AI 기초

2019년-2020

강봉주

확률 분포

확률 분포

[확률 시행과 표본 공간]

- 실험(experiment) 또는 시행(trial)
- 가능한 모든 결과(outcome)가 정의되어 있고 무한히 반복 가능한 절차(procedure)
- 무작위 또는 임의(random) 시행은 가능한 결과가 2개 이상인 시행

1) 동전 던지기: 2개의 가능한 결과(베르누이 시행)
2) 주사위 던지기: 6개의 가능한 결과

확률 분포

[확률 시행과 표본 공간]

- 표본 공간(sample space) 또는 결과 공간(outcome space)
- 확률 시행에서 가능한 모든 결과의 집합

1) 동전 던지기: {H, T}
2) 주사위 던지기: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

확률 분포

[**사건과 상대도수**]

- 사건(event):
- 표본 공간의 부분 집합

1) 동전 던지기: $\{\phi, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$
2) 주사위 던지기: $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \dots, \{1, \dots, 6\}\}$

확률 분포

[**사건과 상대도수**]

- 상대 도수(relative frequency):
- N번 시행에서 특정 사건이 f번 일어났다고 한다면 상대 도수는

  $$\frac{f}{N}$$

In	`# 이항 분포`
	`trials = 1`
	`event_prob = 1/6`
	`size = 100`
	`np.random.binomial(n=trials,p=event_prob, size=size)`

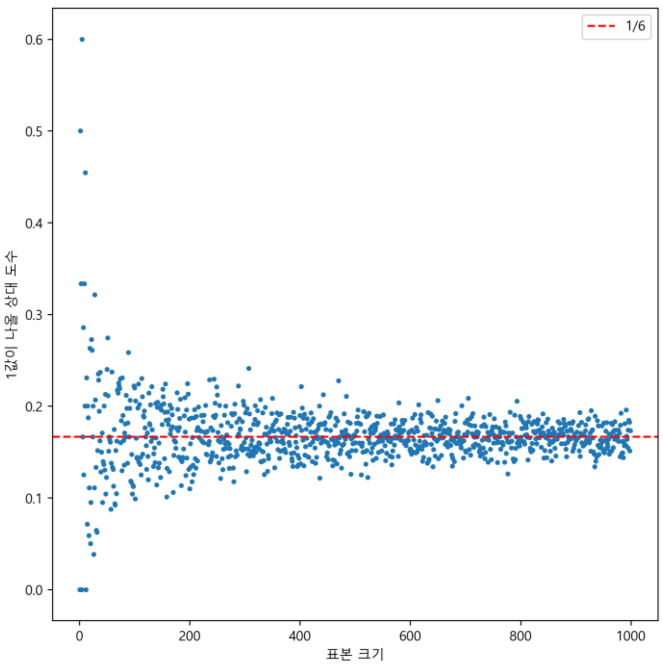
Out	array([0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])

특정 사건의 1번 시행의 성공 확률이 1/6인 경우에 100개의 표본 추출

확률 분포

[**사건과 상대도수**]

- 상대 도수(relative frequency)
- $\frac{f}{N}$



표본의 크기가 크면 어떤 값으로 수렴

확률 분포

[**사건과 상대도수**]

- 많은 횟수를 시행하는 경우에는 상대 도수 값이 특정 값으로 안정화
- 그 값을 p 이라고 한다면 미래의 시행에서 해당 사건은 그 값만큼 일어날 것이라고 생각할 수 있음
- 이 값을 사건 ω에 대한 확률(probability)로 정의
- 상대도수 접근 방법, 통계적 확률

확률 분포

[**사건과 상대도수**]

- 특정한 사건의 확률을 구한다는 것
- 적절한 집합 함수 P를 찾는 것

$$\Pr(\omega) = \Pr(\{2\}) = P(\{2\})$$
$$\omega = \{2\} \in \mathcal{F} = \left\{\phi, \{1\}, \ldots, \{1, \ldots, 6\}\right\}$$

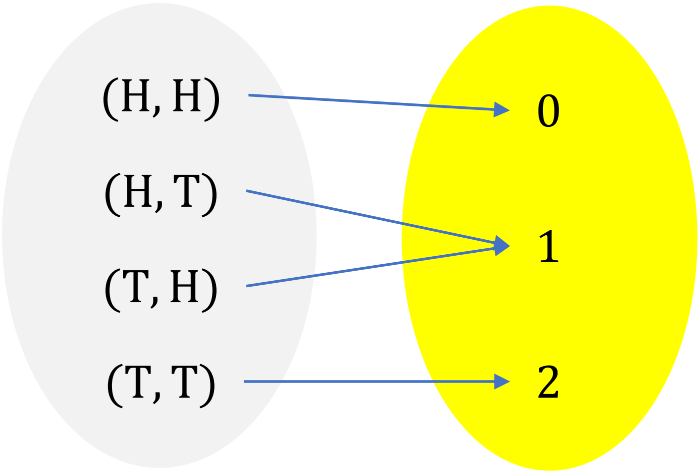
확률 분포

[확률 변수]

- 표본 공간(Ω)
- 하나의 함수 X가 모든 $c \in \Omega$에 대하여 딱 한 개의 숫자만을 할당
- $X(c) = x$, 이 함수를 확률 변수

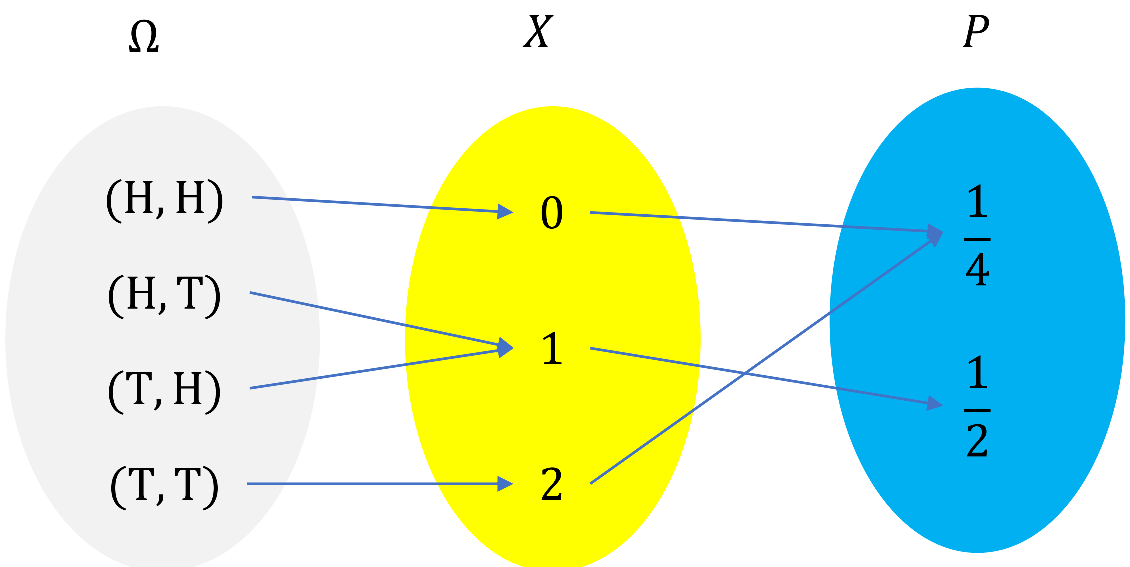
$\Omega = \{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$

X: 뒷면이 나오는 개수



확률 분포

[확률 변수]



$$\Pr(\{(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}) = \Pr(X = 1) = \frac{1}{2}$$

표본 공간 위에서 확률을 정의하지 않고 숫자 값을 갖는 확률 변수 위에서 확률 정의

확률 분포

[확률 변수]

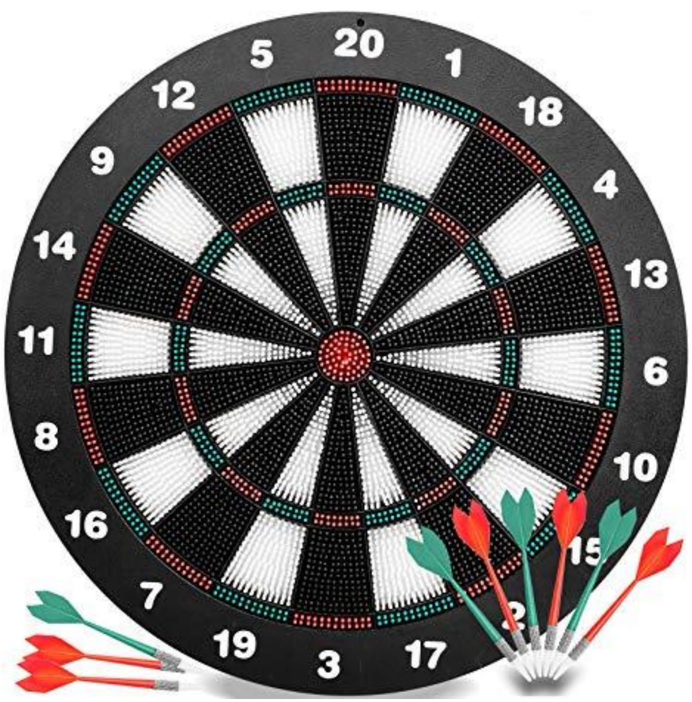
- 확률 분포표:
- 확률변수의 값과 그 값의 확률을 계산한 표

x	0	1	2
$\Pr(X = x)$	1/4	1/2	1/4

확률 분포

[확률 변수]

- 확률 변수의 값이 연속인 경우
- 다트 위의 임의의 한 점



4번 구획에 들어갈 확률은?

- 면적의 비로 계산
- 전체 면적은 πr^2, 4번 구획의 면적은 $\pi r^2/20$

$$\frac{\pi r^2/20}{\pi r^2} = \frac{1}{20}$$

확률 분포

[**확률 밀도 함수**]

- $P(A) = \Pr(X \in A), \forall A \subset \chi$

모든 A에 대하여 해당 확률 값을 계산하여 확률 분포표 생성?

어떤 A가 정의된다 하더라도 이를 계산할 수 있는 함수가 필요

➔ 확률 밀도 함수(probability density function)

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수]

- 확률 변수 공간이 이산형인 경우
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathcal{X}$
- $\sum_{\mathcal{X}} f(x) = 1$
- $P(A) = \Pr(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) = \sum_{A} f(x)$

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수]

- 확률 변수 공간이 이산형인 경우
- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

확률 분포

[**확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수**]

- 확률 변수 공간이 이산형인 경우

동전은 4번 던질 때 앞면이 나오는 개수의 분포

- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$
- $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\binom{4}{1} = ?$$

In	`# 조합 계산`
	`import scipy.special`
	`trials = 4`
	`event_prob = 1/2`
	`A = [0, 1, 2]`
	`scipy.special.comb(trials, A)`

Out	array([1., 4., 6.])

확률 분포

[**확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수**]

- 확률 변수 공간이 이산형인 경우

동전은 4번 던질 때 앞면이 나오는 개수의 분포

- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$
- $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\sum_{\{0,1,2,3,4\}} f(x) = 1$$

In

```
# 확률 밀도함수 조건 점검
trials = 4
event_prob = 1/2
A = np.arange(0, 5)

# 각각의 확률값
prob = scipy.special.comb(trials, A)*(1/2)**4
prob
```

Out

```
array([0.0625, 0.25 , 0.375 , 0.25 , 0.0625])
```

확률 분포

[**확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수**]

- 확률 변수 공간이 이산형인 경우

동전은 4번 던질 때 앞면이 나오는 개수의 분포

- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$
- $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\sum_{\{0,1,2,3,4\}} f(x) = 1$$

In	`# 각 확률의 합계` `prob.sum()`
Out	1.0

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수]

- 확률 변수 공간이 이산형인 경우

동전은 4번 던질 때 앞면이 나오는 개수의 분포

- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{0, 1, 2\}$
- $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{x!(4-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\sum_{\{0,1,2,3,4\}} f(x) = 1$$

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} b^x a^{n-x}$$

$$a = b = \frac{1}{2}, n = 4$$

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 이산형 확률 밀도 함수]

- 예제
- 앞의 예에서 $A = \{0, 1, 2\}$의 확률을 계산하세요.

In	# 해답 import scipy.special A = [0, 1, 2] trials = 4 event_prob = 1/2 np.sum(scipy.special.comb(trials, A) * event_prob ** tr ials)
Out	0.6875

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 연속형 확률 밀도 함수]

- 확률 변수 공간이 연속형인 경우
- $f(x) > 0, \forall x \in \mathcal{X}$
- $\int_{\mathcal{X}} f(x)dx = 1$
- $P(A) = \mathrm{Pr}(\mathrm{X} \in \mathrm{A}) = \int_{A} f(x)dx$: 면적으로 정의

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 연속형 확률 밀도 함수]

- 확률 변수 공간이 연속형인 경우
- $\mathcal{X} = \{0 < x < \infty\},\ A = \{0 < x < 1\},\ f(x) = e^{-x}$
- $\int_{\mathcal{X}} f(x)dx = 1$

In	`import sympy`
	`x = sympy.Symbol('x')`
	`PA = sympy.integrate(sympy.exp(-x), (x, 0, sympy.oo))`
	`PA`

Out	1

확률 분포

[확률 밀도 함수 / 연속형 확률 밀도 함수]

- 확률 변수 공간이 연속형인 경우
- $\mathcal{X} = \{0 < x < \infty\},\ A = \{0 < x < 1\},\ f(x) = e^{-x}$
- $\int_{\mathcal{X}} f(x)dx = 1$
- $\int_{A} f(x)dx = 1 - e^{-1}$

In	`# 특정 이벤트의 확률 구하기`
	`import sympy`
	`x = sympy.Symbol('x')`
	`PA = sympy.integrate(sympy.exp(-x), (x, 0, 1))`
	`PA`

Out	$1 - e^{-1}$

확률 분포

[**분포 함수(distribution function)**]

- $A = (-\infty, x]$인 경우에 $P(A) = \Pr(A) = F(x)$를 분포 함수라고 정의
- x 값에만 의존하는 함수
- $F(x) = \sum_{i \le x} f(i)$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$

확률 분포

[**분포 함수(distribution function)**]

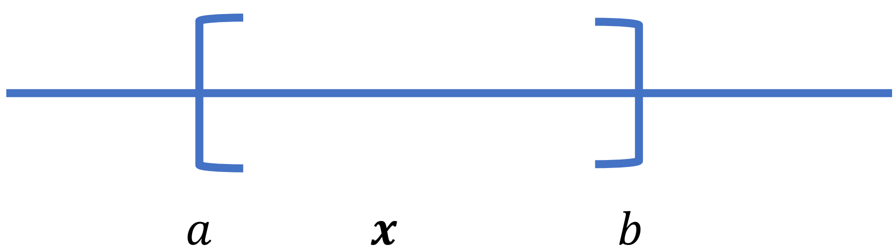
- $A = (-\infty, x]$인 경우에 $P(A) = \Pr(A) = F(x)$를 분포 함수라고 정의
- x 값에만 의존하는 함수

1) $0 \le F(x) \le 1 \because 0 \le \Pr(X \le x) \le 1$
2) $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$
3) $F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
4) $\Pr(a < x < b) = F(b) - F(a)$

확률 분포

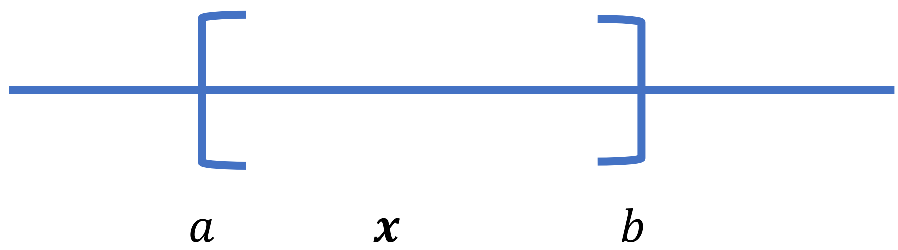
[분포 함수(distribution function)]

- $\chi = [a, b]$
- $X(x) = x$
- $[a, b]$ 에서 한 점을 선택하는 시행
- $F(x) = ?$



확률 분포

[분포 함수(distribution function)]



$$F(x) = \Pr([a, x]) = c(x - a)$$: 길이에 비례

$$F(b) = 1 \Rightarrow c(b - a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b - a}$$

$$\therefore F(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

구간 $[a, b]$에서 균등 분포(uniform distribution)

확률 분포

[**분포 함수(distribution function)**]

예제)

- 구간 [0, 1]에서 정의된 균등 분포의 분포 함수를 정의하세요
- 분포 함수를 x값에 따른 그래프를 그리세요

In

```
# 해답
#1)
import sympy
a, b, x = sympy.symbols('a, b, x')
x = sympy.Symbol('x')
F = sympy.Lambda((x, a, b), x/(b-a))
F(x, 0, 1)
```

Out

$$x$$

확률 분포

[**분포 함수(distribution function)**]

예제)

- 구간 [0, 1]에서 정의된 균등 분포의 분포 함수를 정의하세요
- 분포 함수를 x값에 따른 그래프를 그리세요

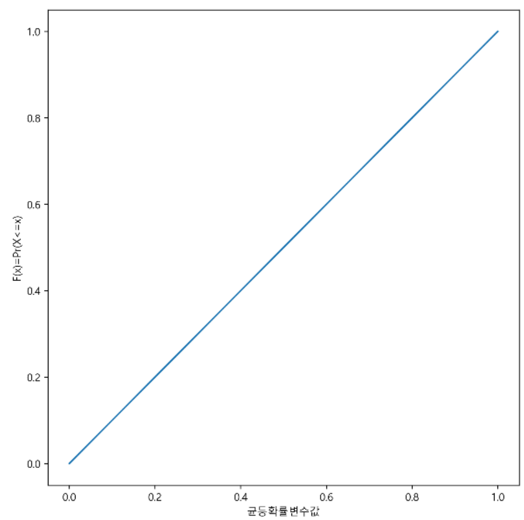
In
```
# 2)
import scipy.stats as ss
x = np.linspace(0,1, 100)
cdf_x = x

fig, ax = plt.subplots(figsize=(7,7))
ax.plot(x, cdf_x)
ax.set_xlabel("균등확률변수값")
ax.set_ylabel("F(x)=Pr(X<=x)")

plt.tight_layout()
```
Out

확률 분포

[**분포 함수(distribution function)**]

예제)

- 구간 [0, 1]에서 정의된 균등 분포의 분포 함수를 정의하세요
- 분포 함수를 x값에 따른 그래프를 그리세요



확률 분포

[기대값(expectation)]

- 확률변수 X 에 대한 기대값
- $E(X) = \sum_x xf(x)$
- X가 가질 수 있는 값이 $x_1, \dots, x_n$ 일 때 이 값들이 가중 평균(weight average): $x_1 f(x_1) + \cdots + x_n f(x_n)$
- $\boldsymbol{\mu} = E(X)$

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 확률변수 $(X-\mu)^2$에 대한 기대값: 분산
- $E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$
- 평균과의 편차 제곱에 대한 가중 평균
- $\boldsymbol{\sigma^2} = E(X-\mu)^2$
- σ: 분산의 양의 제곱근(표준편차)

$$
\begin{aligned}
E(X-\mu)^2 &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

확률 분포

[**기대값(expectation)]**

예제)

$X \sim U(-1,1), Y \sim U(-2,2)$ 일 때

1) 각각의 평균을 구하세요
2) 각각의 표준편차를 구하세요

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 표준편차의 의미

예제)

$X \sim U(-1, 1), Y \sim U(-2, 2)$ 일 때

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x \times \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{4} x^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \times \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{6} x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{3}\right) - (0)^2 = \frac{1}{3} \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \sigma(Y) = 2/\sqrt{3}$$

확률 분포

[기대값(expectation)]

예제)

$X \sim U(-1,1), Y \sim U(-2,2)$ 일 때

1) 각각의 평균을 구하세요
2) 각각의 표준편차를 구하세요

In	`# 균등 분포의 기대값 구하기`
	`import sympy`
	`x = sympy.Symbol('x')`
	`mu = sympy.integrate(x*1/2, (x, -1, 1))`
	`mu`

Out	`0`

확률 분포

[기대값(expectation)]

예제)

$X \sim U(-1,1), Y \sim U(-2,2)$ 일 때

1) 각각의 평균을 구하세요
2) 각각의 표준편차를 구하세요

In	`# 분산 구하기`
	`EX2 = sympy.integrate(x**2*1/2, (x, -1, 1))`
	`EX2`

Out	$\frac{1}{3}$

확률 분포

[기대값(expectation)]

예제)

$X \sim U(-1,1), Y \sim U(-2,2)$ 일 때

1) 각각의 평균을 구하세요
2) 각각의 표준편차를 구하세요

In	`sigma2 = EX2 - mu**2` `sigma2`
Out	$\frac{1}{3}$

In	`sigma = sympy.sqrt(sigma2)` `sigma`
Out	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 예제
- $X \sim U(a, b)$ 일 때 평균과 분산은?

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 예제
- $X \sim U(a, b)$ 일 때 평균과 분산은?

In	`# 균등 분포의 기대값과 분산`
	`import sympy`
	`a, b, x = sympy.symbols('a, b, x')`
	`mu = sympy.integrate(x/(b-a), (x, a, b))`
	`mu.simplify().together()`

Out	$\frac{a+b}{2}$

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 예제
- $X \sim U(a, b)$ 일 때 평균과 분산은?

In
```
EX2 = sympy.integrate(x**2/(b-a), (x, a, b))
EX2.simplify().together()
```

Out

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

In
```
sigma2 = EX2 - mu**2
sigma2.simplify().together()
```

Out

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{12}$$

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 적률 생성 함수(mgf: moment generating function)
- $E(X^n)$의 값을 구할 수 있는 함수
- $M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$

$$M(0) = 1$$
$$\frac{d}{dt} M(t) = M'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{tx} f(x) dx$$
$$M'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = E(X)$$
$$M''(0) = E(X^2)$$
$$M'''(0) = E(X^3), \ldots$$

확률 분포

[**기대값(expectation)**]

- 적률 생성 함수(mgf: moment generating function)
- $E(X^n)$의 값을 구할 수 있는 함수

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 일 때, $M(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

$$M'(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)(\mu + \sigma^2 t)$$
$$M(0) = \mu$$
$$M''(t) = ?$$

확률 분포

[기대값(expectation)]

- 적률 생성 함수(mgf: moment generating function)
- $E(X^n)$의 값을 구할 수 있는 함수

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 일 때, $M(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$

$$M'(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)(\mu + \sigma^2 t), M(0) = \mu$$
$$M''(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)(\mu + \sigma^2 t)(\mu + \sigma^2 t) + exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)(\sigma^2)$$
$$M''(0) = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$