통계 분석

2019-2020년 겨울 계절 학기

강봉주

벡터와 행렬

[벡터와 행렬에 대한 이해가 필요한 이유]

- 행렬: 정형화된 데이터 형식
- 벡터: 데이터의 행 또는 컬럼(관측값 벡터, 변수 벡터)
- 머신러닝, 딥러닝의 모델 식:

$$y = \mathrm{X}\beta + \epsilon,$$

$$h_{w,b} = w^{\mathrm{T}}x + b,$$

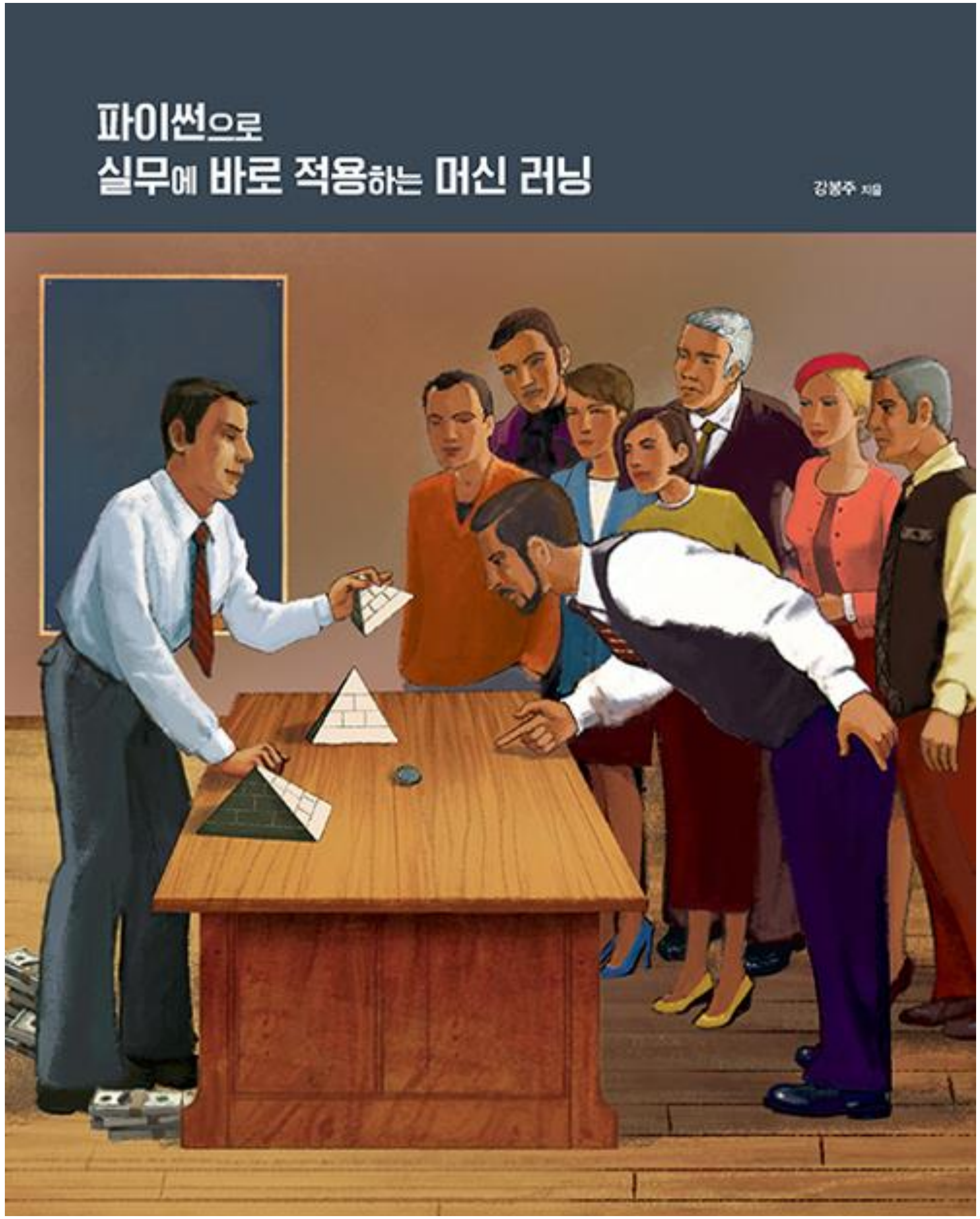
$$z^{(l+1)} = \mathrm{W}^{(l+1)}a^{(l)} + b^{(l+1)},$$

$$\sigma(z),$$

$$\mathrm{K} \star \mathrm{I},$$

$$h_t = \sigma_h(W_h h_{t-1} + W_x x_t + b_h)$$

- …


파이썬으로
실무에 바로 적용하는 머신 러닝
강봉주 지음

벡터

벡터와 행렬

[벡터의 표현]

- 벡터(vector)는 순서가 있는 숫자들의 목록이다. 즉 일종의 배열이다. 표현은 대괄호나 괄호를 통하여 표현한다.

$$\begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.93 \\ 0.24 \\ 0.27 \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.93 \\ 0.24 \\ 0.27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.74 & 0.75 & 0.93 & 0.46 \end{pmatrix}$$

[벡터의 표현]

- 벡터(vector)는 순서가 있는 숫자들의 목록이다. 즉 일종의 배열이다. 표현은 대괄호나 괄호를 통하여 표현한다.

In	`# 벡터의 생성`
	`v = np.array([0.61, 0.93, 0.24, 0.27])`
	`v`

Out	`array([0.61, 0.93, 0.24, 0.27])`

[**벡터의 원소**]

- 벡터의 원소(element, entry, coefficient, component)는 배열의 값들을 의미한다.

In	# 벡터의 원소
	v = np.array([0.61, 0.93, 0.24, 0.27])
	v[0]

Out	0.61

[벡터의 크기]

- 벡터의 크기(size, dimension, length)는 벡터의 원소의 개수를 의미한다.

In	# 벡터의 크기
	v = np.array([0.61, 0.93, 0.24, 0.27])
	v.shape

Out	(4,)

[부분 벡터]

- 벡터의 부분벡터(sub vector)는 쌍점(colon) 기호를 사용하여 표현한다.

$$a_{r:s} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_{r+1} \\ \dots \\ a_s \end{pmatrix}$$

[부분 벡터]

- 벡터의 부분벡터(sub vector)는 쌍점(colon) 기호를 사용하여 표현한다.

In	# 부분 벡터의 생성
	v = np.array([0.61, 0.93, 0.24, 0.27])
	v_sub = v[0:2]
	v_sub

Out	array([0.61, 0.93])

[특별한 벡터]

- 모든 원소가 0인 벡터를 0벡터
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

In	`# 영 벡터`
	`size = 3`
	`zeros = np.zeros(shape=(size,))`
	`zeros`

Out	`array([0., 0., 0.])`

[특별한 벡터]

- 모든 원소가 1인 벡터

- $1_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In	`# 1 벡터`
	`size = 3`
	`one = np.ones(shape=(size, ))`
	`one`

Out	`array([1., 1., 1.])`

[특별한 벡터]

- 하나의 원소만 1이고 나머지는 모두 0인 단위(unit)벡터

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[특별한 벡터]

- 하나의 원소만 1이고 나머지는 모두 0인 단위(unit)벡터

In	`# 단위 벡터`
	`size = 3`
	`I = np.identity(n=size)`
	`I`

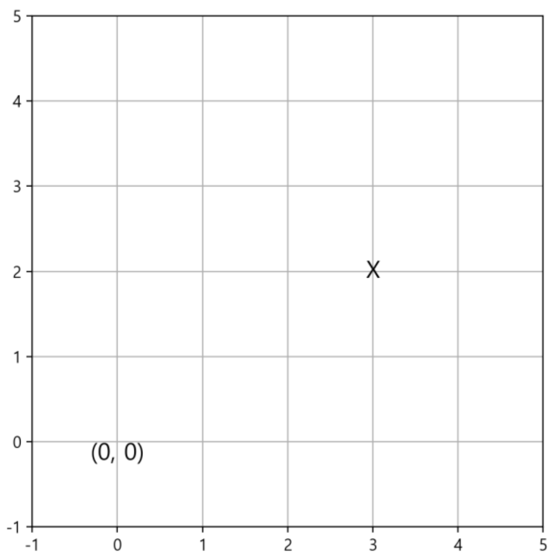
Out	`array([[1., 0., 0.],`
	`       [0., 1., 0.],`
	`       [0., 0., 1.]])`

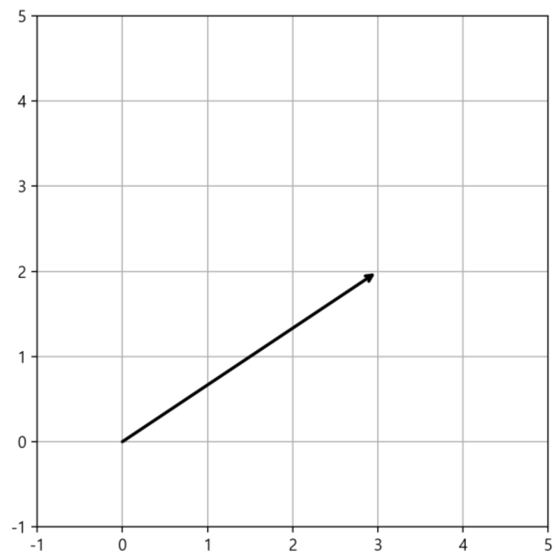
In	`# 하나의 단위  벡터의 예`
	`e2 = I[:,1]`
	`e2`

Out	`array([0., 1., 0.])`

[벡터의 기하학적인 의미]

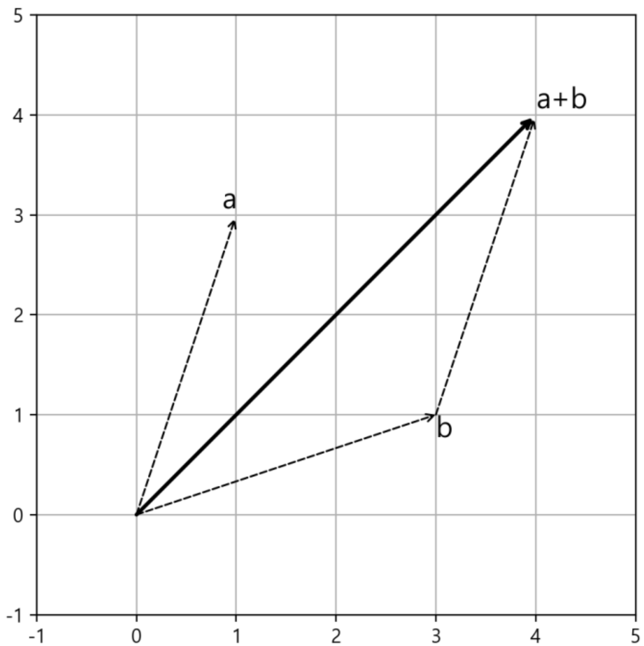
- $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ 벡터는 좌표 상의 1개의 점으로 표현되거나, 오른쪽 그림과 같이 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 점을 $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$로 옮기는 위치이동(displacement)을 표현하기도 한다.





[벡터 덧셈]

- 대응되는 각 원소의 합으로 정의
- 2개의 변으로 구성된 평행사변형의 대각선 벡터



$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

[벡터 덧셈]

- 대응되는 각 원소의 합으로 정의
- 2개의 변으로 구성된 평행사변형의 대각선 벡터

In	

	# 벡터의 덧셈
	a = np.array([1, 3])
	b = np.array([3, 1])
	a + b

Out	array([1., 1., 1.])

[벡터 덧셈]

- 교환 법칙: a + b = b + a
- 결합 법칙: (a + b) + d = a + (b + d)

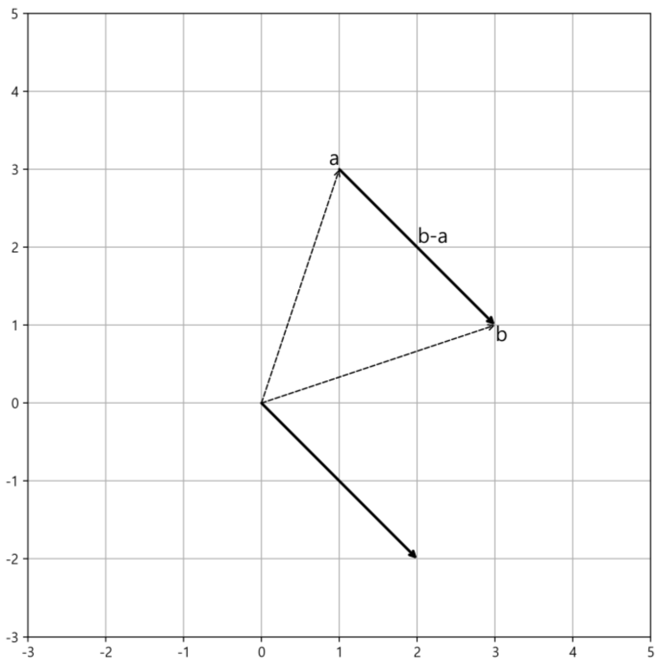
In	`# 교환 법칙` `a + b == b + a`
Out	`array([ True,  True])`

In	`# 결합 법칙`
	`d = np.array([1, 2])`
	`(a + b) + d == a + (b + d)`

Out	`array([ True,  True])`

[벡터 뺄셈]

- 대응되는 각 원소의 차(difference)로 정의
- 빼는 벡터를 시작점으로 연결한 벡터



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

[벡터 뺄셈]

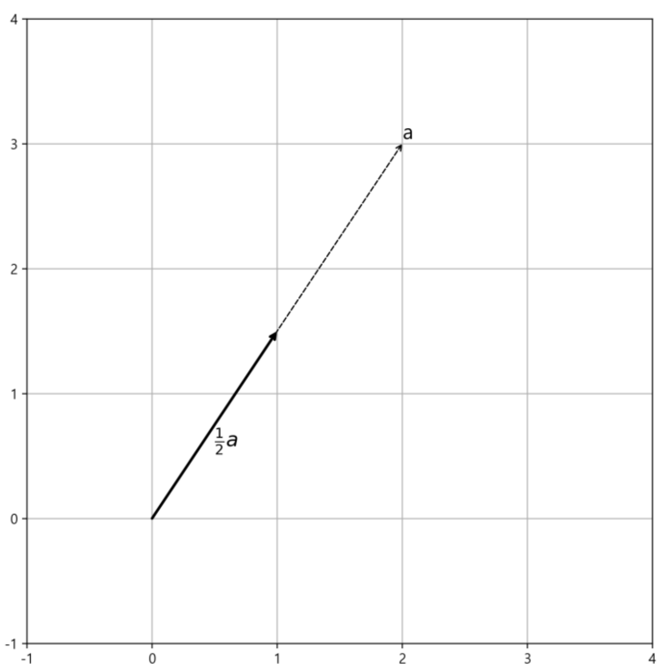
- 대응되는 각 원소의 차(difference)로 정의
- 빼는 벡터를 시작점으로 연결한 벡터

In
```
# 벡터의 뺄셈
a = np.array([3, 1])
b = np.array([1, 3])
b-a
```

Out
```
array([-2,  2])
```

[스칼라 곱]

- 벡터에 대한 실수 곱(스칼라 곱: scalar multiplication)은 그 벡터의 모든 원소를 실수 만큼 곱한 것



$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1.5\end{pmatrix}$$

[스칼라 곱]

- 벡터에 대한 실수 곱(스칼라 곱: scalar multiplication)은 그 벡터의 모든 원소를 실수 만큼 곱한 것

In	`# 스칼라-벡터 곱`
	`alpha = 1/2`
	`a = np.array([2, 3])`
	`alpha * a`

Out	`array([1. , 1.5])`

[스칼라 곱]

- 스칼라 곱의 성질
- 교환 법칙: $\beta a = a\beta$
- 분배 법칙: $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

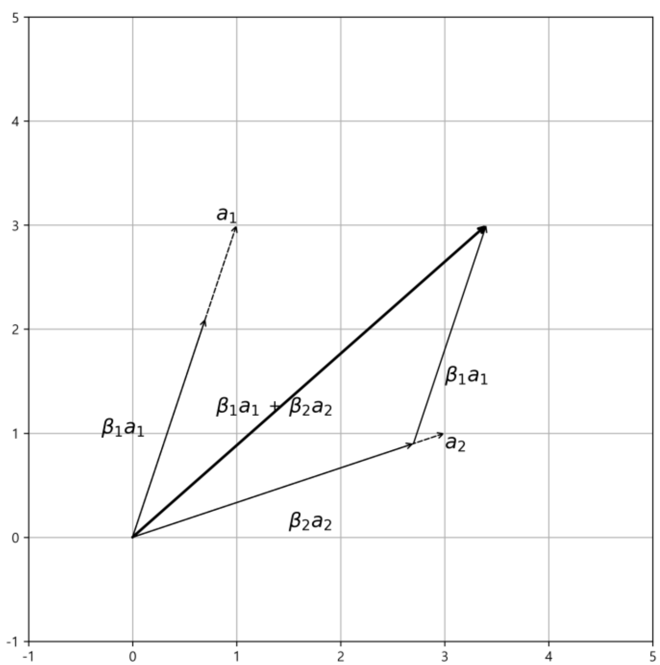
In	# 교환 법칙 alpha * a == a * alpha
Out	array([True, True])

In	# 분배 법칙
	beta = 0.7
	(alpha + beta) * a == alpha * a +beta * a

Out	array([True, True])

[선형 결합]

- 벡터 $a_1, \ldots, a_k$에 대한 선형결합(linear combination)
- $\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_k a_k$



$$0.7\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + 0.9\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

[내적]

- 내적(inner product) 또는 점적(dot product)
- $a^T b = \sum_i a_i b_i$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = sum \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = 7$$

[내적]

- 내적(inner product) 또는 점적(dot product)
- $a^T b = \sum_i a_i b_i$

In	# 내적 계산
	a = np.array([-1, 2, 3])
	b = np.array([1, -2, 4])
	
	# 원소별 곱 벡터
	a * b

Out	array([-1, -4, 12])

In	# 원소별 곱 벡터 합
	np.sum(a*b)

Out	7

[내적]

- 내적(inner product) 또는 점적(dot product)
- $a^T b = \sum_i a_i b_i$

In	# 함수 이용
	np.inner(a, b)

Out	7

In	np.dot(a, b)
Out	7

[내적]

- 내적의 성질

1) $a^T b = b^T a$

2) $(\alpha a)^T b = \alpha(a^T b)$

3) $(a + b)^T c = a^T c + b^T c$

In
```
# 내적의 성질
a = np.array([-1, 2, 3])
b = np.array([1, -2, 4])

# 교환 법칙
np.dot(a, b) == np.dot(b, a)
```

Out
```
True
```

[내적]

- 내적의 성질

1) $a^T b = b^T a$

2) $(\alpha a)^T b = \alpha(a^T b)$

3) $(a + b)^T c = a^T c + b^T c$

In	`# 결합 법칙`
	`alpha= 0.5`
	`np.dot(alpha * a, b) == alpha * np.dot(a, b)`

Out	`True`

[내적]

- 내적의 성질

1) $a^T b = b^T a$

2) $(\alpha a)^T b = \alpha(a^T b)$

3) $(a+b)^T c = a^T c + b^T c$

In	`# 분배 법칙`
	`c = np.array([1, 2, 3])`
	`np.dot(a+b, c) == np.dot(a,c) + np.dot(b, c)`

Out	`True`

[내적]

- 내적의 활용

1) $1^T a = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

2) $\frac{1}{n}\, 1^T\, a = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = \bar{a}$

3) $a^T a = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

In
```
# 내적의 활용
a = np.array([1, 2, 3])
size = len(a)
ones = np.ones(shape=(size,))

# 합의 표현
np.dot(ones, a)
```
Out
```
6.0
```

[내적]

- 내적의 활용

1) $1^T a = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

2) $\frac{1}{n}\ 1^T\ a = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = \bar{a}$

3) $a^T a = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

In	# 평균의 표현
	np.dot(ones, a) / len(a)

Out	2.0

[내적]

- 내적의 활용

1) $1^T a = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

2) $\frac{1}{n} 1^T a = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = \bar{a}$

3) $a^T a = a_1^2 + \cdots + a_n^2$

In	# 제곱합의 표현
	np.dot(a, a)

Out	14

[벡터 노름]

- 유클리디안 노름(Euclidean norm)
- $\|\mathrm{a}\| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$

$$\left\|\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}} = \sqrt{sum\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix}} = \sqrt{13} = 3.606$$

[벡터 노름]

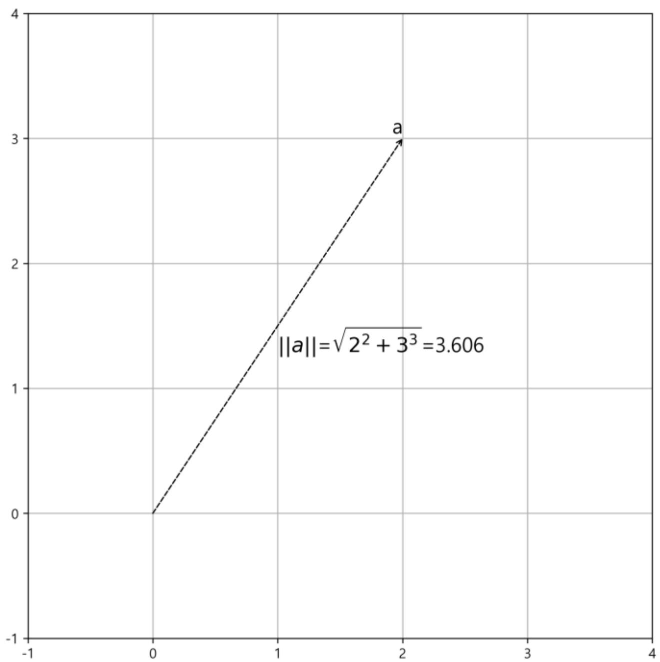
- 유클리디안 노름(Euclidean norm)
- $\|a\| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$

In	`# 필요한 패키지`
	`from scipy import linalg as la`
	
	`# 벡터 노름의 계산`
	`a = np.array([2, 3])`
	`la.norm(a)`

Out	3.606

[벡터 노름]

- 유클리디안 노름(Euclidean norm)의 의미
- $\|a\| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$



[벡터 노름]

- 노름의 성질

1) $\|\beta a\| = |\beta|\|a\|$

2) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

3) $\|a\| \geq 0$

4) $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$

In	`# 벡터 노름의 성질`
	`a = np.array([-1, 2, 3])`
	`b = np.array([1, -2, 4])`
	
	`# 스칼라 곱`
	`beta = 0.5`
	`la.norm(beta * a) == np.abs(beta) * la.norm(a)`

Out	`True`

[벡터 노름]

- 노름의 성질

1) $\|\beta a\| = |\beta|\|a\|$
2) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$
3) $\|a\| \geq 0$
4) $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$

In	`# 삼각형의 한 변의 길이는 다른 두변의 길이의 합보다 작다` `la.norm(a + b) <= la.norm(a) + la.norm(b)`
Out	`True`

[벡터 노름]

- 노름의 성질

1) $\|\beta a\| = |\beta|\|a\|$

2) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

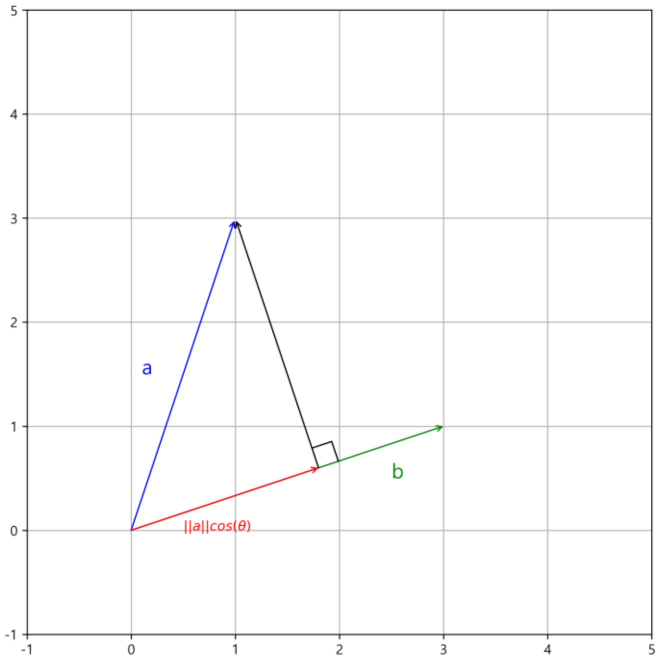
3) $\|a\| \geq 0$

4) $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0$

In	`# 길이는 0보다 크거나 작다` `la.norm(a) >= 0`
Out	`True`

[내적과 노름]

- $a^T b = \|a\| \|b\| \cos(\theta)$
- $\cos(\theta)$=1 의 의미: 2개의 벡터가 일치 할 때



$$\cos(\theta) = \frac{a^T b}{\|a\| \|b\|}$$

[벡터 선형 종속]

- n 차원 벡터 $a_1, \dots, a_p$가 선형 종속(linear dependence)
- $\beta_1 a_1 + \cdots, \beta_p a_p = 0$ 가 0 벡터가 아닌 어떤 β들에 의하여 충족

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = -1$$

[벡터 선형 종속]

- n 차원 벡터 $a_1, \ldots, a_p$가 선형 독립(linear independence)
- $\beta_1 a_1 + \cdots, \beta_p a_p = 0$ 이면 $\beta = 0$, 즉, $\beta_i = 0, \forall i$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$$

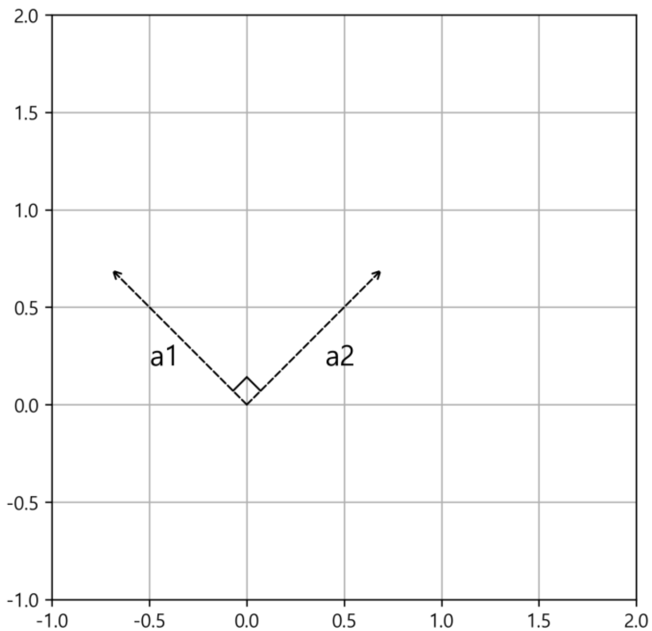
[기저]

- 기저(base): n 차원에서 n개의 선형 독립인 벡터
- 2차원 벡터에서는 선형 독립인 벡터의 수는 최대 2개
- n차원 벡터 $a_1, \ldots, a_n$가 기저이면, 임의의 n차원 벡터 x는

$$x = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$$

[직교정규 벡터]

- $a_i \perp a_j$
- $a_i^T a_j = 0, \|a_i\| = 1, \forall i$



$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

[직교정규 벡터]

- $a_i \perp a_j$
- $a_i^T a_j = 0, \|a_i\| = 1, \forall i$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[직교정규 벡터]

- $a_i \perp a_j$
- $a_i^T a_j = 0, \|a_i\| = 1, \forall i$

In

```
# 직교정규 벡터 확인
a1 =np.array([0, 0, 1]).reshape(-1, 1)
a2 = 1/np.sqrt(2) * np.array([1, 1, 0]).reshape(-1, 1)
a3 = 1/np.sqrt(2) * np.array([1, -1, 0]).reshape(-1, 1)

# 노름=1, 열들의 곱=0
A = np.concatenate((a1, a2, a3), axis=1)
np.round(A.T @ A, 3)
```

Out

```
array([[ 1.,  0.,  0.],
       [ 0.,  1., -0.],
       [ 0., -0.,  1.]])
```

행렬

[행렬 표현]

- 행렬(matrix)은 행(row)과 열(column)로 구분된 직사각형 배열

$$A = \begin{bmatrix} -1.09 & 1 & 0.28 & -1.51 \\ -0.58 & 1.65 & -2.43 & -0.43 \\ 1.27 & -0.87 & -0.68 & -0.09 \\ 1.49 & -0.64 & -0.44 & -0.43 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

[행렬 표현]

- 행렬(matrix)은 행(row)과 열(column)로 구분된 직사각형 배열

In	# 정의: 2차원 배열
	A = np.array(np.random.RandomState(123).normal(size=16)).reshape(4, 4)
	A.round(3)

Out	array([[-1.086, 0.997, 0.283, -1.506],
	       [-0.579, 1.651, -2.427, -0.429],
	       [1.266, -0.867, -0.679, -0.095],
	       [1.491, -0.639, -0.444, -0.434]])

[행렬 표현]

- 행렬의 크기
- $A_{n \times p}$
- $A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

In	`# 행렬의 크기`
	`A = np.random.RandomState(123).randint(1, 12, size=12).reshape(3, 4)`
	`A.shape`

Out	`(3, 4)`

벡터와 행렬

[행렬 표현]

- $A_{3\times4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$
- 행 벡터: $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$
- 열 벡터: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

[행렬 표현]

- $A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$
- 행 벡터: $[3 \quad 3 \quad 7 \quad 2]$
- 열 벡터: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

In	`# 열 벡터` `A[:,0]`
Out	`array([3, 4, 2])`

[행렬 표현]

- 행렬의 표기법

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

원소(element, entry, coefficient)는 $a_{ij}, a_{i,j}, A[i,j], A_{i,j}, A_{ij}$

[행렬 표현]

- 행렬의 표기법
- $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 11 & 10 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$
- $a_{11} = 3, a_{24} = 7$

In	# 행렬의 표기법 A[0, 0]
Out	3

In	A[1, 3]
Out	7

[행렬 표현]

- 행렬 연산: 덧셈
- $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$
- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- 대응하는 위치의 원소의 값을 더한 것

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

In	`A + B`
Out	`array([[ 4,  6,  8],` `       [10, 12, 14]])`

[행렬 표현]

- 실수와 행렬 곱
- $\mathrm{A} = (a_{ij}), c \in \mathbb{R}$
- $c\mathrm{A} = (ca_{ij})$
- $c\mathrm{A} = \mathrm{A}c$

$$0.1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

In	`# 스칼라와 행렬 곱: *`
	`c = 0.1`
	`c*A`

Out	`array([[0.1, 0.2, 0.3],` `       [0.4, 0.5, 0.6]])`

[행렬 표현]

- 실수와 행렬 곱
- $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right), c \in \mathbb{R}, \; c\mathrm{A} = (ca_{ij})$
- $c\mathrm{A} = \mathrm{A}c$

In	`# 스칼라와 행렬 곱 성질` `c*A == A*c`
Out	`array([[ True,  True,  True],` `       [ True,  True,  True]])`

[행렬 표현]

- 행렬의 전치
- $\mathrm{A} = (a_{ij})$
- $\mathrm{A}^T = (a_{ji})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

In	`# 행렬의 전치` `A.T`

Out	`array([[1, 4],`
	`       [2, 5],`
	`       [3, 6]])`

[행렬 표현]

- 행렬의 전치 성질
- $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$
- $\mathrm{A}^{T} = \left(a_{ji}\right)$

1) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$
2) $(\mathrm{cA})^{\mathrm{T}} = \mathrm{cA}^{\mathrm{T}}$

In

```
# 행렬 전치의 성질
A = np.arange(1, 7).reshape(2, 3)
B = np.arange(3, 9).reshape(2, 3)

A.T + B.T == (A + B).T
```

Out

```
array([[ True,  True],
       [ True,  True],
       [ True,  True]])
```

[행렬 표현]

- 행렬의 전치 성질
- $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$
- $\mathrm{A}^{T} = \left(a_{ji}\right)$

1) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$
2) $(\mathrm{cA})^{\mathrm{T}} = \mathrm{cA}^{\mathrm{T}}$

In	`c = 0.1` `(c*A).T == c*A.T`

Out	`array([[ True,  True],`
	`       [ True,  True],`
	`       [ True,  True]])`

[행렬 표현]

- 행렬 곱
- $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p,\ \mathrm{B} = (b_{kl}), k = 1, \dots, p, l = 1, \dots, m$
- $\mathrm{A}_{n\times p}, \mathrm{B}_{p\times m}$: 앞 행렬의 컬럼 개수와 뒷 행렬의 행의 개수는 반드시 일치
- $\mathrm{AB} = (c_{il}) = \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rl}\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ \mathbf{49} & 64 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$c_{2,1} = \mathrm{A}_{2,:}^{\mathrm{T}} \mathrm{B}_{:,1} = 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 = 49$$

[행렬 표현]

- 행렬 곱
- $\mathrm{AB} = (c_{il}) = \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rl}\right)$

In	# 행렬곱 연산자: @ A @ B
Out	array([[22, 28], [49, 64]])

In	# 행렬곱 함수
	np.matmul(A, B)

Out	array([[22, 28], [49, 64]])

[행렬 표현]

- 행렬 곱의 성질
- $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

In	`A @ B`
Out	`array([[19, 22],` `       [43, 50]])`

In	`B @ A`
Out	`array([[23, 34],` `       [31, 46]])`

[행렬 표현]

- 행렬 곱의 전치
- $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

$$(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}, \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

In
```
# 행렬 곱의 전치
(A @ B).T
```
Out
```
array([[19, 43],
       [22, 50]])
```

In
```
B.T @ A.T
```
Out
```
array([[19, 43],
       [22, 50]])
```

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \dots & A_{p,s} \\ . & \dots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A_{1:2,2:3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{:,2:3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A_{(1,3),(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \cdots & A_{p,s} \\ . & \cdots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$

$$A_{1:2,2:3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In

```
# 유형 1
A[0:2, 1:3]
```

Out

```
array([[2, 3],
       [5, 6]])
```

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \dots & A_{p,s} \\ . & \dots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$

$$A_{:,2:3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In
```
# 유형 2
A[:, 1:3]
```

Out
```
array([[ 2,  3],
       [ 5,  6],
       [ 8,  9],
       [11, 12]])
```

[행렬 표현]

- 부분 행렬(submatrix)

- $A_{p:q,r:s} = \begin{pmatrix} A_{p,r} & \cdots & A_{p,s} \\ . & \cdots & . \\ A_{q,r} & . & A_{q,s} \end{pmatrix}$

$$A_{(1,3),(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

In	# 유형 3 A[[0, 2], :][:, [1, 2]]
Out	array([[2, 3], [8, 9]])

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 영 행렬

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

In	`# 영 행렬`
	`size = 3`
	`np.zeros(shape=(size, size))`

Out	`array([[0., 0., 0.],`
	`       [0., 0., 0.],`
	`       [0., 0., 0.]])`

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 항등 행렬

- $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

In	`# 항등 행렬` `np.identity(n=size)`

Out	`array([[1., 0., 0.],`
	`       [0., 1., 0.],`
	`       [0., 0., 1.]])`

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 대각 행렬(diagonal matrix)
- 대각선 값을 제외한 모든 원소의 값이 0인 행렬
- $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

In	`# 대각 행렬` `np.diag([1, 2, 3])`

Out	`array([[1, 0, 0],`
	`       [0, 2, 0],`
	`       [0, 0, 3]])`

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 삼각 행렬(triangular matrix)
- 대각선을 기준으로 하여 한 쪽이 모든 0인 행렬
- 상삼각행렬: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

In	`# 상삼각 행렬` `np.triu([[1,2,3],[1, 2, 7],[7,8,5]], k=0)`

Out	`array([[1, 2, 3],`
	`       [0, 2, 7],`
	`       [0, 0, 5]])`

[행렬 표현]

- 특별한 행렬: 직교 행렬(orthogonal matrix)
- $A^T A = AA^T = I$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

In	`A.T @ A`
Out	`array([[1, 0],` `       [0, 1]])`

In	`A @ A.T`
Out	`array([[1, 0],` `       [0, 1]])`

[선형 방정식과 QR 분해]

- 선형 방정식
- $$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_p \end{gathered}$$
- $$\begin{gathered} x_1 + x_2 = 5 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 = 2 \end{gathered}$$
- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$
- $\mathrm{A}x = b$

[선형 방정식과 QR 분해]

- QR 분해
- $A_{n\times p} = Q_{n\times n}R_{n\times p}$
- Q는 직교정규행렬, R은 상삼각행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & -0.45 \\ -0.45 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.12 & -0.45 \\ 0 & -1.34 \end{bmatrix} = QR$$

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ & \Rightarrow QRx = b \\ & \Rightarrow Q^T QRx = Q^T b \\ & \Rightarrow Rx = Q^T b \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1.12 & -0.45 \\ 0 & -1.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.89 & -0.45 \\ -0.45 & 0.89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.37 \\ -0.45 \end{bmatrix}$$

[선형 방정식과 QR 분해]

- QR 분해
- $A_{n\times p} = Q_{n\times p}R_{p\times p}$
- Q는 직교정규행렬, R은 상삼각행렬
- $X^T X = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $(X^T X)\beta = X^T y$ 인 β=?

[선형 방정식과 QR 분해]

- $X^TX = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $(X^TX)\beta = X^T y$ 인 β=?
- $\begin{bmatrix} 1.25 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1.35 & -1.21 \\ 0 & 1.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.46 \\ 0.37 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1.35 * \beta_1 - 1.21 * \beta_2 \\ 0 * \beta_1 + 1.67 * \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.46 \\ 0.37 \end{bmatrix}$$

[선형 방정식과 QR 분해]

- 예제

- 행렬 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 에 대하여 QR 분해를 실시하세요.

[선형 방정식과 QR 분해]

- 예제

- 행렬 A = $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 에 대하여 QR 분해를 실시하세요.

[역행렬]

- $ax = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} = a^{-1} \times 1$: 조건은 $a \neq 0$
- $\mathrm{A}x = b \Rightarrow x = A^{-1}b =?$: 조건은 ?

[역행렬]

- A^{-1}
- $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

- A행렬이 가역이다.
- A의 열들은 서로 독립이다.
- A의 행들은 서로 독립이다.
- A는 좌 역행렬을 갖는다.
- A는 우 역행렬을 갖는다.

[역행렬]

- A^{-1}
- $A^{-1}A = AA^{-1} = I$

In	# 역행렬의 몇 가지 성질 확인
	A = np.random.RandomState(123).randint(1, 9, 9).reshape(3, 3)
	A

Out	array([[7, 6, 7], [3, 5, 3], [7, 2, 4]])

In	# 행렬 계수 구하기
	np.linalg.matrix_rank(A)

Out	3

[역행렬]

- $\mathrm{A}x = b$
- $x = \mathrm{A}^{-1}b$

In	`# 역행렬 구하기`
	`A_inverse = la.inv(A)`
	`np.round(A_inverse, 2)`

Out	`array([[-0.27,  0.2 ,  0.33],`
	`       [-0.18,  0.41,  0.  ],`
	`       [ 0.57, -0.55, -0.33]])`

[선형 방정식과 QR 분해]

- 과제 1

- A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$에 대하여 $\mathrm{A}x = b$를 만족하는 x 값을 QR 분해를 통하여 구하세요.