

球面調和関数

極座標における計量テンソル

Definition 0.1 (極座標変換): $\forall d \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^d$ における以下のような極座標 $(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ から直交座標 (x_1, \dots, x_d) への変換を定める。

$$\begin{cases} 0 < r \\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi \\ 0 \leq \theta_i < \pi \text{ for } 2 \leq i \leq d-1 \end{cases}$$
$$x_i = \begin{cases} r \cos \varphi & \text{if } i = 1 \\ r \prod_{j=d-i}^{d-1} \sin(\theta_j) \cos \varphi & \text{if } 2 \leq i \leq d-1 \\ r \prod_{j=1}^{d-1} \sin(\theta_j) & \text{if } i = d \end{cases}$$

参考文献と異なり、 θ_i をこのような順番で取らないと、球面調和関数の計算で添字をずらすこととなり、混乱する。 x_i の順序はどうでも良い。

Lemma 0.1:

$$g_{ij} = \text{diag} \left(1, r^2 \prod_{j=2}^{d-1} \sin^2(\theta_j), \dots, r^2 \right)_{ij}$$

Proof:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{d-1} \left(\left(\prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) (d\theta_i)^2 \right)$$

■

[1]

Corollary 0.1:

$$g^{ij} = \text{diag} \left(1, \frac{1}{r^2 \prod_{j=2}^{d-1} \sin^2(\theta_j)}, \dots, \frac{1}{r^2} \right)_{ij}$$

Corollary 0.2:

$$\sqrt{|g|} = r^{d-1} \prod_{i=2}^{d-1} \sin^{i-1}(\theta_i)$$

極座標ラプラシアン

Theorem 0.1 (Voss-Weyl の定理 [2]):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \psi)$$

Theorem 0.2 (∇^2 の極座標表示):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r f) + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{\left(r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j)\right) \sin^{i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f)$$

Proof:

各 i' ごとに分割する。

$$\nabla^2 f = (\nabla^2)_r f + \sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2)_{\theta_i} f$$

まず、 $g^{i'j}$ は $\partial_{i'}$ と可換である。 i' が r に対応するとき、 $|g|$ の r に依存する部分以外は $\partial_{i'}$ と可換であるため、約分して、

$$(\nabla^2)_r f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r f) = \partial_r^2 f + \frac{d-1}{r} \partial_r f$$

i' が θ_i に対応するとき、 $|g|$ の θ_i に依存する部分以外は $\partial_{i'}$ と可換であるため、約分して、

$$(\nabla^2)_{\theta_i} f = \frac{1}{\left(r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j)\right) \sin^{i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f) = \frac{1}{r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j)} (\partial_{\theta_i}^2 f + (i-1) \cot(\theta_i) \partial_{\theta_i} f)$$

■

[3]

Lemma 0.2:

$$\forall i \in \{1, \dots, d-2\}, \frac{(\nabla^2_d)_{\theta_i}}{\sin^2(\theta_{d-1})} f = (\nabla^2_{d-1})_{\theta_i} f$$

ラプラス方程式

d 次元ラプラス方程式 $\nabla^2 f = 0$ の変数分離可能な解 $f(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = R_d(r) Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ を考える。代入して

$$Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) (\nabla^2)_r R_d(r) + R_d(r) \sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2_d)_{\theta_i} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = 0$$

$$-\frac{(\nabla^2)_r R_d(r)}{R_d(r)} = \frac{\sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2_d)_{\theta_i} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})}{Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})} =: k^2 = \text{const.}$$

$$\begin{cases} \frac{(\nabla^2)_r R_d(r)}{R_d(r)} + k^2 = 0 \\ \frac{\sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2_d)_{\theta_i} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})}{Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})} - k^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_r^2 R_d(r) + \frac{d-1}{r} \partial_r R_d(r) + k(k+d-2) R_d(r) = 0 & (\text{ベッセルの微分方程式}) \\ \sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2_d)_{\theta_i} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) - k(k+d-2) Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = 0 \end{cases}$$

$d=2$ のとき、

$$\partial_{\theta_1}^2 Z(\theta_1) - k^2 Z(\theta_1) = 0$$

$$Z(\theta_1) = A \cos(k\theta_1) + B \sin(k\theta_1)$$

[4]

$d=d$ のとき、 $Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = W_d(\theta_{d-1}) Z_{d-1}(\theta_1, \dots, \theta_{d-2})$ と変数分離可能な解を考える。

$$\sum_{i=1}^{d-2} (\nabla^2_d)_{\theta_i} Z_d + (\nabla^2_d)_{\theta_{d-1}} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) - k(k+d-2)Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = 0$$

$$\sin^2(\theta_{d-1}) \sum_{i=1}^{d-2} (\nabla^2_{d-1})_{\theta_i} Z_{d-1}(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}) W_d(\theta_{d-1}) + (\nabla^2_d)_{\theta_{d-1}} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) - k(k+d-2)Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = 0$$

$d = d-1$ のときの式を代入して、

$$\sin^2(\theta_{d-1}) l(l+d-1) Z_{d-1}(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}) W_d(\theta_{d-1}) + (\nabla^2_d)_{\theta_{d-1}} Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) - k(k+d-2)Z_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = 0$$

$$\sin^2(\theta_{d-1}) l(l+d-1) W_d(\theta_{d-1}) + (\nabla^2_d)_{\theta_{d-1}} W_d(\theta_{d-1}) - k(k+d-2)W_d(\theta_{d-1}) = 0$$

$$\frac{\partial_{\theta_i}^2 W_d(\theta_{d-1}) + (d-1) \cot(\theta_i) \partial_{\theta_i} W_d(\theta_{d-1})}{r^2} - \cos^2(\theta_{d-1}) k(k+d-2) W_d(\theta_{d-1}) = 0$$

$t := \cos(\theta_{d-1})$ とおけば、

$$(\partial_{\theta_i}^2 + (i-1))$$

参考文献

- [1] 「(3+1+1)極座標系の超球面調和関数」. [Online]. 入手先: <http://kuiperbelt.la.coocan.jp/sf/egan/Diaspora/atomic-orbital/laplacian/5D-1.html>
- [2] 「The Voss-Weyl formula」. [Online]. 入手先: <https://www.general-relativity.net/2021/01/the-voss-weyl-formula.html>
- [3] 「ラブラシアン極座標表示～計量テンソル編～ : n 次元」. [Online]. 入手先: <https://wasan.hatenablog.com/entry/20110608/1307529023>
- [4] 「ラプラス方程式の一般解」. [Online]. 入手先: https://ieyasu03.web.fc2.com/PhysicsMath/43-Laplace_Eq.html