AI 기초

2019-2020

강봉주

다중 회귀 분석

회귀 분석

[필요한 패키지]

In
```
# 필요한 패키지
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

import scipy
from scipy import linalg as la
import scipy.stats as ss
import scipy.special

# 한글출력
plt.rcParams['font.family'] = 'Malgun Gothic'
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

# 필요한 패키지 2
import statsmodels.formula.api as smf
import statsmodels.api as sm

sm.__version__
```

Out
```
'0.10.1'
```

회귀 분석

[개요]

- 독립변수가 2개 이상인 다중 선형회귀(multiple linear regression)
- 모형식: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i,\ \ i = 1, \ldots, n$
- 오차항에 대한 가정: $\epsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$

회귀 분석

[모수의 추정]

- $\{(x_i, y_i) | i = 1, \dots, n\}$: 표본
- $$\begin{gathered} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \cdots + \beta_k x_{1k} + \epsilon_1 \\ \dots \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \cdots + \beta_k x_{nk} + \epsilon_n \end{gathered}$$
- 행렬 표현식: $y = \mathrm{X}\beta + \epsilon$
- $y = (y_1, \dots, y_n)^T, \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}, \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T, \epsilon =$

  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T$

회귀 분석

[모수의 추정]

- $\underset{\beta}{\text{minimize}}\left((y - \mathrm{X}\beta)^T (y - \mathrm{X}\beta)\right)$
- β에 대하여 미분하여 정리
- $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\beta = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}y$: 정규 방정식
- $\hat{\beta} = \left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}y$: 역행렬이 존재하면.
- 역행렬을 이용하지 않은 경우: QR 분해 기법 이용

회귀 분석

[모수의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 `['rm', 'age', 'lstat']` 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수의 추정값을 구해보자.

회귀 분석

[모수의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수의 추정값을 구해보자.

In

```
# 표본 크기
size = 100

# 씨앗값 정의
np.random.seed(123)
index = np.random.choice(np.arange(len(df)), size=size, replace=False)

# 표본 구성
xvars = ['rm', 'age', 'lstat']
target ='medv'
sdf = df.loc[index, xvars+[target]]
sdf.shape
```

Out

```
(100, 4)
```

회귀 분석

[모수의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수의 추정값을 구해보자.

In

```
## QR 분해를 통한 모수의 추정
X = sdf[xvars]
X = sm.add_constant(X).values
y = sdf[target].values
Q, R = la.qr(X.T@X)

beta = la.inv(R) @ Q.T @ X.T @ y
beta.round(3)
```

Out

```
array([[ 1.3063e+01],
       [ 2.9310e+00],
       [ 3.0000e-03],
       [-7.1100e-01]])
```

회귀 분석

[모수의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수의 추정값을 구해보자.

In	`## statsmodels 에 의한 모수의 추정`
	`# 기호식 구성`
	`fmla = target + '~' + '+'.join(xvars)`
	`fmla`

Out	`'medv~rm+age+lstat'`

회귀 분석

[모수의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 모수의 추정값을 구해보자.

In
```
# 적합
fit = smf.ols(fmla, data=sdf).fit()
fit.params.round(3)
```

Out
```
Intercept    13.063
rm            2.931
age           0.003
lstat        -0.711
dtype: float64dtype: float64
```

회귀 분석

[추정된 예측값]

- $\hat{y} = \mathrm{X}\hat{\beta} = \mathrm{X}\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}y = \mathrm{H}y$
- y를 $\hat{y}$로 보내주는 하나의 변환: 모자(hat) 행렬
- 모자 행렬의 성질

1. $\mathrm{HX} = \mathrm{X}$
2. $\mathrm{HH} = \mathrm{H}^2 = \mathrm{H}$: 멱등행렬(idempotent)
3. $(\mathrm{I} - \mathrm{H})(\mathrm{I} - \mathrm{H}) = (\mathrm{I} - \mathrm{H})^2 = \mathrm{I} - \mathrm{H}$

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p} = \frac{SSE}{n-p}$
- $\frac{1}{n-p}\left(y - \mathrm{X}\hat{\beta}\right)^T\left(y - \mathrm{X}\hat{\beta}\right) = \frac{1}{n-p}(y - \mathrm{H}y)^T(y - \mathrm{H}y)$

$$= \frac{1}{n-p} y^T(\mathrm{I} - \mathrm{H})^T(\mathrm{I} - \mathrm{H})y$$

$$= \frac{1}{n-p} y^T(\mathrm{I} - \mathrm{H})y$$

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 `['rm', 'age', 'lstat']` 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차분산의 추정값을 구해보자.

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차분산의 추정값을 구해보자.

In

```
# 직접 계산
H = X @ la.inv(X.T @ X) @ X.T
n = H.shape[0]
p = 1 + 3
I = np.identity(n)
MSE = 1/(n - p) * y.T @ (I-H) @ y
MSE.round(3)
```

Out

```
array([[41.496]])
```

회귀 분석

[오차 분산의 추정]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 오차분산의 추정값을 구해보자.

In	# 결과 확인
	fit.mse_resid.round(3)

Out	41.496

회귀 분석

[모수의 추론]

- $Y \sim \mathrm{N}(\mathrm{X}\beta, \mathrm{I}\sigma^2)$
- $\mathrm{E}\left(\hat{\beta}\right) = \mathrm{E}\left(\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}Y\right) = \left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}(Y) = \beta$
- $\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}\right) = \mathrm{Cov}\left(\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}Y\right) = \left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Cov}(y)\left(\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\right)^{T} =$

  $\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{I}\sigma^2\}\mathrm{X}\left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1} = \left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\sigma^2$
- $\hat{\beta} \sim \mathrm{N}\left(\beta, \left(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\right)^{-1}\sigma^2\right), \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-p)$, $\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ 이 서로 독립

회귀 분석

[모수의 추론]

- $\sqrt{(\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})^{-1}} \overset{let}{=} \mathrm{D}$
- $t_k = \frac{\widehat{\beta}_k - \beta_k}{\mathrm{D}_{kk}\widehat{\sigma}} \sim t(n-p)$
- $\mathrm{H}_0 : \beta_k = 0$
- $|t_{k0}| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p)$, 영가설 기각, α 는 유의 수준

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 `['rm', 'age', 'lstat']` 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 회귀계수에 대한 유의성을 검증해보자.

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 회귀계수에 대한 유의성을 검증해보자.

In

```
# 검정 통계량 계산
beta_hat = la.inv(X.T @ X) @ X.T @ y
D = np.sqrt(la.inv(X.T @ X))

t_zero = beta_hat / (np.diag(D).reshape(-1, 1) * np.sqrt(MSE))
t_zero
```

Out

```
array([[ 1.40846797],
       [ 2.20709057],
       [ 0.08976109],
       [-4.61866789]])
```

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 회귀계수에 대한 유의성을 검증해보자.

In

```
# p-values 계산
pvalue = 2*(1 - ss.t.cdf(np.abs(t_zero), df=n-p))
pvalue
```

Out

```
array([[1.62223028e-01],
       [2.96907987e-02],
       [9.28664075e-01],
       [1.19892794e-05]])
```

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 회귀계수에 대한 유의성을 검증해보자.

In
```
# 결과 확인
fit.tvalues
```

Out
```
Intercept    1.408468
rm           2.207091
age          0.089761
lstat       -4.618668
dtype: float64
```

회귀 분석

[모수의 추론]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 회귀계수에 대한 유의성을 검증해보자.

In
```
# 결과 확인
fit.pvalues
```

Out
```
Intercept    0.162223
rm           0.029691
age          0.928664
lstat        0.000012
dtype: float64
```

회귀 분석

[회귀직선의 유의성 검증: 분산 분석표]

- $F = \frac{SSR/k\sigma^2}{SSE/(n-k-1)\sigma^2} \sim F(k, n-k-1)$, k는 절편을 제외한 모수의 개수

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F값	P값
회귀	SSR	k	$MSR = \frac{SSR}{k}$	$f_0 = \frac{MSR}{MSE}$	$\Pr(F \geq f_0)$
잔차	SSE	$n-k-1$	$MSE = \frac{SSE}{n-k-1}$		
계	SST	$n-1$			

회귀 분석

[회귀직선의 유의성 검증: 분산 분석표]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석 방법에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자.

회귀 분석

[회귀직선의 유의성 검증: 분산 분석표]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석 방법에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자.

In

```python
# 변수 정의
xvars = ['rm', 'age', 'lstat']
target ='medv'

# 자유도 정의
n = len(sdf)
p = len(xvars) +1
[n, p]
```

Out

```
[100, 4]
```

회귀 분석

[회귀직선의 유의성 검증: 분산 분석표]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석 방법에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자.

In
```
# 제곱합 계산
y = sdf[target]
SSE = np.sum((y - fit.fittedvalues)**2)
SST = np.sum((y - np.mean(y))**2)
SSR = SST - SSE

MSE = SSE / (n-p)
MSR = SSR / (p-1)
np.round([MSE, MSR], 3)
```

Out
```
array([  41.496, 1468.649])
```

회귀 분석

[회귀직선의 유의성 검증: 분산 분석표]

예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석 방법에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자.

In

```
#  F 값 계산
f_zero = MSR/MSE

# p-value 계산
pvalue = 1 - ss.f.cdf(f_zero, dfn=p-1, dfd=n-p)

np.round([f_zero, pvalue], 3)
```

Out

```
array([35.392,  0.   ])
```

회귀 분석

[회귀직선의 유의성 검증: 분산 분석표]

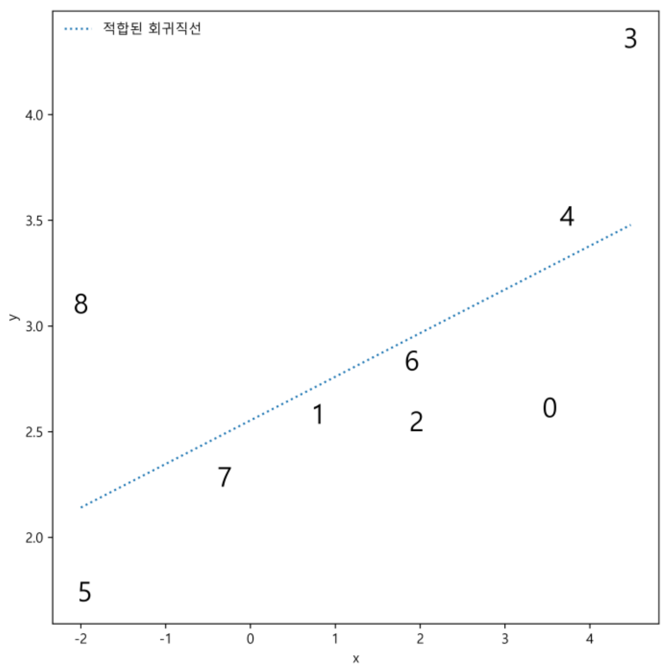
예제 [HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 ['rm', 'age', 'lstat'] 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 분산분석 방법에 의한 회귀직선의 유의미성을 검증해보자.

In
```
# 결과 확인
np.round([fit.fvalue, fit.f_pvalue], 3)
```
Out
```
array([35.392,  0.   ])
```

회귀 분석

[이상점 판정]

- 이상값(outlier)은 평균으로부터 멀리 떨어진(outlying) 값을 의미한다. 선형회귀 분석에서는 오차 값이 매우 큰 값을 의미한다.



회귀 분석

[이상점 판정]

- $\mathrm{var}(r_i) = \sigma^2(1 - \mathrm{H}_{ii})$: 잔차 분산
- $t_i = \frac{r_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-\mathrm{H}_{ii}}}$: 표준화 잔차
- $t_{(i)} = \frac{r_i}{\hat{\sigma}_{(i)}\sqrt{1-\mathrm{H}_{ii}}}$: 외부 스튜던트화 잔차, $\hat{\sigma}_{(i)}$는 $(y_i,\ x_i)$ 관측값을 제거한 후 계산한 표준오차
- $\hat{\sigma}^2_{(i)} = \frac{SSE_{(i)}}{n-k-2} = \frac{SSE-\frac{r_i^2}{1-\mathrm{H}_{ii}}}{n-k-2}$: 계산식

회귀 분석

[이상점 판정]

- 표준화 잔차와 외부 스튜던트화 잔차

In

```
# 이상점 파악
print(sfit.get_influence().summary_frame()[['standard_resid','student_resid']
])
```

Out

```
standard_resid  student_resid
0       -1.256752      -1.322216
1       -0.258594      -0.240563
2       -0.737492      -0.710964
3        1.739347       2.137032
4        0.344098       0.321302
5       -0.851857      -0.833026
6       -0.212793      -0.197648
7       -0.392486      -0.367437
8        1.945842       2.658769
```

회귀 분석

[이상점 판정]

- 표준화 잔차와 외부 스튜던트화 잔차

In	`# p-value`
	`pvalue = 1 - ss.t.cdf(sfit.get_influence().summary_frame()['standard_resid'], df=len(x)-2)`
	`pvalue.round(3)`

Out	`array([0.875, 0.598, 0.758, 0.063, 0.37 , 0.789, 0.581, 0.647, 0.046])`

회귀 분석

[이상점 판정]

과제	[HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 `['rm', 'age', 'lstat']` 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 표준화 잔차 값이 5% 유의수준에서 유의미한 이상점을 찾아보자. 단, 표본추출시 난수 씨앗값은 123으로 하며, 중복을 허용하지 않으며, 유의수준은 5%로 한다.

회귀 분석

[영향점 판정]

- 영향점은 회귀계수의 추정값($\hat{\beta}$)과 예측값($X\hat{\beta}$)에 영향을 주는 관측값
- $\hat{y}_i = \sum_j \mathrm{H}_{ij} y_j = \mathrm{H}_{ii} y_i + \sum_{j \neq i} \mathrm{H}_{ij} y_j$
- 모자 행렬의 성질

1) $\frac{1}{\mathrm{n}} \leq \mathrm{H_{ii}} \leq 1, \forall \mathrm{i}$

2) $-0.5 \leq \mathrm{H_{ij}} \leq 0.5, \forall \mathrm{j} \neq \mathrm{i}$

3) $\mathrm{tr(H)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{H_{ii}} = \mathrm{k} + 1$

회귀 분석

[영향점 판정]

- 영향점은 회귀계수의 추정값($\hat{\beta}$)과 예측값($X\hat{\beta}$)에 영향을 주는 관측값
- $\hat{y}_i = \sum_j \mathrm{H}_{ij} y_j = \mathrm{H}_{ii} y_i + \sum_{j \neq i} \mathrm{H}_{ij} y_j$
- H_{ii}가 매우 크면 가령 1에 가까우면 다른 H_{ij}는 모두 매우 작아진다. 즉, $\hat{y}_i$의 값에 y_i가 지배적으로 영향을 끼친다. 여기서 H_{ii}를 y_i의 지렛대(leverage) 이라고 부른다.

회귀 분석

[영향점 판정]

- 영향점은 회귀계수의 추정값($\hat{\beta}$)과 예측값($\mathrm{X}\hat{\beta}$)에 영향을 주는 관측값
- $\hat{y}_i = \sum_j \mathrm{H}_{ij} y_j = \mathrm{H}_{ii} y_i + \sum_{j \neq i} \mathrm{H}_{ij} y_j$
- $\mathrm{H}_{ii} > \frac{2(k+1)}{n}$ 인 점을 고 지렛대점

회귀 분석

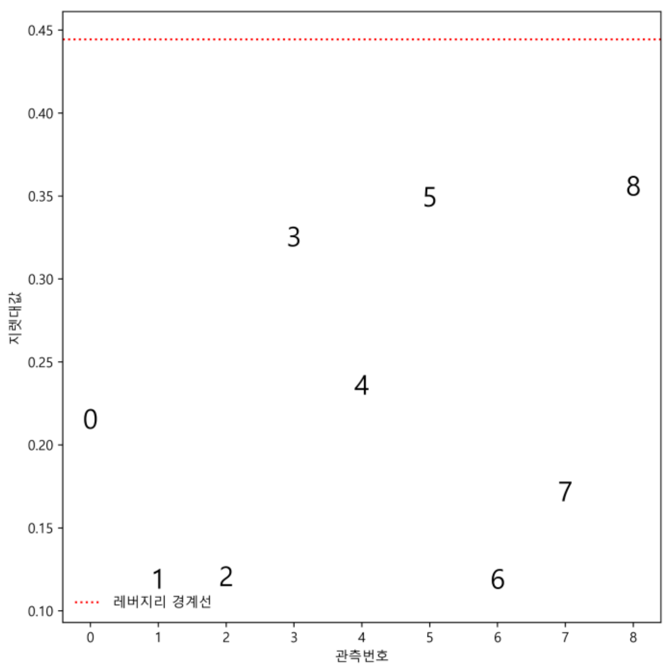
[영향점 판정]

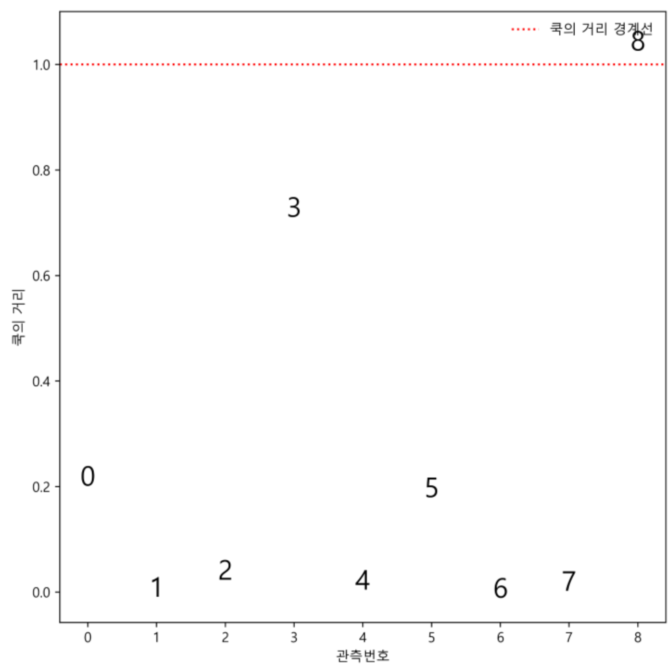
- 영향점은 회귀계수의 추정값($\hat{\beta}$)과 예측값($\mathrm{X}\hat{\beta}$)에 영향을 주는 관측값
- 쿡의 거리(Cook's distance)
- i 관측값을 제거한 후 추정된 값을 $\hat{\beta}_{(i)}$, $\hat{y}_{(i)}$
- $D_i = \frac{\left(\widehat{\beta}_{(i)}-\widehat{\beta}\right)^T \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\left(\widehat{\beta}_{(i)}-\widehat{\beta}\right)}{(k+1)\widehat{\sigma}^2}$
- $D_i = \frac{\left(\hat{y}_{(i)}-\hat{y}\right)^T \left(\hat{y}_{(i)}-\hat{y}\right)}{(k+1)\widehat{\sigma}^2}$
- $D_i = \frac{r_i^2}{k+1}\left(\frac{\mathrm{H}_{ii}}{1-\mathrm{H}_{ii}}\right)$
- $D_i > 1$: 영향점

회귀 분석

[영향점 판정]

- 영향점은 회귀계수의 추정값($\hat{\beta}$)과 예측값($X\hat{\beta}$)에 영향을 주는 관측값

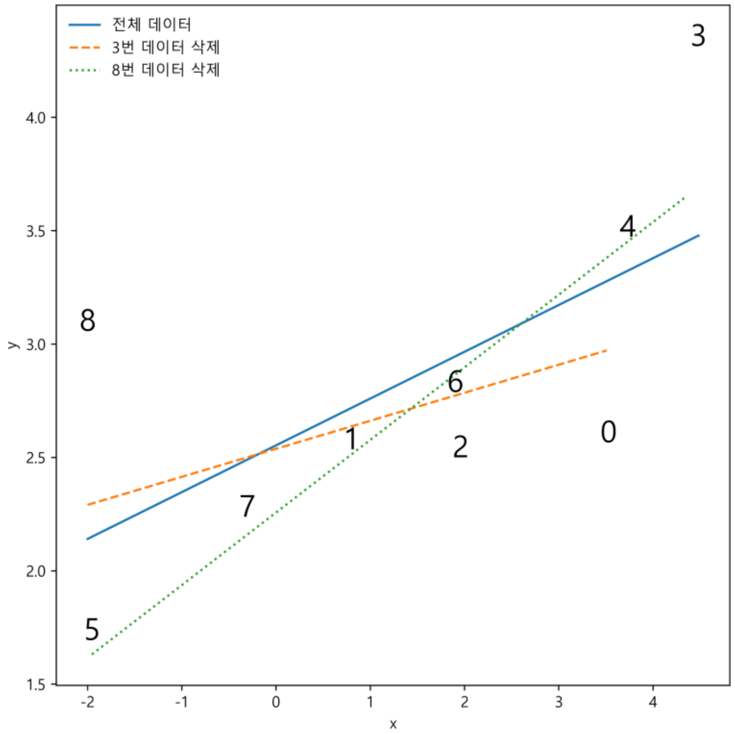




회귀 분석

[영향점 판정]

- 영향점은 회귀계수의 추정값($\hat{\beta}$)과 예측값($X\hat{\beta}$)에 영향을 주는 관측값



회귀 분석

[영향점 판정]

과제	[HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 `['rm', 'age', 'lstat']` 으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 쿡의 거리 기준으로 하여 이상점을 찾아보자. 단, 표본추출시 난수 씨앗값은 123으로 하며, 중복을 허용하지 않는다.

회귀 분석

[다중공선성 판정]

- 공선성(collinearity)은 2개의 독립변수 간의 선형적인 관계
- 다중공선성(multicollinearity)은 2개 이상의 독립 변수들 간의 선형적인 관계
- 데이터 행렬의 행렬 계수(rank)가 완전 계수(full rank)가 되지 않으므로 X^TX의 역행렬이 존재하지 않음. 의사 역행렬로 계산은 가능하나 모수 추정값에 대하여 매우 큰 값의 표준오차가 발생하여 그 결과를 믿을 수 없음

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad X^TX = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 30 \\ 10 & 30 & 30 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -14.7 & -43.55 & -43.55 \\ 0 & -1.92 & -1.92 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

회귀 분석

[다중공선성 판정]

- 공선성(collinearity)은 2개의 독립변수 간의 선형적인 관계
- 다중공선성(multicollinearity)은 2개 이상의 독립 변수들 간의 선형적인 관계
- 다중공선성을 탐지하는 방법: 분산팽창계수(VIF: variance inflation factor)

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

- R_j^2는 설명 변수 j를 종속 변수로 하고 나머지 설명 변수들을 설명 변수로 하여 회귀분석을 실시한 경우의 결정계수
- $R_j^2 = 0.9$보다 크게 되면 VIF_j 는 10보다 크게 됨
- $VIF_j > 10$: 다중공선성이 있으므로 해당 변수 제거

회귀 분석

[다중공선성 판정]

예제

데이터 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$에 대하여 VIF를 구해보자.

In

```
# 필요한 패키지
from statsmodels.stats.outliers_influence import variance_inflation_factor

# 다중 공선성 계산
data_matrix = np.array([1, 2, 3, 4,  1, 2, 3, 4]).reshape(2, -1).T
vif = [(i, variance_inflation_factor(data_matrix, i)) for i in np.arange(2)]
vif
```

Out

```
[(0, inf), (1, inf)]
```

회귀 분석

[다중공선성 판정]

과제	[HOUSING] 자료에서 크기가 100인 표본을 추출하여 종속변수를 주택중위가격(medv), 독립변수를 `['rm', 'age', 'lstat']`으로 하여 선형회귀 모형을 적합 시킬 때 독립변수 간의 다중공선성을 확인해보자.