球面調和関数

極座標における計量テンソル

Definition 0.1 (極座標変換): $\forall d \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^d$における以下のような極座標$(r, \theta_1, ..., \theta_{d-1})$から直交座標$(x_1, ..., x_d)$への変換を定める。

$$\begin{cases} 0 < r \\ 0 \leq \theta_i < \pi \quad \text{for } 1 \leq i \leq d-2 \\ 0 \leq \theta_{d-1} < 2\pi \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} r \cos \varphi & \text{if } i = 1 \\ r \prod_{j=1}^{i-1} \sin(\theta_j) \cos \varphi & \text{if } 2 \leq i \leq d-1 \\ r \prod_{j=1}^{d-1} \sin(\theta_j) & \text{if } i = d \end{cases}$$

Lemma 0.1:

$$g_{ij} = \operatorname{diag}\left(1, r^2, r^2 \sin^2(\theta_1), ..., r^2 \prod_{j=1}^{d-2} \sin^2(\theta_j)\right)_{ij}$$

Proof:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{d-1} \left(\left(\prod_{j=1}^{i-1} \sin^2(\theta_j) \right) (d\theta_i)^2 \right)$$

■

[1]

極座標ラプラシアン

Theorem 0.1 (Voss-Weyl の定理 [2]):

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \psi \right)$$

Theorem 0.2 (∇^2の極座標表示):

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r \left(r^{d-1} \partial_r f \right) + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{1}{\left(r^2 \prod_{j=1}^{i-1} \sin^2(\theta_j) \right) \sin^{d-i-1}(\theta_i)} \partial_{\theta_i} \left(\sin^{d-i-1}(\theta_i) \partial_{\theta_i} f \right)$$

Proof:

$$g^{ij} = \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta_1)}, ..., \frac{1}{r^2 \prod_{j=1}^{d-2} \sin^2(\theta_j)}\right)_{ij}$$

$$\sqrt{|g|} = r^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} \sin^{d-i-1}(\theta_i)$$

各iごとに分割する。

$$\nabla^2 f = \left(\nabla^2\right)_r f + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\nabla^2\right)_{\theta_i} f$$

まず、g^{ij}は∂_iと可換である。 iがrに対応するとき、$|g|$のrに依存する部分以外は∂_iと可換であるため、約分して、

$$\left(\nabla^2\right)_r f = \frac{1}{r^{d-1}} \partial_r \left(r^{d-1} \partial_r f\right)$$

iがθ_jに対応するとき、$|g|$のθ_jに依存する部分以外は∂_iと可換であるため、約分して、

$$\left(\nabla^2\right)_{\theta_j} f = \frac{1}{\left(r^2 \prod_{k=1}^{j-1} \sin^2(\theta_k)\right) \sin^{d-j-1}\left(\theta_j\right)} \partial_{\theta_j} \left(\sin^{d-j-1}\left(\theta_j\right) \partial_{\theta_j} f\right)$$

■

[3]

ラプラス方程式

d次元ラプラス方程式$\nabla^2 f = 0$の変数分離可能な解$f(r, \theta_1, ..., \theta_{d-1}) = R(r) Z(\theta_1, ..., \theta_{d-1})$を考える。

参考文献

[1] 「(3+1+1)極座標系の超球面調和関数」. [Online]. 入手先: http://kuiperbelt.la.coocan.jp/sf/egan/Diaspora/atomic-orbital/laplacian/5D-1.html

[2] 「The Voss-Weyl formula」. [Online]. 入手先: https://www.general-relativity.net/2021/01/the-voss-weyl-formula.html

[3] 「ラプラシアンの極座標表示〜計量テンソル編〜 ： n 次元」. [Online]. 入手先: https://wasan.hatenablog.com/entry/20110608/1307529023