frac{\lambda}{\varepsilon}$ avec ε la largeur de la fente et θ le demi-angle au sommet du cône.

Cas ε petit Si ε est petit, on a une diffraction isotrope mais des franges peu lumineuses.

Cas ε grand Si ε est grand, la diffraction n'est plus isotrope mais les franges sont plus lumineuses.

1.b Calcul de la différence de marche ; intensité lumineuse

Différence de marche On la calcule grâce au théorème de Pythagore et on trouve avec un développement limité :

$$\delta = \frac{nax}{D}$$

avec n l'indice optique du milieu et x la distance du point de l'écran au centre de l'écran. Pour une lentille, on utilise le théorème de Malus et le principe du retour inverse de la lumière pour établir que

$$\delta = \frac{nax}{f'}$$

Remarque : exercice du miroir de Lloyd Il existe divers exercices, notamment celui du miroir de Lloyd, où on pourra reconnaître des trous d'Young cachés ou quelque chose qui s'y ramène, ce qui pourra permettre d'éviter à calculer à la main la différence de marche et faire les mêmes DL que dans le cours.

Remarque : importance de la différence marche Il faut bien comprendre que l'expression qui donne la différence de marche contient à elle seule toute la suite du chapitre.

Intensité lumineuse Les deux sources sont cohérentes. Ainsi, d'après la formule de Fresnel, on a :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

1.c Frange d'interférences ; interfrange

Figure d'interférences Si δ ne dépend que de x , on a des franges rectilignes. L'ordre d'interférence p vérifie :

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

Si $p \in \mathbb{Z}$, on a des interférences **constructives**. Si $p \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, on a des interférences **destructives**. L'**interfrange** i est la distance entre deux franges consécutives :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda D}{na}$$

Remarque : obtention de l'interfrange à partir de la différence de marche Retenir qu'il faut différencier l'expression de la différence de marche pour obtenir l'interfrange.

1.d Non localisation des franges

On conserve la figure en déplaçant l'écran : on parle d'interférences non localisées. Le contraste C vaut toujours 1, quelle que soit la position de l'écran.

2 Effet du déplacement et de l'élargissement spatial de la source

2.a Déplacement de la source

Effet d'un déplacement de la source La nouvelle différence de marche est

$$\delta = \frac{nax'}{D'} + \frac{nax}{D}$$

avec x' la nouvelle abscisse de la source. La figure n'est pas modifiée, mais décalée en bloc.

Remarque : autre montage Pour le montage analogue avec des lentilles, on a de même

$$\delta = \frac{nax_1}{f'_1} + \frac{nax_2}{f'_2}$$

Conséquence sur l'interfrange L'interfrange vérifie alors toujours la relation :

$$i = \frac{\lambda D}{na}$$

L'interfrange n'est donc pas modifié.

Conséquence sur la figure d'interférences Ainsi, lorsqu'on décale la source, la figure d'interférences est décalée en bloc.

2.b Deux sources ponctuelles

Situation On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2 qui émettent vers les trous d'Young. Elles sont de part et d'autre de l'axe qui passe pile entre les deux trous d'Young. S_1 est à x_1 au-dessus de cet axe, et S_2 est à x_2 au-dessous. Ainsi si S_2 est masquée :

$$I_1 = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi n}{\lambda_{0,1}} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ax_1}{D'} \right) \right) \right]$$

et si S_1 est masquée :

$$I_2 = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi n}{\lambda_{0,2}} \left(\frac{ax}{D} + \frac{ax_2}{D'} \right) \right) \right]$$

Conséquence La figure d'interférence est deux fois plus lumineuse. Si

$$x_1 - x_2 = \left(p + \frac{1}{2}\right) i \frac{D'}{D}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$, alors le contraste est nul.

Rappel Lorsque le contraste est nul, l'éclairement est uniforme mais l'intensité lumineuse n'est pas nécessairement nulle.

2.c Source rectangulaire ; contraste

Effet d'un élargissement de la source Selon y , rien ne change. Selon x , il y a brouillage. En effet, pour une source rectangulaire (même puissance $\frac{I_0}{h}$ pour tout point entre $-h/2$ et $h/2$), les différents points de la source étant incohérents on a :

$$I(M) = \int_{-h/2}^{h/2} I_{x'}(M) dx' = 2I_0 \left(1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi ah}{\lambda D'} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D'} \right) \right)$$

Pour cela, on a calculé $I_{x'}$ avec la formule de Fresnel.

Expression du contraste pour une source élargie spatialement On a donc

$$C = \left| \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi ah}{\lambda D'} \right) \right|$$

On a donc un bon contraste avant la moitié de la largeur correspondant à la première annulation, soit pour $h \leq \frac{\lambda D'}{2na}$.

Remarque : contraste dans le cas général De façon générale, si $I = A(1 + B \cos(\Delta\varphi))$, on montre immédiatement avec les variations de la fonction cosinus que

$$C = |B|$$

Ordre de grandeur On prend $n = 1$, $\lambda = 6.10^{-7}$ m (milieu du spectre visible) et $a = 10^{-4}$ m. Le diamètre apparent vaut alors :

$$\frac{\lambda}{2a} \approx 3.10^{-3} \text{ rad}$$

Remarque : diamètre apparent du Soleil Le diamètre apparent du Soleil vaut :

$$\frac{700 \times 10^3 \times 10^3}{150 \times 10^6 \times 10^3} \approx 5.10^{-3} \text{ rad}$$

2.d Cohérence spatiale ; critère semi-qualitatif de brouillage

Critère de brouillage On considère qu'il y a $h/2$ entre le haut et le bas de la source. Si $p_{\text{haut}} - p_{\text{bas}} = \frac{1}{2}$, il y a brouillage, *ie* $C > 0$. Dit autrement, il y a brouillage lorsque

$$\frac{na}{D'} \times \frac{h_1}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

où h_1 correspond à la première annulation.

2.e Fentes d'Young

Fentes d'Young Si on décale les trous d'Young dans la direction y , les figures d'interférences se superposent "bien" (les franges sombres sont en face des franges sombres). On obtient alors le dispositif des fentes d'Young en perçant plein de petits trous d'Young alignés selon y .

3 Influence de la largeur spectrale de la source

On utilise ici une source ponctuelle et $x' = 0$ (la source est sur l'axe). On sait qu'alors :

$$\delta = \frac{nax}{D}$$

3.a Doublet

Doublet On considère un spectre en doublet avec des longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 . Alors I_1 a pour expression :

$$I_1 = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi nax}{\lambda_1 D} \right) \right)$$

et I_2 a pour expression

$$I_2 = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi nax}{\lambda_2 D} \right) \right)$$

Par conséquent, les intensités n'oscillent pas à la même pulsation et le contraste n'est alors pas uniforme.

Notions de coïncidence et d'anticoïncidence Lorsque les intensités sont en même temps minimale ou maximale, on parle de **coïncidence**. Lorsque les intensités sont "opposées" (l'une nulle, l'autre maximale), on parle d'anticoïncidence.

Influence de la largeur spectrale Pour des ondes incohérentes, on somme les intensités. On utilise le nombre d'onde σ . Deux exemples :

- les doubles raies du sodium : elle font la même figure pour x petit, mais diffèrent et brouillent la figure plus loin ;
- la lampe de largeur spectrale $\Delta\sigma$: comme on a $\tau_c \Delta\sigma \geq 1$, le temps de cohérence diminue. Les interférences sont brouillées si δ augmente trop.

3.b Profil spectral rectangulaire en σ ; contraste

Nombre d'onde On appelle nombre d'onde la quantité σ définie par

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Profil rectangulaire Pour un profil en largeur spectrale rectangulaire de largeur $\Delta\sigma$, on a :

$$dI = \frac{2I_0}{\Delta\sigma} d\sigma (1 + \cos(2\pi\sigma\delta))$$

Conséquence pour l'intensité Les différentes longueurs d'onde sont incohérentes entre elles donc on peut sommer (ici continûment, donc intégrer) les intensités. On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} (1 + \cos(2\pi\sigma\delta)) d\sigma \\ &= \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \left(\Delta\sigma + \frac{1}{2\pi\delta} \left(\sin\left(2\pi\delta\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right) - \sin\left(2\pi\delta\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right) \right) \right) \\ &= 2I_0(1 + \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta)) \end{aligned}$$

Puis tracer la courbe : oscillations dans une enveloppe qui décroît comme une fonction inverse autour d'une constante.

Contraste On a donc

$$C = |\text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta)|$$

On a un très bon contraste pour $\delta \ll l_c$, et un contraste nul pour $\delta > l_c$.

Remarque On rappelle que $l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$. Or, ici, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, donc en différenciant, on trouve $l_c = \frac{1}{\Delta\sigma}$ (surprise!).

3.c Lumière blanche

Détecteur sensible à la couleur Blanc au milieu, irisation bleu/vert/rouge, puis blanc d'ordre supérieur. Ce sont des oscillations sinusoidales de l'intensité. Au-delà de la tache de diffraction, l'écran est sombre.

Remarque Si on prend en compte la diffraction, l'intensité n'est plus sinusoidale, mais est plutôt en sinc^2 (mais l'étude de la diffraction n'est pas au programme!).

3.d Cohérence temporelle ; critère semi-qualitatif de brouillage

Critère de brouillage On considère que σ_1 et σ_2 sont espacés de $\Delta\sigma/2$. Or :

- pour σ_1 : $p_1 = \frac{ax}{D} \sigma_1$;

- pour $\sigma_2 : p_2 = \frac{ax}{D}\sigma_2$;

Lorsque le contraste s'annule pour la première fois, on a $p_2 - p_1 = \pi \frac{1}{2}$. Cela se réécrit :

$$\frac{ax}{D}(\sigma_2 - \sigma_2) = \pm \frac{1}{2}$$

On obtient les conditions suivantes sur x et δ pour la première annulation du contraste :

$$\begin{cases} x = \frac{D}{a\Delta\sigma} \\ \delta = \frac{1}{\Delta\sigma} \end{cases}$$

Chapitre 27

Réseaux

Table des matières

1	Direction des pics principaux ; relation fondamentale des réseaux	227
1.a	Réseaux en transmission	227
1.b	Réseaux en réflexion	228
2	Conséquences de la formule des réseaux	228
2.a	Cas monochromatique : nombre de pics principaux ; minimum de déviation .	228
2.b	Cas polychromatique : dispersion ; recouvrement d'ordre	229
3	Largeur des pics principaux	229
3.a	Fonctions réseau	229
3.b	Représentation de Fresnel	230
3.c	Résumé	230
4	Utilisation du caractère dispersif	230
4.a	Pouvoir de résolution intrinsèque d'un spectromètre à réseau	230

1 Direction des pics principaux ; relation fondamentale des réseaux

On notera dans tout le chapitre a le pas du réseau, *ie* sa période spatiale.

1.a Réseaux en transmission

Dispositif Il s'agit de N répétitions d'un motif élémentaire (fente très fine) de pas $a \approx 1\mu\text{m}$. Pour établir la formule des réseaux, on considère deux fentes adjacentes, un faisceau incident parallèle (collimateur) et émergent parallèle (lunette de visée à l'infini). On établit la différence de marche à l'aide du théorème de Malus et du retour inverse de la lumière, c'est la **formule des réseaux en transmission** :

$$\delta = n_0 a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

Attention ! Souvent, dans les exercices, $1/a$ est noté n .

Condition d'interférences constructives Il y a interférence constructive si $\delta = p\lambda$ pour $p \in \mathbb{Z}$. Ainsi, les *maxima* d'intensité correspondent à :

$$n_0 a (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = p\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

Attention Cette formule suppose l'utilisation :

- d'un collimateur ;
- d'une lunette de visée à l'infini.

1.b Réseaux en réflexion

Réseaux en réflexion En réflexion, on raisonne de même pour obtenir la **formule des réseaux en réflexion** :

$$\delta = n_0 a (\sin(\theta) + \sin(\theta_0))$$

On a bien un maximum de réflexion en $\theta = -\theta_0$, conformément aux lois de Snell-Descartes.

Maxima d'intensité En réflexion, les *maxima* d'intensité correspondent à :

$$n_0 a (\sin(\theta) + \sin(\theta_0)) = p\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

Note importante ! Dans toute la suite des chapitres, on ne s'intéresse qu'à des réseaux en transmission.

2 Conséquences de la formule des réseaux

Application de la formule des réseaux Elle permet de déterminer les différents ordres de *maxima* d'intensité. En monochromatique, il n'y a pas de superposition, mais en lumière blanche les ordres deux et trois se chevauchent (car $3 \times 400 \text{ nm} < 2 \times 800 \text{ nm}$).

2.a Cas monochromatique : nombre de pics principaux ; minimum de déviation

Nombre de pics principaux On prend $\lambda = 632 \text{ nm}$ (laser He-Ne en TP), $a = 2 \mu\text{m}$ et $i = 0$ (incidence normale). Quelle est la direction des pics principaux ? Quel est le nombre de pic principaux ? On applique la formule des réseaux en transmission en assimilant l'air au vide ($n_0 = 1$) :

$$a \left(\sin(\theta) - \underbrace{\sin(i)}_{=0} \right) = k\lambda_0$$

Par conséquent, tant que $\left| \frac{k\lambda_0}{a} \right| \leq 1$, on a :

$$\theta_k = \arcsin \left(\frac{k\lambda_0}{a} \right)$$

Numériquement avec nos paramètres, k est inférieur à 3 en valeur absolue, il y a donc 7 pics principaux, ie 7 *maxima* d'intensité.

Attention ! i et θ ne sont pas toujours petits !

Minimum de déviation La déviation D est définie par :

$$D = \theta - i$$

On cherche à minimiser D en faisant varier i et en travaillant à a , λ_0 et k fixés. Or, $dD = d\theta - di = 0$ au minimum de déviation. Et en différenciant la formule des réseaux, on trouve $n_0 a (\cos(\theta) d\theta - \cos(i) di) = 0$, ce qui fournit :

$$\cos(\theta_m) = \cos(i)$$

On élimine la solution $\theta_m = i_m$ qui est sans intérêt car elle correspond à l'ordre 0. On a alors la solution $\theta_m = -i_m$ qui est **très utile en TP**, car elle permet de savoir là où il faut chercher le minimum de déviation. Enfin, en réinjectant dans la formule des réseaux, on obtient :

$$\sin(i_m) = \frac{-k\lambda_0}{2na}$$

2.b Cas polychromatique : dispersion ; recouvrement d'ordre

On travaille ici avec de la lumière blanche.

Ordre 0 L'ordre 0 est non dispersif, ie $\theta_0 = i$ pour toutes les longueurs d'ondes.

Ordres supérieurs ; recouvrement En revanche, les ordres des différentes longueurs d'onde varient selon cette dernière. Ainsi, d'après la formule des réseaux, l'ordre -2 pour le violet est le même que l'ordre -1 pour le rouge (car $2 \times 400 = 800$). Par conséquent, ces ordres se chevauchent. De façon générale, pour une source de "lumière blanche", l'ordre 2 et l'ordre 3 se recouvrent : on dit qu'il y a recouvrement.

3 Largeur des pics principaux

3.a Fonctions réseau

Cas de N sources cohérentes Pour N fentes cohérentes, on pose $s_0 = S_0 e^{i\omega t}$ la vibration due à la fente 0 seule en M. Donc $s_k = S_0 e^{i(\omega t + k\varphi)}$. En sommant puis passant à l'intensité, on obtient

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On a donc annulation tous les $\frac{2k\pi}{N\varphi}$ sauf en 0, 2π , etc. Augmenter N diminue la largeur des *maxima* principaux (demi-largeur égale à $2\pi/N$) et diminue l'intensité des *maxima* secondaires.

Fonctions réseau On appelle fonctions réseau les fonctions :

$$f_n(\varphi) = \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\left(N^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}$$

Ces fonctions vérifient la relation, pour N sources cohérentes :

$$I = N^2 I_0 f_N(\varphi)$$

Elles permettent de tracer plus aisément le graphe de l'intensité (*cf* le paragraphe précédent).

Pic principal Dans ce cas, le pic principal a pour demi-largeur à la base :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

En termes d'ordre, cela se traduit par le fait que le pic principal se situe entre $k - \frac{1}{N}$ et $k + \frac{1}{N}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.b Représentation de Fresnel

Représentation de Fresnel On représente les uns à la suite des autres les différents vecteurs complexes qui représentent notre signal.

Utilisation pour la première annulation Pour retrouver la propriété de la première annulation, se dire qu'avec la représentation de Fresnel, il s'agit en fait de faire tourner d'un même angle nos N vecteurs afin de revenir à l'origine. Ainsi, cela correspond à faire un N -gone régulier, et donc à

$$\frac{2\pi}{N}$$

3.c Résumé

On dispose de trois niveaux d'étude :

- Niveau 0 : on considère qu'il n'y a de la lumière qu'au niveau des pics *maxima* (*ie* on utilise la formule des réseaux).
- Niveau 1 : on considère qu'il y a de la lumière au niveau des pics principaux, qui se situent entre $k - \frac{1}{N}$ et $k + \frac{1}{N}$.
- Niveau 2 : on considère l'ensemble de la lumière et on utilise les fonctions réseau.

4 Utilisation du caractère dispersif

4.a Pouvoir de résolution intrinsèque d'un spectromètre à réseau

Remarque Dans cette section, on n'étudie pas l'effet de la largeur de la fente source (pour cela, *cf* exercice de TD).

Critère de Rayleigh On considère que deux raies sont distinguables lorsque la première annulation de l'une correspond au pic d'intensité de l'autre.

Pouvoir de résolution On définit le **pouvoir de résolution** R par

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Avec le critère de Rayleigh, il vérifie $R = Np$ avec p l'ordre et N le nombre de raies éclairés : on le démontre en différenciant la formule des réseaux. Sinon, on peut le retrouver en utilisant le fait que la différence de marche est la même pour les deux :

$$\delta = k(\lambda + \Delta\lambda) = \left(k + \frac{1}{N}\right)\lambda$$

Chapitre 28

Exemple de dispositif à division d'amplitude : l'interféromètre de Michelson éclairé par une source spatialement étendue

Table des matières

1	Introduction	234
1.a	Présentation de l'interféromètre	234
1.b	Les deux (+ ε) configuration de l'interféromètre	235
2	Utilisation en configuration "lame d'air" ; anneaux d'égale inclinaison (ou anneaux de Haidinger)	236
2.a	Description ; montage équivalent	236
2.b	Analyse de la figure d'interférences	238
2.c	Source étendue ; localisation des interférences à l'infini	239
2.d	Source polychromatique ; interférométrie par transformée de Fourier	240
3	Utilisation en configuration "coin d'air" ; franges d'égale épaisseur (ou franges de Fizeau)	242
3.a	Description ; montage équivalent	242
3.b	Analyse de la figure d'interférences	244
3.c	Applications	245
4	Résumé	245
4.a	Lame d'air	245
4.b	Coin d'air	246
4.c	Passer d'un montage à l'autre	246

1 Introduction

L'interféromètre de Michelson est un dispositif mis au point par Albert Michelson et son collaborateur E. Morley à la fin du XIX^{ème} siècle, dans le but de mettre en défaut l'hypothèse d'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide par changement de référentiel galiléen. L'échec de ces tentatives a eu le mérite de valider expérimentalement avec un grand degré de précision cette hypothèse, laquelle constitue le fondement de la théorie de la relativité restreinte.

L'interféromètre initial n'a cessé d'être amélioré, son avantage est de permettre d'utiliser une source large (donc d'obtenir une figure d'interférence plus lumineuse) tout en gardant un bon contraste des franges. En 2003 a été inauguré l'interféromètre franco-italien VIRGO dont les bras font 3km de long : c'est un gigantesque interféromètre de Michelson, destiné à la détection d'ondes gravitationnelles, un phénomène prévu par la relativité générale. Le détecteur américain LIGO a en effet observé pour la première fois en 2016 le passage d'ondes gravitationnelles, ce qui constitue (s'il en faut encore...) une confirmation expérimentale spectaculaire des prévisions d'Albert Einstein effectuées 100 ans auparavant. Celles-ci auraient été émises par la fusion de deux trous noirs, un phénomène cosmique assez violent pour déformer considérablement l'espace-temps et générer ces ondes gravitationnelles qui se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. Cette découverte ouvre la voie à une toute nouvelle physique car, jusqu'à présent, les seules ondes qui nous donnent des informations sur l'univers sont les ondes électromagnétiques, qui ne nous permettent pas l'observation des tous premiers instants de l'univers (avant 380 000 ans, le libre parcours moyen des photons était très faible car ils étaient diffusés par les électrons libres qui ne s'étaient pas encore combinés avec les protons, la température étant trop importante). Ces interféromètres nous permettraient également, par exemple, de sonder l'énergie noire, cette composante qui expliquerait l'expansion accélérée de l'univers.

1.a Présentation de l'interféromètre

La lumière issue de la source pénètre dans l'interféromètre en traversant un verre anticalorique destiné à filtrer le rayonnement IR (chaleur) émis par la source et qui serait nuisible aux éléments optiques (revêtement des miroirs, lame séparatrice).

Division d'amplitude La lumière incidente subit une division d'amplitude en traversant la lame séparatrice. C'est la lame de verre possédant une surface partiellement réfléchissante, qui laisse passer la moitié de l'intensité du faisceau et réfléchit l'autre moitié.

Premier trajet de la lumière Le faisceau (1) qui traverse la séparatrice sans être dévié est réfléchi sur un miroir (M_1) et revient sur la séparatrice. La moitié de l'intensité de ce faisceau (1) est réfléchi et se dirige vers la sortie de l'interféromètre, l'autre moitié traverse la séparatrice et repart vers l'entrée (elle est inutilisable, on ne la représente pas).

Deuxième trajet de la lumière Le faisceau (2) qui est réfléchi sur la séparatrice est ensuite réfléchi sur un miroir (M_2) et revient également sur la séparatrice. La moitié de l'intensité de ce faisceau (2) est transmise et se dirige vers la sortie de l'interféromètre, l'autre moitié est réfléchi sur la séparatrice et repart vers l'entrée (elle est inutilisable, on ne la représente pas).

Les miroirs L'interféromètre comporte deux miroirs.

- Le miroir (M_1) est orientable par deux vis de réglage "grossier" et peut être translaté le long de l'axe entrée/séparatrice : c'est un miroir **chariotable**.
- Le miroir (M_2) est également orientable par deux vis de réglage (plus fin), mais sa position est fixée.

Conclusion Le faisceau incident est divisé en deux parties d'intensités moitié par la séparatrice. Ainsi, deux faisceaux ressortent de l'interféromètre après avoir suivi deux trajets différents. Ces trajectoires (1) et (2) sont dictées par la position et l'orientation des miroirs (M_1) et (M_2).

Intensité Notons $4I_0$ l'intensité entrante dans l'interféromètre. Si certaines conditions que l'on va étudier sont respectées, il pourra y avoir (en sortie) interférences entre 2 ondes issues d'un même rayon incident, par division d'amplitude. L'intensité en un point M du champ d'interférences s'écrira alors :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \right) \right) = 2I_0 (1 + \cos(2\pi p(M)))$$

Nécessité d'une compensatrice L'interféromètre de Michelson est un dispositif très précis, que l'on va utiliser pour obtenir des interférences en lumière polychromatique (même en lumière blanche). Mais les conditions de cohérence temporelle imposent notamment d'avoir une différence de marche inférieure à la longueur de cohérence temporelle de la source, donc de contrôler très précisément cette différence de marche entre les deux rayons qui interféreront en un point donné.

Or, si l'on regarde d'un peu plus près ce qui se passe au niveau de la séparatrice, on constate que le faisceau (1) traverse trois fois la lame de verre tandis que le faisceau (2) ne la traverse qu'une seule fois. Cela introduit un déphasage (donc une différence de marche) entre les deux faisceaux, qui n'est pas due à une différence de la longueur des bras du Michelson (la seule contrôlable). La solution retenue est de rajouter une lame de verre de même épaisseur que la séparatrice et parallèle à celle-ci sur le trajet du faisceau (2) : on l'appelle la **compensatrice**.

Remarques sur la compensatrice

- Le parallélisme de la compensatrice et de la séparatrice est crucial, mais malgré cela, la compensation n'est pas idéale, car elle dépend de l'inclinaison des rayons. Elle n'est parfaite que dans le cas de l'interféromètre réglé en lame d'air avec observation à l'infini.
- Pour ne pas déformer les surfaces d'ondes ; la planéité des miroirs, de la séparatrice et de la compensatrice est très précise (tolérance de 10 nm).

1.b Les deux (+ε) configuration de l'interféromètre

Cas général Si les deux miroirs ont des positions et des orientations quelconques, on a peu de chances d'obtenir une figure d'interférences (sauf avec un laser). En pratique, on utilisera l'une des deux configurations suivantes.

Réglage en lame d'air Les miroirs (M_1) et (M_2) sont perpendiculaires entre eux, la séparatrice faisant un angle de 45° avec chacun d'entre eux : on l'appelle "réglage en lame d'air". La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en sortie dépend de la différence de longueur des bras, donc de la position de (M_1) .

Réglage en coin d'air Les miroirs (M_1) et (M_2) ne sont pas perpendiculaires entre eux, mais les longueurs des bras sont quasiment égales : on l'appelle le "réglage en coin d'air". La différence de marche entre deux rayons qui interfèrent en sortie dépend de l'angle entre (M_1) et (M_2) .

Explication des noms On comprendra mieux les noms de ces deux types de réglages par la suite.

2 Utilisation en configuration "lame d'air" ; anneaux d'égale inclinaison (ou anneaux de Haidinger)

2.a Description ; montage équivalent

Éclairage et observation : constations expérimentales On souhaite éclairer le Michelson par une source étendue pour avoir une meilleure luminosité. Dans ce cas, on constate, même lorsque le réglage des miroirs est idéal, que les interférences sont d'autant plus visibles sur un écran placé en sortie que l'écran est éloigné.

Pour un Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source étendue, les franges d'interférences sont localisées à l'infini. En pratique, bien sûr, on place l'écran ou le détecteur dans le plan focal image d'une lentille convergente.

Remarques

- On n'est pas surpris d'obtenir un brouillage des interférences avec une source étendue (problème de cohérence spatiale), on l'est plus de parvenir à conserver une figure d'interférence très nette à l'infini, ceci quelle que soit l'étendue de la source !
- On pourrait éclairer le Michelson en lame d'air avec une source ponctuelle : on obtiendrait alors des interférences non localisées (observation quelle que soit la distance de l'écran), mais peu lumineuses.

Différence de marche entre deux rayons issues d'un point source S . Ordre d'interférence

On trace les deux trajets possibles d'un rayon incident issu d'un point source S et faisant un angle i avec l'axe du bras portant le miroir (M_1) . On sait que M est dans le plan focal image de la lentille (L) de centre O donc les deux rayons (1) et (2) qui interfèrent sont parallèles à (OM) avant la lentille. D'après le théorème de Malus, on a donc : $(P_1M) = (P_2M)$ (chemins optiques). Par conséquent, la différence de marche $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$ entre les deux rayons vaut :

$$\delta = \left((SA) + \frac{\lambda_0}{2} + (AC) + \frac{\lambda_0}{2} + (CP_2) + (P_2M) \right) - \left((SA) + (AB) + \frac{\lambda_0}{2} + (BD) + \frac{\lambda_0}{2} + (BP_1) + (P_1M) \right)$$

2. UTILISATION EN CONFIGURATION "LAME D'AIR" ; ANNEAUX D'ÉGALE INCLINAISON (OU ANNEAUX DE HA)

où les $\frac{\lambda_0}{2}$ proviennent des réflexions. Par conséquent :

$$\delta = \left((AC) + (CP_2) \right) - \left((AB) + (BD) + (DP_1) \right)$$

Remarque Suivant le traitement de la séparatrice, il peut ne pas y avoir de différence de marche supplémentaire $\frac{\lambda_0}{2}$ à la dernière réflexion à l'interface verre/métal.

Miroir fictif On appelle (M_1^*) le symétrique du miroir (M_1) par rapport à la séparatrice et on trace les symétriques rayons (AB) et (BD) .

Première méthode En termes de chemin optique, la situation est identique au trajet réel de la lumière. En déplaçant le plan d'onde (P_1P_2) juste à la sortie du miroir (M_2) , on a alors :

$$|\delta| = (CP_2) - (CB') - (B'P_1)$$

Or, on a $(CB') = (B'P_1) = \frac{2ne}{\cos(i)}$ et $(CP_1) = 2ne \tan(i)$ donc

$$(CP_2) = 2ne \tan(i) \sin(i) = \frac{2ne \sin^2(i)}{\cos(i)}$$

On en déduit que

$$|\delta| = 2ne \frac{1 - \sin^2(i)}{\cos(i)} = 2ne \cos(i)$$

Remarques

- On garde n ici même si on travaille dans l'air car on pourra mettre en évidence la différence entre n et 1 grâce à ce dispositif.
- La valeur absolue permet de généraliser le résultat au cas où (M_1^*) est plus proche de la séparatrice que (M_2) .

Explication du nom On constate que la différence de marche est équivalente à celle d'une lame d'air d'épaisseur e située entre (M_1^*) et (M_2) , d'où le nom de réglage en "lame d'air".

Deuxième méthode On peut aussi appeler S^* le symétrique de S par rapport à la séparatrice, et S_1 et S_2 les symétriques de S^* par rapport à (M_1^*) et (M_2) respectivement, appelées **sources fictives secondaires**. On obtient le montage équivalent qui est le plus pratique pour déterminer la différence de marche. Du point de vue du chemin optique parcouru par les deux rayons qui interfèrent en M , tout se passe comme s'ils s'étaient propagés en ligne droite depuis S_1 et S_2 . On se retrouve comme dans le montage des trous d'Young avec deux sources secondaires, mais on étudie l'intensité dans un plan orthogonal à l'axe (S_1S_2) . On constate alors immédiatement que la différence de marche s'écrit :

$$\delta = (S_1H) = nS_1S_2 \cos(i) = 2ne \cos(i)$$

Conclusion Lorsque l'interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air, la différence de marche et l'ordre d'interférence entre deux rayons **issus du même rayon incident**, qui interfèrent à l'infini, sont donnés par :

$$|\delta| = 2ne \cos(i) \quad \text{et} \quad |p| = \frac{|\delta|}{\lambda_0} = \frac{2ne \cos(i)}{\lambda_0}$$

2.b Analyse de la figure d'interférences

Étude qualitative On peut intuitivement l'allure de la figure d'interférences à l'aide des symétries. Le montage équivalent possède une symétrie de révolution, donc la figure d'interférences également d'après le principe de Curie : celle-ci consiste en des anneaux concentriques.

Lorsqu'on a deux sources secondaires (ici fictives), le lieu des points de l'espace tel que $S_2M - S_1M = \text{cte}$ est un hyperboloïde de révolution, de foyers S_1 et S_2 . Donc le lieu des points d'intensité maximale $S_2M - S_1M = m\lambda$ avec $m \in \mathbb{Z}$ consiste en un réseau d'hyperboloïdes de mêmes foyers. La figure d'interférences observée sur un écran de sortie est donc l'intersection de ce réseau d'hyperboloïdes avec le plan de l'écran : ce sont bien des anneaux.

Pour e et λ fixées, un anneau brillant (ou sombre) correspond à $i = \text{cte}$: il est donc constitué de l'interférence de tous les rayons incidents ayant la même inclinaison i avec l'axe d'entrée $O_S O_1$, c'est pourquoi on parle d'anneaux de même inclinaison, ou anneaux de Haidinger.

Étude quantitative : rayon des anneaux Les rayons incidents ont des incidences faibles, donc on a :

$$\cos(i) \approx 1 - \frac{1}{2} \tan^2(i) = 1 - \frac{r^2}{2f'^2}$$

En réinjectant dans les formules précédentes, on trouve finalement :

$$p(M) = \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r^2(M)}{2f'^2} \right) \quad \text{et} \quad r(M) = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} p(M) \right)}$$

Commentaires

- **En lame d'air, l'ordre au centre est non nul** (sauf si on est au contact optique, *ie* pour $e = 0$).
- L'ordre est maximal au centre, en F' : $p_{\max} = \frac{2ne}{\lambda_0} \in \mathbb{R}_+$. Il correspond à l'incidence nulle $i = 0$. **L'ordre diminue au fur et à mesure que le rayon augmente.** En particulier, s'il est nul au centre, il est nul partout.
- Nombre N d'anneaux visibles : cela dépend de l'étendue angulaire du faisceau incident i_{\max} et de la taille de la zone d'observation. En général, c'est i_{\max} qui est limitant :

$$N = \lfloor p_{\max} - p_{\min} \rfloor = \left\lfloor \frac{\delta_{\text{centre}} - \delta_{\text{bord}}}{\lambda_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{ei_{\max}^2}{\lambda_0} \right\rfloor$$

Le nombre d'anneaux visibles est d'autant plus grande que l'épaisseur de la lame d'air est grande.

2. UTILISATION EN CONFIGURATION "LAME D'AIR" ; ANNEAUX D'ÉGALE INCLINAISON (OU ANNEAUX DE HA

- Le rayon d'un anneau d'ordre p est une fonction croissante de e . Donc si on chariote (M_1) de manière à diminuer l'épaisseur e de la lame d'air, r diminue et p_{\max} aussi. Ainsi, les anneaux rétrécissent et disparaissent au centre. **Pour diminuer l'épaisseur de la lame d'air, il faut charioter (M_1) de manière à faire rétrécir les anneaux. Il y a alors de moins en moins d'anneaux visibles sur l'écran.** Cette remarque est très utile lorsque l'on cherche à régler le Michelson de manière à avoir $e = 0$. On dit alors que l'on est au **contact optique**. Lorsqu'on arrive au contact optique, la différence de marche est nulle quelle que soit l'incidence i , donc l'écran est uniformément éclairé : c'est la teinte plate.
- Étant donnée une épaisseur e fixée, pour voir beaucoup d'anneaux, il faut que la lame d'air soit éclairée avec des incidences très variées. Pour cela, on fait fortement converger la lumière incidente sur les miroirs. On obtient typiquement une **demi ouverture angulaire de 10° à 15°** .

Rayon de l'anneau brillant numéro k en partant du centre Le rayon de l'anneau k est alors :

$$r_k = f' \sqrt{\frac{\lambda}{2ne} (\{p_{\max}\} + k - 1)}$$

où $\{\cdot\}$ désigne la fonction partie fractionnaire. **Attention, la formule est très probablement douteuse!!!** Néanmoins, le rayon des anneaux varie bien en \sqrt{k} donc les anneaux sont de plus en plus resserrés en s'éloignant du centre.

2.c Source étendue ; localisation des interférences à l'infini

On a dit qu'avec une source étendue, les lieux d'éclairement maximale dans l'espace constituent des réseaux d'hyperboloïdes. Donc, quelle que soit la position de l'écran, on observe des franges d'interférences. On dit que les interférences sont délocalisées.

Si on étend la source S , les sources secondaires S_1 et S_2 s'étendent aussi, et on a une superposition des réseaux d'hyperboloïdes dus à chacun des points sources (donc décalés les uns par rapport aux autres), donc *a priori* brouillage.

Mais lorsqu'on observe à l'infini comme dans notre montage, on voit que si l'on déplace S dans n'importe quelle direction en S' , cela provoque une translation de S_1 et S_2 d'un même vecteur : l'axe ($S_1 S_2$) se retrouve donc parallèle mais non confondu avec l'axe de la lentille (OF'). Le rayon d'incidence i donnera toujours naissance à deux rayons qui sortent de l'interféromètre avec un angle i , donc qui interfèrent au même point M de l'écran. On constate donc que malgré un déplacement de S , donc de S_1 et S_2 , les rayons d'incidence i interféreront toujours au même point M : il n'y a pas de déplacement de la figure d'interférences.

Si l'on étend la source, les points sources incohérents entre eux donnent des figures d'interférences strictement identiques qui s'additionnent en intensité.

Ce raisonnement est valable uniquement en observant la figure d'interférences à l'infini, sinon il y a brouillage de la figure d'interférences.

Conclusion : lorsqu'on étend la source, les figures d'interférences à l'infini dues à chacun des points

sources se superposent exactement : on dit que les interférences sont localisées à l'infini. La figure garde donc un très bon contraste et gagne beaucoup en luminosité !

2.d Source polychromatique ; interférométrie par transformée de Fourier

Effet qualitatif de la largeur spectrale de la source On considère que le Michelson est réglé en lame d'air, et qu'on observe les anneaux dans le plan focal image d'une lentille convergente (donc à l'infini). On a considéré pour l'instant une source parfaitement monochromatique, ce qui n'existe pas. Même si on isole une raie spectrale à l'aide d'un filtre, la source possède tout de même une certaine largeur spectrale. On a vu que des ondes de fréquences différentes étaient incohérentes, on peut donc dire que les différentes composantes spectrales de la source donnent des figures d'interférences qui s'ajoutent en intensité (donc elles se "superposent").

Comme le rayon des anneaux dépend de la longueur d'onde, les anneaux correspondant à chaque longueur d'onde se décalent les uns par rapport aux autres, et conduisent à un brouillage de la figure d'interférence si les anneaux sombres de certaines longueurs d'ondes correspondent aux anneaux brillants d'autres longueurs d'ondes.

Éclairement par le doublet jaune du sodium ; interférogramme Supposons que le dispositif interférentiel soit éclairé par une lampe spectrale à vapeur de sodium, avec un filtre ne laissant passer que le doublet jaune caractéristique : $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. On néglige pour l'instant la largeur chaque raie, et on suppose que les deux raies ont la même intensité I_0 . On note

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 589,3 \text{ nm} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0,6 \text{ nm}$$

On introduit les nombres d'ondes

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}$$

On note également

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

si bien que l'on a :

$$\sigma_1 = \sigma_m - \frac{\Delta\sigma}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_m + \frac{\Delta\sigma}{2}$$

Expression du contraste Les sources sont incohérentes donc

$$I(\delta) = I_0(1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta)) + I_0(1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta))$$

En factorisant et par trigonométrie, on obtient :

$$I(\delta) = 2I_0 [1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_m\delta)]$$

On constate l'apparition d'un terme de contraste :

$$C = |\cos(\pi\Delta\sigma\delta)|$$

2. UTILISATION EN CONFIGURATION "LAME D'AIR" ; ANNEAUX D'ÉGALE INCLINAISON (OU ANNEAUX DE HA)

Tracé expérimental d'un interférogramme On peut tracer expérimentalement la courbe $I(\delta)$ avec le Michelson réglé en lame d'air. Pour cela, on place une cellule photoélectrique au centre des anneaux (en F'), et on se place au contact optique ($\delta = 0$). Puis on déplace le miroir (M_1) à vitesse constante, grâce à un moteur, de manière à augmenter l'épaisseur de la lame d'air (donc on augmente δ aussi car $\delta = 2ne$ en ce point). La cellule va alors enregistrer les variations de I en fonction du temps, donc de δ .

Dans le cas du doublet, on observe un brouillage périodique : ce sont des **battements**.

Notion d'anticoïncidence Lorsque $\delta = 0$ (ie $p = 0$), l'intensité lumineuse est maximale quelle que soit la longueur d'onde. Mais lorsque δ et p augmentent, les zones d'intensités maximales ou minimales se décalent. On dit qu'il y a anticoïncidence lorsqu'un anneau sombre de λ_1 correspond à un anneau brillant de λ_2 . On a alors :

$$p_1(\delta) = \delta\sigma_1 = m_1 + \frac{1}{2} \text{ et } p_2(\delta) = \delta\sigma_2 = m_2 \text{ avec } (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Les anticoïncidences ont donc lieu lorsque $\delta \times (\sigma_1 - \sigma_2) = (m_1 - m_2) + \frac{1}{2}$, donc quand :

$$\delta = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} \text{ avec } m \in \mathbb{Z}$$

On retrouve ainsi les annulations du contraste. L'écart entre deux anticoïncidences successives est donc :

$$\Delta\delta = \frac{1}{\Delta\sigma} \approx \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$

Application numérique : pour le doublet du sodium, on trouve $\Delta\delta = 578,8 \mu\text{m}$, soit :

$$N = \frac{\Delta\delta}{\lambda_m} = \frac{\sigma_m}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = 982$$

franges entre deux anticoïncidences. En comptant simplement les franges entre deux anticoïncidences sur l'interférogramme, on peut donc mesurer $\Delta\lambda$.

Éclairage en lumière blanche Éclairé par une source de lumière blanche, un dispositif interférentiel donne donc des franges irisées, du moins si la différence de marche n'est pas trop élevée. En effet, le brouillage intervient très rapidement dès que δ augmente, car la source est spectralement très large. Avec le Michelson réglé en lame d'air, il est indispensable d'être très près du contact optique pour observer des anneaux.

Par exemple, si on observe la lumière reçue au centre de l'écran avec le Michelson réglé en lame d'air :

- au contact optique : $\delta = 0$ donc les interférences sont constructives pour toutes les longueurs d'onde, la lumière est **blanche** ;
- lorsque $\delta \approx 0,25 \mu\text{m}$ (environ une demi-longueur d'onde), les intensités de toutes les longueurs d'ondes sont proches de leur minimum, on obtient du **noir** ;

- à partir de $\delta \approx 1 \mu\text{m}$, il y a toujours une radiation pour laquelle l'intensité est proche de son maximum et une autre qui est proche de 0. L'intensité totale est à peu près constante, mais on distingue des couleurs appelées **teintes de Newton**. Par exemple, pour $\delta \approx 1,7 \mu\text{m}$, le rouge et le bleu sont éteints, mais le vert a une intensité quasi maximale. On observe donc du vert.
- à partir de $\delta \approx 3 \mu\text{m}$, pour chaque valeur de δ , plusieurs radiations sont éteintes, et d'autres sont à leur maximum d'intensité : l'œil ne discerne plus de couleur et perçoit donc du blanc. Comme ce n'est pas un blanc pur, on parle de **blanc d'ordre supérieur**. Si l'on trace le spectre de cette lumière, on discerne les longueurs d'ondes éteintes. : on dit que le spectre est **cannelé** (pschit). Plus δ est grande, plus y a de cannelures.

Remarque Si le but est d'observer le spectre cannelé et non de visualiser les anneaux, on éclaire plutôt le Michelson réglé en lame d'air par un faisceau de lumière parallèle à l'axe optique (l'éclairement est alors uniforme en sortie). On peut interposer entre la sortie de l'interféromètre et l'écran un prisme afin de disperser la lumière reçue. Les cannelures sont alors bien visibles à la sortie du prisme.

3 Utilisation en configuration "coin d'air" ; franges d'égale épaisseur (ou franges de Fizeau)

3.a Description ; montage équivalent

Éclairage et observation On souhaite toujours éclairer le Michelson par une source étendue pour avoir une meilleure luminosité. Mais à la différence du montage "lame d'air", on constate que la figure d'interférence s'observe alors à l'œil nu "sur les miroirs". De plus, si l'étendue angulaire du faisceau incident est trop importante, il y a brouillage. On peut donc utiliser une source étendue rejetée à l'infini (*ie* dans le plan focal objet d'une lentille convergente). En pratique, pour un Michelson réglé en coin d'air, on éloigne la source étendue (lampe) ou on la place dans le plan focal d'une lentille convergente, et les franges d'interférences sont localisées au voisinage des miroirs. On les regarde à l'œil nu ou on les projette sur un écran que l'on conjugue avec le plan des miroirs grâce à une autre lentille convergente.

Différence de marche entre deux rayons incidents issus d'un point source S. Ordre d'interférence Analysons les deux trajets possibles d'un rayon incident issu d'un point source S (à l'infini) et faisant un angle i petit avec l'axe du bras portant le miroir (M_1), les deux miroirs faisant un petit angle α entre eux. La différence de marche $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$ entre les deux rayons qui interfèrent en un point M de l'écran vaut :

$$\delta = \left[(SA) + \frac{\lambda_0}{2} + (AC) + \frac{\lambda_0}{2} + (CM) \right] - \left[(SA) + (AB) \frac{\lambda_0}{2} + (BD) + \frac{\lambda_0}{2} + (DM) \right]$$

On obtient en simplifiant l'expression :

$$\delta = [(AC) + (CM)] - [(AB) + (BD) + (DM)]$$

3. UTILISATION EN CONFIGURATION "COIN D'AIR"; FRANGES D'ÉGALE ÉPAISSEUR (OU FRANGES DE FIZEAU)

En général, il est commode d'utiliser le miroir fictif (M_1^*) avec (M_2) pour visualiser le coin d'air ainsi formé, caractérisé par son arête et l'angle α . En termes de chemin optique, la situation est identique au trajet réel de la lumière. On constate que tout se passe comme si le rayon interférait avec lui-même (en réalité, avec l'autre partie de son amplitude) en M' situé très près des miroirs. La lentille de sortie sert à faire l'image de M' sur l'écran, donc la condition de stigmatisme nous dit que $(M'M)_1 = (M'M)_2$. Finalement, on a donc :

$$|\delta| = (B'C) + (CM') - (B'M')$$

Il est évident que quel que soit l'angle d'incidence, la différence de marche est nulle sur l'arête, qui constitue la frange d'interférence d'ordre 0.

Incidence nulle Pour une incidence i nulle, le rayon arrive perpendiculairement à (M_2) et est réfléchi sur lui-même. La différence de marche est donc égale à :

$$|\delta| = 2(B'C) = 2ne(M')$$

On constate que la différence de marche est équivalente à celle d'un coin d'air, c'est-à-dire d'une lame d'air d'épaisseur variable $e(M')$ située entre (M_1^*) et (M_2), d'où le nom de réglage en "coin d'air".

Influence de l'angle d'incidence Comme on utilise une source étendue pour augmenter la luminosité, on ne peut pas avoir uniquement des rayons d'incidence nulle. La surface de localisation correspondant à l'angle i est le plan contenant l'arête et le point M' . Ce plan de localisation reste au voisinage des miroirs, mais diffère en fonction de l'angle d'incidence. De plus, l'expression de la différence de marche varie un peu par rapport au cas de l'incidence nulle. Cependant, en pratique, si les angles i et α sont suffisamment petits, on ne détecte pas ce décalage entre les figures d'interférences correspondant aux différents angles d'incidence, et on voit des interférences "au voisinage des miroirs".

Conclusion : l'extension de la source modifie la surface de localisation des interférences, mais tant qu'on garde un angle α "petit" (typiquement inférieur à $1'$ d'arc, soit 3.10^{-4} rad) et qu'on se limite à une source "modérément étendue" (incidences inférieures à une dizaine de $^\circ$), le brouillage n'intervient que pour des ordres d'interférence très élevés.

Sous ces conditions également, l'expression de la différence de marche reste quasiment identique à celle en incidence normale :

$$|\delta| = 2ne(M')$$

Conclusion : lorsque l'interféromètre de Michelson est réglé en coin d'air, la différence de marche et l'ordre d'interférence entre deux rayons issus du **même rayon incident** qui interfèrent au voisinage des miroirs sont :

$$|\delta| = 2ne(M') \text{ et } |p| = \frac{|\delta|}{\lambda_0} = \frac{2ne(M')}{\lambda_0}$$

Ordres de grandeur On éclaire l'interféromètre avec un faisceau d'ouverture angulaire Δi autour de l'incidence normale. Pour observer 15 franges de chaque côté de l'arête, il faut avoir $\Delta i \approx 30^\circ$, ce qui n'est pas du tout limitant. Pour observer 500 franges de chaque côté de l'arête, il faut avoir $\Delta i \approx 5^\circ$: il faut limiter le faisceau incident par une fente assez fine, ce qui diminue la luminosité. Si on veut observer beaucoup de franges, on utilise plutôt le Michelson en lame d'air.

3.b Analyse de la figure d'interférences

Étude qualitative Cette fois, le montage a perdu sa symétrie de révolution, faisant apparaître une direction transverse privilégiée : celle autour de laquelle le miroir (M_1) a pivoté. On appelle **arête du coin d'air** l'intersection des miroirs (M_1^*) et (M_2). Pour comprendre l'allure de la figure d'interférences, on peut, comme pour le montage en lame d'air, représenter le dispositif équivalent avec des sources fictives secondes S_1 et S_2 , en supposant que la source S est ponctuelle. Cette fois, les sources S_1 et S_2 sont quasiment parallèles au plan d'observation des interférences (le plan du miroir (M_1)). On obtient donc les mêmes hyperboles très aplaties ; de la même manière qu'avec le dispositif des trous d'Young. En réalité, on observe des franges quasi-rectilignes, parallèles à l'arête du coin d'air. Une frange brillante correspond à $\delta = \text{cte}$ donc à $e(M') = \text{cte}$. On parle de **franges d'égale épaisseur**, ou encore de **franges de Fizeau**.

Étude quantitative On a donc :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right) = 2I_0 (1 + \cos(2\pi p))$$

avec $\delta = 2ne(M')$ et $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2ne(M')}{\lambda_0}$. Si on note x la distance à l'arête du coin d'air, on a $e(M') = \alpha x$ car $\alpha \ll 1$ donc on trouve les expressions suivantes de $\delta(M')$ et $p(M')$:

$$\delta(M') = 2N\alpha x \text{ et } p(M') = \frac{2n\alpha x}{\lambda_0}$$

Finalement, on obtient l'expression de l'interfrange :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}$$

Remarques On peut faire les remarques suivantes.

- C'est l'interfrange dans le plan de localisation, au voisinage des miroirs. Si l'on visualise les interférences en faisant l'image de ce plan sur un écran à l'aide d'une lentille, ce montage introduit un grandissement transversal γ .
- **La frange d'ordre 0 est située sur l'arête du coin d'air.**
- L'interfrange i est une fonction décroissante de α . Les franges sont d'autant plus serrées que l'angle du coin d'air est grand.
- Le nombre N de franges rectilignes visibles dépend de l'angle du coin d'air et est limité par la taille des miroirs. Si le rayon des miroirs est R , on a :

$$N = \left\lfloor \frac{2R}{i} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{2n\alpha R}{\lambda_0} \right\rfloor + 1$$

Le nombre de franges visibles est d'autant plus grand que l'angle du coin d'air est grand.

- Ainsi, si on tourne une vis de réglage fin de (M_2) de manière à diminuer l'angle α du coin d'air, i augmente et N diminue. Les franges s'écartent et disparaissent sur les bords du miroir. Cette dernière remarque est très utile quand on cherche à régler le Michelson de manière à avoir $\alpha = 0$. Pour visualiser confortablement des interférences à l'oeil nu sur des miroirs, i doit être au moins de l'ordre du mm donc α doit être inférieur à 3.10^{-4} rad (1' d'arc).

Effet d'une translation de (M_1) Si les deux bras de l'interféromètre ont exactement la même longueur, l'arête du coin d'air est juste au milieu des miroirs. Si l'on translate le miroir (M_1) , cela aura pour conséquence de déplacer l'arête horizontalement donc de déplacer les franges rectilignes. Les franges défilent dans le sens du glissement de l'arête.

Observations en lumière blanche Étant donnée la faible longueur de cohérence, on ne peut visualiser des interférences en lumière blanche que si l'on est très près du contact optique ($\delta = 0$) avec un petit angle α : il faut que l'arête du coin d'air soit sur les miroirs (et pas à côté). La frange centrale blanche (ou noire suivant le traitement de la séparatrice) est encadrée de deux franges noires (ou blanches) puis de franges irisées, puis de blanc d'ordre supérieur.

3.c Applications

Visualisation d'une variation d'indice Si l'on vaporise un jet de gaz d'indice $n \neq n_{\text{air}}$ de diamètre d devant l'un des miroirs, par exemple grâce à une bombe de dépoussiérant, on visualise une modification des franges due à l'indice du gaz différent de celui de l'air ambiant : la différence de marche supplémentaire due à la variation d'indice $\delta_{\text{indice}} = 2(n_{\text{gaz}} - n_{\text{air}})d$ se traduit par un déplacement des franges.

En effet, en un point m donné, la traversée de l'épaisseur d de gaz d'indice $n_{\text{gaz}} > n_{\text{air}}$ provoque une variation de l'ordre d'interférence :

$$\Delta p = \frac{\delta_{\text{indice}}}{\lambda_0} = \frac{2(n_{\text{gaz}} - n_{\text{air}})d}{\lambda_0}$$

Supposons que $d \approx 3$ mm. On peut expérimentalement avoir $\Delta p = 3$ et $\lambda_0 = 480$ nm, ce qui nous permet de trouver

$$n_{\text{gaz}} - n_{\text{air}} \approx 2,5 \cdot 10^{-4}$$

Pour effectuer une mesure quantitative plus précise, il serait préférable de travailler en lumière quasi-monochromatique, par exemple en éclairant par une lampe à vapeur de mercure munie d'un filtre vert pour isoler la raie verte de longueur d'onde $\lambda_0 = 546,1$ nm. On constate donc qu'on a accès à de très faibles variations de l'indice optique.

De même, il est possible de visualiser le gradient d'indice provoqué par les variations de température au voisinage d'une flamme.

Mise en évidence d'une déformation d'un miroir On a vu qu'une différence de marche supplémentaire égale à λ provoque un décalage local d'un interfrange. On en déduit que toute déformation ou de défaut de planéité d'un miroir, de la séparatrice ou de la compensatrice de l'ordre de la longueur d'onde provoque une déformation des franges d'interférences clairement visible. Ces éléments optiques nécessitent un polissage extrêmement précis : typiquement, les défauts sont inférieurs à $\lambda/20$ d'après les constructeurs.

4 Résumé

4.a lame d'air

- (M_1^*) est parallèle à (M_2) , espacés de e ;

- la différence de marche vaut $\delta = 2ne \cos(i)$
- avec une source étendue, il faut observer à l'infini ;
- si on veut beaucoup d'anneaux, il faut augmenter $i_{\max} \rightarrow$ faire l'image de la source sur les miroirs.

4.b Coin d'air

- les miroirs (M_1^*) et (M_2) ne sont plus parallèles, et forment un angle α ;
- la différence de marche vaut $2n\alpha x$;
- avec une source étendue, les interférences sont localisées au voisinage des miroirs (si on met au point sur le miroir, il y a un très bon contraste) et il faut un éclairage parallèle.

4.c Passer d'un montage à l'autre

Contact optique \rightarrow coin d'air Il faut augmenter α , les franges se rapprochent.

Contact optique \rightarrow lame d'air Il faut augmenter e : les anneaux émergent du centre.

Passage de lame d'air à coin d'air En général, on commence par le réglage en lame d'air. Pour passer en coin d'air, on se rapproche du contact optique (en diminuant e , les anneaux rentrent au centre) puis en augmentant α .

Sixième partie

Mécanique quantique

Chapitre 29

Description quantique d'une particule

Table des matières

1	Dualité onde-corpuscule	249
1.a	Onde de matière de de Broglie ; expérience de Davisson et Germer	249
1.b	Expérience des fentes d'Young avec des photons ou des électrons	250
1.c	Principe de complémentarité de Bohr	250
1.d	Relations de Planck-Einstein ; relation de de Broglie	250
2	Fonction d'onde ; équation de Schrödinger	251
2.a	Interprétation probabiliste de l'expérience des fentes d'Young	251
2.b	Postulats ; fonction d'onde et équation de Schrödinger	252
2.c	États stationnaires ; équation de Schrödinger indépendante du temps	253
2.d	Interprétation en termes d'opérateurs	253
2.e	Remarque : choix de l'origine de l'énergie potentielle	254
2.f	Remarque : invariance par renversement du temps	254
3	Particule libre ; paquet d'onde	255
3.a	État stationnaire d'une particule libre	255
3.b	Fonction d'onde d'une particule libre ; paquet d'ondes	256
3.c	Propagation du paquet d'ondes ; lien avec la description classique	256
3.d	Inégalités de Heisenberg	256
3.e	Vecteur densité de courant de probabilité	257
3.f	Interprétation hydrodynamique	259

1 Dualité onde-corpuscule

1.a Onde de matière de de Broglie ; expérience de Davisson et Germer

Dualité onde-corpuscule Mise en évidence de la nature corpusculaire :

- Rayonnement du corps noir (Planck, 1900) ;

- Effet photoélectrique (Einstein, 1905) ;
- Effet Compton

Mise en évidence de la nature ondulatoire :

- Diffraction, interférences ;
- Idée de De Broglie : diffraction de la matière. Prouvée par Davisson et Germer en observant la même figure d'interférences avec des électrons que des rayons X sur un réseau.

Hypothèse de de Broglie Les électrons, photons, etc. ont aussi un caractère ondulatoire.

Confirmation expérimentale L'expérience de Davisson et Germer, avec la diffraction d'électrons par un cristal de Ni, confirme cette hypothèse.

1.b Expérience des fentes d'Young avec des photons ou des électrons

Expérience des trous d'Young photon par photon On envoie des électrons ou des photons sur un dispositif de trous d'Young. Pour un long temps de pose, on retrouve la figure d'interférences. Mais pour un unique photon, sa position finale est aléatoire, on n'en connaît que la probabilité (plus forte dans les franges claires).

Bilan Ainsi, un choc unique correspond au caractère corpusculaire, et une figure de diffraction correspond au caractère ondulatoire.

1.c Principe de complémentarité de Bohr

Extrait de Cohen-Tannoudji Si on arrive à déterminer la variation de quantité de mouvement du plan des trous d'Young, alors la figure d'interférences est brouillée : en effet, il faut aussi considérer la plaque contenant les trous d'Young comme un objet quantique.

Principe de complémentarité de Bohr Un système a soit un comportement corpusculaire (position et trajectoire connues), soit ondulatoire (diffraction, interférences) mais pas les deux. Exemple des trous d'Young avec fentes mobiles : si l'on sait par quelle fente le quanton est passé, on perd la figure d'interférence.

1.d Relations de Planck-Einstein ; relation de de Broglie

Remarque : culture Planck a publié en 1900 son article sur le corps noir et Einstein a publié en 1905 son article sur l'effet photoélectrique.

Relation de Planck-Einstein

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite avec h la constante de Planck ($h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s).

Remarque : effet photoélectrique On considère un rayonnement incident sur un métal. Si $E_{\text{photon}} > W$ où W est le travail d'extraction, alors un électron est arraché. Or, pour un photon dans le vide, $f = \frac{c}{\lambda}$, donc cela revient à avoir

$$\lambda < \frac{hc}{W} = \lambda_{\text{seuil}}$$

Ce seuil ne dépend donc pas de l'intensité du rayon incident. En utilisant la relation de De Broglie (cf après), on trouve $E_{\text{photon}} = pc$.

Attention ! Un photon, même s'il est de masse nulle, possède une quantité de mouvement.

Relation de De Broglie

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Remarque Les relations de Planck-Einstein et de De Broglie lient les caractères ondulatoire et corpusculaire. Ces relations ne dépendent pas de la particule, mais la relation de dispersion liant \vec{k} à ω en dépend.

Résumé De façon générale, on a donc :

- pour tout quanton : $E = hf$ et $\lambda = \frac{h}{p}$;
- pour une particule non relativiste : $p = mv$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2$;
- pour un photon dans le vide : $\lambda = \frac{c}{f}$.

Rappel On a $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s ; $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Ordres de grandeur On a les ordres de grandeur suivants :

- Pour un photon visible ($\lambda = 600 \text{ nm}$) : $E = 2,0 \text{ eV}$
- Pour un électron avec $E_c = 50 \text{ eV}$, on obtient $E_c = \frac{p^2}{2m}$ Par conséquent :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$$

On trouve numériquement $\lambda \approx 17 \text{ nm}$ (de l'ordre d'un paramètre de maille en cristallographie).

2 Fonction d'onde ; équation de Schrödinger

2.a Interprétation probabiliste de l'expérience des fentes d'Young

Interprétation probabiliste Pour un seul photon, on a une position complètement aléatoire. Cependant, si on observe beaucoup de photons, on retrouve la figure d'interférences. On a donc perdu une partie du déterminisme classique.

Bonus cf la conférence d'Alain Aspect de l'an dernier. On a notamment :

- les inégalités de Bell ;
- l'expérience d'Aspect qui met en évidence une violation des inégalités de Bell.

2.b Postulats ; fonction d'onde et équation de Schrödinger

Fonction d'onde La fonction d'onde Ψ caractérise toute l'information que l'on peut avoir sur le système. C'est une fonction de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{C} qui prend en argument les trois coordonnées de position et le temps.

Postulat de Born La probabilité qu'une particule se trouve dans un volume $d\tau$ autour de M est donnée par la relation

$$d\mathbb{P} = |\Psi(M)|^2 d\tau$$

Ψ est donc de carré intégrable.

Vocabulaire : amplitude et densité de probabilité On dit que Ψ est une amplitude de probabilité et que $|\Psi|^2$ est une densité de probabilité.

Remarque : VDC en roue libre A propos de Born (qui est une personne différente de Bohr) : "Il a eu le prix Nobel un peu tard parce qu'il a fait des choses que la morale réproouve entre 33 et 45. Heisenberg aussi a eu ce problème."

Dimension de la fonction d'onde Si on travaille en dimension $n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, alors la fonction d'onde a pour dimension $L^{-n/2}$.

Condition de normalisation Par conséquent, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz = 1$$

et ce pour tout t . Cette condition permet souvent de déterminer des constantes inconnues dans des problèmes de mécanique quantique.

Probabilité de mesurer une particule dans un volume Par conséquent, la probabilité de mesurer une particule dans un volume V à l'instant t vaut donc :

$$\mathbb{P}(e^- \in V) = \int_V |\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$$

Équation de Schrödinger La fonction d'onde satisfait l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\vec{r}) \Psi$$

avec l'énergie potentielle, plus couramment appelée potentiel en mécanique quantique, qui est uniquement fonction de l'espace. C'est une équation déterministe et linéaire.

Principe de superposition Le caractère linéaire de l'équation de Schrödinger fait qu'elle vérifie le principe de superposition : si on possède deux solutions, alors toute combinaison linéaire de ces deux solutions est solution.

2.c États stationnaires ; équation de Schrödinger indépendante du temps

État stationnaire On dit que Ψ est un état stationnaire lorsque Ψ s'écrit sous la forme :

$$\Psi = f(x, y, z)g(t)$$

Attention ! Ne pas confondre avec une onde stationnaire : on n'exige pas ici que f et g soient réelles. Par exemple, $e^{i(\omega t - kx)}$ correspond à un état stationnaire mais n'est pas une onde stationnaire.

Recherche des états stationnaires en 1D On cherche Ψ sous la forme $f(x)g(t)$. L'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{f''(x)}{f(x)} + V(x) = E$$

En effet, le tout est bien une constante puisque le premier membre ne dépend que du temps alors que le deuxième ne dépend que de l'espace. On admet qu'il s'agit de l'énergie potentielle de la particule. Ainsi $f(t) = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$ et alors

$$\Psi = f(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

Par conséquent, $|\Psi|^2$ ne dépend pas du temps, d'où le nom d'état stationnaire.

Attention ! On est allé un peu vite sur la fin : $|e^{-i\frac{E}{\hbar}t}| = 1$ parce que $E \in \mathbb{R}$, mais on ne peut pas montrer que $E \in \mathbb{R}$ simplement. En fait, en exploitant la condition de normalisation à $t = 0$ et pour tout t , on trouve directement le fait que $|e^{-i\frac{E}{\hbar}t}| = 1$.

Équation de Schrödinger indépendante du temps On dit alors que f vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$Ef(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} f''(x) + V(x)f(x)$$

Structure des solutions (admis) Toute solution de l'équation de Schrödinger s'écrit comme superposition d'états stationnaires ou d'états propres (valeurs propres de l'équation).

2.d Interprétation en termes d'opérateurs

Remarque : convention Attention : en mécanique quantique, on utilise la convention $e^{-i\omega t}$.

Traduction en termes de conservation de l'énergie L'équation de Schrödinger traduit en fait la conservation de l'énergie mécanique (avec des notations bizarres) : $E = E_c + V$.

Remarque Il est explicitement écrit dans le programme : " $\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi$ correspond à l'énergie cinétique".

Équation aux valeurs propres ; hamiltonien (HP) L'équation de Schrödinger indépendante du temps est aussi appelée équation aux valeurs propres. En effet, elle correspond à l'équation aux valeurs propres de l'opérateur

$$H : \Psi \mapsto \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

appelé opérateur hamiltonien.

2.e Remarque : choix de l'origine de l'énergie potentielle

Dépendance de l'origine des potentiels On considère Ψ solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

On pose alors $\tilde{V} = V + C$. Comment trouver une solution de

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\tilde{\Psi} + \tilde{V}\tilde{\Psi}$$

Il suffit de considérer

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\frac{Ct}{\hbar}}\Psi$$

dont on vérifie qu'elle est effectivement solution de la nouvelle équation. Cela est rassurant car les mesures de position ne peuvent pas dépendre de C .

Facteur de phase Le terme $e^{-i\frac{Ct}{\hbar}}$ est appelé facteur de phase.

2.f Remarque : invariance par renversement du temps

Quasi invariance par renversement du temps Puisque V est réel, si Ψ est solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi$$

alors $\tilde{\Psi} : (x, t) \mapsto \Psi(x, -t)^*$ est solution de la même équation. Par conséquent, l'ensemble de la description (Schrödinger et Born) est donc bien invariante par renversement du temps.

Retour sur les équations usuelles Voyons quelles équations usuelles nous connaissons, quelle quantité l'on "mesure" dans ces équations, et leur comportement face au renversement du temps.

- **Équation de Schrödinger** pour $V = 0$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$$

On "mesure" $|\Psi|^2$ la densité de probabilité. Cette équation est "invariante" par renversement du temps au sens précisé ci-dessus.

- **Équation de la diffusion thermique sans terme source** :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

On mesure T et cette équation n'est pas invariante par renversement du temps (irréversibilité).

- **Équation de d'Alembert** :

$$c^2 \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On mesure \vec{E} et cette équation est invariante par renversement du temps.

3 Particule libre ; paquet d'onde

3.a État stationnaire d'une particule libre

Particule libre On dit qu'une particule est libre lorsqu'elle n'est soumise à aucune force. Le potentiel est alors une constante, choisie arbitrairement nulle.

Équation de Schrödinger pour une particule libre Pour une particule libre, l'équation de Schrödinger devient

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$$

Relation de dispersion Pour une particule libre, on cherche une solution de la forme $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. On a alors la relation

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Vitesses de phase et de groupe, caractère dispersif Le relation de dispersion fournit les vitesses de phase et de groupe. Pour la vitesse de phase :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m}$$

Pour la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$$

C'est donc un milieu "dispersif" puisque $v_\varphi \neq v_g$. Bien avoir en tête que $\frac{p}{m}$ est l'équivalent du v de la mécanique classique.

Caractère non normalisable Une onde plane monochromatique n'est pas normalisée : on ne peut trouver de constante telle que

$$\iiint |\Psi|^2 d\tau = 1$$

3.b Fonction d'onde d'une particule libre ; paquet d'ondes

Forme du paquet d'ondes Pour pallier ce problème de non normalisabilité, On superpose plusieurs ondes de vecteur d'onde \vec{k} voisin de \vec{k}_0 en dimension 1 :

$$\Psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

On suppose que Δk est faible, ce qui nous permettra de faire un DL ensuite.

3.c Propagation du paquet d'ondes ; lien avec la description classique

Propagation du paquet d'ondes Au voisinage de k_0 , on a :

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)}_{=v_g}$$

donc on a :

$$\Psi(x, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\mathbb{R}} g(k) e^{-i(k - k_0)(v_g t - x)} dk$$

Lien avec la description classique Par conséquent, $|\Psi|^2$ se propage à v_g . Ainsi, v_g correspond à la vitesse classique.

Étalement du paquet d'ondes En revanche, le paquet d'ondes s'étale.

3.d Inégalités de Heisenberg

Remarque : autres noms L'inégalité de Heisenberg est aussi parfois appelée principe d'incertitude, ou encore principe d'indétermination.

Inégalité de Heisenberg L'inégalité de Heisenberg s'écrit :

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

avec Δx l'écart-type de la mesure de position selon x et Δp_x l'écart-type de la mesure de la quantité de mouvement selon x . On a de même les inégalités :

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{et} \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Définition et calcul de Δx Δx est donné par :

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle_\Psi - \langle x \rangle_\Psi^2 = \int_{\mathbb{R}} \Psi^* x^2 \Psi \, dx - \left(\int_{\mathbb{R}} \Psi^* x \Psi \, dx \right)^2$$

Remarquer qu'il s'agit là d'une formule de König-Huygens et d'espérances avec la formule de transfert.

Attention ! En revanche, on n'a aucune inégalité sur les quantités de la forme $\Delta x \Delta p_y$!

Interprétation de l'inégalité de Heisenberg On considère un dispositif de diffraction dont la largeur du trou de diffraction vaut a . L'inégalité de Heisenberg nous dit donc que si a (et donc Δx) diminue, alors Δp_x , ie la diffraction, augmente.

Interprétation plus précise par la diffraction Avant, on a une onde plane se propageant selon y donc $\Delta p_x = 0$ et $\Delta x = \infty$. Après diffraction, on a une onde circulaire telle que $\Delta x = a$ et $\Delta p_x = p \sin(\theta) = p \frac{\lambda}{a}$ donc

$$\Delta x \Delta p_x = p \lambda = h \geq \frac{h}{2}$$

Détermination de Δp_x (HP) Si on considère

$$\hat{p}_x : \Psi \mapsto \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

alors on a :

$$\langle \hat{p}_x \rangle_\Psi = \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) \, dx = (\Psi | \hat{p}_x(\Psi))$$

où $(\cdot | \cdot)$ correspond à un produit scalaire hermitien.

En pratique Si on dispose de beaucoup de particules dans l'état Ψ , on mesure x sur certaines et p_x sur d'autres. On calcule ensuite $\Delta x \Delta p_x$ et on vérifie (ou on montre) l'inégalité de Heisenberg.

Inégalité temps-énergie On a :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

avec ΔE l'écart-type en énergie et Δt le temps de cohérence.

3.e Vecteur densité de courant de probabilité

Vecteur densité de courant de probabilité Le vecteur densité de courant de probabilité est défini par

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left[\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}}(\Psi) - \Psi \overrightarrow{\text{grad}}(\Psi^*) \right]$$

C'est l'analogie du vecteur de Poyting $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Cette formule générale est **hors-programme**.

Développement (HP) : explication de la définition de \vec{j} et preuve de l'équation de continuité On souhaite obtenir une équation locale de conservation de la probabilité (aussi appelée équation de continuité) analogue à l'équation locale de conservation de la charge ou à l'identité de Poynting :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$$

où on a posé $\rho = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ la densité de probabilité. On va calculer la dérivée temporelle de la densité de probabilité et essayer de l'écrire comme la divergence d'un vecteur. En dérivant un produit, on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi^* + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$$

On utilise l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi$$

pour réécrire le premier terme. Pour réécrire le deuxième, on calcule le complexe conjugué de l'équation de Schrödinger :

$$-i\hbar \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \Psi)^* + V^* \Psi^*$$

Or, on sait que

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \quad \text{et} \quad (\Delta \Psi)^* = \Delta \Psi^*$$

De plus, le potentiel est à valeurs réelles, donc on sait que $V^* = V$. Par conséquent, on obtient :

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi^* + V\Psi^*$$

En reportant l'équation de Schrödinger et son conjugué dans la dérivation temporelle de ρ , on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{i\hbar}{2m} \Delta \Psi + \frac{1}{i\hbar} V\Psi \right) \Psi^* + \Psi \left(\frac{-i\hbar}{2m} \Delta \Psi^* + \frac{1}{i\hbar} V\Psi^* \right) = \frac{i\hbar}{2m} (\Delta \Psi \times \Psi^* - \Psi \times \Delta \Psi^*)$$

Or, on sait, d'après les relations d'analyse vectorielle, que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\Psi \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*)) = \Psi \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*)) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*) = \Psi \Delta \Psi^* + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*) \\ \operatorname{div}(\Psi^* \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi)) = \Psi^* \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi)) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi) = \Psi^* \Delta \Psi + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi) \end{cases}$$

Par conséquent, on a la relation :

$$\Delta \Psi \times \Psi^* - \Psi \times \Delta \Psi^* = \operatorname{div}(\Psi^* \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi)) - \operatorname{div}(\Psi \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*))$$

D'où, en reprenant les équations de départ, l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left[-\frac{i\hbar}{2m} \left(\operatorname{div}(\Psi^* \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi)) - \operatorname{div}(\Psi \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*)) \right) \right] = 0$$

Cela explique donc la définition de \vec{j} comme

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} [\Psi^* \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi) - \Psi \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\Psi^*)]$$

Identité de conservation (ou équation de continuité) De façon analogue à la conservation de la charge, on a une conservation de la probabilité :

$$\frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{j} \right) = 0$$

Cas particulier utile et au programme Pour une onde de la forme

$$\Psi(x, t) = A \exp(i(k_x x - \omega t)) \quad \text{où } k_x \in \mathbb{R}$$

l'expression générale de \vec{j} (ou bien l'équation de continuité) fournit

$$j_x = -\frac{i\hbar}{2m} (ik_x AA^* - (-ik_x) AA^*) = |A|^2 \frac{\hbar k_x}{m} = \rho \frac{p_x}{m}$$

Cas particulier utile et presque au programme Pour une onde de la forme

$$\Psi(x, t) = [A \exp(ik_x x) + B \exp(-ik_x x)] \exp(-i\omega t) \quad \text{où } k_x \in \mathbb{R}$$

l'expression générale de \vec{j} fournit :

$$j_x = \frac{\hbar k_x}{m} (AA^* - BB^*) = \frac{\hbar k_x}{m} (|A|^2 - |B|^2)$$

Cas particulier utile mais hors programme Pour une onde de la forme

$$\Psi(x, t) = A \exp(-i\omega t) \exp(\alpha x) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

l'expression générale de \vec{j} fournit l'expression :

$$j_x = -\frac{i\hbar}{2m} (\alpha AA^* - A\alpha A^*) = 0$$

3.f Interprétation hydrodynamique

Rappel d'électromagnétisme En électromagnétisme, on a :

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

S'il n'y a qu'un seul type de porteur de charges, cela devient :

$$\vec{j} = \underbrace{nq}_{=\rho} \vec{v}$$

(attention, cela est faux pour un câble coaxial).

Interprétation hydrodynamique Il faut donc bien comprendre qu'ici, le vecteur densité de probabilité est véritablement l'analogue d'un vecteur densité de charges volumique. En effet, pour une onde plane (cas particulier utile et au programme de la section précédente), on a :

$$j_x = \rho \frac{p_x}{m}$$

où $\frac{p_x}{m}$ est l'analogue de la vitesse classique.

Chapitre 30

Particule quantique dans un potentiel

Table des matières

1	Marche de potentiel	261
1.a	Exemples	261
1.b	Cas $E > V_0$; probabilité de réflexion et de transmission	262
1.c	Cas $E < V_0$; onde évanescence	263
1.d	Cas $E \ll V_0$	265
1.e	Résumé	265
2	Barrière de potentiel	265
2.a	Cas $E > V_0$; résonance de transmission	265
2.b	Cas $E < V_0$; effet tunnel	266
2.c	Approximation de la barrière épaisse et approche documentaire	266
3	Puits de potentiel ; quantification de l'énergie	266
3.a	Puits infini 1D	266
3.b	Ordre de grandeur de l'énergie de confinement ; inégalité de Heisenberg	267
3.c	Puits infini 3D	267
3.d	Puits fini 1D	267
4	États non stationnaires	267
4.a	Puits infini	267
4.b	Double puits ; exemple de la molécule d'ammoniac	267
4.c	Liaison chimique (culture)	267

1 Marche de potentiel

1.a Exemples

Interface métal/vide Pour une interface métal/vide, on peut avoir comme marche de potentiel le travail d'extraction nécessaire pour arracher un électron au métal.

Hétérostructures semi-conductrices C'est un mot stylé pour parler des semi-conducteurs. On a par exemple l'association AlAs/GaAs.

1.b Cas $E > V_0$; probabilité de réflexion et de transmission

Classiquement La particule passe toujours et sa vitesse diminue.

Quantiquement On a des coefficient de transmission et réflexion non nuls, qu'on cherche à calculer. L'équation de Schrödinger indépendante du temps nous donne rapidement que, pour $x < 0$, on a :

$$\varphi(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \text{ avec } k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

De même, elle donne pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \text{ avec } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

On a en réalité $B_2 = 0$ car il n'y a pas de source de l'autre côté de la marche de potentiel.

Identification des ondes L'onde en A_1 se propage dans le sens des x croissants, tout comme celle en A_2 . En effet, avec la convention de la mécanique quantique :

$$A_1 e^{ik_1 x} e^{-i\omega t} = A_1 e^{-i(\omega t - k_1 x)}$$

se propage dans le sens des x croissants. L'onde en B_1 est l'onde réfléchie.

Coefficients de réflexion et de transmission Le coefficient de réflexion vaut alors

$$\underline{r} = \frac{B_1 e^{-ik_1 \times 0}}{A_1 e^{ik_1 \times 0}} = \frac{B_1}{A_1}$$

et le coefficient de transmission vaut :

$$\underline{t} = \frac{A_2 e^{ik_2 \times 0}}{A_1 e^{ik_1 \times 0}} = \frac{A_2}{A_1}$$

Relations de passage On admet les relations de passage suivantes :

$$\begin{cases} \varphi(0^-) = \varphi(0^+) \\ \varphi'(0^-) = \varphi'(0^+) \end{cases}$$

La première est toujours valable, et la deuxième est valable à condition que V_0 soit borné au voisinage de 0 (pour plus de précisions, voir l'avant dernière section de cette partie).

Calcul de \underline{r} et \underline{t} Les relations de passage fournissent donc

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = ik_2 A_2 \end{cases}$$

On en déduit, en simplifiant les i et en divisant par A_1 :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \frac{k_2}{k_1} \underline{t} \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve finalement les expressions :

$$\underline{t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \underline{r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

Remarque : cohérence des expressions précédentes Les expressions précédentes sont homogènes car sans dimension. Si V_0 (pas de marche), on a bien $\underline{t} = 1$ et $\underline{r} = 0$ (revenir aux expressions de k_1 et k_2). Toutefois l'onde n'est pas normalisable, elle ne décrit pas une particule, mais un flux de particules.

Calcul des probabilités de réflexion et de transmission R et T Ces probabilités sont définies par

$$R = \frac{j_{\text{ref}}}{j_{\text{inc}}} = \frac{|B_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}}{|A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}} = |\underline{r}|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{inc}}} = \frac{|A_2|^2 \frac{\hbar k_2}{m}}{|A_1|^2 \frac{\hbar k_1}{m}} = \frac{k_2}{k_1} |\underline{t}|^2$$

Par conséquent :

$$R + T = \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} ((k_1 - k_2)^2 + 4k_1 k_2) = 1$$

Ainsi, l'onde est soit réfléchi, soit transmise : il n'y a pas d'absorption.

Graphique On trace le graphe de $\rho = |\varphi|^2$ en fonction de x . Pour $x > 0$, ρ est constante. Pour $x < 0$,

$$\rho(x) = |A_1(e^{ik_1 x} + \underline{r}e^{-ik_1 x})|^2 = |A_1|^2 (1 + R + 2\underline{r} \cos(2k_1 x))$$

Attention, la tangente en 0 est horizontale !

Animations Ca fait des choses jolies : l'onde s'approche, oscille près de la marche puis une partie est transmise et une autre est réfléchi. La partie réfléchi va plus vite que la partie transmise.

1.c Cas $E < V_0$; onde évanescente

Classiquement La particule rebondit sur la marche de potentiel.

Quantiquement L'équation de Schrödinger indépendante du temps nous donne rapidement que, pour $x < 0$, on a :

$$\varphi(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \text{ avec } k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

De même, elle donne pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} \text{ avec } k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

On a en réalité $A_2 = 0$ car l'onde ne peut diverger au voisinage de l'infini.

Coefficients de réflexion et de transmission Le coefficient de réflexion vaut alors

$$\underline{r} = \frac{B_1 e^{-ik_1 \times 0}}{A_1 e^{ik_1 \times 0}} = \frac{B_1}{A_1}$$

et le coefficient de transmission vaut :

$$\underline{t} = \frac{B_2 e^{-k_2 \times 0}}{A_1 e^{ik_1 \times 0}} = \frac{A_2}{A_1}$$

Calcul de \underline{r} et \underline{t} Les relations de passage fournissent donc

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = B_2 \\ ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -k_2 B_2 \end{cases}$$

On en déduit, en divisant par A_1 :

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ i(1 - \underline{r}) = -\frac{k_2}{k_1} \underline{t} \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve finalement les expressions :

$$\underline{t} = \frac{2ik_1}{ik_1 - k_2} \text{ et } \underline{r} = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2}$$

Remarquons que \underline{r} est donc de module 1. On l'écrira sous la forme $\underline{r} = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$.

Calcul de R et T On en déduit que $R = 1$ et donc, nécessairement, $T = 0$: l'onde est entièrement réfléchie, avec un certain déphasage.

Graphes Pour $x > 0$, on a une exponentielle décroissante. Pour $x < 0$, après calcul de module :

$$\rho(x) = |A_1|^2 (1 + R + 2 \cos(k_2 x + \theta)) = 2|A_1|^2 (1 + \cos(2k_2 x + \theta))$$

Ainsi, ρ s'annule périodiquement pour $x < 0$. Attention : la tangente à l'origine n'est pas nulle à cause de l'exponentielle décroissante !

Animations Ca fait des choses jolies : l'onde s'approche, oscille près de la marche puis est rejetée.

1.d Cas $E \ll V_0$

Apparition d'un point anguleux Dans le cas où $E \ll V_0$, on a l'apparition d'un point anguleux en 0 d'après les expressions précédentes.

Condition de validité de la deuxième relation de passage Par conséquent, on en déduit que la deuxième relation de passage n'est valable que si V_0 est borné au voisinage de x_0 (la première est toujours valable).

1.e Résumé

Pour $E < V_0$, $R = 1$ et $T = 0$, puis pour $E > V_0$, R diminue peu à peu et T augmente peu à peu.

2 Barrière de potentiel

2.a Cas $E > V_0$; résonance de transmission

Barrière de potentiel : cas $E > V_0$ Si $E > V_0$, on peut avoir de multiples réflexions dans la marche et donc des interférences en réflexion et en transmission.

x	$x < 0$	$0 < x < L$	$L < x$
φ	$A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$	$A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$	$A_3 e^{ik_1 x} + \cancel{B_3 e^{-ik_2 x}}$

k_1 et k_2 sont donnés par l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

Les relations de passage donnent 4 relations entre les 5 inconnues, dont on élimine la première puisque les coefficients de réflexion et de transmission correspondent à un quotient entre ces inconnues. On admet que la résolution de ce système 4×4 fournit :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2(k_2 L)}$$

Remarque : cohérence de l'expression de T On remarque que l'expression de T admise :

- est homogène ;
- vérifie $T = 1$ si $V_0 = 0$ ou si $L = 0$, ce qui correspond bien à une absence de barrière de potentiel.

Transparences On appelle **transparences** les points où T vaut 1.

Version "réflexions multiples" On suppose désormais qu'il y a de multiples réflexions. Si les rayons deux rayons consécutifs a et b émergents interfèrent constructivement, on sait que toutes les ondelettes transmises vont interférer constructivement. Or, la différence de phase entre a et b correspond à deux épaisseurs et deux réflexion, donc à une différence

$$\underline{r}'^2 e^{i2k_2 L}$$

avec $\underline{r}'^2 \geq 0$ car on sait que $\underline{r} \in \mathbb{R}$. Par conséquent, a et b sont en phase lorsque

$$k_2 L = 2\pi n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque : réflexions multiples en optique En optique, le système classique qu'on étudie dans ce cas s'appelle l'**interféromètre de Fabry-Pérot**. Retenir donc cette méthode de calculer le déphasage entre deux rayons consécutifs pour ce genre d'exercices.

2.b Cas $E < V_0$; effet tunnel

Barrière de potentiel : cas $E < V_0$ Dans le cas où $E < V_0$, on a une onde évanescence $A_2 e^{\rho' x} + B_2 e^{-\rho' x}$ dans la barrière (exponentielle **réelle**) et on a alors :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\rho' L)}$$

Effet tunnel C'est ce phénomène de transmission de la particule à travers une barrière de potentielle classiquement infranchissable. Application du microscope à effet tunnel, fait passer les électrons d'un conducteur à la pointe d'un microscope, comme l'effet est très sensible à l'épaisseur de la barrière, il permet de mesurer précisément des surfaces. Une autre application est la radioactivité α : émission de ${}^4_2\text{He}^{2+}$, modèle de Gamov (interaction forte (potentiel négatif) jusqu'à r_0 puis interaction électromagnétique (potentiel en $1/r$)) explique la grande différence de durée de vie des particules par les variations de barrière de potentiel en fonction de l'énergie.

2.c Approximation de la barrière épaisse et approche documentaire

Approximation de la barrière épaisse Dans la limite de la barrière épaisse $\left(a \gg \frac{1}{\rho'}\right)$, on a :

$$T \approx \exp\left(-2\rho' a \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}\right)$$

3 Puits de potentiel ; quantification de l'énergie

3.a Puits infini 1D

Puits de potentiel infini 1D On utilise l'équation de Schrödinger et les conditions $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ pour établir que φ est sinusoïdale et que $k = \frac{n\pi}{a}$ est quantifié ($n \in \mathbb{N}^*$). Puis avec

$$E = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

on retrouve que l'énergie est quantifiée avec seuil plus grand que le minimum de potentiel (ce qui s'explique par l'inégalité d'Heisenberg).

3.b Ordre de grandeur de l'énergie de confinement ; inégalité de Heisenberg

3.c Puits infini 3D

Puits de potentiel infini 3D En 3D, on cherche une solution en séparant les variables $\varphi = f(x)g(y)h(z)$. On trouve une superposition d'énergie quantifiée et des états dégénérés (plusieurs combinaisons donnent la même énergie).

3.d Puits fini 1D

Puits de potentiel fini 1D Principe de symétrie : si φ est solution non-nulle de l'équation de Schrödinger alors sa partie réelle ou imaginaire l'est également, et sa partie réelle paire ou impaire aussi (l'une au moins est non-nulle puisque $|\varphi|^2$ est paire). On peut donc se restreindre à ce type de solutions. Avec $E < V_0$, seul un nombre fini d'états sont possibles. Augmenter la largeur du puits ou diminuer sa hauteur revient à moins confiner la particule, donc rendre plus de niveaux d'énergie possibles et diminuer l'énergie du fondamental.

Méthode Pour un puits bizarre (fini ou autre), on peut écrire les relations de passage matriciellement puis dire que notre matrice n'est pas inversible car un vecteur non nul est dans son noyau. Calculer le déterminant de cette matrice permet alors d'obtenir une relation entre les différents paramètres du problème. Souvent, l'équation qui en résulte n'est pas résoluble explicitement, mais on peut en faire une résolution graphique par exemple, à l'aide des autres contraintes du problème.

4 États non stationnaires

4.a Puits infini

États non stationnaires Avec les φ_i les fonctions propres du système, la fonction :

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_0(x) + \varphi_1(x))$$

est solution donc

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_0(x) \exp\left(i \frac{E_0}{\hbar} t\right) + \varphi_1(x) \exp\left(i \frac{E_1}{\hbar} t\right) \right)$$

Pour $|\Psi|^2$, on obtient une formule d'interférence semblable à celle de Fresnel. On a donc une oscillation périodique à la fréquence de Bohr :

$$\nu = \frac{E_1 - E_0}{2\pi\hbar}$$

4.b Double puits ; exemple de la molécule d'ammoniac

Double puits Si les deux puits sont collés le système est équivalent à un puits de largeur double ; s'ils sont très écartés les puits sont découplés. Or le fondamental a une énergie plus faible dans un grand puits que dans deux puits de largeur plus faible, ce qui explique la stabilité des molécules (H_2^+ , l'énergie potentielle de proton augmente inversement à r , mais celle de l'électron diminue).

4.c Liaison chimique (culture)

Septième partie

Électronique numérique

Chapitre 31

Électronique numérique

Table des matières

1	Échantillonnage	271
1.a	Signal échantillonné	271
1.b	Une analogie	272
1.c	Spectre du signal échantillonné	272
1.d	Condition et théorème de Nyquist-Shannon	272
1.e	Filtre anti-repliement	272
2	Numérisation d'un signal	273
2.a	Quantification	273
2.b	Signal et bruit	273
3	Filtrage numérique	273
3.a	Principe	273
3.b	Limites	274

1 Échantillonnage

1.a Signal échantillonné

Échantillonnage Il s'agit d'une discrétisation en temps. On note T_e la période d'échantillonnage. On relève une valeur tous les T_e .

Compromis Il faut un compromis :

- si T_e est trop petit, il sera compliqué de stocker et transmettre le signal ;
- si T_e est trop grand, il y aura de la perte d'information.

Problème majeur Si on considère le signal sinusoïdal :

$$S(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$$

on peut remarquer que les signaux

$$S_n(t) = A \cos(2\pi(f + nf_e)t + \varphi)$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ passent par les mêmes points donc après échantillonnage, on ne sait pas si la fréquence de départ était f , $f + f_e$, $f - f_e$, etc.

1.b Une analogie

Analogie édifiante On observe une roue qui tourne avec une période T . Si on prend des photos avec une période $T/4$, on obtient le même résultat que si on prenait des photos avec une période $5T/4$, donc on n'a pas accès à la période d'origine.

1.c Spectre du signal échantillonné

Avec simplement un fondamental On voit apparaître des pics à $f + nf_e$.

Avec des harmoniques ; repliement Pour chaque harmonique, des pics $f_i + nf_e$ apparaissent. Si on diminue trop la période d'échantillonnage, le spectre se replie sur lui-même et on ne peut plus distinguer les différentes harmoniques. On dit qu'il y a repliement du spectre.

Remarque En TP, il faut faire l'acquisition d'un nombre entier de périodes du signal.

1.d Condition et théorème de Nyquist-Shannon

Critère de Nyquist-Shannon Il faut avoir $f_e > 2f_{\max}$ pour pouvoir distinguer les fréquences. On ne fait pas la différence entre un signal à f_e et $f_e + f$ ou $f_e - f$ dans l'échantillon, donc on utilise :

- un filtre passe-bas anti-repliement avant l'échantillonneur (pour éviter que les fréquences $f_e - f$ hors du spectre se retrouvent à f)
- un filtre passe-bas après l'échantillonneur pour enlever les fréquences à $nf_e + f$ et $nf_e - f$

Exemple du CD audio Pour un CD audio, $f_{\max} = 20$ kHz et $f_e = 44,1$ kHz.

Remarque Un système linéaire continu invariant ne fait pas apparaître de nouveaux pics dans le spectre. L'échantillonnage est certes linéaire, mais il n'est pas invariant donc peut faire apparaître de nouveaux pics.

1.e Filtre anti-repliement

Filtre anti-repliement C'est un filtre passe-bas avant l'échantillonnage. Il permet de "fabriquer" un f_{\max} . On choisit les caractéristiques du filtre de façon à respecter le critère de Shannon tout en essayant de conserver un maximum de fréquences.

2 Numérisation d'un signal

2.a Quantification

Quantification Il s'agit d'une discrétisation en espace. On parle de loi linéaire lorsque le pas de quantification q est constant. Par exemple, $[0, q[$ est codé par 0, $[q, 2q[$ est codé par 1, etc.

Pas de la quantification q est appelé le pas de la quantification.

Dynamique du capteur

$$\Delta s = s_{\max} - s_{\min}$$

est la dynamique du capteur.

Lien entre le nombre de bits et la dynamique du capteur Si on stocke sur N bits on a

$$q = \frac{\Delta s}{2^N - 1}$$

2.b Signal et bruit

Choix du pas de la quantification pour limiter le bruit On choisit q strictement supérieur à l'amplitude du bruit et e le calibre de manière à éviter la saturation.

3 Filtrage numérique

Intérêt Le filtrage numérique est beaucoup plus simple qu'un filtrage analogique (avec R et C).

3.a Principe

Principe d'un filtrage numérique On part d'un signal que l'on échantillonne et que l'on quantifie pour obtenir des signaux. On a donc effectué une première conversion analogique-numérique. Ensuite, on traite numériquement ces échantillons. Enfin, on réalise une conversion numérique-analogique pour obtenir le signal traité.

Exemple : passe bande du premier ordre On prend un filtre :

$$\underline{H} = \frac{s}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

L'équation différentielle associée est :

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt} + s = e$$

On souhaite arriver à

$$s_n \approx s(nT_e)$$

Or, la dérivée de s par rapport au temps correspond de façon discrète à

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{T_n}$$

On obtient donc la relation de récurrence :

$$\frac{1}{\omega_c T_e} s_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{\omega_c T_e}\right) s_n = e_n$$

ce qui peut encore se réécrire

$$s_{n+1} = s_n(1 - \omega_c T_e) + e_n \omega_c T_e$$

sachant que e_n est donné par le convertisseur analogique-numérique. On peut alors calculer dans les cas pratiques tous les s_n , puis utiliser le convertisseur numérique-analogique.

3.b Limites

Limites La méthode exposée précédemment est une bonne approximation pour $f_e \gg f_c$, ce qui correspond à $\omega_c T_e \ll 1$. Sinon, le taux de variation n'est pas une bonne approximation de la dérivée.

Amélioration : transformée de Fourier rapide La bonne méthode est en réalité la transformée de Fourier rapide (FFT) : on applique une transformation de Fourier, on multiplie par la fonction de transfert, puis on applique la transformée de Fourier inverse.

Huitième partie

Physique statistique

Chapitre 32

Physique statistique

Table des matières

1	Facteur de Boltzmann	278
1.a	Pression cinétique d'un gaz parfait	278
1.b	Définition de la température cinétique	279
1.c	Modèle de l'atmosphère isotherme	279
1.d	Facteur de Boltzmann et interprétation probabiliste	279
2	Système à spectre discret en équilibre avec un thermostat	280
2.a	Loi de Boltzmann ; fonction de partition	280
2.b	Particules identiques et sans interaction	280
2.c	Énergie interne ; capacité thermique	281
2.d	Fluctuations relatives de l'énergie	281
2.e	Remarque : choix de l'origine de l'énergie potentielle	282
3	Système à deux niveaux d'énergie non dégénérés en équilibre avec un thermostat	282
3.a	Exemples	282
3.b	Populations ; énergie interne	283
3.c	Capacité thermique ; fluctuations de l'énergie	284
4	Particules identiques, indépendantes et discernables dans un puits de potentiel	285
4.a	États d'une particule dans un puits infini (rappel)	285
4.b	Approximation continue	285
4.c	Énergie moyenne	285
5	Capacité thermique des gaz et des solides	286
5.a	Limite classique ; approximation continue ; théorème d'équipartition	286
5.b	Distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses (complément)	286
5.c	Capacité thermiques des gaz parfaits monoatomiques	286
5.d	Capacité thermique des gaz parfaits diatomiques	287
5.e	Modèle classique des solides ; loi de Dulong et Petit	287
5.f	Modèle quantique d'Einstein (1907)	287
5.g	Résumé : activation ou gel des degrés de liberté	289

États L'état d'un système macroscopique peut être :

- son micro-état : classiquement 3 paramètres de position et de vitesse pour chaque particule, donc $6N$ paramètres ;
- son macro-état : P, T, V, m, U, H, S, C_v , etc.

Approche Dans ce chapitre, on emploie une approche statistique et probabiliste.

1 Facteur de Boltzmann

1.a Pression cinétique d'un gaz parfait

Calcul de la force de pression On considère une surface S de vecteur normal \vec{u}_z . Les atomes ayant une vitesse comprise entre \vec{v} et $\vec{v} + d\vec{v}$ qui tapent cette surface entre t et $t + dt$ sont au nombre de :

$$n^* f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z \times S \vec{v} \cdot \vec{u}_z dt$$

Pour un tel atome, le choc est élastique (loi de Descartes) et la variation de quantité de mouvement associée est :

$$-2mv_z \vec{u}_z$$

Le théorème de la résultante au gaz entre t et $t + dt$ s'écrit alors :

$$\delta \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}} dt = -2mv_z n^* f(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z \times S \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}_z}_{=v_z} \vec{u}_z$$

Par conséquent, on a alors :

$$\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}} = -2mn^* S \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 f(\vec{v}) dv_z \vec{u}_z$$

Or, on a d'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 f(\vec{v}) dv_z = \langle v_z^2 \rangle$$

donc on en déduit

$$\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}} = -mn^* \langle v_z^2 \rangle S \vec{u}_z$$

Pression cinétique On dispose donc bien d'une force de pression associée à une pression

$$P = +m \langle v_z^2 \rangle n^*$$

Or, par isotropie de la distribution des vitesses, on sait que

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{u^2}{3}$$

Par conséquent, on dispose de l'expression suivante de la pression cinétique :

$$P = \frac{1}{3} mn^* u^2$$

avec :

- m la masse d'une particule ;
- n^* la densité particulaire (nombre de particules par unité de volume) en m^{-3} ;
- $u = \sqrt{\langle \vec{v}^2 \rangle}$ la vitesse quadratique moyenne (en $m.s^{-1}$).

Remarque On a négligé les interactions à distance.

1.b Définition de la température cinétique

Température cinétique Si on part de la loi des gaz parfaits $PV = nRT$, on a $PV = \frac{n^*V}{N_A}RT$ donc avec $k_B = \frac{R}{N_A}$ et l'expression de la pression cinétique, on obtient l'expression de la température cinétique avec :

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}k_BT$$

Attention n est en mol et n^* est en m^{-3} .

Remarque On a ici affaire à un cas particulier du théorème d'équipartition (*cf* la suite du chapitre).

1.c Modèle de l'atmosphère isotherme

Modèle de l'atmosphère comme un gaz parfait isotherme Cela permet d'obtenir une équation différentielle sur la pression P et qui permet d'aboutir à l'expression :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right)$$

Cela se généralise à n^* .

1.d Facteur de Boltzmann et interprétation probabiliste

Apparition d'un facteur de Boltzmann On a donc :

$$n^* = n_0^* \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = n_0^* \exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right)$$

où m désigne la masse d'une particule de gaz.

Remarque k_BT est donc une énergie.

Interprétation probabiliste Si on choisit une particule au hasard, la probabilité qu'elle soit entre z et $z + dz$ est alors :

$$d\mathbb{P} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{mgz}{k_BT}\right)$$

où Z est la fonction de partition qui dépend de la condition de normalisation.

2 Système à spectre discret en équilibre avec un thermostat

2.a Loi de Boltzmann ; fonction de partition

Contexte On considère un système fermé en contact avec un thermostat à la température T .

Probabilité d'être dans un état d'énergie La probabilité que le système soit dans le microétat α d'énergie E_α est :

$$\mathbb{P}_\alpha = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_\alpha}{k_B T}\right)$$

où Z est la fonction de partition qui ne dépend pas de α mais peut dépendre de T .

Expression de la fonction de partition La condition de normalisation impose que la somme des probabilités fasse 1. Par conséquent, en sommant l'expression précédente, on en déduit :

$$Z = \sum_{\alpha} \exp\left(-\frac{E_\alpha}{k_B T}\right)$$

2.b Particules identiques et sans interaction

Exemple de particules indépendantes Deux masses attachées aux bouts de deux ressorts eux-mêmes reliés à des murs différents. L'énergie totale du système vaut :

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - l_2)^2$$

Exemple de particules non indépendantes Deux masses reliées par un ressort entre elles deux. L'énergie ne peut pas s'écrire comme une somme $f(x_1, v_1) + g(x_2, v_2)$.

Conséquence de l'indépendance Si les particules sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(1 \in \alpha, 2 \in \beta) = \mathbb{P}(1 \in \alpha)\mathbb{P}(2 \in \beta)$$

Système de N particules identiques et indépendantes Pour N particules identiques et indépendantes, on a :

$$Z = \sum_{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_N} \exp\left(-\frac{E_{1 \in \alpha_1} + \cdots + E_{N \in \alpha_N}}{k_B T}\right)$$

soit encore

$$Z = \left(\sum_{\alpha_1} \exp\left(-\frac{E_{1 \in \alpha_1}}{k_B T}\right)\right) \times \cdots \times \left(\sum_{\alpha_N} \exp\left(-\frac{E_{N \in \alpha_N}}{k_B T}\right)\right)$$

On en déduit que dans ce cas :

$$Z = Z_{\text{particule}}^N$$

Loi de Boltzmann Pour un système constitué de N particules identiques et indépendantes en contact avec un thermostat à la température T , la probabilité qu'une particule soit dans l'état d'énergie E_α est :

$$\mathbb{P}_\alpha = \frac{1}{Z_{\text{particule}}} \exp\left(-\frac{E_\alpha}{k_B T}\right)$$

On appelle facteur de Boltzmann la quantité $\exp\left(-\frac{E_\alpha}{k_B T}\right)$.

2.c Énergie interne ; capacité thermique

Énergie interne On appelle énergie interne du système la quantité :

$$U = \langle E_{\text{système}} \rangle$$

Cas du système de N particules identiques et indépendantes Dans le cas de N particules identiques et indépendantes, on :

$$U = \sum_{\text{particules}} \langle E_{\text{particule}} \rangle = N \langle E_{\text{particule}} \rangle$$

où on a

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \mathbb{P}_{\alpha}$$

Expression de $\langle E_{\text{particule}} \rangle$ en fonction de β En posant $\beta = \frac{1}{k_B T}$, les expressions de $Z_{\text{particule}}$ et $\langle E_{\text{particule}} \rangle$ donnent :

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = -\frac{d}{d\beta} (\ln(Z_{\text{particule}}))$$

Capacité thermique à volume constant On définit la capacité thermique à volume constant par :

$$C_V = \left. \frac{\partial \langle E_{\text{système}} \rangle}{\partial T} \right|_V$$

Ainsi, lorsque V est constant (c'est-à-dire lorsqu'on ne change pas les valeurs de E_α), on a :

$$C_V = \frac{d \langle E_{\text{système}} \rangle}{dT}$$

2.d Fluctuations relatives de l'énergie

Fluctuation pour le système de N particules identiques et indépendantes Pour un système constitué de N particules identiques et indépendantes, la fluctuation relative de l'énergie

vaut :

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(E_{\text{système}})}{\langle E_{\text{système}} \rangle} &= \frac{\sqrt{\mathbb{V}(E_{\text{système}})}}{\langle E_{\text{système}} \rangle} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \times \frac{\sqrt{\langle E_{\text{particule}}^2 \rangle - \langle E_{\text{particule}} \rangle^2}}{\langle E_{\text{particule}} \rangle}\end{aligned}$$

donc les fluctuations relatives de l'énergie sont inversement proportionnelles à \sqrt{N} .

Généralisation De façon générale, les fluctuations de l'énergie d'un système macroscopique sont presque invisibles.

2.e Remarque : choix de l'origine de l'énergie potentielle

On considère C une constante indépendante de T et de α et on change l'origine des énergies potentielles :

$$E'_\alpha = E_\alpha + C$$

Influence sur la probabilité En factorisant, on trouve rapidement :

$$Z' = \exp\left(-\frac{C}{k_B T}\right) Z$$

puis on en déduit :

$$\mathbb{P}'_\alpha = \mathbb{P}_\alpha$$

Ouf! La probabilité n'est pas modifiée.

Influence sur la capacité thermique Dans ce cas, on a :

$$\langle E'_{\text{système}} \rangle = C + \langle E_{\text{système}} \rangle$$

donc on a bien $C'_V = C_V$, ce qui est tout aussi rassurant!

3 Système à deux niveaux d'énergie non dégénérés en équilibre avec un thermostat

3.a Exemples

Moment magnétique Un moment magnétique (un électron par exemple) dans un champ magnétique constitue un tel système.

Rappels sur le magnétisme On dit qu'un matériau est :

- paramagnétique lorsque le moment magnétique \vec{M} s'oriente selon \vec{B}_{ext} . On définit alors l'aimantation $\vec{M} = \frac{\delta \vec{M}}{\delta V}$ en A/m.
- Ferromagnétique lorsque le matériau conserve son orientation alors qu'on a cessé d'appliquer \vec{B}_{ext} .
- Diamagnétique lorsque le moment magnétique \vec{M} s'oriente selon $-\vec{B}_{\text{ext}}$.

Niveaux hyperfins du fondamental du césium Deux niveaux hyperfins du fondamental du césium conviennent (*cf* la définition d'une seconde).

Spin Pour un spin 1/2 dans le champ $B_0 \vec{u}_z$:

$$E_{\text{particule}} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -M_z B_0 = -(\pm \hbar B_0 \gamma)$$

avec $\gamma = \frac{-e}{2m_e}$ le facteur gyromagnétique de l'électron.

Exemple gardé dans la suite N particules indépendantes ayant pour niveaux d'énergie :

- $-\varepsilon$ (niveau 1) ;
- ε (niveau 2)

avec $\varepsilon > 0$.

3.b Populations ; énergie interne

Calcul de la fonction de partition pour une particule On a :

$$Z_{\text{particule}} = \exp\left(-\frac{-\varepsilon}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) = 2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$$

Probabilités On a donc :

$$\mathbb{P}_1 = \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{2 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

Populations On a ensuite :

$$\langle N_1 \rangle = N \mathbb{P}_1 \quad \text{et} \quad \langle N_2 \rangle = N \mathbb{P}_2$$

Énergie moyenne d'une particule Ainsi :

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = E_1 \mathbb{P}_1 + E_2 \mathbb{P}_2 = -\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$$

Énergie moyenne du système On en déduit finalement :

$$\langle E_{\text{système}} \rangle = -N\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$$

3.c Capacité thermique ; fluctuations de l'énergie

Calcul de la capacité thermique En dérivant par rapport à T , on obtient alors :

$$C_V = \frac{N\varepsilon^2}{k_B T^2 \cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

Fluctuations On a :

$$\mathbb{V}(E_{\text{particule}}) = \langle E_{\text{particule}}^2 \rangle - \langle E_{\text{particule}} \rangle^2 = \varepsilon^2 - \left(\varepsilon \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right) \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

donc on observe qu'on dispose de la relation :

$$C_V = \frac{\mathbb{V}(E_{\text{système}})}{k_B T^2}$$

C'est un cas particulier du théorème de fluctuation-dissipation.

Théorème de fluctuation-dissipation Vérifions que la relation précédente est vraie dans le cas général. On a :

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{d\langle E \rangle}{dT} \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^N \frac{E_i^2}{k_B T^2} e^{\frac{-E_i}{k_B T}} + \frac{-1}{Z^2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{E_i^2}{k_B T^2} e^{\frac{-E_i}{k_B T}} \right) \left(\sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-E_i}{k_B T}} \right) \\ &= \frac{1}{k_B T^2} \left[\sum_{i=1}^N E_i^2 \mathbb{P}_i - \left(\sum_{i=1}^N E_i \mathbb{P}_i \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{k_B T^2} [\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2] \end{aligned}$$

On en déduit la relation

$$\mathbb{V}(E_{\text{système}}) = C_V k_B T^2$$

La variance de l'énergie, qui caractérise les fluctuations d'un système à l'équilibre à la température T , est donc proportionnelle à la capacité thermique, qui caractérise les variations (*ie* la réponse) de l'énergie moyenne lors d'une modification de la température. On parle de théorème de fluctuation-réponse ou fluctuation-dissipation.

4 Particules identiques, indépendantes et discernables dans un puits de potentiel

4.a États d'une particule dans un puits infini (rappel)

Partie spatiale de la fonction d'onde pour l'état $n \in \mathbb{N}^*$ Elle vaut :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Énergie associée à l'état $n \in \mathbb{N}^*$ Elle vaut :

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

4.b Approximation continue

Approximation continue Lorsque $k_B T \gg$ l'écart d'énergie entre deux niveaux "en haut", on peut se placer dans l'approximation continue. La description usuelle est donc valable lorsque T est faible.

Fonction de partition dans l'approximation continue pour le puits de potentiel 1D Elle vaut alors, avec $k_n = \frac{n\pi}{L}$:

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k_n^2}{2mk_B T}\right) = \frac{L}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) dk$$

4.c Énergie moyenne

Calcul de l'énergie moyenne dans l'approximation continue On a donc :

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = \frac{\frac{L}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) dk}{\frac{L}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) dk}$$

En réalisant une IPP, on peut éliminer l'intégrale du bas pour finalement obtenir, dans la limite continue :

$$\langle E_{\text{particule}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Remarque Pour un gaz parfait monoatomique, on a $C_{V,m} = \frac{R}{2}$.

Remarque Classiquement, on a plutôt :

$$Z = \frac{1}{h} \int \int \exp\left(-\frac{E(x,p)}{k_B T}\right) dx dp$$

5 Capacité thermique des gaz et des solides

5.a Limite classique ; approximation continue ; théorème d'équipartition

Attention Le théorème d'équipartition est faux en mécanique quantique.

Limite classique C'est quand on peut négliger la quantification de l'énergie, c'est-à-dire lorsque $k_B T$ est grand devant les écarts d'énergie. Z s'écrit alors :

$$Z = \int e^{-\beta(x_1, \dots, p_{3N})} dx_1 \dots dx_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}$$

Remarque Il n'existe pas de limite classique intéressante pour le système à deux niveaux.

Théorème d'équipartition Dans la limite classique, si l'énergie s'écrit $aX^2 + b$ où X vaut x_i ou p_i , et a et b sont indépendants de X , alors :

$$\langle aX^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}$$

Pour le démontrer, intégrer par parties en faisant sortir tout sauf X de la dernière intégrale.

5.b Distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses (complément)

Loi de Maxwell-Boltzmann La loi de Maxwell-Boltzmann décrit un gaz parfait avec N molécules sans interactions. Elle donne la probabilité de mesure une particule avec une vitesse entre v_x et $v_x + dv_x$, v_y et $v_y + dv_y$ et v_z et $v_z + dv_z$ par :

$$dp_{v_x, v_y, v_z} = N \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv_x dv_y dv_z$$

Par conséquent, la probabilité de mesurer une particule avec une norme entre v et $v + dv$ est

$$dp_v = N \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv$$

(coordonnées sphériques pour la vitesse). Cela permet d'obtenir un ordre de grandeur pour u : $u \approx 500 \text{ m.s}^{-1}$. On a donc $v_{\text{son}} < u < v_{\text{libération}}$.

5.c Capacité thermique des gaz parfaits monoatomiques

Capacité thermique des gaz parfaits monoatomiques Pour un gaz parfait monoatomique, on a 3 degrés de liberté, donc

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m}$$

Or, d'après le théorème d'équipartition, on a :

$$\overline{\left(\frac{p_x^2}{2m}\right)} = \frac{k_B T}{2}$$

donc

$$\overline{E} = \frac{3}{2}k_B T$$

puis pour un gaz parfait à N particules :

$$\overline{E_\Sigma} = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}nRT$$

On en déduit que $C_{v,m} = \frac{3}{2}R$ si $1 \ll T \ll 10^4$.

5.d Capacité thermique des gaz parfaits diatomiques

Capacité thermique des gaz parfaits diatomiques De même, pour un gaz parfait diatomique, on a suivant les paliers :

- 3 degrés de translation et alors $C_{v,m} = \frac{3}{2}R$;
- 3 degrés de translation et 2 degrés de rotation et alors $C_{v,m} = \frac{5}{2}R$;
- 3 de degrés de rotation, 2 degrés de rotation propre et 2 degrés de translation, et alors $C_{v,m} = \frac{7}{2}R$

5.e Modèle classique des solides ; loi de Dulong et Petit

Modèle classique des solides Pour un solide, on considère que chaque atome est relié à une position d'équilibre stable par un ressort. Ainsi, on a :

$$E_{\text{atome}} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

donc d'après le théorème d'équipartition (on est dans la limite classique), on a :

$$\langle E_{\text{système}} \rangle = 6N \times \frac{1}{2}k_B T = 3Nk_B T$$

Loi de Dulong et Petit On en déduit la loi de Dulong et Petit : dans la limite classique pour un solide isolant et on non magnétique, on a :

$$C_{V,m} = 3R$$

Limites Expérimentalement, la capacité thermique molaire des solides s'effondre à basse température, d'où la nécessité d'un modèle quantique. Cependant, pour la plupart des cristaux (sauf le diamant), être au-dessus de $T = 300$ K suffit pour être dans la limite continue.

5.f Modèle quantique d'Einstein (1907)

Résultat admis sur l'oscillateur harmonique quantique On admet que l'équation

$$E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + \frac{1}{2}kx^2\varphi$$

a pour spectre

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Fonction de partition pour une particule On a :

$$Z_{OH1D} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega\beta\right) = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}$$

Énergie moyenne d'une particule On en déduit, en dérivant par rapport à β :

$$\langle E_{OH1D} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{1}{\tanh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}$$

Cela est homogène.

Énergie moyenne d'un solide Pour N particules, comme on a 3 degrés de liberté, on obtient :

$$\langle E_{solide} \rangle = \frac{3}{2} \frac{N\hbar\omega}{\tanh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right)}$$

Capacité thermique d'un solide On en déduit :

$$C_V = 3Nk_B \times \left(\frac{\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}{\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)} \right)^2$$

Cela est homogène, et lorsque T tend vers $+\infty$, on retrouve la loi de Dulong et Petit.

Température d'Einstein On peut définir la température d'Einstein :

$$\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k_B}$$

pour laquelle se produit une inversion nette de la courbure de la courbe de C_V .

Retour sur les gaz parfaits diatomiques Dans ce cas, $\hbar\omega$ est compris entre 0,1 eV et 1 eV (c'est-à-dire l'énergie d'un photon dans l'infrarouge). On a alors $\theta_E = 10^3$ K en ordre de grandeur, avec $\theta_E = \theta_{vib}$.

5.g Résumé : activation ou gel des degrés de liberté

Cas $T \ll \theta_E$ Si $T \ll \theta_E$, le système reste dans le fondamental. Dans ce cas, on a :

$$\langle E_{OH1D} \rangle \approx \frac{\hbar\omega}{2} \text{ et } C_V \rightarrow 0$$

Cas $T \gg \theta_E$ Si $T \gg \theta_E$, on peut utiliser le théorème d'équipartition.

Remarque On a un degré de liberté "électronique" et "nucléaire" à $T = 300$ K.

Neuvième partie

Électrochimie

Chapitre 33

Courbes intensité-potentiel

Table des matières

1	Cinétique des réactions d'oxydo-réduction	293
1.a	Vitesse de réaction et intensité électrique ; conventions	293
1.b	Facteurs influençant la cinétique aux électrodes	294
1.c	Courbes intensité-potentiel ; lien avec la formule de Nernst	294
1.d	Relevé expérimental de courbes intensité-potentiel	294
2	Allure des courbes intensité-potentiel	295
2.a	Deux mécanismes	295
2.b	Systèmes rapides et systèmes lents ; cas des électrodes de référence	295
2.c	Existence éventuelle de paliers de diffusion	295
2.d	Possibilité de vagues successives	296
2.e	Limitations par le solvant	296
3	Utilisation des courbes intensité-potentiel	296
3.a	Potentiel mixte	296
3.b	Étude des piles : cinétique et capacité	296
3.c	Étude cinétique des électrolyseurs	296
3.d	Charge et décharge d'un accumulateur	296

1 Cinétique des réactions d'oxydo-réduction

1.a Vitesse de réaction et intensité électrique ; conventions

Demi-pile On appelle demi-pile l'ensemble formé :

- d'un conducteur solide qu'on appelle l'électrode ;
- d'une solution comportant un couple oxydant-réducteur ;
- d'un pont salin.

Exemples Par exemple, on a :

- une électrode de platine avec une solution d'ions Fe^{2+} et Fe^{3+} ;
- une électrode de cuivre avec une solution contenant des ions Cu^{2+} et SO_4^{2-} .

Convention d'orientation du courant pour une demi-pile Le courant i est orienté de l'électrode vers la solution. Ainsi, si :

- $i > 0$, l'électrode est une anode, le lieu d'une oxydation ;
- $i < 0$, l'électrode est une cathode, le lieu d'une réduction.

Vitesse de réaction et intensité Pour une réaction d'oxydoréduction, à coefficients stœchiométriques fixés, on note ξ l'avancement et p le nombre d'électrons échangés par réaction. On a alors

$$|I| = pF \frac{d\xi}{dt}$$

où $F = N_A e$ est la constante de Faraday. Mesurer l'intensité donne donc accès à la vitesse de réaction.

1.b Facteurs influençant la cinétique aux électrodes

Facteurs cinétiques Au-delà de ceux habituels (température, surface de contact, agitation, concentrations, catalyseurs, lumière), on considère le temps de transfert de charge entre l'électrode et le solvant (dépend de la différence de potentiel entre les deux) et le transfert de matière (le solvant amène les ions à l'électrode). Ce mécanisme se fait par diffusion selon la loi de Fick

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}}([X])$$

et par migration (mise en mouvement des charges car création d'un champ électrique).

1.c Courbes intensité-potentiel ; lien avec la formule de Nernst

Courbes intensité-potentiel On trace le courant i traversant l'électrode en fonction du potentiel E , qui est la tension que l'on mesurerait par rapport à l'ESH électrode standard hydrogène ($E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0$ à toute température).

Allure des courbes En oxydation on a une courbe croissante d'intensité positive pour $E > E_{\text{th}}$. En réduction on a une courbe croissante d'intensité négative pour $E < E_{\text{th}}$ (nulle en E_{th} , électrode à l'équilibre, E_{th} est donné par la formule de Nernst).

1.d Relevé expérimental de courbes intensité-potentiel

Montage à trois électrodes On le mesure expérimentalement avec trois électrodes, celle de travail mesuré, relié d'une part par un voltmètre à une de référence, et d'autre part à une contre-électrode via un ampèremètre.

2 Allure des courbes intensité-potentiel

2.a Deux mécanismes

Transfert de charge Migration des électrons par le pont salin.

Transfert de matière Consommation ou création de l'électrode.

2.b Systèmes rapides et systèmes lents ; cas des électrodes de référence

Système électrochimique On appelle système électrochimique l'ensemble :

- couple oxydant-réducteur ;
- une électrode ;
- un solvant.

Système rapide Un système électrochimique est dit rapide lorsque sa courbe intensité-potentiel présente une franche coupure avec l'axe des abscisses.

Exemple de système rapide L'électrode de platine avec une solution d'ions Fe^{2+} et Fe^{3+} (et des anions) est un système électrochimique rapide.

Système lent A l'inverse, pour un système électrochimique lent, la courbe intensité-potentiel présente un plateau pour $i \approx 0$. On ne sait donc pas précisément où se situe le potentiel de Nernst.

Surtension (ou surpotentiel) Pour un système lent, on définit la surtension par :

$$\eta = E - E_{\text{Nernst}}$$

où le E correspond à une démarcation franche de i avec l'axe des abscisses. Cette grandeur est algébrique car elle permet de définir :

- η_a la surtension seuil en oxydation ;
- η_c la surtension seuil en réduction, aussi dite surtension cathodique. Cette dernière est négative.

En général, on a $\eta_a \approx 0,1V$.

Cas des électrodes de référence Pour nos électrodes de référence, il faut donc choisir un système électrochimique rapide pour avoir E très proche de $E_{\text{ref}} = E_{\text{Nernst}}$ lorsque i est faible.

2.c Existence éventuelle de paliers de diffusion

Effet du transfert de matière Palier de transmission au-delà et en deçà de E_{th} , car il faut pouvoir amener l'ion suffisamment rapidement à l'électrode. Ces paliers peuvent être à $i = 0$ en l'absence d'un des membres du couple, ou non présent si l'élément en question est l'électrode ou le solvant (pas besoin de l'amener). Dans le deuxième cas on parle de mur du solvant, on ne peut pas sonder au-delà.

On peut modéliser ces plateaux par un brassage parfait/concentration homogène loin de l'électrode et un gradient de concentration dans une couche limite au voisinage de celle-ci (modèle conducto-convectif). On trouve ainsi

$$i_{\max} = \text{stœchio} \times S \times D \times \frac{[X]_{\infty}}{e} \mathcal{F}$$

avec S la surface et D un coefficient de diffusion.

2.d Possibilité de vagues successives

Possibilité de vagues successives Dans une solution où l'on a plusieurs couples oxydant réducteurs sur la même électrode, la courbe intensité-potentiel est la somme des courbes intensité-potentiel des différents couples.

2.e Limitations par le solvant

3 Utilisation des courbes intensité-potentiel

3.a Potentiel mixte

Utilisation des courbes Si l'on a deux couples sur une électrode, son potentiel est celle qui vérifie $i_a = -i_c$ car les électrons ne sont pas stables en solution aqueuse. Sur deux électrodes, les intensités de l'une et de l'autre sont opposées et les potentiels sont libres. On peut tracer les courbes caractéristiques $u - i$ en regardant comment l'écart entre les point de fonctionnement sur la courbe anode à $+I$ et cathode à $-I$ évoluent avec I . Cela permet de déterminer le sens spontané d'une réaction.

Réciproquement, par électrolyse on impose l'intensité et donc les points de fonctionnements

3.b Étude des piles : cinétique et capacité

Capacité d'une pile C'est la charge que peut débiter une pile sur l'ensemble de sa durée de vie. Elle s'exprime souvent en mA.h. On rappelle que 1 mA.h = 3,6 C.

3.c Étude cinétique des électrolyseurs

Principe d'une électrolyse Le sens du courant est imposé par un générateur extérieur. La circulation des électrons se fait donc de manière forcée et non plus naturelle comme dans le cas des piles.

3.d Charge et décharge d'un accumulateur

Vocabulaire Un accumulateur est ce que l'on appelle communément une pile rechargeable.

Chapitre 34

Corrosion humide du fer

Table des matières

1	Aspect thermodynamique	297
1.a	Diagramme E-pH	297
1.b	Enthalpie libre électrochimique $\Delta_{1/2}G^\circ$	298
1.c	$\Delta_r G^\circ$, $\Delta_r S^\circ$, $\Delta_r H^\circ$, e° et E°	298
1.d	Travail électrique	300
2	Aspect cinétique : cas de la corrosion uniforme	301
2.a	Potentiel et intensité de corrosion	301
2.b	Une eau aérée accélère la corrosion	301
3	Aspect cinétique : cas de la corrosion différentielle	301
3.a	Pile de concentration	302
3.b	Pile d'Evans; aération différentielle	302
3.c	Piles avec des électrodes de natures différentes	303
4	Protection contre la corrosion	303
4.a	Acier inoxydable	303
4.b	Traitement de surface	303
4.c	Protection électrochimique	303
4.d	Passivation	303

1 Aspect thermodynamique

1.a Diagramme E-pH

Rappel important Pour utiliser la formule de Nernst, on écrit avant la demi-équation, que l'on équilibre avec des H^+ .

Rappel : diagrammes potentiel-pH On place les espèces par nombre d'oxydation croissant avec E et basicité croissante avec le pH . Pour les solides, il s'agit de diagramme d'existence et pour les espèces solubles des diagrammes de prédominance. On distingue le domaine d'immunité,

celui du solide, le domaine de passivation (oxydes ou hydroxydes solides qui forment une couche protectrice ralentissant la réaction) et le domaine de corrosion (oxyde et hydroxydes solubles).

Rappel : tracé du diagramme Avant tout, on liste les différents nombres d'oxydation. Ensuite, on détermine les frontières verticales avec l'apparition des précipités. Puis on détermine les autres frontières en utilisant la formule de Nernst et la continuité du potentiel.

Rappel : lecture du diagramme On utilise la formule de Nernst et les valeurs sur la courbe.

Rappel : conventions de tracé On dispose de plusieurs conventions pour les espaces en solutions :

1. pour X soluble, on prend $[X] = c_{\text{tracé}}$ à la frontière ;
2. on prend une somme des concentrations en espèces égale à la concentration de tracé ;
3. on prend une somme de concentrations en atomes égale à la concentration de tracé.

1.b Enthalpie libre électrochimique $\Delta_{1/2}G^\circ$

$\Delta_{1/2}G^\circ$ Pour une demi-équation d'oxydoréduction $\text{Ox} + ne^- = \text{Red}$, on définit l'enthalpie libre électrochimique :

$$\Delta_{1/2}G^\circ = -nFE^\circ$$

comme dans la formule de Nernst.

Exemple Par exemple, pour $\text{Cu}^{2+} + 2e^- = \text{Cu}$, on a donc :

$$\Delta_{1/2}G^\circ = -2FE_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ$$

1.c $\Delta_r G^\circ$, $\Delta_r S^\circ$, $\Delta_r H^\circ$, e° et E°

Rappel : enthalpie libre On rappelle que $G = H - TS$ est l'enthalpie libre : c'est une fonction d'état extensive, homogène à une énergie.

Rappel : opérateur de Lewis Une fois l'équation de la réaction (*ie* les coefficients stœchiométriques) choisie, on définit, pour toute grandeur extensive du système :

$$\Delta_r X = \left. \frac{\partial X}{\partial \xi} \right|_{T,P}$$

On a alors en particulier la relation :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ$$

Rappel : obtention de $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ à partir de $\Delta_r G^\circ$ On rappelle que l'on dispose des formules :

$$\frac{d}{dT}(\Delta_r G^\circ) = -\Delta_r S^\circ \quad \text{et} \quad \frac{d}{dT}\left(\frac{\Delta_r G^\circ}{T}\right) = -\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2}$$

Rappel : activités, quotient de réaction, constante de réaction standard On rappelle la relation fondamentale :

$$\mu_i = \mu_i^\circ + RT \ln(a_i)$$

qui nous donne :

$$\Delta_r G = \sum_i \mu_i \nu_i = \sum_i \mu_i^\circ \nu_i + RT \ln(Q) = \Delta_r G^\circ + RT \ln(Q)$$

Or, à l'équilibre, $Q = K^\circ$ et $\Delta_r G = 0$ donc on en déduit :

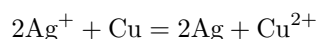
$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln(K^\circ)$$

ou bien encore

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right)$$

Attention ! Dans la formule de Nernst, il y a un log (décimal) alors que dans les relations de thermochimie, ce sont des ln (naturels).

Exemple 1 On considère la réaction



Cette réaction provient des deux demi-équations suivantes :

- $\text{Cu}^{2+} + 2e^- = \text{Cu}$ (1) ;
- $\text{Ag}^+ + e^- = \text{Ag}$ (2).

La réaction est considérée s'écrit $-1 \times (1) + 2 \times (2)$. Ainsi, l'enthalpie standard de réaction vaut :

$$\Delta_r G^\circ = 2\Delta_{1/2} G^\circ(2) - \Delta_{1/2} G^\circ(1) = 2(-FE_{\text{Ag}^+/\text{Ag}}^\circ) - (-2FE_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ) = -2F(E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}}^\circ - E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ)$$

On peut alors exprimer K° en fonction des E° :

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(\frac{2F}{RT}(E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}}^\circ - E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ)\right)$$

Or, on a $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ = 0,34 \text{ V}$ et $E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}}^\circ = 0,80 \text{ V}$ donc la réaction est très avancée.

Remarque De façon générale, si les potentiels standards sont distants d'au moins 0,25 V, la réaction est très avancée.

Variante "sup" de l'exemple 1 On aurait pu calculer cette constante de réaction avec les outils de sup en écrivant la formule de Nernst pour les deux couples, en utilisant l'égalité des potentiels de Nernst à l'équilibre et en utilisant la loi d'action des masses. On pourra vérifier que'on obtient exactement le même résultat.

Exemple 2 On note :

- E_a° le potentiel standard du couple Fe^{3+}/Fe ;
- E_b° le potentiel standard du couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$;
- E_c° le potentiel standard du couple Fe^{2+}/Fe .

On cherche une relation entre ces trois potentiels standards. Or :

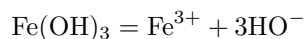
- pour la demi-équation $a : \text{Fe}^{3+} + 3e^- = \text{Fe}$, $\Delta_{1/2}G^\circ(a) = -3FE_a^\circ$;
- pour la demi-équation $b : \text{Fe}^{3+} + e^- = \text{Fe}^{2+}$, $\Delta_{1/2}G^\circ(b) = -FE_b^\circ$;
- pour la demi-équation $c : \text{Fe}^{2+} + 2e^- = \text{Fe}$, $\Delta_{1/2}G^\circ(c) = -2FE_c^\circ$.

Comme on a $c = a - b$ (en termes de demi-équations), on en déduit :

$$2E_c^\circ = -E_b^\circ + 3E_a^\circ$$

Variante "sup" de l'exemple 2 Avec les outils de sup, on écrit les 3 formules de Nernst et on utilise l'égalité des potentiels de Nernst à l'équilibre dans une solution où barbotent les 3 couples.

Exemple 3 On donne E° le potentiel standard pour le couple Fe^{3+}/Fe et on note E'° le potentiel standard pour le couple $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}$. On note K_s le produit de solubilité de la réaction R :



On souhaite exprimer E'° . On dispose des équations :

- a : $\text{Fe}^{3+} + 3e^- = \text{Fe}$;
- b : $3\text{H}^+ + \text{Fe}(\text{OH})_3 + 3e^- = \text{Fe} + 3\text{H}_2\text{O}$;
- c : $\text{H}_2\text{O} = \text{H}^+ + \text{HO}^-$.

Or, la réaction R s'écrit $\text{R} = \text{b} - \text{a} + 3\text{c}$. En passant à l'enthalpie libre de réaction standard, on en déduit :

$$-RT \ln(K_s) = -3FE^\circ - (-3FE'^\circ) - 3RT \ln(K_e)$$

Variante "sup" de l'exemple 3 Appliquer la formule de Nernst, la loi d'action des masses et l'égalité des potentiels de Nernst à l'équilibre.

e et e° Si on choisit de mettre e dirigé d'une électrode de cuivre baignant dans une solution de ses ions et vers une électrode d'argent baignant dans une solution de ses ions, on a alors :

$$e = E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}} - E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}} \quad \text{et} \quad e^\circ = E_{\text{Ag}^+/\text{Ag}}^\circ - E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ$$

1.d Travail électrique

Remarque C'est un exemple de "travail utile".

Travail électrique et thermodynamique On travaille sur une pile Argent/Cuivre. On considère le système {pile} auquel on applique le premier principe. Les variations d'énergie mécanique sont négligeables donc :

$$U_F - U_I = W_{\text{pression}} + Q + W_{\text{électrique}}$$

Si on suppose la réaction isotherme à la température T_0 et isobare à la pression P_0 , on a :

$$W_{\text{pression}} = -P_0(V_F - V_I)$$

puis le deuxième principe s'écrit :

$$S_F - S_I = \frac{Q}{T_0} + S_{\text{créée}}$$

Alors :

$$-W_{\text{électrique}} = -P_0\Delta V + T_0\Delta V - T_0S_{\text{créée}} = -\Delta G - T_0S_{\text{créée}}$$

donc on en déduit $-W_{\text{électrique}} < -\Delta G$

Remarque : critère d'évolution On retrouve le critère d'évolution : pour un système fermé, lors d'une transformation isotherme et isobare sans travail utile, G diminue.

Travail électrique On a aussi en convention générateur, un travail électrique reçu qui vaut :

$$\delta W_{\text{électrique}} = -u idt$$

2 Aspect cinétique : cas de la corrosion uniforme

2.a Potentiel et intensité de corrosion

Intensité de corrosion Si on abandonne un morceau de fer dans de l'eau, on a $i_{\text{tot}} = 0$ car l'électrode n'est reliée à rien.

2.b Une eau aérée accélère la corrosion

Effet de l'aération de l'eau Ajouter $O_{2(\text{aq})}$ permet :

- d'augmenter le potentiel de corrosion ;
- d'augmenter le courant de corrosion

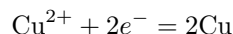
donc accélère la corrosion.

3 Aspect cinétique : cas de la corrosion différentielle

Dans ce cas, certaines zones du métal sont des anodes et d'autres sont des cathodes.

3.a Pile de concentration

Exemple 1 On considère deux électrodes de cuivre. Celle de gauche trempe dans une solution d'ions Cu^{2+} de concentration $[\text{Cu}^{2+}]_g = 0,01 \text{ mol/L}$ et celle de droite trempe dans une solution d'ions Cu^{2+} de concentration $[\text{Cu}^{2+}]_d = 0,1 \text{ mol/L}$. Dans les deux cas, les demi-équations sont :



En appliquant la formule de Nernst aux deux systèmes électrochimiques, on obtient successivement :

$$E_g = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ + \frac{0,06}{2} \log([\text{Cu}^{2+}]_g)$$

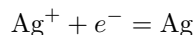
et

$$E_d = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ + \frac{0,06}{2} \log([\text{Cu}^{2+}]_d)$$

donc dans ce cas on a :

$$e = E_g - E_d = \frac{0,06}{2} \log(10^{-1}) = -0,03 \text{ V}$$

Exemple 2 On considère deux électrodes d'argent qui ne sont pas reliées par un fil. Celle de gauche trempe dans une solution de sulfate d'argent (2Ag^+ , SO_4^{2-}) à la concentration c_0 . L'électrode de droite baigne dans une solution de chlorure de potassium (K^+ , Cl^-) à la concentration c_0 . On verse dans le bécher de droite une goutte de nitrate d'argent qui contribue à la formation d'un précipité d'AgCl. On donne le produit de solubilité de la réaction de dissociation du précipité K_s . On souhaite déterminer e la force électromotrice de la pile, prise de l'électrode de droite vers celle de gauche *a priori*. Pour la réaction



qui se déroule dans le bécher de droite, la formule de Nernst donne :

$$E_g = E^\circ + \frac{0,06}{1} \log(2c_0)$$

Le fait qu'une précipité apparaisse dans le bécher de droite fournit :

$$K_s = [\text{Ag}^+]_d [\text{Cl}^-]$$

On en déduit :

$$e = E_g - E_d = 0,06 \log(2c_0) - 0,06 \log\left(\frac{K_s}{c_0}\right) = 0,06 \log\left(\frac{2c_0^2}{K_s}\right)$$

3.b Pile d'Evans ; aération différentielle

Aération différentielle Si l'on place deux électrodes de fer dans un bécher oxygéné et un désoxygéné reliés par un pont salin, il y a oxydation de celle dans le bécher désoxygéné. Donc une plaque de fer dans de l'eau de mer rouillera majoritairement sur les endroits moins oxygénés, c'est-à-dire dans les trous, ce qui la mène à se percer rapidement.

3.c Piles avec des électrodes de natures différentes

Corrosion Électrodes de fer et de cuivre reliées, oxydation du fer, tandis qu'avec fer-zinc, c'est le zinc qui s'oxyde.

4 Protection contre la corrosion

4.a Acier inoxydable

Acier L'acier est un alliage de fer et de carbone, comportant entre 0,15% et 0,85% de carbone. Le carbone vient se glisser entre les différents noyaux de fer.

Acier inoxydable L'acier inoxydable est de l'acier recouvert d'une couche de Cr_2O_3 . Cette dernière couche est imperméable et protège donc l'acier.

Passivation de l'acier inoxydable En cas de rayure qui exposerait l'acier, une couche de Cr_2O_3 se reforme au-dessus de l'acier. Cette passivation permet à l'acier inoxydable de s'auto-protéger de la corrosion.

4.b Traitement de surface

Anode sacrificielle Pour protéger une coque en acier (pour un bateau par exemple) de la corrosion due à l'eau ou à l'air, on peut apposer un morceau de zinc sur la coque, dit "anode sacrificielle", car le contact avec le zinc diminue le potentiel de corrosion du fer et ralentit donc son oxydation et sa corrosion. Il faut alors mettre beaucoup d'anodes sacrificielles et les remplacer régulièrement, ce qui peut coûter cher.

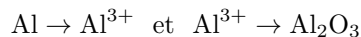
Peinture On peut aussi peindre la coque avec une peinture qui protège de la corrosion. L'inconvénient est qu'une telle peinture peut provoquer la formation d'algues ou bien libérer des substances toxiques dans l'eau.

4.c Protection électrochimique

Protection anodique par courant imposé On relie la conduite à protéger à une autre électrode, les deux étant reliées par un générateur de courant. Le tout baigne dans un électrolyte. Alors, le fait d'imposer un courant avec un générateur permet de limiter la corrosion sur la conduite à protéger et consomme plutôt l'autre électrode. Cette technique peut s'avérer coûteuse en énergie.

4.d Passivation

Exemple de l'aluminium On fait tremper une électrode d'aluminium dans de l'eau. La courbe intensité-potentiel présente une bosse avec les réactions :



La bosse se situe vers Al^{3+} . Alors, Al_2O_3 est imperméable et bloque l'oxydation de Al : le solide se protège en créant une couche imperméable à sa surface, c'est la passivation.

Dixième partie

Chimie de sup

Chapitre 35

Cinétique chimique

A COMPLETER

Table des matières

1	307
1.a	307
1.b	307
2	307
2.a	307
2.b	307

1

1.a

1.b

2

2.a

2.b

Chapitre 36

Solutions aqueuses

A COMPLETER

Table des matières

1	309
1.a	309
1.b	309
2	309
2.a	309
2.b	309

1

1.a

1.b

2

2.a

2.b

Chapitre 37

Architecture de la matière

A COMPLETER

Table des matières

1	311
1.a	311
1.b	311
2	311
2.a	311
2.b	311

1

1.a

1.b

2

2.a

2.b

Chapitre 38

Cristallographie

Table des matières

1	Définitions générales	313
2	Structures compactes	314
2.a	Cubique à faces centrées	314
3	Structures usuelles	315
3.a	Diamant	315
3.b	Glace type diamant	316
3.c	Structure type CsCl	316
3.d	Structure type NaCl	317
3.e	Structure type ZnS, dite blende	317
3.f	Structure type CaF_2 : type AB_2	318

1 Définitions générales

Cristal parfait Une cristal parfait est un ensemble de particules empilées régulièrement dans l'espace. il forme une structure périodique sans défaut de taille infinie.

Réseau Entité géométrique définie par un ensemble infini de points obtenus à partir d'un point choisi arbitrairement comme origine et par translations d'un vecteur

Nœud Un nœud est un point du réseau obtenu par translation de ce vecteur.

Motif Un motif est la plus petite entité discernable qui se répète périodiquement. A chaque nœud est associé un motif. Un cristal est la donné d'un réseau et d'un motif.

Maille élémentaire Une maille élémentaire correspond à la portion de l'espace de volume minimal qui assure le pavage de l'espace et redonne le réseau par translation.

Nombre de nœuds par maille On partage les nœuds entre les différentes mailles auxquelles ils appartiennent.

Population La population est le nombre de motifs par maille. Elle correspond donc au nombre de nœuds par maille.

Masse volumique d'un cristal Elle vérifie :

$$\rho = \frac{ZM}{N_A V}$$

où Z est le nombre de motifs par maille; M est la masse molaire du motif; V est le volume de la maille et N_A est le nombre d'Avogadro.

Coordinance La coordinance d'une entité A par rapport à une autre entité B est le nombre de plus proches voisins de A qui sont des entités de type B . On peut la noter $\frac{A}{B}$

Compacité La compacité C d'un solide cristallin est la fraction de volume occupée par la matière dans la maille en considérant les atomes et les ions comme des sphères dures.

2 Structures compactes

2.a Cubique à faces centrées

Description Un atome à chaque sommet et un atome au centre de chaque face. Il n'y en a pas au milieu du cube. Elle correspond à l'empilement ABC ABC.

Population La population vaut

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

Coordinance Elle vaut 12 (trouvée pour n'importe quel atome).

Relation entre a et R Les atomes se touchent sur la diagonale d'une face donc

$$4R = a\sqrt{2}$$

Compacité En utilisant la relation précédente et la population de 4, on trouve

$$C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$$

C'est une structure compacte : c'est la meilleure compacité que l'on puisse obtenir.

Masse volumique La masse volumique vaut alors :

$$\rho = \frac{4M}{N_A a^3}$$

Sites octaédriques Il y en a un sur chaque arête et un au centre soit

$$12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4$$

par maille. Il y en a donc autant que d'atomes constituant le réseau. Ils occupent les milieux des arêtes et le centre du cube. Au centre du cube, on a la relation :

$$2R_O + 2R = a$$

Par conséquent, on a :

$$R_O = (\sqrt{2} - 1)R \approx 0,414R$$

Sites tétraédriques Il y en a un dans chacun des sous-cubes de côté $a/2$ de la structure cubique à faces centrées, donc 8. Il y en a donc deux fois plus que de sites O , et donc deux fois plus que de nœuds dans le réseau hôte. Sur la demi-diagonale d'un petit cube, on obtient :

$$R_T + R = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$

Avec la relation générale entre a et R , on en déduit que

$$R_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) R \approx 0,225R$$

Les sites T sont donc plus petits que les sites O .

Structure hexagonale compacte A COMPLETER

Compacité On obtient aussi 0,74.

3 Structures usuelles

3.a Diamant

Description Les atomes de carbone occupent une structure cubique à faces centrées avec occupation de la moitié des sites T en alternance.

Population On a donc une population de

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = 8$$

Coordinnence Elle vaut 4, obtenue sur un atome d'un site T .

Relation entre a et R Sur la demi-diagonale d'un petit cube, on a :

$$2R = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$

Compacité La compacité vaut alors :

$$C = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} \approx 0,34$$

C'est une structure non compacte.

3.b Glace type diamant

Description Les atomes d'oxygène occupent une structure identique à celle du diamant.

3.c Structure type CsCl

Description Les ions Cl^- occupent un réseau cubique simple et les ions Cs^+ occupent le centre du cube.

Coordinences Les coordinences de Cs^+ par rapport à Cl^- et de Cl^- par rapport à Cs^+ valent toutes les deux 8. Les coordinences de Cs^+ par rapport à Cs^+ et de Cl^- par rapport à Cl^- valent toutes les deux 6.

Populations Dans chaque maille, il y a un ion Cl^- et un ion Cs^+ .

Masse volumique Elle vaut

$$\rho = \frac{M_{\text{Cs}} + M_{\text{Cl}}}{N_A a^3}$$

Relation entre les paramètres Le long de la diagonale du cube :

$$2r_+ + 2r_- = a\sqrt{3}$$

Condition de non contact anion/anion Le long d'une arête :

$$a > 2r_-$$

Condition d'existence de la structure Nécessairement, on doit avoir :

$$x > \sqrt{3} - 1 \approx 0,732$$

où $x = \frac{r_+}{r_-}$

Compacité Elle vaut alors :

$$C = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left((1+x)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} \right)$$

3.d Structure type NaCl

Description Les ions Cl^- occupent un réseau cubique à faces centrées et les ions Na^+ occupent un réseau cubique à faces centrées décalé (ou bien d'un autre point de vue tous les sites octaédriques).

Coordinences Les coordinences de Na^+ par rapport à Cl^- et de Cl^- par rapport à Na^+ valent toutes les deux 6. Les coordinences de Na^+ par rapport à Na^+ et de Cl^- par rapport à Cl^- valent toutes les deux 12.

Populations Dans chaque maille, il y a 4 ions Cl^- et 4 ions Na^+ .

Masse volumique Elle vaut

$$\rho = 4 \frac{M_{\text{Na}} + M_{\text{Cl}}}{N_A a^3}$$

Relation entre les paramètres Le long de la l'arête du cube :

$$2r_+ + 2r_- = a$$

Condition de non contact anion/anion Le long d'une diagonale d'une face :

$$a\sqrt{2} > 4r_-$$

Condition d'existence de la structure Nécessairement, on doit avoir :

$$x > \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$$

De plus, on doit aussi avoir $x < \sqrt{3} - 1$, sinon la structure type CsCl serait plus optimisée.

Compacité Elle vaut alors :

$$C = \frac{2\pi}{3} \left((1+x)^{-3} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-3} \right)$$

3.e Structure type ZnS, dite blende

Description Les ions S^{2-} occupent un réseau cubique à faces centrées et les ions Zn^{2+} occupent la moitié des sites tétraédriques en alternance.

Coordinences Les coordinences de Zn^{2+} par rapport à S^{2-} et de S^{2-} par rapport à Zn^{2+} valent toutes les deux 4. Les coordinences de Zn^{2+} par rapport à Zn^{2+} et de S^{2-} par rapport à S^{2-} valent toutes les deux 12.

Populations Dans chaque maille, il y a 4 ions S^{2-} et 4 ions Zn^{2+} .

Masse volumique Elle vaut

$$\rho = 4 \frac{M_{\text{Zn}} + M_{\text{S}}}{N_A a^3}$$

Relation entre les paramètres Le long de la demi-diagonale d'un petit cube :

$$r_+ + r_- = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Condition de non contact anion/anion Le long de la diagonale d'une face :

$$a\sqrt{2} > 4r_-$$

Condition d'existence de la structure Nécessairement, on doit avoir :

$$x > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \approx 0,225$$

De plus, on doit aussi avoir $x < \sqrt{3} - 1$, sinon la structure type NaCl serait plus optimisée.

Compacité Elle vaut alors :

$$C = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \left((1+x)^{-3} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-3} \right)$$

3.f Structure type CaF_2 : type AB_2

Description Association de 8 petits cubes simples d'anions. Occupation alternée de la moitié des sites cubiques. Ce n'est pas une structure type ZnS car il n'y a pas d'atomes au milieu du cube ni au milieu des arêtes dans ZnS.

Deuxième description On peut considérer que le réseau hôte est le réseau cationique de type CFC ont les ions F^- occupent tous les sites tétraédriques.

Coordinences La coordinence de Ca^{2+} par rapport à F^- vaut 8. La coordinence de F^- par rapport à Ca^{2+} vaut 4. La coordinence de Ca^{2+} par rapport à Ca^{2+} vaut 12. La coordinence de F^- par rapport à F^- vaut 6.

populations Il y a en propre dans une maille 8 ions F^- et 4 ions Ca^{2+} .

Masse volumique Elle vaut :

$$\rho = 4 \frac{2M_{\text{F}} + M_{\text{Cl}}}{N_A a^3}$$