

Работа 7. Решение краевых задач

В данной работе изучается линейная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a, b]$

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad (1)$$

с граничными условиями на краях

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B \end{aligned} \quad (2)$$

Слово линейная относится к неизвестной функции y и ее производным как в самом уравнении (1), так и в граничных условиях (2).

Если мы уже знаем, как решать задачу Коши, то можно преобразовать краевую задачу к задаче Коши, и решать известными методами. Так же можно использовать определение производной для построения решения.

А) метод редукции

Ищем решение краевой задачи в виде линейной комбинации двух непрерывных функций

$$y(x) = v(x) + Cu(x) \quad (2)$$

Для каждой из функций $u(x)$ и $v(x)$ на основании уравнения (1) и левого граничного условия (2) составляются и решаются 2 задачи Коши. После чего при помощи правого граничного условия (2) находится постоянная C .

Б) метод конечных разностей

Производные в уравнении и граничных условиях заменяются конечно-разностными отношениями, в результате чего строится СЛАУ с трехдиагональной матрицей. Система решается методом прогонки.

В) метод стрельбы

Вместо того, чтобы решать краевую задачу, решаем задачу Коши начальными условиями, удовлетворяющими краевому условию на левом конце и содержащем постоянную, отвечающую за угол наклона интегральной кривой в точке $x=a$. Решая таким образом задачу Коши 2 раза с разными наклонами, получаем два значения решения на правом конце отрезка. После этого используя метод секущих для поиска наклона интегральной кривой можно добиться совпадения значения решения на правом конце с заданным условием (2) с необходимой точностью.

При решении краевой задачи будем строить уже знакомые зависимости фактической точности $||y - y^*||$ от шага и от возмущения начальных (в этой задаче краевых) условий.