Потапова Н.Н. ©
Доцент кафедры «Математика и информационные технологии»
Волгоградского архитектурно-строительного университета

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ MATHCAD

Аннотация
В работе предлагается при решении задачи линейного программирования графическим методом использовать средства интегрированной системы MATHCAD.

Ключевые слова: задача линейного программирования; графический метод; минимум; максимум; функция цели.

Keywords: linear programming problem; the graphical method; minimum; maximum; the objective function.

Одной из важнейших задач, стоящих перед высшей школой, является формирование всесторонне образованного специалиста, умеющего применять полученные знания в различных областях инженерной деятельности. В этой связи использование такого средства, как математическая интегрированная система MATHCAD, является мощным инструментом для решения многих практических задач.

При изучении таких дисциплин, как «Прикладная математика», «Математическое обеспечение технологических процессов» и др. рассматривается задача линейного программирования и ее решение графическим методом в двумерном пространстве. Трудно переоценить значение этого метода, позволяющего наглядно представить полученный результат. Реализуется графический метод практически всегда «вручную».

Ниже приводится пример[1,4] графического решения задачи линейного программирования с использованием средств интегрированной системы MATHCAD.

Постановка одной из прикладных задач**.** Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют 3 вида сырья: S_1, S_2 и S_3 .

Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, записаны в постановке задачи линейного программирования, где

x_1 – количество единиц продукции P_1,

x_2 - количество единиц продукции P_2,

z– функция цели.

Пусть **математическая модель** задачи имеет вид:

Найти максимум целевой функции

$$z= x_1 + 2x_2$$

при заданных ограничениях:

$x_1 - x_2 \le 5$

$15x_1 + 4x_2 \ge 132$

$8x_1 + 11x_2 \le 230$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$

1. Построим уравнения граничных прямых, заменив в ограничениях знаки неравенств на знаки равенств.

$x_1 - x_2 = 5 \qquad L_1$

$15x_1 + 4x_2 = 132 \qquad L_2$

$8x_1 + 11x_2 = 230 \qquad L_3$

$x_2 = 0$ L_4 ось абсцисс

$x_1 = 0$ ось ординат

2. Выполним построение прямых в системе MATHCAD. Для этого выразим из уравнений x_2 через x_1. Получим:

$x_2 = x_1 -5$

$x_2 = -15/4 \times x_1 +132/4$

$x_2 =- 8/11\times x_1 +230/11$

$x_2 =0$

Для построения прямой z=0 или $x_1 + 2x_2 = 0 = const$ приравняем функцию цели к нулю, откуда получим

$x_2 =-1/2\times x_1$

Для построения вектора, перпендикулярного к прямой z=0 задаем интервал в данном случае x:=0..1 и зависимость $x_2 =2\times x_1$.

Таким образом, для построения прямых в системе MATHCAD соответственно введем шесть функций и построим их в декартовой системе координат (листинг 1, рис.1).

Листинг 1. Решение задачи линейного программирования в системе MATHCAD:

$$y1(x) := x - 5$$
$$y2(x) := \frac{-15}{4} \cdot x + \frac{132}{4}$$
$$y3(x) := \frac{-8}{11} \cdot x + \frac{230}{11}$$
$$y4(x) := 0$$
$$y5(x) := \frac{-1}{2} \cdot x$$
$$x := 0..15$$
$$x1 := 0..1$$
$$y6(x1) := 2 \cdot x1$$

3. Взяв какую-нибудь точку, например O(0;0), установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство.

4. Пересечение полуплоскостей дает многоугольник решений *ABC* (в данном случае треугольная область). Выделяем эту область (рис.1).

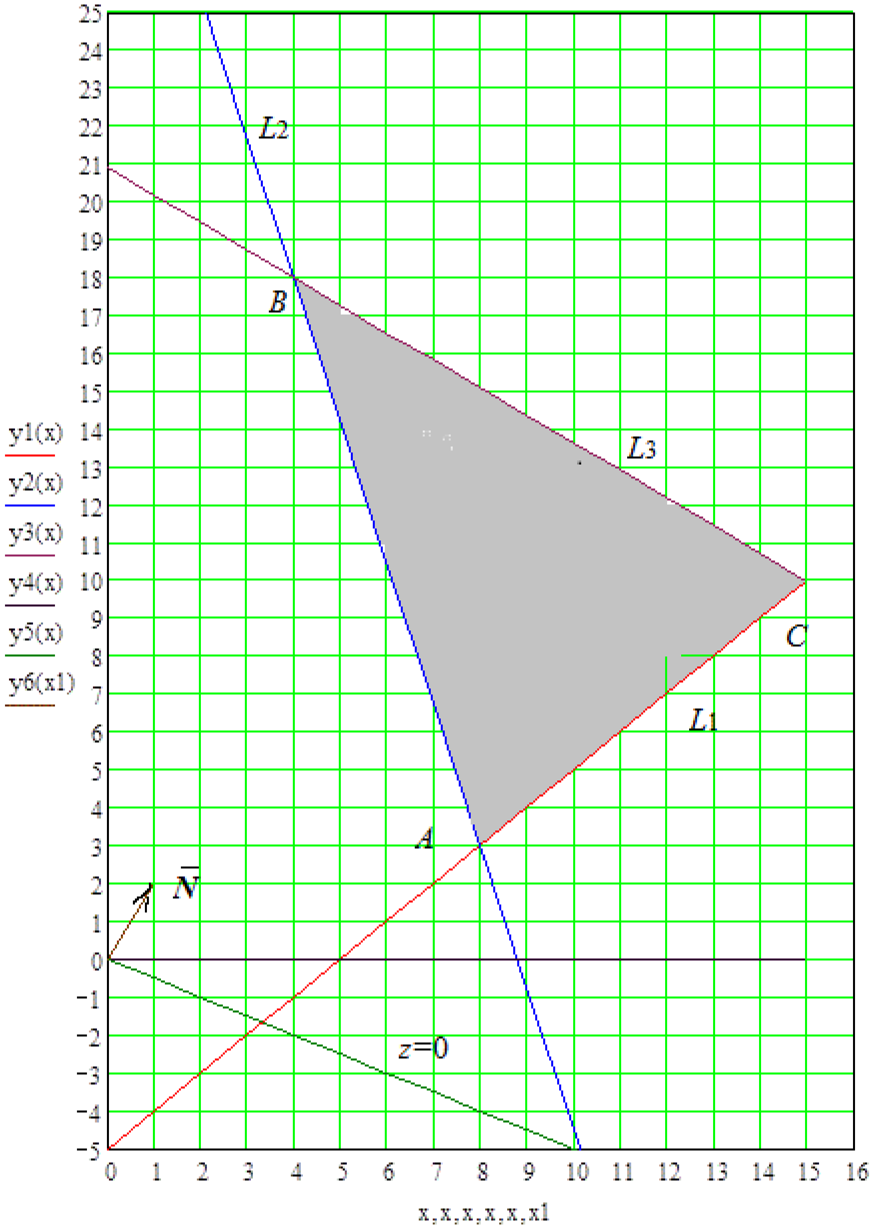

Рис.1. **Построение многоугольника решений в системе MATHCAD**

5. Построенную прямую z = 0 перемещаем в направлении вектора $\overline{N}$ параллельно самой себе.

6. Опорной по отношению к многоугольнику решений прямая z = 0 становится в угловой точке A (первая точка, для которой z = 0 является опорной, рис.1), где функция z принимает минимальное значение.

7. Определим координаты точки минимума и значение целевой функции. Так как точка минимума A лежит на пересечении прямых L_1 и L_2=0, для нахождения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ 15x_1 + 4x_2 = 132 \end{cases}$$

Примечание. Решение системы уравнений выполним матричным способом (листинг 2), используя формулу (1):

X=A^{-1}*B, (1)

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A – коэффициентов левых частей уравнений решаемой системы, B – вектор правых частей.

Листинг 2. Нахождение координат и функции цели точки минимума в системе MATHCAD:

ORIGIN:=1

$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 132 \end{pmatrix}$

$X := A^{-1} \cdot B$ $\quad X = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$z := X_1 + 2 \cdot X_2$ $\quad z=14$

Таким образом, точка $A(8;3)$ - точка минимума. Подставим значения $x_1 = 8$, $x_2 = 3$ в функцию цели:

$z_{min} = 8+2\times3 = 14.$

Следовательно, для получения минимальной прибыли необходимо запланировать производство 8 единиц продукции P_1 и 3 единицы продукции P_2.

8. Аналогично вычисляются координаты точки максимума B и значение функции цели в этой точке (листинг 3). Опорной по отношению к многоугольнику решений прямая z = 0 становится в последней угловой точке B (рис.1), где функция z принимает максимальное значение. В нашем примере точка максимума лежит на пересечении прямых L_2 и L_3=0. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 15x_1 + 4x_2 = 132 \\ 8x_1 + 11x_2 = 230 \end{cases}$$

Листинг 3. Нахождение координат и функции цели точки максимума в системе MATHCAD:

$A := \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 132 \\ 230 \end{pmatrix}$

$X := A^{-1} \cdot B$ $\quad X = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$

$z := X_1 + 2 \cdot X_2$ $\quad$ z=40

Точка $B(4;18)$ - точка максимума. Подставим значения $x_1 = 4$, $x_2 = 18$ в функцию цели:

$z_{max} = 4+2\times18 = 40.$

Следовательно, для получения максимальной прибыли необходимо запланировать производство 4 единиц продукции P_1 и 18 единиц продукции P_2.

В заключении следует отметить, что использование системы MATHCAD позволит избежать многих ошибок при построении многоугольника решений, а также в расчетах координат точек, в которых функция цели достигает своего минимального и максимального значения, и, в конечном итоге, повысить эффективность обучения.

Литература

1. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Методы оптимизации в инженерных задачах»/Сост. А.Д. Скороходова, Н.А. Михайлова, А.А. Чураков, ВолгГАСА.-Волгоград, 2001.-36с.