

球面調和関数

極座標における計量テンソル

Definition 0.1 (極座標変換): $\forall d \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^d$ における以下のような極座標 $(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ から直交座標 (x_1, \dots, x_d) への変換を定める。

$$\begin{cases} 0 < r \\ 0 \leq \theta_1 < 2\pi \\ 0 \leq \theta_i < \pi \text{ for } 2 \leq i \leq d-1 \end{cases}$$
$$x_i = \begin{cases} r \cos \varphi & \text{if } i = 1 \\ r \prod_{j=d-i}^{d-1} \sin(\theta_j) \cos \varphi & \text{if } 2 \leq i \leq d-1 \\ r \prod_{j=1}^{d-1} \sin(\theta_j) & \text{if } i = d \end{cases}$$

参考文献と異なり、 θ_i をこのような順番で取らないと、球面調和関数の計算で添字をずらすこととなり、混乱する。 x_i の順序はどうでも良い。

Lemma 0.1:

$$g_{ij} = \text{diag} \left(1, r^2 \prod_{j=2}^{d-1} \sin^2(\theta_j), \dots, r^2 \right)_{ij}$$

Proof:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{d-1} \left(\left(\prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) (d\theta_i)^2 \right)$$

■

[1]

Corollary 0.1:

$$g^{ij} = \text{diag} \left(1, \frac{1}{r^2 \prod_{j=2}^{d-1} \sin^2(\theta_j)}, \dots, \frac{1}{r^2} \right)_{ij}$$

Corollary 0.2:

$$\sqrt{|g|} = r^{d-1} \prod_{i=2}^{d-1} \sin^{i-1}(\theta_i)$$

極座標ラプラシアン

Theorem 0.1 (Voss-Weyl の定理 [2]):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \psi)$$

Theorem 0.2 (∇^2 の極座標表示):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r f) + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{\left(r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) \sin^{i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f)$$

Proof:

各 i' ごとに分割する。

$$\nabla^2 f = (\nabla^2)_r f + \sum_{i=1}^{d-1} (\nabla^2)_{\theta_i} f$$

まず、 $g^{i'j}$ は $\partial_{i'}$ と可換である。 i' が r に対応するとき、 $|g|$ の r に依存する部分以外は $\partial_{i'}$ と可換であるため、約分して、

$$(\nabla^2)_r f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r (r^{d-1} \partial_r f)$$

i' が θ_i に対応するとき、 $|g|$ の θ_i に依存する部分以外は $\partial_{i'}$ と可換であるため、約分して、

$$(\nabla^2)_{\theta_i} f = \frac{1}{\left(r^2 \prod_{j=i+1}^{d-1} \sin^2(\theta_j) \right) \sin^{i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} (\sin^{i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f)$$

■

[3]

ラプラス方程式

d 次元ラプラス方程式 $\nabla^2 f = 0$ の変数分離可能な解 $f(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = R(r)Z(\theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ を考える。

参考文献

- [1] 「(3+1+1)極座標系の超球面調和関数」. [Online]. 入手先: <http://kuiperbelt.la.coocan.jp/sf/egan/Diaspora/atomic-orbital/laplacian/5D-1.html>
- [2] 「The Voss-Weyl formula」. [Online]. 入手先: <https://www.general-relativity.net/2021/01/the-voss-weyl-formula.html>
- [3] 「ラプラシアン of 極座標表示～計量テンソル編～ : n 次元」. [Online]. 入手先: <https://wasan.hatenablog.com/entry/20110608/1307529023>