

解 説

圧縮センシングの基礎とその研究動向

芦野 隆一*

1. はじめに

著者の専門はウェーブレット解析である。ウェーブレット解析とはフーリエ解析のように三角関数の波の重ね合わせで関数（信号）を表現するのではなく、短い波（wavelets）の重ね合わせで関数（信号）を表現するというものである。時間周波数解析には不確定性原理という大きな制限があって、時間と周波数の両方の情報を同時に詳しく知ることはできないことが証明されている。したがって、必要とされる時間の情報と周波数の情報を得ることができるよう、考える問題に応じて適切な時間周波数解析を行うことが大切である。ウェーブレット解析は時間周波数の窓がパラメータにより、低周波の変動に対しては長時間観測でき、高周波の変動に対しては短時間観測できるように自動的に適応するところに特徴がある。David Donoho や Emmanuel Candès はウェーブレット解析においていくつもの輝かしい業績をあげていたので、著者は彼らの論文に注目していた。とくに [9,8,11] などの論文を概観し、スパース表現に興味をもつようになった。なぜなら、スパース表現では不確定性原理のスパース表現版が本質的役割を果たしていたからである。その後著者は、2006 年にスペインで開催された国際数学会議において、Candès の Compressive sampling というタイトルの講演 [1] を聴き、スパース表現の最も成功した応用例が圧縮センシングであり、圧縮センシングの鍵となっている数学がスパース表現であることに感銘を受け、圧縮センシングに興味をもち続けてきた。また、2006 年に出版された論文 [3,4,7] は圧縮センシングの基本的文献となった。圧縮センシングは急速に進展しており、著者の知識は限られているが、著者なりの解釈を述べさせていただくことにより、少しでも読者に興味をもっていただければ幸いである。なお、圧縮センシングに関して日本語で書かれた優れた論文として [13] と [17] があり、圧縮センシングについての本格的な記述がある著書として、[15,10,16] がある。

2. スパース表現

必要となる基本的事項を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定義された n 次元実ベクトル空間 \mathbb{R}^n の場合に説明する。ベクトル $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ の ℓ_2 ノルムを $\|\mathbf{a}\|_2 := \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ と定義する。ここで、記号 T は転置を表す。辞書 (dictionary) とよばれるベクトルの系 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$, $m > n$ は、 $\text{Span}\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m = \mathbb{R}^n$ を満たす¹とする。任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して、適当な m 次ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ が存在して、 $\mathbf{A} := [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ とおくと、

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^m x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1)$$

と表せる。 m 次ベクトル \mathbf{x} の 0 でない成分の個数を $\|\mathbf{x}\|_0$ と表し、 \mathbf{x} の ℓ_0 ノルムとよぶ。これは、 $\|\mathbf{x}\|_p := (\sum_{j=1}^m |x_j|^p)^{1/p}$, $p > 0$ とおくと、

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \lim_{p \rightarrow +0} \sum_{j=1}^m |x_j|^p = \lim_{p \rightarrow +0} (\|\mathbf{x}\|_p)^p$$

が成り立つからであると思われる。ただし、 $0 \leq p < 1$ の場合には本来のノルムではない²。 $\|\mathbf{x}\|_0$ が十分小さいとき、ベクトル \mathbf{x} はスパース (sparse) であるといい、 \mathbf{x} の 0 に近い成分を 0 とおいて得られるベクトル $\tilde{\mathbf{x}}$ がスパースであれば、ベクトル \mathbf{x} は圧縮可能 (compressive) という。 $\tilde{\mathbf{x}}$ を \mathbf{x} のスパース近似 (sparse approximation) という。 $\|\mathbf{x}\|_0 = k$ のとき、ベクトル \mathbf{x} は k -スパース (k -sparse) であるという。ベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ の分解 (1) において、 $\|\mathbf{x}\|_0$ が十分小さいとき、ベクトル \mathbf{b} は辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ に関してスパース (sparse) であるといい、分解 (1) をベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ のスパース表現 (sparse representation)

¹ $\text{Span}\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ はベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ のすべての線形結合全体の成す集合を表す。 $m = n$ ならば $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ は基底となり、与えられたベクトルを基底の線形結合で表現する係数は一意に決まるので、スパース表現としては自明な場合である。

² $\|\mathbf{x}\|_0$ は $\|\mathbf{x}\|_0 = |t| \|\mathbf{x}\|_0$ を満たさない。また、 $\|\mathbf{x}\|_p$, $0 < p < 1$ は $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ を満たさない。これら二つのノルムの性質を用いて、 $p \geq 1$ のとき、任意の $t \in [0, 1]$ に対して、 $\|t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}\|_p \leq t\|\mathbf{x}\|_p + (1-t)\|\mathbf{y}\|_p$ が成り立つこと、すなわち、ノルムが凸関数であることが示せる。

* 大阪教育大学 数理科学

Key Words: sparse representation, linear programming, compressed sensing, compressive sensing.

という。とくに k 個の成分が 0 でないとき、すなわち、 $\|\mathbf{x}\|_0 = k$ のとき、ベクトル \mathbf{b} は辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ に関して k -スパース表現 (k -sparse representation) をもつという。また、分解 (1) で \mathbf{x} が圧縮可能であれば、 $\mathbf{b} \approx \sum_{j=1}^m \tilde{x}_j \mathbf{a}_j$ となり¹、応用上十分である場合もある。このとき、ベクトル \mathbf{b} は辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ に関して圧縮可能 (compressive) といい、 $\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j \mathbf{a}_j$ を \mathbf{b} のスパース近似 (sparse approximation) という。扱うデータがスパースであればデータ圧縮率が高いので、広範囲のデータに対して、できるだけスパースな表現を得ることがデータ圧縮の最重要課題となる。また、分解 (1) により得られる情報は、辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ の選択によって決まるため、適切に辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ を選ぶ必要がある。一般に、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ という制限のもとで、 $\|\mathbf{x}\|_p, p \geq 0$ を最小にする \mathbf{x} を求める最適化問題 (optimization problem) を

$$(P_p) \quad \text{Minimize } \|\mathbf{x}\|_p \quad \text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

と表すと、最適化問題 (P_0) の解が分解 (1) の最もスパースな表現を与える。したがって、次の問題が設定できる。

【問題 1】 辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ 、すなわち行列 A をどのように選ばよいか。

【問題 2】 与えられた行列 A に対して、どのようなベクトル \mathbf{b} が、スパース表現あるいはスパース近似をもつか。

【問題 3】 最適化問題 (P_0) の解は一意に決まるのか。

【問題 4】 どのようにして最適化問題 (P_0) の解を求めるのか。

【問題 5】 \mathbf{b} のスパース表現からどのような情報が得られるのか。

1 これらの問題は互いに関連するので個別に扱うことはできない。以下で述べる結果を定理として簡単にまとめておく。

【定理 1】 辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ による \mathbf{b} の表現が非常にスパース² (highly sparse) であることがわかっているならば、最適化問題 (P_0) の解は一意に決まり、最適化問題 (P_1) の解は最適化問題 (P_0) の解と一致する。さらに、最適化問題 (P_1) の解は線形計画法によって求めることができる。つまり、辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ に関して非常にスパースな表現をもつ \mathbf{b} の最もスパースな表現は、線形計画法の実用的なアルゴリズムによって求めることができる。

¹ 記号 \approx はほぼ等しいことを表す。

² 前提となる仮定や主張する内容によって、必要となるスパース性に違いがあるので、厳密に述べない場合には、このような漠然とした表現をされることが多い。理由は後で述べるが、本解説の設定では、扱うデータの次元 n の平方根のオーダー $O(n^{1/2})$ 程度のスパース性をもつことが、非常にスパースの意味であるといえる。

定理 1 では、問題 2 に関して何ら解答を与えていない。画像などのように同じ数値が繰り返し現れるデータ \mathbf{b} は、スパース表現をもつことを前提としてよいと考えられる。

問題 1 に関して以下の辞書の構成法がよく使われる。Span $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m = \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{a}_j\|_2 = 1$, $j = 1, \dots, m$ を満たす $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ を構成する。複数の異なる \mathbb{R}^n の正規直交基底から m 個のベクトルを適切に選べば、容易にこの条件を満たすことができる。たとえば、異なる二つの正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ の和集合から成る系 $\{\phi_j, \psi_j\}_{j=1}^n$ は、線形独立ではなく過剰系であり、 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $[\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}] := [\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, $\boldsymbol{\Phi} = [\phi_1, \dots, \phi_n]$, $\boldsymbol{\Psi} = [\psi_1, \dots, \psi_n]$, $[\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}] := [\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n]$ とおくと、 $A = [\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}]$, $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}]$ であり、

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \phi_j + \beta_j \psi_j) = [\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}][\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}] \quad (2)$$

を満たす係数 $[\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}]$ の取り方は無数にあり得る。与えられた \mathbf{b} が系 $\{\phi_j, \psi_j\}_{j=1}^n$ に適合するならば、最もスパースな表現、すなわち $\|[\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}]\|_0$ を最小にする係数が一意に存在することが期待できる。この問題は参考文献 [9] で扱われ、[11] で整理・改良された。また [8] では、これらより一般の場合が扱われた。

これ以後、簡単のため異なる二つの正規直交基底の和集合から成る系のみを扱う。異なる二つの正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ の相互密着度 (mutual coherence) を測る尺度として、

$$M(\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n) = \max_{j,k=1,\dots,n} |\langle \phi_j, \psi_k \rangle|$$

を定義する。直交行列 $\boldsymbol{\Phi}^T$ と $\boldsymbol{\Psi}$ の積 $\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} = [\phi_j^T \psi_k]$ もまた直交行列であり、 $\phi_j^T \psi_k = \langle \phi_j, \psi_k \rangle$ であるから、直交行列の各列のノルムが 1 であることより、 $|\langle \phi_j, \psi_k \rangle|^2 \leq \sum_{l=1}^n |\langle \phi_l, \psi_k \rangle|^2 = 1$, $j, k = 1, \dots, n$ を得る。また、各成分 $\langle \phi_j, \psi_k \rangle$ が $|\langle \phi_j, \psi_k \rangle|^2 < 1/n$ を満たすとするとき、 $\sum_{l=1}^n |\langle \phi_l, \psi_k \rangle|^2 < 1$ となり矛盾する。したがって、ある (j_0, k_0) 成分があつて、 $|\langle \phi_{j_0}, \psi_{k_0} \rangle|^2 \geq 1/n$ が成り立つ。このようにして、

$$n^{-1/2} \leq M(\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n) \leq 1$$

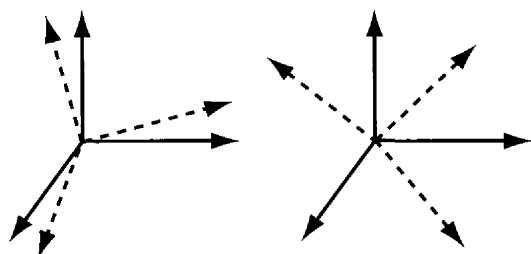
が示せる。このため、

$$\mu(\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n) := n^{1/2} M(\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n)$$

を異なる二つの正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ の相互密着度を測る尺度として採用する流儀もある。このとき、 $1 \leq \mu \leq n^{1/2}$ である。参考文献 [9] では、 \mathbb{C}^n の正規直交基底であるが、スパイク基底 (spike basis) $\{\delta(k-j)\}_{j=0}^{n-1}$ とフーリエ基底 (Fourier basis) $\{n^{-1/2} \exp(2\pi i j k / n)\}_{j=0}^{n-1}$ のペアが $M = n^{-1/2}$ を満たすことが示されている。異

なる二つの正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n$ の選び方は、問題 5 と関係するので重要である。参考文献 [9] はいくつかの正規直交基底の組合せを提案している。

相互密着度 M は、問題 3 の解の一意性などの十分条件を与える実用的な判定規範¹である。 \mathbb{R}^3 における異なる二つの正規直交基底について、相互密着度が大きいときと小さいときの概形を第 1 図に示す。



第 1 図 相互密着度 M が、大きいとき (左) と小さいとき (右)。

簡単に [11] の結果を説明する。問題 3 に関して次の定理 2 が示されている。

【定理 2】 (スパース解の一意性) $x_j, j=1, 2$ がそれぞれ $Ax_j = b, j=1, 2$ を満たし、

$$\|x_j\|_0 < 1/M, \quad j=1, 2$$

であるならば、 $x_1 = x_2$ である。

この証明には不確定性原理 (uncertainty principle) とよばれるタイプの定理が使われる。 b が非常にスパースな 2 通りの表現

$$b = [\Phi, \Psi][\alpha; \beta] = [\Phi, \Psi][\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}]$$

をもつとする。中辺から右辺を引いて整理すると、

$$\Phi(\alpha - \tilde{\alpha}) = \Psi(-\beta + \tilde{\beta})$$

を得る。このベクトルを c とおくと、 c は正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ と $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ に関する 2 通りの表現

$$c = \Phi(\alpha - \tilde{\alpha}) = \Psi(-\beta + \tilde{\beta})$$

をもち、その係数 $(\alpha - \tilde{\alpha})$ と $(-\beta + \tilde{\beta})$ は仮定からスパースである。証明のアイデアを説明するため、スパイク基底とフーリエ基底の場合、すなわち、 $\phi_j(k) = \delta(k-j)$, $\psi_j(k) = n^{-1/2} \exp(2\pi i j k / n)$ を考える。このとき、あるベクトル c が時間と周波数の両方で局在化した表現をもつことになり、 $c \neq 0$ であるならば、時間と周波数の両

¹参考文献 [8] では、行列 A の列ベクトルから異なる列番号の列ベクトルを s 個選ぶとき、選ばれた s 個の列ベクトルが線形従属になるような選び方が存在する最小の s をスパーク (spark) とよび、理論的な判定規範として導入している。しかし、スパークを求めるには、行列 A の列ベクトルから s 個選び、最小の s が求まるまで、線形従属かどうかを調べなければならないので、計算コストがかかる。

方の情報を同時に詳しくすることはできないというフーリエ解析の不確定性原理に反する。したがって、 $c=0$, すなわち、 $\alpha = \tilde{\alpha}, \beta = \tilde{\beta}$ でなければならない。もちろん、実際の証明にはスパース表現版の不確定性原理を使う。詳しくは [11], Theorem 2 を参照せよ。

さて、定理 2 の最適化問題 (P_0) の解 $x = [\alpha; \beta]$ が一意に決まる状況を考える。このように、 $\alpha_j \neq 0, \beta_k \neq 0$ を満たす $j, k=1, \dots, n$ が非常に少ない状況では、一意に決まる最もスパースな解 x の ℓ_1 ノルム

$$\|x\|_1 = \sum_{\alpha_j \neq 0} |\alpha_j| + \sum_{\beta_k \neq 0} |\beta_k|$$

も最小になること、すなわち、最適化問題 (P_0) の解 x が最適化問題 (P_1) の解にもなることが期待できる。問題 4 に関して、次の定理 3 が示されている。詳しくは [11], Theorem 3 を参照せよ。

【定理 3】 $((P_0)$ 解と (P_1) 解の一致) b が

$$\|x\|_0 < (2\sqrt{2}-1)/2M = 0.9142/M$$

を満たす $Ax=b$ の解 x をもつならば、最適化問題 (P_1) の解は最適化問題 (P_0) の解と一致する。

問題 4 に関する最適化問題 (P_1) を線形計画法の問題に変換する方法について説明する。列ベクトル $x \in \mathbb{R}^m$ のすべての成分 x_j が $x_j \geq 0$ を満たすとき、 $x \geq 0$ と表し、すべての成分が 1 である m 次列ベクトルを $\mathbf{1}_m$ と表す。このとき、 $x \geq 0$ ならば、 $\|x\|_1 = \mathbf{1}_m^T x$ であることに注意する。与えられたベクトル x に対して、 $u = [\max\{x_1, 0\}, \dots, \max\{x_m, 0\}]^T$, $v = u - x$, $z = [u; v] \in \mathbb{R}^{2m}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \mathbf{1}_m^T (u+v) = \mathbf{1}_{2m}^T z, \\ Ax &= A(u-v) = [A, -A]z \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、最適化問題 (P_1) は線形計画法の問題：

$$(LP) \text{ Minimize } \mathbf{1}_{2m}^T z \text{ subject to } b = [A, -A]z, z \geq 0$$

に変換される。この線形計画法の問題を解く実用的アルゴリズムは提供されている。たとえば、5. で紹介する ℓ_1 -MAGIC のウェブページの Code の項目からダウンロードできる User's Guide (pdf) を参照せよ。

まとめると、定理 1 では、辞書 $\{a_j\}_{j=1}^m$ による b の表現が非常にスパース (highly sparse) であることがわかっているならば、最適化問題 (P_0) の解が線形計画法によって解けることを主張していた。定理 2 と定理 3 により、線形計画法によって解いた最適化問題 (P_1) の解 x が、 $\|x\|_0 < (2\sqrt{2}-1)/2M$ を満たすならば、その解 x が最適化問題 (P_0) の一意解になることが示された。したがって、定理 1 における「 b の表現が非常にスパースである」とは、線形計画法によって解いた最適化問題 (P_1) の解 x が、 $\|x\|_0 < (2\sqrt{2}-1)/2M$ を満たすような

\mathbf{b} であればよいことになる。これは問題 2 に対する解答にもなっている。また、問題 1 に対する解答として、なるべく相互密着度 M が小さい辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ が望ましいといえる。

本節の最後に、別の判定規範である制限等長性 (Restricted Isometry Property, RIP) について説明する。行列 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m > n$ の各列ベクトル \mathbf{a}_j , $j = 1, \dots, m$ は, $\|\mathbf{a}_j\|_2 = 1$ を満たすとする。行列 A の列ベクトルから異なる列番号の列ベクトルを s 個 ($s \leq n$) 選んで得られる部分行列を A_s と表す。任意の s 個の選び方に対して, A_s が不等式

$$\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^s: (1-\delta)\|\mathbf{c}\|_2^2 \leq \|A_s \mathbf{c}\|_2^2 \leq (1+\delta)\|\mathbf{c}\|_2^2 \quad (3)$$

を満たす最小の正数 $\delta \leq 1$ を δ_s と表し, 制限等長定数 (restricted isometry constant) という。このとき, 行列 A は定数 δ_s で評価される s -制限等長性 (s -RIP) をもつという。不等式 (3) で $\delta=0$ とおくと, $\|A_s \mathbf{c}\|_2 = \|\mathbf{c}\|_2$ が成り立つから, δ_s が十分小さいとき, 制限等長性は A_s が \mathbb{R}^s 上で直交変換のように働くことを意味する。制限等長性の応用を紹介する。スパースベクトル \mathbf{x}_0 , $\|\mathbf{x}_0\|_0 = s_0$ に行列 A をかけて得られる $\mathbf{b}_0 = A\mathbf{x}_0$ に, 摂動 \mathbf{e} , $\|\mathbf{e}\|_2 \leq \varepsilon$ が付加された $\mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}$ を考える。スパースベクトル \mathbf{x}_0 の近似として, 次の最適化問題:

$$(P_0^\varepsilon) \quad \text{Minimize } \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon$$

の解 \mathbf{x}_0^ε を考える。仮定から, $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0\|_2 \leq \varepsilon$ が成り立つから, \mathbf{x}_0 は最適化問題 (P_0^ε) の解の候補である。したがって, $\|\mathbf{x}_0^\varepsilon\|_0 \leq \|\mathbf{x}_0\|_0$ が成り立つ。 $\mathbf{d} = \mathbf{x}_0^\varepsilon - \mathbf{x}_0$ とおくと,

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{d}\|_2 &\leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0^\varepsilon\|_2 + \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0\|_2 \leq 2\varepsilon, \\ \|\mathbf{d}\|_0 &\leq \|\mathbf{x}_0^\varepsilon\|_0 + \|\mathbf{x}_0\|_0 \leq 2s_0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, 行列 A は定数 $\delta_{2s_0} < 1$ で評価される $2s_0$ -制限等長性をもつと仮定すると,

$$(1 - \delta_{2s_0})\|\mathbf{d}\|_2^2 \leq \|A\mathbf{d}\|_2^2 \leq 4\varepsilon^2$$

が成り立つから,

$$\|\mathbf{d}\|_2^2 = \|\mathbf{x}_0^\varepsilon - \mathbf{x}_0\|_2^2 \leq 4\varepsilon^2 / (1 - \delta_{2s_0})$$

を得る。これは, 最適化問題 (P_0^ε) がスパースベクトル \mathbf{x}_0 , $\mathbf{b}_0 = A\mathbf{x}_0$ からの小さい摂動であるとき, 最適化問題 (P_0^ε) のスパース解 \mathbf{x}_0^ε が存在するならば, \mathbf{x}_0^ε は \mathbf{x}_0 に近いこと, つまり, 制限等長性から最適化問題 (P_0^ε) のある意味での安定性が導けることを示している。詳しくは参考文献 [10], 5.2.3 を参照せよ。

3. 圧縮センシング

圧縮センシングを概観し, 動向をしるには, [12] と [14] がよい。どちらもインターネットを通してダウンロード

できる。参考文献 [12] には, Candès と Tao が共同研究するようになった経緯が書かれている。2. で解説したスパース表現は数学的には興味深いが, 定理 3 によれば, 扱うデータ $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ がある辞書 $\{\mathbf{a}_j\}_{j=1}^m$ に関して非常にスパースな表現をもつことが前提となる。異なる二つの正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n$ から構成された辞書の場合, \mathbf{b} が

$$\|\mathbf{x}\|_0 < (2\sqrt{2}-1)/2M \leq (\sqrt{2}-1/2)n^{1/2}$$

を満たす $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 \mathbf{x} をもつこと, つまり, 粗い評価では, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 \mathbf{x} が扱うデータ \mathbf{b} の次元 n の平方根のオーダー $O(n^{1/2})$ のスパース性をもつことが, 非常にスパースの意味であるといえる。このようなスパース性をもつデータとしては画像が想定される。また, 相互密着度 M ができるだけ小さい, つまり辞書を構成するベクトルの方向ができるだけ互いに違う方向になるような辞書であれば, \mathbf{b} に要請されるスパース性の前提が弱くなる。 \mathbb{R}^n の単位球面 S^{n-1} 上に m 個の点をできるだけ一様に分布させて \mathbb{R}^n に m 個の単位ベクトルを取り, 辞書を作ればよい。非常に高次元の単位球面 S^{n-1} 上に, できるだけ一様に分布するように膨大な数の点が取れるとよいのだが, たとえば 1 メガピクセルの画像の次元が 10^6 次元であることを考えると, これは難しい問題であることがわかる。一つの取り方としてランダムに取る方法が考えられる。ランダムなベクトルにより辞書を構成した場合に, 与えられたベクトル \mathbf{b} を (1) 式のように辞書を構成するベクトルの線形結合でスパース表現できたとしても, 辞書を構成するベクトルが, 時間と周波数の両方で局在化した基本要素としての役割をもたないランダムなベクトルであるから, スパース表現をもつこと以外の有益な情報は得ることができないだろう。しかしながら, スパース表現をもつならば何らかの情報が圧縮できるはずである。いったいどのような情報が圧縮できるのだろうか。実は「センシングが圧縮できる」ことを以下で説明する。

いままでよく使われてきたデータ圧縮では, 与えられたデータ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, たとえばウェーブレット変換行列のように, 適当な $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を選んで線形変換を行えば, 得られたデータ $\mathbf{y} = W\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は圧縮可能 (compressive) となるという手法であった。スパース表現による単純なデータ圧縮では, 与えられたデータ $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して, \mathbb{R}^n より次元の大きな空間 \mathbb{R}^m , $m > n$ と, 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ で定義される \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への線形変換 f_A を考えると, 集合 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}$ の要素は多数あるから, その中から最もスパースな $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ を見つければ, もとのデータが含まれる空間よりも次元の大きな空間においてではあるが, \mathbf{b} に対応するスパースな表現 \mathbf{x} は圧縮可能であるという手法であった。つまり, もとのデータが含まれる空間よりも次元の大きな空間で

考えるという対価を支払って冗長性を導入し、 ℓ_1 最適化問題を解くことにより、もとのデータよりもスパースな表現を得たことになる。圧縮センシング (compressed sensing, compressive sensing, compressed sampling, compressive sampling) では、スパース表現に加え、さらにセンシング行列 (sensing matrix) を導入する。辞書のベクトルとセンシング行列のベクトルとはできるだけ互いに異なるように、さらにセンシング行列のベクトルを辞書で表現したときには、ほとんどのセンシング行列のベクトルはスパースではなく密になるように構成する。適切とはいえない比喩であるが、センシング行列は画像データ Ax のいわば標本調査 (sample survey) を行う役割を果たしているように著者には思える。

センシング行列の役割を簡単に見るため、異なる二つの正規直交基底 $\{\phi_j\}_{j=1}^n, \{\psi_j\}_{j=1}^n$ からなる辞書 $A=[\Phi, \Psi]$ を考え、たまたま、 $x=[\alpha; \beta]$ は Φ のベクトルだけで唯一の最もスパースな表現をもつ場合だけを扱うとする。詳しくは [5] を参照せよ。この場合、 $x \in \mathbb{R}^n$ が辞書 Φ に関して唯一の最もスパースな表現 $x = \Phi\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ をもつ場合に帰着できる。ベクトル α は k -スパースであると仮定する。さらに、異なる正規直交基底 $\{h_j\}_{j=1}^n$ からなる行列 $\tilde{H}=[h_j]$ を考え、 l 個のベクトルを適当に選んで (ここでは h_1, \dots, h_l を選ぶ)、センシング行列 $H \in \mathbb{R}^{l \times n}$ を $H=[h_1, \dots, h_l]^T$ と定義する。ベクトル $h_j, j=1, \dots, l$ をセンシングベクトル (sensing vector) という。データ x のセンシングベクトル h_j による測定 (measurement) $y=[y_j] \in \mathbb{R}^l$ を

$$y_j := \langle x, h_j \rangle = h_j^T x$$

で定義する。このとき、

$$y = Hx = H\Phi\alpha$$

が成り立つ。圧縮センシングとは、 l 個の測定 y からもとのデータ x を復元する問題である。したがって、適当な辞書 Φ とセンシング行列 H を選び、以下の定理 4 が成り立つことを示すことが目的となる。

【定理 4】 l 個の測定 y からもとのデータ $x \in \mathbb{R}^n$, $l < n$ を復元するには、 $y = H\Phi\alpha$ という制限のもとで、 $\|\alpha\|_0$ を最小にする α を求める最適化問題：

$$(CS_0) \text{ Minimize } \|\alpha\|_0 \text{ subject to } y = H\Phi\alpha$$

の解を 2. で述べた線形計画法の問題 (LP) を解くことによって求め、その解を α^* とおき、 $x^* := \Phi\alpha^*$ とおくと、 x^* はもとのデータ x の候補となる。このとき、かなりの確率で $x^* = x$ が成り立つ。

問題はどのような辞書 Φ とセンシング行列 H をとれば、どのくらいの確率で $x^* = x$ が成り立つかである。辞書 Φ とセンシング行列 H の相互密着度として、異なる二つの正規直交基底 Φ, \tilde{H} の相互密着度

$$\mu = n^{1/2} \max_{p,q=1,\dots,n} |\langle \phi_p, h_q \rangle| = n^{1/2} \max_{p,q=1,\dots,n} |h_q^T \phi_p|$$

を採用する。参考文献 [2] では、測定の個数 l に関して、次の定理 5 が示された。詳しくは、参考文献 [16], 11.3.1 を参照せよ。

【定理 5】 行列 \tilde{H} からランダムに l 個のセンシングベクトルを選んでセンシング行列 H を構成するとき、(定理の証明から決まる) ある正の定数 C_1 に対して、

$$l \geq C_1 \mu^2 k \log n$$

が成り立つならば、 $\|\alpha\|_1$ を最小にする α を求める最適化問題：

$$(CS_1) \text{ Minimize } \|\alpha\|_1 \text{ subject to } y = H\Phi\alpha$$

の解 α^* は高い確率で $\alpha^* = \alpha$ を満たす。

定理 5 は、 μ が定数と見なせて、 x が辞書 Φ に関して非常にスパース、たとえば $O(n^{1/2})$ 程度のスパース性をもつ場合には、 $l = O(n^{1/2} \log n)$ であることを示し、 n が十分大きいときには測定の個数がデータの次元よりも少なく済むことを意味する。

センシング行列 H の設計に関する次の定理 6 が成り立つ。詳しくは、参考文献 [16], 11.5 を参照せよ。

【定理 6】 センシング行列 H の各成分は、平均が 0 で分散が $1/l$ の独立な同一ガウス分布 (independent identically distributed Gaussian distribution) であるとする。このとき、(定理の証明から決まる) ある正の定数 C_2 に対して、

$$l \geq C_2 k \log(n/k)$$

が成り立つならば、行列 $H\Phi$ は非常に高い確率で制限等長定数 $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ で評価される $2k$ -制限等長性をもつ。

制限等長性は線形計画法の問題 (LP) によりスパース解が求まることを保証するので、定理 6 は高い確率で圧縮センシングが可能であることを示している。

4. おわりに

本解説では、 ℓ_1 ノルムをもとにした測定からのデータの復元を説明したが、ほかの復元方法も研究されている。たとえば、参考文献 [18] では、貪欲法 (greedy algorithm) をもとにした直交マッチング追跡 (orthogonal matching pursuit) による方法を扱っているし、参考文献 [6] では、 $\|\cdot\|_p$ が凸関数にならない $0 < p < 1$ の場合の最適化問題による方法を扱っている。また、ランダム性を使わない辞書やセンシング行列の構成も今後の研究課題である。たとえば、ランダム性を使わない辞書に対してノイズレット (noiselet) をセンシング行列に使う研究も行われている。参考文献 [16], 11.7 には、宇宙科学における圧縮センシングの実用例として、The Herschel/Photodetector Array Camera and Spectrometer (PACS) mission of

the European Space Agency について述べられている。

最後に、本解説を読んで貴重なご意見をいただいた匿名の査読者、京都大学の山田道夫先生、大阪電気通信大学の萬代武史さん、大阪教育大学の守本晃さんに感謝いたします。

5. インターネットリソース

圧縮センシングに関するいくつかのウェブページを紹介する。

- ▷ Tutorials から始まり、項目別に整理された圧縮センシング関係の論文のプレプリントなどへのリンクが提供されている Compressive Sensing Resources: dsp.rice.edu/cs
- ▷ MATLAB のコードが提供されている ℓ_1 -MAGIC: www.acm.caltech.edu/l1magic/
- ▷ 音声のデモンストレーションがある Compressed Sensing Audio Demonstration: sunbeam.ece.wisc.edu/csaudio/

(2010 年 12 月 1 日受付)

参考文献

- [1] E. Candès: Compressive sampling; *International Congress of Mathematicians*, Vol. III, pp. 1433–1452, Eur. Math. Soc. (2006)
www-stat.stanford.edu/~candes/papers/CompressiveSampling.pdf
- [2] E. Candès and J. Romberg: Sparsity and incoherence in compressive sampling; *Inverse Problems*, Vol. 23, pp. 969–985 (2007)
- [3] E. Candès, J. Romberg and T. Tao: Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 52, No. 2, pp. 489–509 (2006)
- [4] E. Candès, J. Romberg and T. Tao: Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements; *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 59, No. 8, pp. 1207–1223 (2006)
- [5] E. Candès and W. Wakin: People hearing without listening: An introduction to compressive sampling; *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 25, No. 2, pp. 21–30 (2008)
- [6] R. Chartrand: Exact reconstructions of sparse signals via nonconvex minimization; *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, pp. 707–710 (2007)
- [7] D. Donoho: Compressed sensing; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 52, No. 4, pp. 1289–1306 (2006)
- [8] D. Donoho and M. Elad: Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ^1 minimization; *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 100, No. 5, pp. 2197–2202 (2003) (electronic)
- [9] D. Donoho and X. Huo: Uncertainty principles and ideal atomic decomposition; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 47, No. 7, pp. 2845–2862 (2001)
- [10] M. Elad: *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer (2010)
- [11] M. Elad and A. Bruckstein: A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 48, No. 9, pp. 2558–2567 (2002)
- [12] B. Hayes: The best bits; *American Scientist*, Vol. 97, No. 4, pp. 276–280 (2009)
www.americanscientist.org/libraries/documents/2009631426347323-2009-07Hayes.pdf
- [13] 平林：Compressed Sensing—基本原理と最新研究動向—；信学技報，CAS2009-11，VLD2009-16，SIP2009-28，pp. 55–60，July (2009)
- [14] D. Mackenzie: Compressed sensing makes every pixel count; *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Vol. 7, American Mathematical Society, pp. 114–127 (2009)
www.ams.org/samplings/math-history/hap7-pixel.pdf
- [15] S. Mallat: *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*, third edition, Academic Press (2008)
- [16] J. Starck, F. Murtagh and J. Fadili: *Sparse Image and Signal Processing: Wavelets, Curvelets, Morphological Diversity*, Cambridge University Press (2010)
- [17] 田中：圧縮センシングの数理；*IEICE Fundamentals Review*, Vol. 4, No. 1, pp. 39–47 (2010)
- [18] J. Tropp and A. Gilbert: Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit; *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 53, No. 12, pp. 4655–4666 (2007)

著者略歴

あしの りゅういち
芦野 隆一



1957 年 12 月生。1981 年京都大学理学部卒業，1989 年大阪市立大学大学院理学研究科博士課程単位取得満期退学。産業技術短期大学教養部講師，大阪教育大学教育学部助教授などを経て，現在大阪教育大学教育学部教授。その間，オタワ大学理学部客員教授，ヨーク大学学芸学部特任教授。専門はウェーブレット解析，理学博士。アメリカ数学会，工業および応用数学会，日本数学会，日本応用数理学会などの会員。