

特集／医用イメージングにおける圧縮センシングとその周辺

圧縮センシングの基礎原理と
画像再構成アルゴリズムの進歩酒井 智弥^{*1}

要 旨

高次元データにはその内訳や特徴を簡潔に表現できる性質があり、スパース性とよばれている。圧縮センシングは、スパース性をセンシングの低コスト化・高性能化に生かす技法である。スパース解をもつ連立一次方程式として定式化される基本的な圧縮センシングについては、ランダム観測とスパース再構成の理論の進展と共に、凸緩和に基づくさまざまなスパース解法も考案されている。一方、画像の圧縮センシングでは、エッジなど画像から抽出した特徴がスパース性をもつように画像を再構成するアルゴリズムの設計が求められる。そのような画像再構成を等式制約付き最適化問題として適切に定式化すると、実用的なアルゴリズムを合理的に導出する手段がある。

キーワード：スパースモデリング、凸最適化、交互方向乗数法、全変動

Med Imag Tech 34(4): 177-185, 2016

1. はじめに

「あなたね、味噌汁作って味見するのに丼鉢でグーッと飲む?」「小皿ですよ」¹⁾ かき混ぜて少量だけ味見すれば、食材とその配合量がわかり、料理を再現できるようになる。すべてを観測しなくても、データの内訳を特定するのに十分な観測回数にとどめ、そこからデータを再構成するという技法が圧縮センシング [1-4] である。

どんな料理も数種類の食材の組み合わせから作られているように、現実のデータを材料の組み合わせによる混合物とみなしてみよう。もし、材料の候補を多数用意でき、各材料の役割が明確ならば、材料をあれこれ使わずにどんなデータの内訳も特定できるようになるであろう。組み合わせによってデータの内訳を簡潔に表現することにに基づく解析は、スパースモデリングとよばれている。

圧縮センシングはスパースモデルに基づくセンシングの技法である。本稿では、観測データ

の内訳を特定する数理問題としてセンシングを理解することから原理を解説する。

また、画像の圧縮センシングに欠かせない効率的なスパース解法をいくつか紹介する。画像がもつ特徴のスパース性を生かす最近の画像再構成技術と算法設計についても概説する。

2. データの内訳を知る仕組み

m 個の実数を成分とするベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ で観測データが与えられたとする。このデータの内訳となる材料の候補として、 n 本の m 次元ベクトル $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ を用意できているとしよう。データ \mathbf{b} は次式の線形結合（重ね合わせ）で表せる混合物である。

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}^{(1)} + \dots + x_n \mathbf{a}^{(n)} \quad (1)$$

次のように書き換えられる。

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2)$$

ここで、線形結合係数 x_j ($j = 1, \dots, n$) はデータ \mathbf{b}

^{*1} 長崎大学大学院工学研究科 [〒852-8521 長崎市文教町 1-14]

e-mail: tsakai@cis.nagasaki-u.ac.jp

論文受付：2016 年 6 月 2 日

¹⁾ 開票率 5% で当確なんておかしいと数学者・秋山仁と話したら…立川志の輔「牡丹灯籠」のマクラから、2009.

に含まれる材料 $\mathbf{a}^{(j)}$ の配合量であり、それらをまとめて n 次元ベクトル $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ とした²⁾。 $\mathbf{A}=[\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は m 次元ベクトル $\mathbf{a}^{(j)}$ を n 本並べた m 行 n 列の行列である。

与えられたデータ \mathbf{b} の内訳を求める解析とは、式(2)の連立一次方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ を解くことにほかならない。ベクトル \mathbf{x} の成分である n 個の未知数 x_1, \dots, x_n に対して、与えられた方程式の数は行列 \mathbf{A} の行数 m である。 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ のように解を一意に決められるのは、 $m=n$ で \mathbf{A} が正則のときに限られる。観測が不足しているときは、データの数 m よりも未知数の数 n が多い ($m < n$)。このとき、方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ を満たす解 \mathbf{x} は無数に存在する。材料の種類が多いので、ある材料の配合量を減らしても他の材料を組み合わせることで補うことができ、いかようにも同じデータ \mathbf{b} を調合できるからである。

解が無数にあるとはいえ、その中にはデータの内訳となる材料を特定できる合理的な解もあるのではなかろうか。もし、データ \mathbf{b} に含まれている可能性がある典型的な材料として $\mathbf{A}=[\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}]$ を適切に用意してあるならば、その中から数種類の材料だけを使ってデータ \mathbf{b} を簡潔に合成できるはずである。つまり、使う材料の配合量 x_j だけが非ゼロで、その他多くの材料は配合量ゼロである。非ゼロがまばらであるこの性質はスパース (疎) 性とよばれる。適切に \mathbf{A} を用意してあれば、無数にある解 \mathbf{x} の中には、成分 x_j の多くがゼロだらけになっている「スパース解」が存在しているに違いない。そして、材料 $\mathbf{a}^{(j)}$ が互いに類似せず、それぞれの役割が独特ならば、簡潔な合成の仕方を表す最もスパースな解がひとつだけ存在するであろう。

データの内訳となる材料を特定できるスパース解は、 \mathbf{x} の非ゼロ成分の数が最小となる解である。実は、 \mathbf{x} の非ゼロ成分の数をノルムによって測ることができる。 ℓ_p ノルムの p 乗は

$$\|\mathbf{x}\|_p^p = |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \quad (3)$$

と表されるが、この値は $p \rightarrow 0+$ の極限で \mathbf{x} の非ゼロ成分の数に一致する。極限値を ℓ_0 ノルムとよび、 $\|\mathbf{x}\|_0$ と記すことにすると、 \mathbf{x} の非ゼロ成

分が最も少ないスパース解 \mathbf{x}_0^* を求める問題は次式のように定式化できる。

$$\mathbf{x}_0^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to } \mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad (4)$$

この記述は、「 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ を満たす \mathbf{x} のうち、非ゼロ成分の個数 $\|\mathbf{x}\|_0$ が最小になるような \mathbf{x} を探せ。その解を \mathbf{x}_0^* とする。」という意味である。 \mathbf{x}_0^* はまさにスパース解であるが、これを陽に計算する公式を作れない。また、非ゼロ成分は何個なのか不明である。 n 種類の材料 $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}$ から s 個選んで ($s=1, 2, \dots$)、データ \mathbf{b} を合成できるか試すことを繰り返す風漬しの探し方は膨大な計算手間数になるので実用的ではない。確実に解が得られる効率的な解法は知られていないが、高確率で正解にたどり着きやすい効率的な探索方法がある (例えば [5, 6])。その算法は、 \mathbf{b} を合成しきるまでその不足を最も補える材料 $\mathbf{a}^{(j)}$ を選出し続けるという貪欲法に基づく。

ℓ_0 ノルムでなくても、 $p \leq 1$ であれば、 ℓ_p ノルム最小化の解にはスパース性がある³⁾。特に ℓ_1 ノルムは \mathbf{x} の凸関数なので、その最小化問題の解

$$\mathbf{x}_1^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{Ax}=\mathbf{b} \quad (5)$$

を解く算法の設計において関数解析に基づく凸最適化の知見が生かせる。圧縮センシングのための実用的な算法の多くは凸最適化に基づく。算法については本稿の4章でさらに解説する。

3. 圧縮センシングの原理

観測データが不足しているとき ($m < n$)、(i) 解が無数に存在する連立方程式(2)のうち最もスパースな解 \mathbf{x}_0^* は、ひとつだけか？ (ii) その解は、算法を設計しやすい ℓ_1 最小化の解 \mathbf{x}_1^* と同じか？ もしそうならば、観測データが不足していても、その内訳を ℓ_1 最小化によって特定できる。また、このことを利用して、スパース解に支障がない程度にデータ数を減らしたセンシングの技法を設計できる。

1) 不完全な観測とスパース再構成

データ数 m の不完全なデータ $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ から

³⁾ $p=1$ の場合、集合 $\{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}\|_1=r\}$ は、座標軸上に頂点がある正 2^n 胞体 (二次元では正方形、三次元では正八面体、...) であり、低次元の要素 (頂点や辺など) にある点 \mathbf{x} はスパースである。その点 \mathbf{x} は、 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ が表す多様体との接点 (解 \mathbf{x}_1^*) にもなりやすい。

²⁾ T は転置を表す。本稿では実数からなるベクトルや行列で解説しているが、複素数の場合は T を共役転置と読み替えてほしい。

データ数 $d > m$ の完全なデータ $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ を得る圧縮センシングの手順は以下になる。

(1) スパースモデルを用意する：最も典型的な線形モデルは

$$\mathbf{y} = \Psi \mathbf{x} \quad (6)$$

である。 $\Psi \in \mathbb{R}^{d \times n}$ は \mathbf{y} を線形合成する基底行列である。ただし、 \mathbf{y} が想定内のデータであれば必ず \mathbf{x} がスパースになるように基底行列を用意する必要がある。すなわち、 $\Psi = [\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}]$ の d 次元ベクトル $\psi^{(j)}$ は互いに類似せず、かつ、 \mathbf{y} を簡潔に合成するために有用な材料の候補でなければならない。例えば、二次元画像の画素値を成分にもつベクトルが \mathbf{y} ならば、画像圧縮で使われる二次元離散コサイン基底やウェーブレット基底が適している。

(2) 不完全に観測する： d 次元ベクトルの \mathbf{y} ではなく、それを m 次元へ低次元化したものに相当する \mathbf{b} を観測する。

$$\mathbf{b} = \Phi \mathbf{y} \quad (7)$$

$\Phi \in \mathbb{R}^{m \times d}$ を観測行列とよぶ。例えば、 \mathbf{y} の d 個の成分のうち m 個だけ観測するサンプリングは、各行にひとつだけ 1 があり、他の要素はゼロの行列 Φ で表せる。

(3) スパース解で再構成する：式(6)を式(7)に代入すると次の関係式を得る。

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{A} = \Phi \Psi = [\Phi \psi^{(1)}, \dots, \Phi \psi^{(n)}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ である。結局のところ、基底行列 Ψ を低次元化した \mathbf{A} と、 \mathbf{y} を低次元化した不完全な観測データ \mathbf{b} から、連立一次方程式 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ のスパース解を求める問題に帰着する。得られたスパース解 \mathbf{x}^* によって、式(6)から完全なデータを $\mathbf{y}^* = \Psi \mathbf{x}^*$ のように再構成できる。

2) スパース解の一意性・等価性

前述の (i) は解 \mathbf{x}_0^* の一意性、(ii) は解 \mathbf{x}_0^* と \mathbf{x}_1^* の等価性に関する疑問である。これらに関する研究によれば [7-11]、基底行列 \mathbf{A} が正規直交系に近い性質をもっているほど、式(4)の ℓ_0 最小化の解 \mathbf{x}_0^* はただひとつに定まり、式(5)の ℓ_1 最小化の解 \mathbf{x}_1^* と一致することを保証できる。また、非ゼロ成分がたかだか s 個ならば ($\|\mathbf{x}_0^*\|_0 \leq s$)、定性的には、およそ $m = \mathcal{O}(s \log n)$ 個

のデータがあればスパース解が一意に定まる。

なお、スパース解の保証に関する研究は現在も進められており、本節はその一部の概説に過ぎない。下記のコヒーレンスや RIP による保証は十分条件であり、条件を満たさなくても ℓ_1 最小化で実用的な解が得られることが多くみられる。

一意性と ℓ_0 - ℓ_1 等価性を保証できる条件のひとつは、 \mathbf{A} のコヒーレンス

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{\substack{i, j \\ i \neq j}} \frac{|\mathbf{a}^{(i)\top} \mathbf{a}^{(j)}|}{\|\mathbf{a}^{(i)}\|_2 \|\mathbf{a}^{(j)}\|_2} \quad (9)$$

に基づく⁴⁾。非ゼロ成分の数が

$$\|\mathbf{x}_0^*\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \right) \quad (10)$$

ならば、解は一意で、 $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_1^*$ が成り立つ [7]。 \mathbf{A} のあらゆる列ベクトル間のなす角が直角に近いほど、 $\mu(\mathbf{A})$ は小さいので、より多くの非ゼロ成分をもつスパース解の一意性と ℓ_0 - ℓ_1 等価性を保証できるようになる。

非ゼロ成分が k 個以下の任意のスパースなベクトル \mathbf{x} について、 $\|\mathbf{A} \mathbf{x}\|_2 \approx \|\mathbf{x}\|_2$ のように ℓ_2 ノルムを近似的に維持できる行列 \mathbf{A} の性質を制限等長性 (restricted isometry property; RIP) とよぶ。 \mathbf{A} の RIP は、解の一意性と ℓ_0 - ℓ_1 等価性を保証するための十分条件である [8]。 \mathbf{A} が与えられたとき、RIP の確認は組み合わせ爆発的な計算量であり、実用的ではない。しかし、正規分布や Rademacher 分布する独立な乱数から生成された行列 \mathbf{A} は高い確率で RIP 条件を満たすことが知られている [9]。また、このような独立な要素からなる基底行列 \mathbf{A} については、解の一意性と ℓ_0 - ℓ_1 等価性を保証できる定量的な限界が Donoho と Tanner [12] によって解明されている。

\mathbf{A} の列 $\mathbf{a}^{(j)}$ がすべて正規化されているとき、式(5)の ℓ_1 最小化問題は基底追跡 (basis pursuit; BP) とよばれる [13]。BP は次式の基底追跡ノイズ除去 (basis pursuit denoising; BPDN) [13] の特別な場合である。

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subject to } \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (11)$$

⁴⁾ $\mathbf{a}^{(i)\top} \mathbf{a}^{(j)}$ は $\mathbf{a}^{(i)}$ と $\mathbf{a}^{(j)}$ の内積である。

ただし, $\varepsilon \geq 0$ はノイズの強さを表す定数である. 観測データ \mathbf{b} にノイズが含まれている場合は, これを考慮した BPDN のスパース解による再構成が望ましい. \mathbf{A} の RIP 条件下で, BPDN から安定してスパース解が得られることも保証されている. 式(11)の解 \mathbf{x}^* と式(4)の ℓ_0 最小化の解 \mathbf{x}_0^* の違いは, $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*\|_2 \leq C\varepsilon$ (C は定数) の範囲内になることが示されている [10].

3) 基底行列と観測行列の関係

圧縮センシングでは, 基底行列 Ψ で簡潔に合成できることを想定したデータ \mathbf{y} を, 観測行列 Φ を介して不完全に観測する. ゆえに, $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ のコヒーレンスや RIP によってスパース解の一意性と ℓ_0 - ℓ_1 等価性を保証できる. この場合, Φ の任意の行ベクトルと Ψ の列ベクトル $\psi^{(j)}$ は類似していないほうがよい [11]. 特定の基底ベクトル $\psi^{(j)}$ と類似していると, 解の成分 x_j のみに強く重み付けられた観測値が得られるので, 少数の非ゼロ成分を特定するために有益な観測値が高確率で得られないからである. この理由からも, 乱数から生成された行列 Φ によるランダムな観測はスパース再構成と相性がよい. 例えば, 離散フーリエ基底が Ψ に適している離散信号 \mathbf{y} に対しては, \mathbf{y} の成分をランダムに取り出すサンプリングが最適な不完全観測 Φ である. ランダムサンプリングの観測値は, サンプルを拾うデルタ関数と信号の内積である. デルタ関数はあらゆる周波数の正弦波から構成されているので, 観測値は \mathbf{y} のすべての周波数成分を偏りなく調べたものになる.

不完全な観測からスパース再構成する仕組みの応用は, センシングの低コスト化を図る圧縮センシングに限らない. 例えば, 画像の画素値を成分にもつベクトルを \mathbf{y} として, その不完全観測データに相当するだけ画像, 画素値が欠損した画像, 低解像度化した画像などは式(7)の \mathbf{b} のように記述できる. 圧縮センシングと同様のスパース再構成によって, ぼけの除去, 画像修復, 超解像処理が可能となる. スパース解から画像の内訳を特定できるので, 画像を線画とテクスチャに分離することなどもできる. また, スパース再構成 $\mathbf{y}^* = \Psi\mathbf{x}^*$ には, 基底 Ψ で簡潔に合成できない不規則な観測ノイズが含まれないので, ノイズが除去された信号の近似が得られている.

4. 凸最適化によるスパース解法

スパース解を求める凸最適化のさまざまな算法が提案されている. 画像の圧縮センシングにも有用で代表的な算法をいくつか紹介しよう.

1) 反復縮小に基づく算法

式(11)の BPDN は, LASSO 回帰とよばれる次式の最小化問題と等価である⁵⁾.

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (12)$$

ここで, もし $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (単位行列) ならば, LASSO 回帰は次のような成分ごとの最小化問題になる.

$$\min_{x_j} \frac{1}{2} (b_j - x_j)^2 + \lambda |x_j| \quad (j=1, \dots, n) \quad (13)$$

この最小化問題の解は, 次のように陽に書ける.

$$x_j^* = \begin{cases} b_j - \lambda & (0 < \lambda < b_j) \\ 0 & (-\lambda \leq b_j \leq \lambda) \\ b_j + \lambda & (b_j < -\lambda < 0) \end{cases} \quad (14)$$

要するに, \mathbf{b} の各成分を原点 \mathbf{O} に向けて λ だけ縮めると解 \mathbf{x}^* が得られる. $|b_j|$ が λ より小さいとき x_j^* はゼロになるので, 解がスパースになることがわかる. 式(14)の処理はソフト縮小 (soft shrinkage / thresholding) [15] とよばれる. 本稿では, これを $\mathbf{x}^* = \text{soft}(\mathbf{b}, \lambda)$ と書く.

式(12)で一般に $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ の場合は, ある定点 $\mathbf{x}^{(k)}$ の近傍で $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 / 2$ の項をテイラー展開し, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \approx \mathbf{L}\mathbf{I}$ (L はリプシッツ定数) と近似することで, 次の反復式が得られる.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \text{soft}\left(\mathbf{x}^{(k)} + \frac{1}{L} \mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}), \frac{\lambda}{L}\right) \quad (15)$$

これは IST (iterative soft thresholding) [16] とよばれる算法である. 任意の初期値 (例えば $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$) から解 \mathbf{x}^* へ収束する. また, IST の収束を Nesterov の加速法で改善した FISTA (fast iterative shrinkage-thresholding algorithm) [17] は, 近接点 (proximal point) $\mathbf{w}^{(k)}$ を使った下記のような反復法である.

⁵⁾ ある $\varepsilon > 0$ に対する式(11)の解が式(12)の解と一致するような定数 $\lambda > 0$ が存在する [14]. ただし, ε に対応する λ を求める一般的な方法はない.

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)}, \quad t_1 = 1 \quad (16)$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \text{soft}\left(\mathbf{w}^{(k)} + \frac{1}{L} \mathbf{A}^\top (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{w}^{(k)}), \frac{\lambda}{L}\right) \quad (17)$$

$$t_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_k^2}}{2} \quad (18)$$

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}} (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}) \quad (19)$$

$\mathbf{x}^{(k)}$ が \mathbf{x}^* に収束する.

2) ADMM から導出されるスパース解法

次のような形で記述できる等式制約付き最適化問題を考える.

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*) = \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{z})} f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{z}) \\ \text{subject to } \mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし, $f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{z})$ は凸関数とする. 交互方向乗数法 (alternating direction method of multipliers; ADMM) [18] は, 任意の初期値から最適解 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ へ収束する以下の反復計算である.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{G}\mathbf{x} - \mathbf{z}^{(k)}\|_2^2 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{z}} g(\mathbf{z}) \\ + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{G}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{z}\|_2^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{G}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k+1)} \quad (23)$$

$\rho > 0$ は定数である⁶⁾. ADMM とその並列・分散計算については Boyd らによる解説 [19] が詳しい.

ADMM は最適化問題を解く算法の雛形であり, 応用範囲が広く, 上手に適用すると有用な算法を導き出せる. 例えば, $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ とし,

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (24)$$

$$g(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2^2 \quad (25)$$

と置けば, 式(12)の LASSO 回帰に対する算法が導出される. 特に, $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = p\mathbf{I}$ ($p > 0$) が成り立つときは⁷⁾, 導出される算法は下記のように簡

単化できる.

$$\mathbf{v} = \text{soft}\left(\mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}, \frac{\lambda}{\rho}\right) - \mathbf{u}^{(k)} \quad (26)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \frac{1}{\rho + \lambda} \mathbf{A}^\top (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}) \quad (27)$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1)} + \mathbf{v} \quad (28)$$

一般に, 凸関数 $\phi(\mathbf{x})$ と定数 $\rho > 0$ が与えられたとき, 点 \mathbf{v} からの ℓ_2 距離で正則化⁸⁾ した最小化問題の解を表す関数

$$\text{prox}_{\phi, \rho}(\mathbf{v}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_2^2 \quad (29)$$

は近接写像 (proximity operator) とよばれる. 例えば, $\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$ ならば, $\text{prox}_{\|\cdot\|_1, \rho}(\mathbf{v}) = \text{soft}(\mathbf{v}, 1/\rho)$ である. ADMM からの算法の導出では, 反復式(21)と(22)が効率的に計算できる近接写像になることが望ましい. そのような近接写像になる関数 ϕ と ℓ_2 損失項 $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2/2$ を式(20)の f と g として導出される ADMM の算法は SALSA (split augmented Lagrangian shrinkage algorithm) とよばれる [20]. 画像のぼけ除去や MRI 再構成の応用において FISTA よりも SALSA が高速である例が実験的に示されている.

なお, どの算法にも, ベクトルの左から行列 \mathbf{A} や \mathbf{A}^\top を乗じる演算が頻出するが, フーリエ基底や直交ウェーブレット基底の場合は行列を作って乗じる必要はない. 代わりに, 高速フーリエ変換・逆変換や高速ウェーブレット変換・逆変換を適用すればよいので, 計算手間数は小さい. 行数・列数が画素数の規模になる行列をメモリ上に置くような計算を避けるため, 行列との演算を高速変換などですべて実装できる算法が実用的である.

5. 特徴のスパースモデリング

スパース解からデータの内訳を特定することで完全なデータを再構成できるならば, 式(11)の BPDN や式(12)の LASSO 回帰の算法が使える. しかし, 実際の応用では, データから算出した特徴に対してスパース性などの性質を奨励

⁶⁾ 拡張ラグランジアン項 $\rho\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2/2$ の定数 ρ に由来する. ADMM は ρ によらず一次収束する.

⁷⁾ このとき基底 \mathbf{A} は隙間のないフレーム (tight frame) であるという. 例えば, フーリエ行列などのユニタリ行列の行を間引いたものはこれに該当する.

⁸⁾ Moreau-Yosida regularization とよばれる.

したいことがある。そのような場合、式(20)の \mathbf{x} は再構成したいデータ \mathbf{y} とみなし、データ \mathbf{y} から \mathbf{G} で算出した特徴量 \mathbf{z} に関して望ましい性質を奨励する凸関数を設計できれば、再構成の算法を ADMM から導出できる。

1) 全変動：エッジのスパース性の定量化

輝度勾配から検出されるエッジは画像の基本的な特徴のひとつであるが、画像中の物体の輪郭や境界など、エッジに該当する画素は少数にすぎない。ゆえに、圧縮センシングではスパースなエッジ特徴をもつ画像を再構成したいことがある。画像の全変動 (total variation; TV) は、勾配強度の ℓ_1 ノルムでエッジ特徴のスパース性を定量化したものとしなせる。

(1) 全変動と $\ell_{2,1}$ ノルム

二次元画像の d 個の画素値 $f(x_i, y_i)$ ($i=1, \dots, d$) を成分にもつベクトルを $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ とし、 x 方向と y 方向の微分画像の d 個の画素値 $f_x(x_i, y_i)$ と $f_y(x_i, y_i)$ を \mathbf{y} から計算する有限差分演算子をそれぞれ $\mathbf{D}_x \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathbf{D}_y \in \mathbb{R}^{d \times d}$ とすると、全変動は次式のように記述できる。

$$\text{TV}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^d \sqrt{(\mathbf{D}_x \mathbf{y})_i^2 + (\mathbf{D}_y \mathbf{y})_i^2} \quad (30)$$

$$= \|\mathbf{D}_x \mathbf{y}, \mathbf{D}_y \mathbf{y}\|_{2,1} \quad (31)$$

ただし、 $(\cdot)_i$ はベクトルの第 i 成分を表す。TV(\mathbf{y}) は d 個の画素の勾配強度に対する ℓ_1 ノルムのような和であり、その最小化は勾配強度のスパース性を奨励する。なお、 M_{ij} を ij 要素にもつ行列 $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d \times c}$ の $\ell_{2,1}$ ノルムは、 \mathbf{M} の行ベクトル $\mathbf{M}_{i,:}$ の ℓ_2 ノルムの和として

$$\|\mathbf{M}\|_{2,1} = \sum_{i=1}^d \|\mathbf{M}_{i,:}\|_2 = \sum_{i=1}^d \sqrt{\sum_{j=1}^c M_{ij}^2} \quad (32)$$

のように定義されている。また、その近接写像は \mathbf{M} の各行ベクトルの ℓ_2 ノルムをソフト縮小する処理となる⁹⁾。

$$\text{prox}_{\|\cdot\|_{2,1}, \rho}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \text{vsoft}(\mathbf{M}_{1,:}, \frac{1}{\rho}) \\ \vdots \\ \text{vsoft}(\mathbf{M}_{d,:}, \frac{1}{\rho}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times c} \quad (33)$$

⁹⁾ 近接写像における正則化の ℓ_2 ノルムは行列に対して Frobenius ノルム $\|\mathbf{M}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} M_{ij}^2}$ に相当する。

ただし、 $\text{vsoft}(\boldsymbol{\eta}, \theta) = \boldsymbol{\eta} \max(\|\boldsymbol{\eta}\|_2 - \theta, 0) / \|\boldsymbol{\eta}\|_2$ である。二次元画像の全変動に適用した場合は、各画素の二次元勾配ベクトルの向きを変えずに大きさを $1/\rho$ だけソフト縮小する処理になる。

(2) スパース MRI の算法の導出

スパースな輝度勾配 $[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2] \in \mathbb{R}^{d \times 2}$ とウェーブレット特徴量 $\mathbf{z}_3 \in \mathbb{R}^d$ をもつ画像を再構成する圧縮センシングの算法を以下に示す。次式のように最適化問題を定式化する。

$$\min_{(\mathbf{y}, \mathbf{z})} \|\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\|_{2,1} + w\|\mathbf{z}_3\|_1 + \iota_C(\mathbf{z}_4) \quad (34)$$

$$\text{subject to } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \\ \mathbf{W} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

ここで、行列 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は、再構成したい画像の画素値をもつベクトル \mathbf{y} から二次元離散ウェーブレット特徴量を算出する演算子である。 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{m \times d}$ は \mathbf{y} の観測行列であり、 \mathbf{z}_4 は観測データに相当する。これを評価している $\iota_C(\mathbf{z}_4)$ は、凸解析における指示関数 (indicator function) とよばれ、集合 C に対して $\mathbf{z}_4 \in C$ ならばゼロ、さもなければ $+\infty$ と定義された関数である [21]。MRI の圧縮センシングを想定するならば、観測行列 $\boldsymbol{\Phi}$ は k 空間への変換 (離散フーリエ変換) とサンプリングを表し、 k 空間の観測データ $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ と誤差 ε 以内で一致するデータの集合を $C = \{\mathbf{p} | \|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|_2 \leq \varepsilon\}$ と定義する。

Lustig ら [22] は、全変動や ℓ_1 ノルムを滑らかな関数に置き換えて同最適化問題を非線形共役勾配法で近似的に解いた。しかし、厳密解に収束する簡便なアルゴリズムを ADMM から導出できる。式(20)において、 $\mathbf{G} = [\mathbf{D}_x^T, \mathbf{D}_y^T, \mathbf{W}^T, \boldsymbol{\Phi}^T]^T$ と置き、 $f(\mathbf{y})=0$, $g(\mathbf{z})$ を式(34)の目的関数とすると、ADMM の反復式は以下のように書き下せる。

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \arg \min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{G}\mathbf{y} - (\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k)})\|_2^2 \quad (35)$$

$$[\mathbf{v}_1^T, \mathbf{v}_2^T, \mathbf{v}_3^T, \mathbf{v}_4^T]^T = \mathbf{G}\mathbf{y}^{(k+1)} + \mathbf{u}^{(k)} \quad (36)$$

$$[\mathbf{z}_1^{(k+1)}, \mathbf{z}_2^{(k+1)}] = \text{prox}_{\|\cdot\|_{2,1}, \rho}([\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]) \quad (37)$$

$$\mathbf{z}_3^{(k+1)} = \text{soft}(\mathbf{v}_3, w/\rho) \quad (38)$$

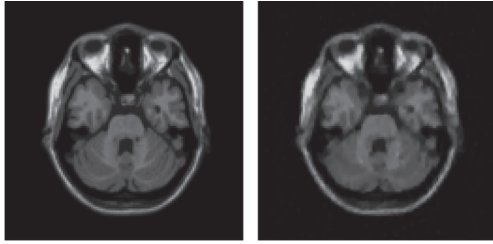


図1 スパース MRI の再構成の例. 左: 元画像 (128×128). 右: k 空間の 12.5% の観測から再構成した画像 (NMSE=1.3%, SSIM=0.951).

$$\mathbf{z}_4^{(k+1)} = \mathbf{b} + \varepsilon \frac{\mathbf{v}_4 - \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_4 - \mathbf{b}\|_2} \quad (39)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{G}\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k+1)} \quad (40)$$

式(35)の最小 2 乗解は $\mathbf{y} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k)})$ と陽に計算できる. しかし, この例題では, \mathbf{G} と \mathbf{G}^T を行列として扱う必要はない. これらをベクトルに作用させる演算は, 画像の有限差分計算, ウェーブレット変換・逆変換, 高速フーリエ変換・逆変換によってすべて実装できるので, LSQR [23] などの共役勾配法で非常に効率的に解 $\mathbf{y}^{(k+1)}$ が得られる. また, 式(37)は式(33)のように \mathbf{v}_{soft} で簡単に計算でき, その計算量はソフト縮小処理 soft とほぼ変わらない. 式(39)は指示関数 ι_ε の近接写像であり, $\mathbf{v}_4 - \mathbf{b}$ の方向に距離 ε だけ \mathbf{b} を修正する計算にすぎない.

画像再構成の例を図1に示す. 図1左の T1 画像 (画素数 $d=128 \times 128=16,384$) について, k 空間のおもに中央付近をランダムに重点サンプリングし, 観測数 $m=d/8$ のデータから再構成する. \mathbf{W} をタップ数 4 の Daubechies ウェーブレット変換とし, $w=1$, $\varepsilon=10^{-2}\sqrt{m}$ とした. この設定でアルゴリズムは 200 回の反復で十分に収束し, $\mathbf{y}^{(200)}$ から図1右が得られる. MATLAB で実装し汎用のラップトップ PC で実行した計算時間は約 10 秒である. なお, アルゴリズムの記載は省略するが, ADMM の収束は Nesterov の加速法で容易に改善できる [24]. 加速した ADMM では 50 回の反復 (3 秒未満) で図1右が得られた.

6. おわりに

圧縮センシングは, ランダムで不完全な観測によって得たデータから, その内訳となる要素

の組み合わせを表している「スパース解」を求め, 完全なデータを再構成するという観測の技法である. 本稿ではその基礎原理を解説した. また, 画像の特徴にスパース性などの性質をもたせる再構成アルゴリズムを柔軟に設計できる ADMM を紹介し, 全変動とウェーブレット特徴の ℓ_1 ノルムを最小化する Lustig らの MRI 圧縮センシングを例に, 画像再構成アルゴリズムを ADMM から導出した. 本稿では紹介しきれなかったが, 特徴の共起性や局所的なスパース性を示すことを奨励する再構成アルゴリズムも同様の手口で設計可能である. また, 動画の圧縮センシングでは, 画像の単純な変動による冗長性や, 周期的な画素値の変動による周波数成分のスパース性などを再構成に生かせる. 医用画像については, MRI の低ランク+スパース再構成 [25] や, 空間的構造をスパース表現する基底学習と組み合わせたブラインド圧縮センシング [26] などが提案されている. これらの先行研究では動画再構成を最適化問題として定式化しているものの, 提案されている最適化アルゴリズムは必ずしも効率的ではなく, 収束も保証されていない. 今後の進展が期待される研究課題である.

文 献

- [1] Candès EJ, Tao T: Decoding by linear programming. IEEE Trans Inf Theory **51**: 4203–4215, 2005
- [2] Donoho DL: Compressed sensing. IEEE Trans Inf Theory **52**: 1289–1306, 2006
- [3] Candès EJ, Romberg J, Tao T: Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans Inf Theory **52**: 489–509, 2006
- [4] Candès EJ, Tao T: Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? IEEE Trans Inf Theory **52**: 5406–5425, 2006
- [5] Pati YC, Rezaiifar R, Krishnaprasad PS, et al.: Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In proceedings of the 27th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, 1993, vol. 1, pp40–44
- [6] Needell D, Tropp JA: CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. Appl Comput Harmon Anal **26**: 301–321, 2009
- [7] Donoho DL, Elad M: Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ^1 minimization. Proc Natl Acad Sci U S A **100**: 2197–2202, 2003
- [8] Candès EJ: The restricted isometry property and its

- implications for compressed sensing. *Compt Rendus Math* **346**: 589–592, 2008
- [9] Baraniuk R, Davenport M, De Vore R, et al.: A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constr Approx* **28**: 253–263, 2008
- [10] Candès EJ, Romberg J, Tao T: Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm Pure Appl Math* **59**: 1207–1223, 2006
- [11] Candès EJ, Romberg J: Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Probl* **23**: 969–985, 2007
- [12] Donoho DL, Tanner J: Counting faces of randomly projected polytopes when the projection radically lowers dimension. *J Am Math Soc* **22**: 1–53, 2009
- [13] Chen SS, Donoho DL, Saunders MA: Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J Sci Comput* **20**: 33–61, 1998
- [14] Figueiredo MAT, Nowak RD, Wright SJ: Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE J Sel Top Signal Process* **1**: 586–597, 2007
- [15] Donoho DL: De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans Inf Theory* **41**: 613–627, 1995
- [16] Daubechies I, Deffrise M, De Mol C: An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint. *Comm Pure Appl Math* **57**: 1413–1457, 2004
- [17] Beck A, Teboulle M: A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM J Img Sci* **2**: 183–202, 2009
- [18] Gabay D, Mercier B: A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation. *Comput Math Appl* **2**: 17–40, 1976
- [19] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al.: Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Found Trends Mach Learn* **3**: 1–122, 2011
- [20] Afonso MV, Bioucas-Dias JM, Figueiredo MA, et al.: Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization. *IEEE Trans Image Process* **19**: 2345–2356, 2010
- [21] Rockafellar RT: *Convex Analysis*. Princeton Mathematics Series 28, Princeton University Press, Princeton, 1970. <http://www.math.washington.edu/~rtr/papers/rtr025-ConvexAnalysis.djvu>
- [22] Lustig M, Donoho D, Pauly JM: Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magn Reson Med* **58**: 1182–1195, 2007
- [23] Paige CC, Saunders MA: LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Trans Math Softw* **8**: 43–71, 1982
- [24] Goldstein T, O'Donoghue B, Setzer S, et al.: Fast alternating direction optimization methods. *SIAM J Imaging Sci* **7**: 1588–1623, 2014
- [25] Otazo R, Candès E, Sodickson DK: Low-rank plus sparse matrix decomposition for accelerated dynamic MRI with separation of background and dynamic components. *Magn Reson Med* **73**: 1125–1136, 2015
- [26] Majumdar A, Ward RK: Learning the sparsity basis in low-rank plus sparse model for dynamic MRI reconstruction. In *proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, South Brisbane, 2015, pp778–782

Underlying Principle of Compressed Sensing and Advanced Algorithm Design for Image Reconstruction

Tomoya SAKAI ^{*1}

^{*1} *Graduate School of Engineering, Nagasaki University*

High-dimensional data can be represented as a concise combination of explanatory data ingredients, which is referred to as the nature of sparsity. Compressed sensing is a general paradigm of sparsity-aware data acquisition to improve the functionality and lower the cost of measurement. For the compressed sensing fundamentally formulated as an underdetermined system of linear equations having a sparse solution, there have been provided theoretical underpinnings of random measurement and sparse reconstruction, as well as efficient sparse solvers based on convex relaxation. In imaging applications, reconstructed images are supposed to have sparse features, e.g., edges of objects. One can consistently derive practical algorithms for such image reconstruction by posing it as a linearly constrained convex optimization problem.

Key words: Sparse modeling, Convex optimization, ADMM, Total variation

Med Imag Tech **34**(4): 177–185, 2016



酒井智弥 (さかい ともや)

2001 年千葉大院・自然科学・博士後期課程修了。博士(工学)。同年千葉大 IMIT 助手。その後、同助教。現在、長崎大院・工・准教授。スパース性を生かすパターン認識・信号処理・機械学習の研究に従事。IEEE、電子情報通信学会、情報処理学会各会員。

*

*

*