

## 球面調和関数

### 極座標における計量テンソル

**Definition 0.1** (極座標変換):  $\forall d \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^d$ における以下のような極座標 $(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ から直交座標 $(x_1, \dots, x_d)$ への変換を定める。

$$\begin{cases} 0 < r \\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi \\ 0 \leq \theta_i < \pi \text{ for } 2 \leq i \leq d-1 \end{cases}$$
$$x_i = \begin{cases} r \cos \varphi & \text{if } i = 1 \\ r \prod_{j=d-i}^{d-1} \sin(\theta_j) \cos \varphi & \text{if } 2 \leq i \leq d-1 \\ r \prod_{j=1}^{d-1} \sin(\theta_j) & \text{if } i = d \end{cases}$$

参考文献と異なり、 $\theta_i$ をこのような順番で取らないと、球面調和関数の計算で添字をずらすこととなり、混乱する。 $x_i$ の順序はどうでも良い。

**Lemma 0.1:**

$$g_{ij} = \text{diag} \left( 1, r^2 \prod_{j=2}^{d-1} \sin^2(\theta_j), \dots, r^2 \right)_{ij}$$

*Proof:*

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{d-1} \left( \left( \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) (d\theta_i)^2 \right)$$

■

[1]

**Corollary 0.1:**

$$g^{ij} = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{r^2 \prod_{j=2}^{d-1} \sin^2(\theta_j)}, \dots, \frac{1}{r^2} \right)_{ij}$$

**Corollary 0.2:**

$$\sqrt{|g|} = r^{d-1} \prod_{i=2}^{d-1} \sin^{i-1}(\theta_i)$$

### 極座標ラプラシアン

**Theorem 0.1** (Voss-Weyl の定理 [2]):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \psi)$$

**Theorem 0.2** ( $\nabla^2$ の極座標表示):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r f) + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{\left( r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) \sin^{i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f)$$

*Proof:*

各  $i$  ごとに分割する。

$$\nabla^2 f = (\nabla^2)_r f + \sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2)_{\theta_i} f$$

まず、 $g^{i'j}$  は  $\partial_{i'}$  と可換である。 $i'$  が  $r$  に対応するとき、 $|g|$  の  $r$  に依存する部分以外は  $\partial_{i'}$  と可換であるため、約分して、

$$(\nabla^2)_r f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r f)$$

$i'$  が  $\theta_i$  に対応するとき、 $|g|$  の  $\theta_i$  に依存する部分以外は  $\partial_{i'}$  と可換であるため、約分して、

$$(\nabla^2)_{\theta_i} f = \frac{1}{\left( r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) \sin^{i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f)$$

■

[3]

**Lemma 0.2:**

$$\frac{(\nabla_d^2)_{\theta_i}}{\sin^2(\theta_{d-1})} f = (\nabla_{d-1}^2)_{\theta_i} f$$

## ラプラス方程式

$d$ 次元ラプラス方程式  $\nabla^2 f = 0$  の変数分離可能な解  $f(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = R(r)Z(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})$  を考える。

## 参考文献

- [1] 「(3+1+1)極座標系の超球面調和関数」. [Online]. 入手先: <http://kuiperbelt.la.coocan.jp/sf/egan/Diaspora/atomic-orbital/laplacian/5D-1.html>
- [2] 「The Voss-Weyl formula」. [Online]. 入手先: <https://www.general-relativity.net/2021/01/the-voss-weyl-formula.html>
- [3] 「ラプラシアン極座標表示～計量テンソル編～ : n 次元」. [Online]. 入手先: <https://wasan.hatenablog.com/entry/20110608/1307529023>