数学题练习帖

BY TAKENOKO1997 ON 2021.01.20

草稿

1. 由于很多题目没有答案，所以解答可以保证过程正确，不保证结果正确。**切记自己计算**。
2. 若发现错误，可请告知，我来修改。
3. 楷体部分和旁注介绍了一些注意点和补充背景，可选择性读。
4. 本文地址：GitHub Blog

Contents

函数 1

Hint

有一组材料叫做「高考数学压轴难题归纳总结提高培优专题」写的不错，基本都是我想写的（o(T﹏T)o），所以我也没再多写题，建议可以搜索标题看一下。有问题可以网页评论区留言或社交软件联系。

1.1 基础知识

符号:

$f^n(x)$ 表示 f 的 n 次复合，$\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n层}$。特别地，$f^0(x)=x$。

$\binom{m}{n}$ 表示 m 中取 n 的组合数，$\binom{m}{n}=C_m^n=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$。

常见函数的导数:

函数	导函数	定义域
ax^n	anx^{n-1}	$x\in\mathbb{R},n\neq 0$
a^x	$a^x\ln a$	$x\in\mathbb{R},a\neq 0$
e^x	e^x	$x\in\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x\in(0,+\infty)$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$x,a\in(0,+\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq\dfrac{(2n+1)\pi}{2},n\in\mathbb{Z}$

复合函数的导数:

函数	$f(g(x))$	$f(x)+g(x)$	$f(x)g(x)$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$
导函数	$g'(x)f'(g(x))$	$f'(x)+g'(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

多项式高次方的展开（二项式定理）:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=C_n^0y^n+C_n^1xy^{n-1}+C_n^2x^2y^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n$$

函数积的多次导数（莱布尼兹公式）:

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)=C_n^0f(x)g^{(n)}(x)+C_n^1f'(x)g^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n^nf^{(n)}(x)g(x)$$

1.2 函数的概念

题目 001 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，$a>0$，求函数 $g(x)=f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的定义域。

解答 过程略。

1. 当 $a\geqslant 1$ 时，所求定义域 $\left[-\frac{1}{2a},\frac{3}{2a}\right]$；
2. 当 $0<a<1$ 时，所求定义域 $\left[-\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right]$。

TAG 定义域 DIF 易

题目 002 求下面函数的值域：(1)$y=\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}$ (2)$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (3)$y=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4),x\in[-3,3]$

解答

1. （方法一）[1]反解 $\sin x$ 得 $\sin x=\frac{1+y}{2(1-y)}$，由 $\sin x\in[-1,1]$ 知，严格地，
$$|\sin x|=\left|\frac{1+y}{2(1-y)}\right|\leqslant 1\ \Leftrightarrow\ (1+y)^2\leqslant 4(1-y)^2\ \Leftrightarrow\ y\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$$
（方法二）记 $t=\sin x\in[-1,1]$，则
$$y=\frac{2t-1}{2t+1}=1-\frac{2}{2t+1}\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty)$$
2. 两种方法同上，此处不赘述。$y\in(-1,1)$。
3. 对称展开得 $y=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=(t+4)(t+6)=(t+5)^2-1$，其中 $t=x^2+5x\in\left[-\frac{25}{4},24\right]$，结合二次函数图像可知 $y=(t+5)^2-1\in[-1,840]$。

TAG 反函数 值域 DIF 易

1: 但凡有单值反函数，那末反函数的定义域即为函数的值域，反函数的值域即为函数的定义域。

题目 003 求下列函数的值域：(1)$f(x)=-\frac{x^2-x+2}{x^2+2}$ (2)$f(x)=x-\sqrt{1-x^2}$

解答

1. （方法一）$f(x)=-\frac{x^2-x+2}{x^2+2}=\frac{1}{\frac{2}{x}+x}-1$，分母是对勾函数[2]，其值域为 $\frac{2}{x}+x\in(-\infty,-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2},+\infty)$，另外 $f(-1)=0$，因此得值域 $\left[-1-\frac{\sqrt{2}}{4},-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$。
（方法二）注意到分母不为 0。记 $f(x)=y$，则原式 $\Leftrightarrow (y+1)x^2-x+(2y+2)=0$，视之为关于 $x\in\mathbb{R}$ 的二次函数[3]，那末
$$\Delta=1-4(y+1)(2y+2)\geqslant 0\ \Leftrightarrow\ y\in\left[-1-\frac{\sqrt{2}}{4},-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$$
2. （方法一）设 $x=\sin t\in[-1,1]$[4]，则 $f(x)=\sin t-|\cos t|\in[-\sqrt{2},1]$。
（方法二）易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有 $f(x)\geqslant f(-x)$ 且单调增，$x\in[-1,1]$，因此

2: 当我们上下同除 x 时，事实上假定了 $x\neq 0$，因此计算后须对 $x=0$ 时的取值进行补充。这样做是无妨的，原因有二，一是 $f(x)$ 是连续的，二是我们完全可以补充 $\frac{1}{\infty}=0$。

3: 形如 $f(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$ 和 $f(x)=ax+b+c\sqrt{dx^2+ex+f}$ 的函数式均可尝试用判别式的方法求值域。

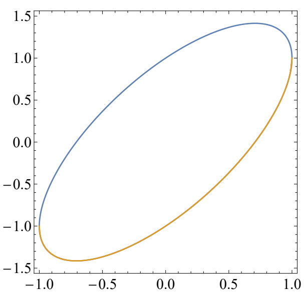

Figure 1.1: $2x^2-2xy+y^2=1$ 的图像。橙色部分即为 (2) 中 $f(x)$ 的图像。

4: 为何设三角函数对于类似形式的函数可以起到等价化简的作用？因为这原本就是二次圆锥曲线的变形，本题 (2) 中的函数即是旋转的椭圆。

严格地 $f(x) \leqslant f(1) = 1$。又

$(y-x)^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2xy+y^2-1=0 \Rightarrow \Delta = 8-4y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) = y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

注意到 $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$，$f(x)$ 连续[5]，故值域 $f(x) \in [-\sqrt{2}, 1]$ 。

5: 求最值和求值域是不同的，函数不一定能取到最大值和最小值之间的值，然而函数必然可以取到值域中的所有值。

TAG 判别式 值域 DIF 易

题目 004

1. 已知函数 $f(x) = \log_a\left(x + \frac{a}{x} - 4\right)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，其中 $a > 0$，$a \neq 1$，求实数 a 的取值范围。
2. 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，值域为 $[0,2]$，求 m, n 的值。
3. 设函数 $f(x) = \log_3 \frac{bx^2+ax+b}{x^2+x+1}$，已知 $a > b$，函数的值域为 $(-\infty, 0]$，求 a 的取值范围。

解答

1. 值域为 $\mathbb{R}$ 意味着 $x + \frac{a}{x} - 4$ 值域包含 $\mathbb{R}^+$，又 $a > 0$，故这是一个对勾函数，其最小值为 $x + \frac{a}{x} - 4 \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} - 4 = 2\sqrt{a} - 4$，那末只需使 $2\sqrt{a} - 4 \leqslant 0 \Rightarrow$ $a \in (0,1) \cup (1,4]$ 。
2. 由于 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$，故 $\forall x \in \mathbb{R}$，恒有
$$\frac{mx^2+8x+n}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} > 0 \Leftrightarrow \text{分母}\Delta = 64 - 4mn < 0, m > 0$$
又根据值域有[6]
$$\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1} = k \in [1,9] \Leftrightarrow k^2 - (m+n)k + mn - 16 \leqslant 0 \ \forall k \in [1,9]$$
$$\Rightarrow m+n = 10, mn-16 = 9 \Rightarrow m = n = 5$$
3. 由题条件[7]，
$$\frac{bx^2+ax+b}{\underbrace{x^2+x+1}_{>0}} = k \in (0,1] \Rightarrow (b-k)x^2 + (a-k)x + (b-k) = 0$$
当 $k \in (0,1]$ 时恒有解，$k > 1$ 时无解。因此
$$\forall k \in (0,1], \Delta = (a-k)^2 - 4(b-k)^2 \geqslant 0, \text{且}k=1\text{处取等，下同}$$
$$\Leftrightarrow \forall k \in (0,1], \left(k - \frac{a+2b}{3}\right)(k-(2b-a)) \geqslant 0$$
由于 $a > b$，故 $\frac{a+2b}{3} > 2b - a$，
$$\begin{cases} \frac{a+2b}{3} = 1 \\ 2b - a \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow a \geqslant \frac{3}{2}$$

6: 此过程中暗含使用了 $x \in \mathbb{R}$ 这一条件，因此我们可以毫无顾虑的使用判别式计算。同时闭区间端点对应的是边界条件，放在不等式上意味着「取等」。

7: 本小题对定义域没有说明和限制，但并不意味着定义域为 $\mathbb{R}$。

TAG 复合函数 DIF 中

题目 005 已知 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 在闭区间 M 上的反函数是其本身，求 M 的取值集合。

解答 显然 $f(x)$ 函数图像为半径为 2，圆心在原点的圆的上半部分。结合函数与其反

函数图像的几何关系[8]，可知 M 的取值集合为 $M \in \left\{[2\sin\theta, 2\cos\theta] : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$ 。

8: 函数与其反函数关于直线 $x = y$ 镜像对称。

TAG 反函数 圆 DIF 易

题目 006 设定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x), g(x)$ 均有反函数，且函数 $f(x-1)$ 和 $g^{-1}(x-2)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称，若 $g(5) = 2021$，求 $f(4)$ 的值。

解答 由题意 $(5, f(4))$ 与 $(f(4), g^{-1}(f(4)-2))$ 关于 $y = x$ 对称，故 $g^{-1}(f(4)-2) = 5$，由于 $g(x)$ 有反函数，故 g 为双射[9]，因此 $f(4) - 2 = 2021 \Rightarrow$ $f(4) = 2023$ 。

9: **双射**：若关于映射 $f : A \to B$ 有以下两特点，则称映射 f 为双射，也即「一一映射」：

1. $\forall y \in B, \exists x \in A$, s.t. $f(x) = y$（满射）
2. 若 $x_1 \in A, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$，则必有 $x_1 = x_2$（单设）

若一个函数有反函数，即一个映射有它的逆，那末它必是双射。

TAG 反函数 DIF 易

题目 007 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(0) = 1$，且 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$，求 $f(x)$ 的表达式。

解答 令 $x = y = 0$，可得 $f(1) = 2$；令 $y = 0$，可得 $f(1) = 2 = f(x)f(0) - f(0) - x + 2 = f(x) - x + 1 \Rightarrow$ $f(x) = x + 1$ 。

TAG 抽象函数 DIF 易

题目 008 设定义在整数集上的函数 f 满足 $f(n) = \begin{cases} n+5 & n < 2000 \\ f(f(n-8)) & n \geqslant 2000 \end{cases}$，求 $f(4096)$。

解答 我们使用符号 $f^k(x)$ 表记 $\overbrace{f(f(f(\cdots f(x))))}^{k\text{次}f\text{复合}}$，那末

$$\begin{aligned} & f(4096) = f^2(4088) = \cdots = f^{263}(2000) = f^{264}(1992) \\ = & f^{262}(2002) = f^{263}(1994) = f^{261}(2004) = f^{262}(1996) = f^{261}(2001) \\ = & f^{262}(1993) = f^{260}(2003) = f^{261}(1995) = f^{260}(2000) \end{aligned}$$

这里我们得到了第一个周期 $f^{263}(2000) = f^{260}(2000)$，因此可知 $\forall n \geqslant 2000, k \in \mathbb{Z}$，$f^{k+3}(n) = f^k(n)$，因此 $f(4096) = f^{261}(2004) = f^0(2004) =$ 2004 。事实上可以求出，$\forall n \geqslant 2000$，$f(n) = 2002 + (n+1)\%3$，其中「%」为取余符号。

TAG 抽象函数 DIF 中

题目 009 已知函数 $f(x) = \dfrac{2x^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ 的值域为 $[1, 3]$，其中 $b < 0$。

1. 求实数 b, c 的值。
2. 判断 $F(x) = \lg f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调性，并给出证明。
3. 若 $t \in \mathbb{R}$，求证：$\lg\dfrac{7}{5} \leqslant F\left(\left|t - \dfrac{1}{6}\right| - \left|t + \dfrac{1}{6}\right|\right) \leqslant \lg\dfrac{13}{5}$。

解答

1. 记 $y = f(x)$，定义域 $x \neq \pm 1$。整理得 $(y-2)x^2 - bx + (y-c) = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4(y-2)(y-c) \geqslant 0$，由于 $y = f(x)$ 的值域为 $[1, 3]$，因此 $\Delta|_{y=1} = \Delta|_{y=3} = 0 \Rightarrow$ $b = -2, c = 2$ 。

2. 由于 $\lg x$ 是增函数，因此其增减性与 $f(x)$ 一致。$f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}<0$，因此 $F(x)=\lg x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减。
3. 根据 $F(x)$ 的递减性，只需找到 $h(t)=\left|t-\dfrac{1}{6}\right|-\left|t+\dfrac{1}{6}\right|$ 的值域。首先 $h(t)$ 是连续的，
$$h(t)\leqslant\left|\left(t-\frac{1}{6}\right)-\left(t+\frac{1}{6}\right)\right|=\frac{1}{3}\qquad \text{当}t=-\frac{1}{6}\text{时取等}$$
由于 $h(t)$ 是奇函数，因此其最小值为 $\min h(t)=-\max h(t)=-\dfrac{1}{3}$。综上，
$$\lg\frac{7}{5}=F\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant F(h(t))\leqslant F\left(-\frac{1}{3}\right)=\lg\frac{13}{5}$$

TAG 绝对值不等式 值域 DIF 易

题目 010 若函数 $f(x)=\dfrac{3e^{|x-1|}-\sin(x-1)}{e^{|x-1|}}$ 在区间 $[-3,5]$ 上的最大值、最小值分别为 p,q，求 $p+q$。

解答 $3-f(x)=g(t)=\dfrac{\sin t}{e^{|t|}}$，$t\in[-4,4]$。$g(t)$ 为奇函数，故最大值最小值之和为 0，故 $(3-p)+(3-q)=0\Leftrightarrow$ $p+q=6$ 。

TAG 奇偶性 DIF 易

题目 011 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，$f(2-x)=f(x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，求函数 $H(x)=|xe^x|-f(x)$ 在区间 $[-5,1]$ 上的零点个数。

解答

$x\in[0,1]$ 时，$f(x)$ 图像为半径为 1 的四分之一圆，$f(x)$ 有两个对称轴 $x=0,x=1$，因此 $\forall\ n\in\mathbb{Z}$，$x=n$ 均是 $f(x)$ 对称轴，据此可大致画出 $f(x)$ 图像。

记 $g(x)=xe^x$，$g'(x)=(1+x)e^x$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调减，在 $[-1,+\infty)$ 上单调增，又 $x<0$ 时 $g(x)<0$，$g(0)=0$，$g(-1)=-\dfrac{1}{e}<1$，据此我们也可大致画出 $|xe^x|$ 的图像，$H(x)$ 的零点个数即为两图像交点个数，为 6 个。

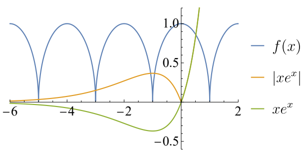

Figure 1.2: $f(x),|xe^x|$ 的图像。$[-5,1]$ 上有 6 个交点。

TAG 交点 圆 DIF 易

题目 012 已知等式 $(x^2+2x+2)^5=a_0+a_1(x+1)+\cdots+a_{10}(x+1)^{10}$。求 $\sum\limits_{i=1}^{10}a_n$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{10}na_n$ 的值。

解答 代入 $x=-1$ 知 $a_0=1$；代入 $x=0$ 知，$\sum\limits_{i=1}^{10}a_n=2^5-1=$ 31 ；关于 x 求导后代入 $x=0$ 知 $\sum\limits_{i=1}^{10}na_n=$ 320 。

TAG 二项式定理 DIF 易

题目 013 使用函数方法证明一下组合数恒等式。

1. $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{m}=\dbinom{n}{0}+\dbinom{n}{1}+\cdots+\dbinom{n}{n}=2^n$

2. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$
3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2m+1}=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\cdots+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1}$
4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2m}=\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{2}+\cdots+\binom{2n+1}{2n}=2^{2n}$
5. $\sum_{l=k}^{n}\binom{l}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$
6. $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r},\quad r=\min\{m,n\}$
7. $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m},\quad r=\min\{m,n\}$
8. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$
9. $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$

10: 此处统一采用记号:
$$\binom{n}{k}=C_n^k$$
这一符号应用更广泛。

解答 [10]

1. $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$，代 $x=1$ 可得。
2. 1. 式代 $x=-1$ 可得。
3. 1.2. 取 n 为偶数，两式相减可得。
4. 1.2. 取 n 为奇数，两式相加可得。
5. $(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\cdots+(1+x)^n=\dfrac{(1+x)^k[1-(1+x)^{n-k}]}{1-(1+x)}$，式左边 x^k 的系数为 $\sum_{l=k}^{n}\binom{l}{k}$，式右边 x^k 的系数为 $\binom{n+1}{k+1}$。
6. $r=\min\{m,n\}$，$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{n+m}$，式左边分别展开后，$x^r$ 的系数为 $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$，式右边展开后 x^r 的系数为 $\binom{m+n}{r}$。
7. 不妨设 $m\geqslant n$，则 $r=n$，式化为 6.。
8. $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$，两侧同时求导，得 $n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$，再取 $x=1$ 可得。
9. 上式求两次导后与 8. 相减可得。

TAG 二项式定理 组合不等式 DIF 易

1.3 抽象函数

抽象函数相关题目在试题中出现的不多，然而由于它需要对函数概念有较深的理解，并有一定的函数分析能力，因此不乏不错的习题。抽象函数有一些常出现的模型，列举如下：

模型	方程式	备注
一次函数模型	$f(x+y)=f(x)+f(y)$	
幂函数模型	$f(xy)=f(x)f(y)$	
指数函数模型	$f(x+y)=f(x)f(y)$	
对数函数模型	$f(xy)=f(x)+f(y)$	
余切函数模型	$f(x+y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{1-f(x)f(y)}$	$\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$
正切函数模型	$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$	
双曲正切函数模型	$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$	$\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

函数的性质:

奇偶性 $\forall x\in D$，若 $-x\in D$ 且 $f(x)=-f(-x)$，称函数为奇函数；$\forall x\in D$，若 $-x\in D$ 且 $f(x)=f(-x)$，称函数为偶函数。

有界性 若 $\exists M<\infty$，使得 $\forall x\in S\subset D$，$f(x)<M$，称 $f(x)$ 在 S 上有上界 M；若 $\exists N<\infty$，使得 $\forall x\in S\subset D$，$f(x)>N$，称 $f(x)$ 在 S 上有下界 N；若 $f(x)$ 在 S 上有上下界，称 $f(x)$ 在 S 上有界。

单调性 若 $\forall x_1,x_2\in S\subset D, x_1>x_2$，恒有 $f(x_1)-f(x_2)\geqslant 0$，称 $f(x)$ 在 S 上单调递增，若式中等号无法取得，称 $f(x)$ 在 S 上严格单调递增；若 $\forall x_1,x_2\in S\subset D, x_1>x_2$，恒有 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant 0$，称 $f(x)$ 在 S 上单调递减，若式中等号无法取得，称 $f(x)$ 在 S 上严格单调递减。

连续性 固定 $x_0\in D$, 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, s.t $\forall x\in(x_0,x_0+\delta(\varepsilon))$, $|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右连续；固定 $x_0\in D$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，s.t $\forall x\in(x_0-\delta(\varepsilon),x_0)$，$|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续；若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续且右连续，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

可导性 固定 $x_0\in D$，若 $\exists a<\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，s.t $\forall x\in(x_0,x_0+\delta(\varepsilon))$，$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右导数存在且为 a；固定 $x_0\in D$，若 $\exists b<\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，s.t $\forall x\in(x_0-\delta(\varepsilon),x_0)$，$\left|\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}-b\right|<\varepsilon$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左导数存在且为 b；若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左右导数都存在且 $a=b=A$，称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导且导数为 A。x 到 $f(x)$ 在 x 处导数的映射称为 $f(x)$ 的导函数。可导必定连续。连续不一定可导。[11]

11: 连续性和可导性可在定义极限后改用极限语言叙述，可复习教材定积分一章。

题目 014

1. 若函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\neq 0$，$f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$ 的显性表达式。
2. 若函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\neq 0$，$f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$，求 $f(x)$ 的显性表达式。
3. 若函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\neq 0$，
$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\cos x$$
求 $f(x)$ 的显性表达式。

解答

1. 令 $x=\dfrac{1}{x}$（此处为赋值），得 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$，与题中条件联立得

$f(x)=\dfrac{2}{x}-x$ 。

2. 记 $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$,我们注意到这样一个事实[12]: $\forall n\in\mathbb{N}, g^{n+3}(x)=\underbrace{g(g(\cdots g(x)))}_{n+3\text{层复合}}=g^n(x)$，因此若记[13] $a=f(x)=f(g^0(x)), b=f(g(x)), c=f(g^2(x))$，赋值 $x=x, x=g(x), x=g^2(x)$，可得三个等式:

$$\begin{cases}a+b=f(x)+f(g(x))=1+x\\ b+c=f(g(x))+f(g^2(x))=1+g(x)\\ c+a=f(g^2(x))+f(g^3(x))=f(g^2(x))+f(x)=1+g^2(x)\end{cases}$$

解之得

$$a=f(x)=\frac{1}{2}\left[(1+x)-(1+g(x))+1+g^2(x)\right]=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

3. 记 $g(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，注意到这样一个事实：$g^2(x)=-\dfrac{1}{x}$，$g^3(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，$g^4(x)=x=g^0(x)$，因此原式可改写为：$f(g(x))+f(g^2(x))+f(g^3(x))=\cos x$，赋值 $x=x, x=g(x), x=g^2(x)$，可得四个等式:

$$\begin{cases}f(g(x))+f(g^2(x))+f(g^3(x))=\cos x\\ f(g^2(x))+f(g^3(x))+f(x)=\cos g(x)\\ f(g^3(x))+f(x)+f(g(x))=\cos g^2(x)\\ f(x)+f(g(x))+f(g^2(x))=\cos g^3(x)\end{cases}$$

解之得[14]

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{3}\left[-2\cos x+\cos g(x)+\cos g^2(x)+\cos g^3(x)\right]\\&=\frac{1}{3}\left[-2\cos x+\cos\frac{1-x}{1+x}+\cos\frac{1}{x}+\cos\frac{1+x}{1-x}\right]\end{aligned}$$

TAG 抽象函数 DIF 中

12: 这一事实启示了我们,若有一个数列 $\{a_n\}$,其递推式为 $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$，那末 $\{a_n\}$ 为周期数列。这里结合数列知识可以展开很多，不过与章节内容不符，故不赘述。

13: 以下两种记号应当作区分: $f^n(x)$ 表示 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{层复合}}$; $[f(x)]^n$ 表示 $\underbrace{f(x)f(x)\cdots f(x)}_{n\text{个}f(x)\text{乘积}}$。只有在不造成混淆的情况下，可用第一种记号表示函数值的乘方。事实上，函数的复合被视为映射的乘积，这就是第一种记号的来源。

14: 函数

$$f(x)=\frac{x\cos\frac{2\pi}{m}-\sin\frac{2\pi}{m}}{x\sin\frac{2\pi}{m}+\cos\frac{2\pi}{m}}$$

满足 $f^m(x)=x$，2,3 两小题出题背景即是此式。此式的背景为旋转变换，可自行查阅旋转变换相关的拓展知识。

题目 015

1. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，下式恒成立:
$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$$
2. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，下式恒成立:
$$f(f(x)+y)=2x+f(f(f(y))-x)$$
3. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，下式恒成立:
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$$

解答

1. [15]设 $u=x+y$，$v=x-y$，原式可化为
$$vf(u)-uf(v)=(u^2-v^2)uv\ \Leftrightarrow\ \frac{f(u)}{u}-\frac{f(v)}{v}=u^2-v^2$$
显然 $f(x)=x^3$ 为一特解，我们需要找到所有解，即通解。假设有另一解 $f(x)=x^3+xg(x)$，$g(x)$ 为同定义域的未知函数，代入原式得
$$\forall u,v\in\mathbb{R},\ g(u)-g(v)=0\ \Leftrightarrow\ g(x)\equiv C$$
其中 C 为一实常数。因此通解为 $f(x)=x^3+C,\ C\in\mathbb{R}$ 。

15: 本题背景为图像的旋转变换 $(x,y)\mapsto(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)$，以及线性组合。

2. 我们先求 $f(0)$。令 $x=y=0$，得 $f^2(0)=f^3(0) \Rightarrow \forall n \geqslant 2, f^n(0)=f^2(0)$；令 $y=0, x=f^2(0)$，得 $f^4(0)=f^2(0)=2f^2(0)+f(0) \Rightarrow -f(0)=f^2(0)$；令 $x=0, y=-f(0)$，得

$$f(0)=f(f^2(-f(0)))=f^5(0)=-f(0) \ \Rightarrow \ f(0)=0$$

令 $y=0$，得 $f^2(x)=2x+f(-x)$；令 $y=x, x=0$，得 $f(x)=f^3(x)$；令 $y=-f(x)$，得

$$f(0)=0=2x+f(f^2(-f(x))-x)$$

令 $x=f(x), y=0$，得

$$f^3(x)=2f(x)+f(-f(x)) \ \Rightarrow \ f(-f(x))=-f(x)$$

赋值 $x=-f(x)$ 之后，似乎可以认为 $f(x)=x$ 了，不过因为 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们须得[16]确认 $f(x)$ 可遍历 $\mathbb{R}$。回代之得 $\forall x \in \mathbb{R}$，

16: 在做变量代换时，切记观察定义域是否有变动。

$$0=2x+f(f(f(-f(x)))-x)=2x+f(-f(x)-x)$$

故 $f(x)$ 可遍历 $\mathbb{R}$。因此可以确认只有 $f(x)=x$ 符合题意。

3. [17]分别赋值 $x=0, y=-x$；$x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+x$；$y=\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}+y$，可得三个式子：

17: 本题背景为波动方程。

$$\begin{cases} f(x)+f(-x)=2f(0)\cos x \\ f(\pi+x)+f(x)=0 \\ f(\pi+x)+f(-x)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x \end{cases}$$

解之得 $f(x)=f(0)\cos x+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x$。由于 $f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 任意，因此

$$f(x)=A\cos x+B\sin x,\ A,B\in\mathbb{R}$$

对于第三小问，我们简要给出其出题背景的解释。原式可改写为

$$\frac{\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}-\dfrac{f(x)-f(x-y)}{y}}{y}=\frac{2f(x)}{y^2}[\cos y-1]$$

易证 f 有二阶导数，那末取 $y\to 0$，式子化为

$$f''(x)=\lim_{y\to 0}\text{左}=2f(x)\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y^2}=-f(x)$$

这是标准的波动方程，其通解为

$$f(x)=A\sin x+B\cos x$$

TAG 抽象函数 DIF 难

题目 016 设 $f:\mathbb{Z}^{\geqslant 0}\to\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$（$\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ 即非负整数集），$\forall n\in\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$，$f(n)$ 满足：

(1) $[f(2n+1)]^2-[f(2n)]^2=6f(n)+1$

(2) $f(2n)\geqslant f(n)$

求 f 的值域中，满足小于 2021 的数的个数。

题目 017 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且 $\forall m,n\in\mathbb{R}$，$f(m+n)=f(m)+f(n)-1$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，且 $\forall x>-\frac{1}{2}$，$f(x)>0$。求证 $f(x)$ 是严格单调递增函数。

18: 步骤暗示 (indicate) 了这样一个事实：将题干中 $-\frac{1}{2}$ 均更改为任意实数，$f(x)$ 增减性不变。这一性质由 $f(m+n)=f(m)+f(n)-1$（甚至这里的「1」也可更改）隐含保证。就此可稍作思考。

解答 设 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$，$x_1>x_2$，有[18]

$$
\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2) &= f(x_1-x_2+x_2)-f(x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)-1-f(x_2) \\
&= f(x_1-x_2)-1=f(x_1-x_2)+f\left(-\frac{1}{2}\right)-1 \\
&= f\left[-\frac{1}{2}+\underbrace{(x_1-x_2)}_{>0}\right]>0 \quad \Rightarrow \quad f(x)\text{严格单调增}
\end{aligned}
$$

TAG 抽象函数 DIF 易

题目 018 设 $f_1(x), f_2(x)$ 定义在 $\mathbb{R}^+$ 上，且 $f_1(x)$ 单调增，$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$，$|f_1(x_1)-f_1(x_2)|>|f_2(x_1)-f_2(x_2)|$。设 $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$。

1. 求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格单调递增。
2. 设 $F(x)=xf(x)$，$a>0$，$b>0$，求证：$F(a+b)>F(a)+F(b)$。

解答

1. 任取 $x_1>x_2>0$，那末

$$
\begin{aligned}
f(x_1)-f(x_2) &= \overbrace{[f_1(x_1)-f_1(x_2)]}^{>0}-[f_2(x_1)-f_2(x_2)] \\
&\geqslant |f_1(x_1)-f_1(x_2)|-|f_2(x_1)-f_2(x_2)|>0
\end{aligned}
$$

因此 $f(x)$ 严格单调递增[19]。

19: 观察以下两个命题：

a) $\forall x_1, x_2 \in D$，$|f_1(x_1)-f_1(x_2)|>|f_2(x_1)-f_2(x_2)|$
b) $\forall x_1, x_2 \in D$，$|f'(x_1)|>|f'(x_2)|$

这两个式子都是同一个朴素性质的刻画：$f_1(x)$ 比 $f(x_2)$ 变化得快。我们对 (1) 同除 $|x_1-x_2|$，似乎可以推出 (2)，然而 (2) 是 (1) 的充分非必要条件，这是由于 (1) 不包含连续、可导的信息。这一点是重要的。

2.

$$
\begin{aligned}
F(a+b)-F(a)-F(b) &= (a+b)f(a+b)-af(a)-bf(b) \\
&= a\,[f(a+b)-f(a)]+b\,[f(a+b)-f(b)]>0 \\
&\Leftrightarrow \; F(a+b)>F(a)+F(b)
\end{aligned}
$$

TAG 抽象函数 DIF 易

题目 019 已知定义域 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$。

1. 若 $f(2)=3$，求 $f(1)$；又若 $f(0)=a$，求 $f(a)$。
2. 若有且仅有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，求函数 $f(x)$ 的表达式。

解答

1. 令 $x=2$ 得 $f(1)=1$；令 $x=0$ 得 $f(a)=a$。
2. 原表述意味着 $f(x)-x^2+x\equiv x_0$，故 $f(x_0)=x_0^2-x_0+x_0=x_0^2=x_0 \Rightarrow x_0=0,1$。若 $x_0=0$，则 $f(x)=x^2-x$，$f(0)=0$，$f(2)=2$，这与 x_0 唯一性矛盾；若 $x_0=1$，则 $f(x)=x^2-x+1=x \Rightarrow x=1$，这是符合题意的。因此 $x_0=1$，$f(x)=x^2-x+1$。

TAG 抽象函数 不动点 DIF 易

题目 020 设函数在 $\mathbb{R}$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间上，只有 $f(1)=f(3)=0$。

1. 判断 $f(x)$ 的奇偶性。
2. 求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2021, 2021]$ 上根的个数。

解答

1. 假设 $f(x)$ 为奇函数或偶函数，那末 $0=f(1)=f(-1)=f(5)$，这与 $f(x)$ 在 $[0,7]$ 上只有 $x=1,3$ 两个零点矛盾。因此 $f(x)$ 为非奇非偶函数。
2. 首先当且仅当 $m=5n+2, n\in\mathbb{Z}$ 时，$x=m$ 为 $f(x)$ 对称轴：
(⇒) 记 $g(x)=f(x+2)$，则 $g(x)$ 满足 $g(x)$ 在 $[-2,5]$ 上有且仅有 $-1,1$ 两个零点，$g(x)=g(-x)$，$g(5-x)=g(5+x)$，$\forall k\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R}$，
$$\begin{aligned}g(5(2k)+x)&=g(10-5(2k)-x)=g(x+5(2k)-10)\\&=\cdots=g(x)=g(-x)=\cdots=g(5(2k)-x)\\g(5(2k+1)+x)&=g(10-5(2k+1)-x)=g(x+5(2k+1)-10)\\&=\cdots=g(x+5)=g(5-x)=\cdots=g(5(2k+1)-x)\end{aligned}$$
故 $\forall n\in\mathbb{Z}$，$x=5n$ 为 $g(x)$ 对称轴 $\Leftrightarrow$ $x=5n+2$ 为 $f(x)$ 对称轴。同时我们也说明了 $f(x)$ 是周期为 10 的周期函数。
(⇐) 假设存在 $m=a\neq 5n, n\in\mathbb{Z}$ 为 $g(x)$ 对称轴，由周期性，不妨认为 $a\in[-5,5]$。

a) 若 $a\in(0,2]$，则 $f(\underbrace{2a+1}_{\in(1,5]})=f(-1)=0$，矛盾。
b) 若 $a\in[2,3]$，则 $f(1)=f(\underbrace{2a-1}_{\in[3,5]})=f(0)$，矛盾。
c) 若 $a\in[3,5)$，则 $f(1)=f(2a-1)=f(\underbrace{11-2a}_{\in(1,5]})=0$，矛盾。

结合 $g(x)$ 为偶函数可知不存在这样的额外对称轴。因此 $f(x)$ 不存在 $x=5n+2, n\in\mathbb{Z}$ 以外的对称轴。[20]因此 $f(x)$ 在每个周期内均有且仅有两个零点，在 $[-2021,2021]$ 上总的零点个数为 $\dfrac{2020}{10}\times 2+1=$ 405 。

TAG 抽象函数 周期性 轴对称 DIF 易

20: 本题并不需要证明必要性，但这是一个重要的事实。事实上
$$f(a-x)=f(a+x)$$
意味着 $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称；
$$f(a-x)=-f(a+x)$$
意味着 $f(x)$ 关于 $(a,0)$ 中心对称。

题目 021 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：
① 值域为 $(-1,1)$，且当 $x>0$ 时，$-1<f(x)<0$；
② 对于定义域内任意实数 x,y，均满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$。

1. 试求 $f(0)$ 的值。
2. 判断和证明函数 $f(x)$ 的单调性。
3. 若函数存在反函数 $g(x)$，求证：
$$g\left(\frac{1}{5}\right)+g\left(\frac{1}{11}\right)+\cdots+g\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)$$

解答

1. 令 $x=y=0$，得 $f(0)[(f(0))^2-1]=0$。又 $f(x)\in(-1,1)$，故 $f(0)=0$ 。
2. 首先，$f(x)$ 是奇函数：令 $y=-x$ 得
$$f(x-y)=f(0)=0=\frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}\ \Rightarrow\ f(-x)=-f(x)$$
其次，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上是减函数：令 $1>x=x_1>x_2=y>0$，得
$$\begin{aligned}0>f(x_1-x_2)&=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{1+f(x_1)f(-x_2)}\\&=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{1+f(x_1)f(-x_2)}\\&\Leftrightarrow\ f(x_1)-f(x_2)<0\end{aligned}$$

综上所述，可知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格减函数。

3. 记 $f(x)=X, f(y)=Y$，则 $X=g(x), Y=g(Y)$，可以注意到[21]

$$g(X)+g(Y)=x+y=g(f(x+y))=g\left(\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\right)=g\left(\frac{X+Y}{1+XY}\right)$$

由于 $f(x)$ 是严格单调减的奇函数，所以 $g(x)$ 也是严格单调减的奇函数，我们首先取 $Y=-Y$[22]，可得 $g(X)-g(Y)=g\left(\dfrac{Y-X}{XY-1}\right)$，故

$$\begin{aligned}
\text{原式左}&=g\left(\frac{3-2}{2\times3-1}\right)+g\left(\frac{4-3}{3\times4-1}\right)+\cdots+g\left(\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)-1}\right)\\
&=[g(2)-g(3)]+[g(3)-g(4)]+\cdots+[g(n+1)-g(n+2)]\\
&=g(2)-g(n+2)=g\left(\frac{(n+2)-2}{2(n+2)-1}\right)\\
&=g\underbrace{\left(\frac{1}{2+3/n}\right)}_{<1/2}>g\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

TAG 抽象函数 反函数 分析 DIF 难

21: 这里生动的说明了函数名为「Function」的原因。

22: 这里的等号实际为「赋值」。

至此为止我们始终根据抽象函数的性质进行计算和推导，然而应当有这样的问题：「满足所述性质的抽象函数是否存在？」「存在的话所有满足条件的函数构成的集合空间是怎样的？」「这样的空间有何性质？」「这样的函数是否可导？」等等。我们只添加 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导一个条件，从更高的角度看一下该函数究竟是什么函数。

令 $y=-x+\varepsilon$，有

$$\frac{f(x)-f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}=[1-f(x)f(x-\varepsilon)]\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{※}$$

由 0 处可导性，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}f(\varepsilon)=f'(0)<\infty$。另外，结合 $f(0)=0$ 和 0 处连续性，我们有：给定任意 $\delta>0$，$\exists\varepsilon>0$ 使得 $|f(\varepsilon)|<\delta/2$，进而

$$|f(x)-f(x-\varepsilon)|=|[1-f(x)f(x-\varepsilon)]||f(\varepsilon)|<2\cdot\frac{\delta}{2}=\delta\ \Rightarrow\ f(x)\text{连续}$$

令※中 $\varepsilon\to0$，可知 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=[1-(f(x))^2]f'(0)$。求解该方程（称为微分方程）可得：

$$f(x)=\frac{e^{f'(0)x}-e^{-f'(0)x}}{e^{f'(0)x}+e^{-f'(0)x}}=\tanh(f'(0)x)$$

至此我们可以发现，函数的基本形态已经大体由 ② 确定了，① 中我们只使用了 $f(x)$ 有界这一条件，因此 ① 完全可以放宽为有界性。So what if $f'(0)$ remains undefined?

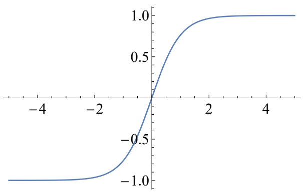

Figure 1.3: $f(x)$ 的一个图像

题目 022 函数 $f(x)$ 满足 ①$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$，②$f(4)=16$，m,n 为互质整数，$n\neq0$，求 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)$ 的值。

解答 令 $a=b=0$ 得 $f(0)=[f(0)]^2\Rightarrow f(0)=0,1$。若 $f(0)=0$，再令 $b=0$，可得 $f(a+0)=f(a)=f(a)f(0)=0\Rightarrow f(x)\equiv0$，这与 ② 矛盾。以下就 $f(0)=1$ 时情况作讨论。令 $b=-a$ 可得 $f(-a)=\dfrac{1}{f(a)}$，再令 $a=b=\dfrac{x}{2}$，可得 $f(x)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant0$，再根据条件 ② 可知 $f(1)=2$。

因此 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^m=[f(1)]^{\frac{m}{n}}=2^{\frac{m}{n}}$。

TAG 抽象函数 分析 DIF 易

本题中抛却条件 ②，我们可以知道一个更纯粹的事实：满足 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$ 的函数 $f(x)$ 至少在有理数域上为指数函数。同※一样地，我们添加 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连

续且可导以及全定义域上有界的条件，便可将这一事实拓展到整个实数域（忽略平凡解 $f(x)\equiv 0$）：注意到随着 $\varepsilon\to 0$，

$$|f(x+\varepsilon)-f(x)|=\underbrace{|f(x)|}_{<M}\underbrace{|[f(\varepsilon)-1]|}_{\to 0}\to 0$$

因此 $f(x)$ 在整个定义域内连续；注意到随着 $\varepsilon\to 0$，

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}=f(x)\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon}\to f(x)f'(0)<\infty$$

因此 $f(x)$ 在整个定义域内可导，且 $f'(x)=f(x)f'(0)$，解这一方程可得，$f(x)=e^{f'(0)x}$，这是指数函数。

题目 023 已知函数 $f(x)$ 满足：① 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，有 $f(xy)=f(x)f(y)$；② $f(-1)=1$，$f(27)=9$；③ $\forall x\in[0,1), f(x)\in[0,1)$。

1. 判断 $f(x)$ 的奇偶性。
2. 判断 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的单调性。
3. 若 $a\geqslant 0$，且 $f(a+1)\leqslant\sqrt[3]{9}$，求 a 的取值范围。

解答

1. 令 $y=-1$，得 $f(-x)=f(x)f(-1)=f(x)$，$f(x)$ 为偶函数。
2. 令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$。$\forall x\in\mathbb{R}^+$，$f(x)=[f(\sqrt{x})]^2\geq 0$。若存在不为零的正实数 x_0 使得 $f(x_0)=0$，那末[23] $9=f(27)=f(x_0)f\left(\frac{27}{x_0}=0\right)$，矛盾，因此 $\forall x>0$，$f(x)>0$。
   令 $x_1>x_2>0$，$x=x_1$，$y=\frac{x_2}{x_1}$，得
   $$f\left(x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\right)=\underbrace{f(x_2)}_{>0}=\underbrace{f(x_1)}_{>0}\underbrace{f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\in[0,1)}<f(x_1)$$
   因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上（严格）单调增，在 $(-\infty,0]$ 上（严格）单调减。
3. $f((a+1)^2)=[f(a+1)]^3\leqslant 9\ \Leftrightarrow\ (a+1)^3\in[0,27]\ \Leftrightarrow\ a\in[1,2]$

TAG 抽象函数 分析 DIF 易

23: 应当注意到，根据题设，$f(x)<\infty$，即 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$。

题目 024 设 A 是定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 的集合：
① $\forall x\in[1,2]$，有 $\varphi(2x)\in(1,2)$。
② 存在常数 $L(0<L<1)$，使得对于任意 $x_1,x_2\in[1,2]$，都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$。

1. 设 $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x}$，$x\in[2,4]$，证明：$\varphi\in A$。
2. 设 $\varphi\in A$，如果存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，那么这样的 x_0 是唯一的。
3. 设 $\varphi\in A$，任取 $x_1\in(1,2)$，令 $x_{n+1}=\varphi(2x_n), n\in\mathbb{N}^+$，证明：给定正整数 k，那末对于任意的正整数 p，不等式
   $$|x_{k+p}-x_p|\leqslant\frac{L^{k+1}}{1-L}|x_2-x_1|$$
   成立。

解答

1. [24]显然 $x\in[1,2]$ 时，$\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x}\in[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3}]\subset(1,2)$；对于任意 $x_1,x_2\in[1,2]$，

24: 本题出题背景涉及到了柯西列、李普希兹条件和柯西中值定理，但最终成题却非常简单。有兴趣可对这些名词稍作了解。应当注意到 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ 为割线斜率。若可导函数割线斜率有界，那末其导函数必有界。

有

$$\left|\sqrt[3]{1+x_1}-\sqrt[3]{1+x_2}\right|=\frac{|x_1-x_2|}{|(1+x_1)^{2/3}+(1+x_2)^{2/3}+(1+x_1)^{1/3}(1+x_2)^{1/3}|}$$
$$\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{|3\times 2^{2/3}|}=L|x_1-x_2|$$

其中 $L=\dfrac{1}{3\times 2^{2/3}}\in(0,1)$ 符合要求，因此 $\varphi\in A$。

2. 假设 $\exists x_1,x_2\in(1,2)$,$x_1\neq x_2$,$x_1=\varphi(2x_1)$,$x_2=\varphi(2x_2)$,那末 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|=|x_1-x_2|$，这与 $\varphi(x)\in A$ 前提下应满足的 ② 矛盾，因此唯一性得以说明。
3. 注意到这样一个事实：$\forall m\in\mathbb{N}^+$，

$$|x_{m+1}-x_m|=|\varphi(2x_m)-\varphi(2x_{m-1})|\leqslant L|x_m-x_{m-1}|\leqslant\cdots\leqslant L^{m-1}|x_2-x_1|$$

因此，

$$\begin{aligned}|x_{k+p}-x_k|&=|(x_{k+p}-x_{k+p-1})+(x_{k+p-1}-x_{k+p-2})+\cdots+(x_{k+1}-x_k)|\\&\leqslant|x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k+1}-x_k|\\&\leqslant(L_{k+p-2}+L_{k+p-3}+\cdots+L_{k-1})|x_2-x_1|\\&=\frac{L_{k-1}(1-L^p)}{1-L}|x_2-x_1|\\&\leqslant\frac{L_{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|\end{aligned}$$

TAG 抽象函数 分析 DIF 中

题目 025 已知函数 $y=f(x)$，$x,y\in\mathbb{N}^+$，满足：① 对任意 $x_1,x_2\in\mathbb{N}^+$，$x_1\neq x_2$ 都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$。② 对任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 都有 $f[f(n)]=3n$。

1. 试证明：$f(x)$ 为 $\mathbb{N}^+$ 上的单调增函数。
2. 求 $f(1)+f(6)+f(28)$。
3. 令 $a_n=f(3^n)$，$n\in\mathbb{N}^+$，试证明：$\dfrac{n}{4n+2}\leqslant\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{4}$。

解答

1. $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，$f(x)$ 严格单调增。
2. 由于 $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}^+$，$f(f(n))=3n$ 可知 $f(1)\neq 1$，且只能 $f(1)>1$。因为 $f(x)$ 单调增，因此 $3=f(f(1))>f(1)$，故只能 $f(1)=2$，进而 $f(2)=f(f(1))=3$，$f(3)=f(f(2))=6$，$f(f(3))=f(6)=9$，$f(f(6))=f(9)=18$，$f(f(9))=f(18)=27$，$f(f(18))=f(27)=54$，$f(f(27))=f(54)=81$，注意到 $f:\{27,28,\cdots,54\}\mapsto\{54,55,\cdots,81\}$，像集与原像集均是 28 个整数，又 $f(x)$ 严格单调增，故有 $f(n)=n+27$，$27\leqslant n\leqslant 54$，$f(28)=55$，故 $f(1)+f(6)+f(28)=2+9+55=$ 66 。
3. 我们首先以数学归纳法证明 $f(3^n)=2\cdot 3^n$，$f(2\cdot 3^n)=3^{n+1}$。
   a) $n=0$ 时，$f(3^0)=f(1)=2=2\cdot 3^0$，$f(2\cdot 3^0)=3^1$ 成立。
   b) 假设 $n=k$ 时，$f(3^k)=2\cdot 3^k$，$f(2\cdot 3^k)=3^{k+1}$ 成立，则 $n=k+1$ 时，

$$f(f(2\cdot 3^k))=f(3^{k+1})=6\cdot 3^k=2\cdot 3^{k+1}\Rightarrow f(3^{k+1})=2\cdot 3^{k+1}$$
$$f(2\cdot 3^{k+1})=f(f(3^{k+1}))=3^{(k+1)+1}$$

由归纳原理知 $a_n=f(3^n)=2\cdot 3^n$，进而[25]

25: 也可归纳证明 $a_{n+1}=3a_n$。

$$\text{原式中} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right] = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) < \frac{1}{4}$$

又归纳法易证 $3^n \geqslant 2n+1$，$n=1$ 时取等，故 $\dfrac{n}{4n+2} \leqslant \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$，原式得证。

TAG 抽象函数 不等式 DIF 中

题目 026 对于函数 $f(x), x \in D$，若定义域上恒有 $f'(x) > f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是 D 上的 J 函数。

1. 当 $f(x) = me^x \ln x$ 是定义域上的 J 函数时，求 m 的取值范围。
2. 若函数 $g(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的 J 函数，
   a) 试比较 $g(a)$ 与 $e^{a-1}g(1)$ 的大小。
   b) 求证：$\forall\, x_1, x_2, \cdots, x_n > 1$，

$$g(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n)) > g(\ln x_1) + g(\ln x_1) + \cdots + g(\ln x_n)$$

解答 [26]

1. $f(x) = me^x \ln x$ 定义域为 $\mathbb{R}+$，

$$f'(x) = me^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) > f(x) = me^x \ln x \Rightarrow \frac{me^x}{x} > 0 \Rightarrow m > 0$$

2. 设[27]$h(x) = e^{-x}g(x)$，那末 $h'(x) = e^{-x}[g'(x) - g(x)] > 0$，故 $h(x)$ 单调增。$a=1$ 时，$g(a) = e^{a-1}g(1)$；$a > 1$ 时，$g(a) = e^a h(a) > e^a h(1) = e^{a-1}g(1)$；当 $a < 1$ 时，$g(a) = e^a h(a) < e^a h(1) = e^{a-1}g(1)$。
   不妨设 $1 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，则由 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上单调增知

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n,\ h(x_k) \leqslant h(x_n) \Rightarrow g(\ln x_k) \leqslant \frac{x_k}{x_n} g(\ln x_n)$$

$$\Rightarrow \quad g(\ln x_1) + g(ln x_2) + \cdots + g(\ln x_n) \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_n} g(\ln x_n)$$

$$= e^{\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n)} h(\ln x_n) < e^{\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n)} h(\ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))$$

$$= g(ln(x_1+x_2+\cdots+x_n))$$

TAG 抽象函数 不等式 DIF 中

26: 本题中万不可以出现 $f''(x)$，这是由于题干中未给出 $f(x)$ 存在二阶导数的条件。

27: $f'(x) = f(x)$ 描述的函数为 $f(x) = e^x$。直觉上，$f'(x) > f(x)$ 描述了比 e^x 增长快的函数，故设 $h(x) = e^{-x}g(x)$。这一手法十分常用。

题目 027

1. 已知 $f(x)$ 为定义在 $x \in \mathbb{R}$ 可导奇函数，当 $x > 0$ 时，$f'(x)\ln x < -\dfrac{1}{x}f(x)$，求使得 $(x^2-4)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围。
2. 已知 $f(x)$ 为定义在 $x \in \mathbb{R}$ 可导奇函数，当 $x > 0$ 时，$x\ln x f'(x) < -f(x)$，求 $(x^2-4)f(x) > 0$ 的解集。
3. 已知 $f(x)$ 为定义在 $x \in \mathbb{R}$ 可导奇函数，当 $x \geqslant 0$ 时，$\dfrac{x}{3}f'(x) + f(x) \geqslant 0$，求 $x^3 f(x) - (1+2x)^3 f(1+2x) \leqslant 0$ 的解集。
4. 已知可导函数 $g(x)$ 满足 $\forall\, x \in \mathbb{R}$，$f(x) > f'(x) + 1$，若 $f(0) = 2020$，求不等式 $f(x) - 2019e^x < 1$ 的解集。

解答

1. 设 $g(x) = f(x)\ln x$，由题设 $x > 0$ 时，$g'(x) = f'(x)\ln x + \dfrac{1}{x}f(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ 严格单调减，又 $g(1) = 0$，故 $x \in (0,1)$ 时 $g(x) > 0$，$f(x) < 0$；$x \in (1, +\infty)$ 时 $g(x) < 0$，$f(x) > 0$，由 $f(x)$ 可导条件，$f(1) = 0$，因此结合奇偶性，$f(0) = 0$，

$(x^2-4)f(x)>0$ 解集为 $x \in (-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(2,+\infty)$。

2. 设 $g(x)=f(x)\ln x$，由题设 $x>0$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}[f'(x)x\ln x+f(x)]<0 \Rightarrow g(x)$ 严格单调减，这与 1. 是相同的。
3. 设 $g(x)=x^3f(x)$，由题设 $x>0$ 时，$g'(x)=3x^2\left[\dfrac{x}{3}f'(x)+f(x)\right]\geqslant 0 \Rightarrow g(x)$ 单调增，且 $g(x)$ 为偶函数。所给不等式可写为
$$g(x)\leqslant g(1+2x) \Leftrightarrow |x|<|1+2x| \Leftrightarrow -1-2x<x<1+2x \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$$
4. 设 $g(x)=e^{-x}[f(x)-1]$，则 $g'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]<0$，故 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递减，所给不等式可写为 $g(x)<2019$，又 $g(0)=2019$，故所求解集为 $x\in(0,+\infty)$。

TAG 抽象函数 不等式 DIF 易

1.4 求取参变量范围的综合题目

这类题目与不等式相关题目有可观的一部分来源于泰勒展开式，简要介绍之。

泰勒级数 若 $f(x)$ 在 D 上有定义，$x_0\in D$，$f(x)$ 在 D 上无穷次可导，那末 $f(x)$ 可写为
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\cdots$$
也可写为带有余项的形式：
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \xi\in[x_0,x]$$

证明 限于高中知识范围，这里只求系数，不证明存在性，足够使用。

由于 $f(x)$ 无穷次可导，我们不加证明地假设——事实上几乎所有高中涉及到的函数都可以——$f(x)$ 可写为无穷次多项式形式：
$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$
$$\Rightarrow \quad f^{(k)}(x)=k!a_k+A_{k+1}^k a_{k+1}(x-x_0)+\cdots \quad \Rightarrow \quad a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$
取 $x=x_0$ 即得所求式。特别地，取 $x_0=0$ 我们得到麦克劳林级数，十分常见：
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$
常见函数的展开式如下：

1. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$
2. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$
3. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$
4. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

具体图像可参考??。

题目 028 已知函数 $f(x)=\dfrac{a}{2}x^2+(a+1)x+2\ln(x-1)$，

1. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行，求出这条切线的方程。

2. 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间。
3. 若对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $f(x)<-2$，求实数 a 的取值范围。

解答 易知 $f(x)$ 定义域 $x\in(1,+\infty)$，

1. $f'(x)=ax+a+1+\dfrac{2}{x-1}\Rightarrow f'(2)=3a+3=2$，故 $a=-\dfrac{1}{3}$，$f(2)=\dfrac{2}{3}$，故切线方程为
$$y-\frac{2}{3}=2(x-2)\quad\Leftrightarrow\quad \boxed{3y-6x+10=0}$$
2. 由于 $a=-\dfrac{1}{3}$，故 $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{2}{3}x+2\ln(x-1)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{x-1}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0$，易知
$$f'(x)\leqslant 0\ \Leftrightarrow x\in[4,+\infty)\qquad f'(x)\geqslant 0\ \Leftrightarrow x\in(1,4]$$
故 $f(x)$ 在 $(1,4]$ 上单调增，在 $[4,+\infty)$ 上单调减。
3. （方法一）显然，$a<0$。分离变量得[28]
原式 $\Leftrightarrow\ a(x^2+2x)<-4-2x-4\ln(x-1)$
$$\Leftrightarrow\ a<-\frac{4+2x+4\ln(x-1)}{x^2+2x}=-g(x)\qquad x^2+2x=(x+1)^2-1>3>0$$
若我们能够求得 $\max g(x)$，则解即为 $a<-\max g(x)$。为方便书写，记 $\ln 0=-\infty$，
$$g'(x)=-\frac{\overbrace{2(x+1)}^{>0}(x^2-4+4(x-1)\ln(x-1))}{\underbrace{x^2(x+2)^2(x-1)}_{>0}}=-\frac{2(x+1)(x^2-4+4h(x))}{x^2(x+2)^2(x-1)}$$
注意到 $g'(2)=h(2)=h(1)=0$ [29]$g'(2)=h(2)=h(1)=0$。而 $h'(x)=\ln(x-1)+1$，故 $h(x)$ 在 $\left(1,1+\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调减，在 $\left(1+\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调增，进而
$$h(x)<0,x^2-4<0\ \Leftrightarrow\ x\in(1,2)\qquad h(x)>0,x^2-4>0\ \Leftrightarrow\ x\in(2,+\infty)$$
可推知 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调增，在 $(2,+\infty)$ 上单调减，$a<-\max g(x)=-g(2)=\boxed{-1}$。
（方法二）显然，$a<0$。$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x_1=-1$(舍) $x_2=\dfrac{a-1}{a}>1$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上必然先增后减，
$$\max f(x)=f\left(\frac{a-1}{a}\right)=-1-\frac{1}{2a}+\frac{3a}{2}+2\ln\left(-\frac{1}{a}\right)=g(a)<-2\ \Rightarrow\ a<0$$
$$g'(a)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2a^2}-\frac{2}{a}>0\ \Rightarrow\ g(a)\text{单调增}$$
注意到 $g(-1)=-2$，故所求 a 的取值范围为 $\boxed{a<-1}$。 TAG 参数范围 DIF 易

28: 一般都是有两种方法求解此类题。一是将 $f(x)$ 的最大值以 a 表达出来为 $g(a)$，再解关于 a 的不等式方程；二是分离变量为 $f_1(a)<f_2(x)$ 后解不等式 $f_1(a)<\min f_2(x)$。

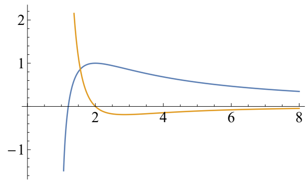

Figure 1.4: $g'(x)$ 的图像

29: 当 x 接近 0 时，$x\ln x$ 接近 0。这一点可用不等式
$$x-1\geqslant \ln x\geqslant -\frac{2}{\sqrt{x}}$$
证明。因此我们始终「不妨可设」$0\ln 0=0$ 进行补充定义。为使叙述简便和理解方便，方法一过程中补充定义了边界值，实际考试中应当小心仔细说明。

题目 029 设函数 $f(x)=2\ln(x-1)-(x-1)^2$，

1. 求函数的单调递增区间。
2. 若关于函数 x 的方程 $f(x)+x^2-3x-a=0$ 在区间 $[2,4]$ 上有两个相异的实根，求实数 a 的取值范围。

解答

1. $f'(x)=\dfrac{2}{x-1}-2(x-1)$，故结合定义域 $x>1$ 知 $f'(x)\geqslant 0\Rightarrow x\in(1,2]$，$f'(x)\leqslant 0\Rightarrow x\in[2,+\infty)$，$f(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调增，在 $[2,\infty)$ 上单调减。
2. 改写原式为 $a=f(x)+x^2-3x=2\ln(x-1)-x-1=g(x)$，由 $g'(x)=\dfrac{2}{x-1}-1$

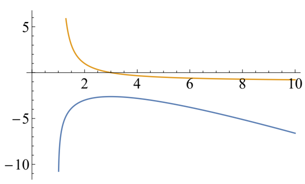

Figure 1.5: $g(x)=2\ln(x-1)-x-1$（蓝）及其导函数（橙）的图像

知

$$g(x)\text{单调增} \Leftrightarrow g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (1,3] \quad g(x)\text{单调减} \Leftrightarrow g'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [3,+\infty)$$

因此 $\max g(x) = g(3) = 2\ln 2 - 4$。注意到当 x 趋近于 1 或 $-\infty$ 时，$g(x)$ 均趋近于 $-\infty$，我们可大致知道 $g(x)$ 的图像形状，因此易知 a 的取值范围为 $a < 2\ln 2 - 4$ 。

TAG 参数范围 最值 DIF 易

题目 030 已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + 1$，$g(x) = 1 - 4x - ax^2$，其中实数 $a \neq 0$,

1. 求函数 $f(x)$ 的单调区间。
2. 当函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像只有一个公共点且 $g(x)$ 存在最小值时，记 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求 $f(a)$ 的值域。
3. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(-a, -a+2)$ 内均为增函数，求 a 的取值范围。

解答

1. $f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = (3x+a)(x-a) = 0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{a}{3}$，$x_2 = a$，显然 $a \neq 0$ 时 $x_1 \neq x_2$。

   a) 当 $a > 0$ 时，$x_2 > x_1$，$f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\dfrac{a}{3}\right]$ **和** $[a,+\infty)$ 上单调增，在 $\left[-\dfrac{a}{3}, a\right]$ 上单调减。

   b) 当 $a < 0$ 时，$x_2 < x_1$，$f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ **和** $\left[-\dfrac{a}{3}, +\infty\right)$ 上单调增，在 $\left[a, -\dfrac{a}{3}\right]$ 上单调减。

2. $g(x)$ 存在最小值意味着 $a > 0$，由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数不一，因此从两者图像上寻找「只有一个公共点」的情形是困难的，我们须得设差值函数 $m(x) = f(x) - g(x) = x^3 + (4 - a^2)x$，公共点条件即转化为 $m(x)$ 有且仅有一个零点[30]。由于 0 为 $m(x)$ 的一个零点，$m(x)$ 为中心对称的奇函数，故若使 $m(x)$ 零点唯一，$m(x)$ 必然单调增，即

$$m'(0) = [3x^2 + (4 - a^2)]_{x=0} = 4 - a^2 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; a \in (0, 2]$$

30: 涉及到函数图像相交的问题，均可转化为「交点处为差值函数零点 $\Leftrightarrow$ 交点处函数值相同」的问题，这一过程将减少函数个数，从而简化问题。对于特殊图像，也可从图像特征入手。

3. 记 $I = (-a, -a+2)$。$g'(x) = -4 - 2ax$，使 $g(x)$ 在 I 上单调增有

$$\begin{cases} g'(-a) = -4 + 2a^2 \geqslant 0 \\ g'(-a+2) = 2a^2 - 4a - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3}, +\infty)$$

在这一范围基础上，注意到 I 的长度为 $|I| = 2$，而 $f'(x)$ 两根 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = \dfrac{2a}{3}$，$x_1x_2 = -\dfrac{a^2}{3}$，故

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4a^2}{3} \geqslant \frac{4 \times (\sqrt{2})^2}{3} = \frac{16}{3} > 2 = |I|$$

因此 $f(x)$ 在 I 上不可能有三段增减区间，故只需使

$$\begin{cases} f'(-a) = 4a^2 \geqslant 0 \\ f'(-a+2) = 4(a-3)(a-1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

综上，可知 a 的取值范围为 $a \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$ 。

TAG 取值范围 交点 DIF 中

题目 031 设 a 为实数，记函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$。

1. 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 改写为 t 的函数 $m(t)$。
2. 求出 $g(a)$。
3. 求出满足 $g(a)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a。

解答

1. 显然 $x\in[-1,1]$，$t\geqslant 0$，$t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]\Rightarrow t\in[\sqrt{2},2]$。同时我们得到 $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}t^2-1$，进而
$$f(x)=a\left(\frac{1}{2}t^2-1\right)+t=\boxed{\frac{a}{2}t^2+t-a=m(t)}$$
2. $m(t)$ 对称轴 $t_0=-\dfrac{1}{a}(a\neq 0)$，$t\in[\sqrt{2},2]$。
   a) 若 $a=0$，则 $m(t)$ 退化为单调增的一次函数[31]，最大值 $g(0)=m(2)=2$。
   b) 若 $a>0$，则 $m(t)$ 为开口向上，对称轴在 y 轴左侧的二次函数，最大值 $g(a)=m(2)=a+2$。
   c) 若 $a\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$，则 $m(t)$ 为开口向下，对称轴 $t_0\in[\sqrt{2},2]$ 的二次函数，最大值 $g(a)=m(t_0)=-a-\dfrac{1}{2a}$。
   d) 若 $a\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，则 $m(t)$ 为开口向下，对称轴 $t_0<\sqrt{2}$ 的二次函数，最大值 $g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$。
   e) 若 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$，则 $m(t)$ 为开口向下，对称轴 $t_0>2$ 的二次函数，最大值 $g(a)=m(2)=2+a$。

   因此：$g(a)=\begin{cases} a+2 & a\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right) \\ -a-\dfrac{1}{2a} & a\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\right] \\ \sqrt{2} & a\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$。
3. 由 $(a+2)|_{a=-1/2}=\left(-a-\dfrac{1}{2a}\right)|_{a=-1/2}=\dfrac{3}{2}$，$\sqrt{2}=\left(-a-\dfrac{1}{2a}\right)|_{a=-1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 知 $g(a)$ 是连续的。分段求导可知，$g(a)$ 当 $a\geqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时严格单调增，那末
$$g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow a=\frac{1}{a}\text{ 或 }a,\frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\boxed{a\in\left[-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\{1\}}$$

TAG 取值范围 DIF 易

31: 一次函数可以视为退化的二次函数，直线和双直线可以视为退化的二次曲线。基于这一点我们应当有这样的先验直觉：$g(a)$ 必然连续。事实上也的确连续。

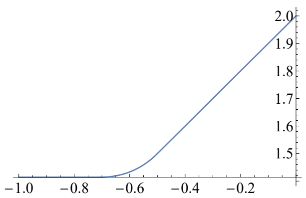

Figure 1.6: $g(x)$ 在 $[-1,0]$ 上的图像。可以看到是连续的。

题目 032 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}e^{-ax}$，

1. 设 $a>0$，讨论 $y=f(x)$ 的单调性。
2. 若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$，求 a 的取值范围。

解答 $f'(x)=\dfrac{a\left(x^2+\dfrac{2-a}{a}\right)}{(x-1)^2}e^{-ax}$

1. a) 若 $a\in(0,2]$，则 $\dfrac{2-a}{a}\geqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调增。

   b) 若 $a>2$，则 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}$，$x_2=\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}<1$，因此 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}\right]$、$\left[\sqrt{\dfrac{a-2}{a}},1\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调增，在 $\left[-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}},\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}\right]$ 单调减。

2. （方法一）$(0,1)$ 上，$f'(x)=\dfrac{2+a\overbrace{(x^2-1)}^{\in(-1,0)}}{(x-1)^2}e^{-ax}$

   a) 若 $a\leqslant 2$，则 $2+a(x^2-1)\geqslant 0 \Rightarrow f'(x)$ 单调增 $\Rightarrow f(x)>f(0)=1$，$x\in(0,1)$，这是符合题意的。

   b) 若 $a>2$，则 $f'(0)<0$，$f(x)$ 先严格单调减后单调增，而 $f(0)=1$，因此必存在 $1>x_0>0$ s.t. $f(x_0)<1$，这是不符合题意的，因此 $a\leqslant 2$ 。

（方法二 分离变量法）易知 $x\in(0,1)$ 则 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$。$f(x)$ 取对数知 $\forall x\in(0,1)$，$\ln f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-ax>\ln 1=0$，

$$a<\min_{x\in(0,1)}\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x}=\min_{x\in(0,1)}g(x)$$

$g'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left[\dfrac{2x}{1-x^2}+\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right]=\dfrac{1}{x^2}h(x)$，注意到 $h'(x)=\dfrac{4x^2}{(x^2-1)^2}>0$，$h(0)=0$，故在 $(0,1)$ 上 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调增。现在我们须找出 x 趋近于 0 时，$g(x)$ 趋近的值。事实上，可利用以下不等式[32]：

$$
\begin{aligned}
& x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x\\
\Rightarrow & \left(x-\frac{x^2}{2}\right)-(-x)\leqslant \ln(1+x)-\ln(1-x)\leqslant x-\left(-x-\frac{x^2}{2}\right)\\
\Leftrightarrow & 2x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\leqslant 2x+\frac{x^2}{2}\\
\Leftrightarrow & 2-\frac{x}{2}\leqslant g(x)\leqslant 2+\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

这是一个非常常用的不等式

因此[33]当 x 趋于 0 时，$g(x)$ 趋于 2，而这一最小值是取不到的。因此 $a\leqslant 2$ 。

CEE 高考题目 TAG 取值范围 极限 DIF 易

32: 这里的不等式均源于多项式级数展开的截取，证明大同小异，非常简单，故不再证明。下诸题同。

33: 「趋于」这一词引入于数学教材定积分一章，是否在考试中可以使用视要求而定。不能使用的情况下可以如下叙述：

a) $g(x)$ 是连续的，且单调增至无穷。对于任意大于 2 的值，譬如 $2+\epsilon$，$\epsilon>0$，均可取适当的 $x>0$，使得 $g(x)\leqslant 2+\dfrac{x^2}{2}<2+\epsilon$，这样由 $g(x)$ 单调增知 $g(x)$ 必可取到 $2+\epsilon$。

b) 假设 $g(x)$ 可取到任意小于 2 的值，譬如 $g(x_0)=2-\epsilon,\epsilon>0$，均可取适当的 $x_0>x_1>0$，使得 $g(x_1)\geqslant 2-\dfrac{x^2}{2}>2-\epsilon$，这与 $g(x)$ 单调增矛盾。

c) 因此 $g(x)$ 必然严格大于 2。

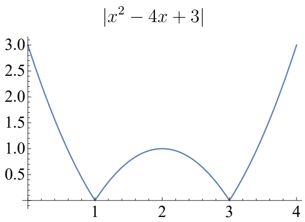

Figure 1.7: $f(x)=|x^2-4x+3|$ 的图像

题目 033

1. 已知函数 $f(x)=|x^2-4x+3|$，若方程 $[f(x)]^2+bf(x)+c=0$ 恰有 7 个相异实根，求 b 的取值范围。
2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1| & x<1\\ \log_2(x-1) & x>1\end{cases}$，$g(x)=\dfrac{5}{4}x^3-\dfrac{15}{4}x^2+m+2$，若 $y=f(g(x))-m$ 有 9 个零点，求 m 的取值范围。
3. 已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(8-x)$，且当 $x\in[0,4]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，若关于 x 的不等式 $[f(x)]^2+af(x)>0$ 在 $[-200,200]$ 上有且仅有 300 个整数解，求 a 的取值范围。

解答

1. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1,3$，$f(2)=1$，我们可大致画出 $f(x)$ 的图像如图，$f(x)=a$ 可能有 2,3,4 个根，分别对应 $a\in\{0\}\cup(1,+\infty)$，$a=1$，$a\in(0,1)$。所给方程有 7 个根，意味着 $y^2+by+c=0$ 两根分别满足 $x_1=1$，$x_2\in(0,1)$，因此 $b=-(x_1+x_2)=-1-x_2\in$ $(-1,0)$ 。
2. $f(-1/2)=0$，$f(1^-)=3$。我们可大致作出 $f(x)$ 的图像如图，$f(x)=a$ 可能有 1,2,3 个根，分别对应 $a<0$，$a\in\{0\}\cup[3,+\infty)$，$a\in(0,3)$。关于 $g(x)$ 有
$$g'(x)=\frac{15}{4}x^2-\frac{30}{4}x=0 \Leftrightarrow x=2,\ x=0$$
$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调增，在 $[0,2]$ 上单调减，$g(0)=m+2$，$g(2)=m-3$，$g(x)=a$ 均至多有 3 个根。所给方程有 9 个根，意味着 $m\in(0,3)$，此时
$$f(g(x))=0 \Leftrightarrow [g(x)]_1=\frac{m-1}{2},\ [g(x)]_2=-\frac{m+1}{2},\ [g(x)]_3=2^m+1$$
须得上面三个方程均有三个根，我们一一检验之。
   a) $g(x)=\dfrac{m-1}{2}$ 时应有 $m-3<\dfrac{m-1}{2}<m+2$，解之得 $m\in(-5,5)$。
   b) $g(x)=-\dfrac{m+1}{2}$ 时应有 $m-3<\dfrac{m-1}{2}<m+2$，解之得 $m\in\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$。
   c) $g(x)=2^m+1$ 时应有 $m-3<2^m+1<m+2$，解之得 $m\in(0,1)$。

   综上所述，$m\in(0,1)$ 。
3. 由奇偶性和 $f(x)=f(8-x)$ 可知 $x=0$，$x=4$ 是 $f(x)$ 的两条对称轴，进而 $x=4n$，$n\in\mathbb{Z}$ 为 $f(x)$ 的所有对称轴。$x\in[0,4]$ 上，$f'(x)=\left(1-\dfrac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$，最大值 $f(2)=2e^{-1}$，两端点值 $f(0)=0$，$f(4)=4e^{-2}$，由此我们可大致画出 $f(x)$ 的图像如图，且知 $f(x)\geqslant 0$。由 $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$，$f(2)=2e^{-1}$，$f(3)=3e^{-\frac{3}{2}}$，$f(2)>f(3)>f(1)>f(4)>f(0)$，
   a) 若 $a\geqslant 0$，则所给方程的解为 $f(x)\in(-\infty,-a)\cup(0,+\infty)$，此时所给方程有 $4\times\dfrac{200-(-200)}{4}=400$ 个整数解，不合题意。
   b) 若 $a<0$，则所给方程的解为 $f(x)\in(-\infty,0)\cup(a,+\infty)$，使所给方程关于 x 恰有 300 个解，则需 $a\in(f(4),f(1))\Rightarrow$ $a\in(4e^{-2},e^{-\frac{1}{2}})$ 。

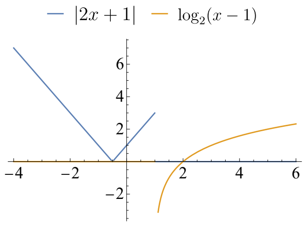

Figure 1.8: 题目 33 第 2 小题中 $f(x)$ 的图像

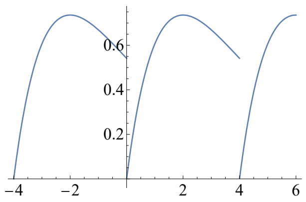

Figure 1.9: 题目 33 第 3 小题中 $f(x)$ 的图像

CEE 高考题目 TAG 取值范围 复合函数 DIF 易

题目 034 已知函数 $f(x)=x^2e^{1-x}-a(x-1)$，$a\in\mathbb{R}$。

1. 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{3}{4},2\right)$ 内的极大值。
2. 设函数 $g(x)=f(x)+a(x-1-e^{1-x})$，当 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1<x_2$ 时，总有 $x_2g(x_1)\leqslant\lambda f'(x_1)$，求 λ 的值。

解答 $f'(x)=(2-x)xe^{1-x}-a$，$f''(x)=e^{1-x}[(x-2)^2-2]$

1. $a=1$ 时，$f'(x)=(2-x)xe^{1-x}-1$，$f'(x)$ 在 $(-\infty,2-\sqrt{2})$ 和 $(2+\sqrt{2},+\infty)$ 上单调增，在 $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$ 上单调减，而 $f'(0)=-1<0$，$f(1)=0$，$f(+\infty)=0$，故 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=0$，除此之外，$f'(x)$ 还有唯一一个零点 $x=1$，故所求极大值为 $f(1)=1$ 。
2. $g(x)=e^{1-x}(x^2-a)$，$g'(x)=e^{1-x}(-(x-1)^2+1+a)$。$g(x)$ 有两个极值点时，$1+a>0\Leftrightarrow a>-1$，$x_1=1-\sqrt{1+a}$，$x_2=1+\sqrt{1+a}$，所给不等式化为 $2ae^{\sqrt{1+a}}\geqslant\lambda a(1+e^{\sqrt{1+a}})$，
   a) $a\in(-1,0]$ 时，$\lambda\geqslant\max_{a\in(-1,0]}\dfrac{2}{1+e^{-\sqrt{1+a}}}=1$。
   b) $a>0$ 时，$\lambda\leqslant\min_{a>0}\dfrac{2}{1+e^{-\sqrt{1+a}}}=2$

因此 $\lambda \in [1,2]$ 。

CEE 高考题目 TAG 取值范围 DIF 易

题目 035 设函数 $f_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n} - \ln(x+1)$，$n \in \mathbb{N}^+$。

1. 判断函数 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性，并说明理由。
2. 求最大的整数 α，使得 $|f_n(x)| < \dfrac{1}{n^\alpha}$ 对所有的 $n \in \mathbb{N}^+$ 及 $x \in (0,1)$ 都成立。（$\ln 2 \approx 0.6931$）

解答 [34]

34: 应当注意到，该函数为 $\ln(1+x)$ 与其泰勒展开式截取前 n 的差，刻画了近似程度。

1.
$$f_n'(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(-x)^n}{1+x}$$
$x \in (0,1)$ 情况下，若 n 为奇数，则 $f_n'(x) < 0$，$f_n'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调减；若 n 为偶数，则 $f_n'(x) > 0$，$f_n'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调增。

2. 注意到 $\forall\, n$，$f_n'(0) = 0$，那末无论 n 的奇偶性如何，必有 $\forall\, x \in (0,1)$，$f_n(x) < \max\limits_{x\in(0,1)} |f_n(x)| = |f_n(1)|$。取 $n = 1$ 得，$|1 - \ln 2| < 1$ 恒成立；取 $n = 2$ 得，$\left|1 - \dfrac{1}{2} - \ln 2\right| \approx 0.1931 < \dfrac{1}{2^\alpha} \Rightarrow \alpha \leqslant 2$；取 $n = 3$ 得，$\left|1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ln 2\right| \approx 0.1402 < \dfrac{1}{3^\alpha} \Rightarrow \alpha \leqslant 1$ 我们取定 $\alpha = 1$，则 $n = 2m+1$ 时，

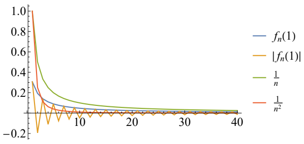

Figure 1.10: 本图直观地描述了 $f_n(1), |f_n(1)|, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$ 数列收敛速度

$$\begin{aligned}
|f_{2m+1}(1)| &= |(f_{2m+1}(1) - f_{2m-1}(1)) + \cdots + (f_3(1) - f_1(1)) + f_1(1)| \\
&< |f_1(1)| + |f_3(1) - f_1(1)| + \cdots + |f_{2m+1}(1) - f_{2m-1}(1)| \\
&= f_1(1) - [f_1(1) - f_3(1)] - \cdots - [f_{2m-1}(1) - f_{2m+1}(1)] \\
&= (1 - \ln 2) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right) \\
&< \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1}\right) \\
&= \frac{1}{2m+1}
\end{aligned}$$

其中[35]相仿地，当 $n = 2m$ 时，

35: 本式前三行是多余的，但前三行其实具有提示了一类不等式证明方法的实际意义。

$$\begin{aligned}
|f_{2m}(1)| &= \left(\ln 2 - 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2m-2} - \frac{1}{2m}\right) \\
&< \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2m-2} - \frac{1}{2m}\right) \\
&= \frac{1}{2m}
\end{aligned}$$

因此 $\forall\, n$，$|f_n(1)| < \dfrac{1}{n}$，这就说明了充分性[36]。综上所述，α 最大取 $\alpha = 1$ 。

36: 事实上，即使在实数域上，α 依然最大取到 1。这说明了 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ 趋向于 $\ln 2$ 时误差减小的速度与反比函数同数量级，若以此式计算 $\ln 2$ 的约值，想要精确到小数点后第三位，需要计算万项以上——这决不是一个好主意。我们有更好的逼近方法。

TAG 取值范围 误差分析 DIF 易

题目 036 已知函数 $f(x) = [\ln(1+x)]^2 - \dfrac{x^2}{1+x}$。

1. 求函数 $f(x)$ 的单调区间。
2. 若不等式 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+a} \leqslant e$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 都成立，求 a 的最大值。（补：若不等式 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+a} \geqslant e$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 都成立，求 a

的最小值。$a \geqslant \dfrac{1}{2}$)

解答

1. $f'(x)=\dfrac{(2+2x)\ln(1+x)-x(2+x)}{(1+x)^2}=\dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$。关于 $g(x)$ 有 $g'(x)=2\ln(x+1)-2x\leqslant 0$，$g(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调减，

$$f(x)<0,\ g(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty) \quad f(x)>0,\ g(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,0)$$

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调增，在 $[0,+\infty)$ 上单调减。

2. $f(x)\leqslant f(0)=0 \ \Leftrightarrow\ \forall\, x\geqslant 0,\ \ln(1+x)\leqslant\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x}}$。待证不等式可化为 $a\leqslant \min\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n=\min\limits_{n\in\mathbb{N}^+} g\left(\dfrac{1}{n}\right)$，考虑 $x\in(0,1]$ 上的 $g(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$，有

$$g'(x)=\frac{\overbrace{(1+x)[\ln(1+x)]^2-x^2}^{\leqslant 0}}{x^2(1+x)[\ln(1+x)]^2}\leqslant 0 \quad\Rightarrow\quad g(x)\text{在}(0,1]\text{上为减函数}$$

故 $a\leqslant \min\limits_{n\in\mathbb{N}^+} g\left(\dfrac{1}{n}\right)=g(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$ 。[37]

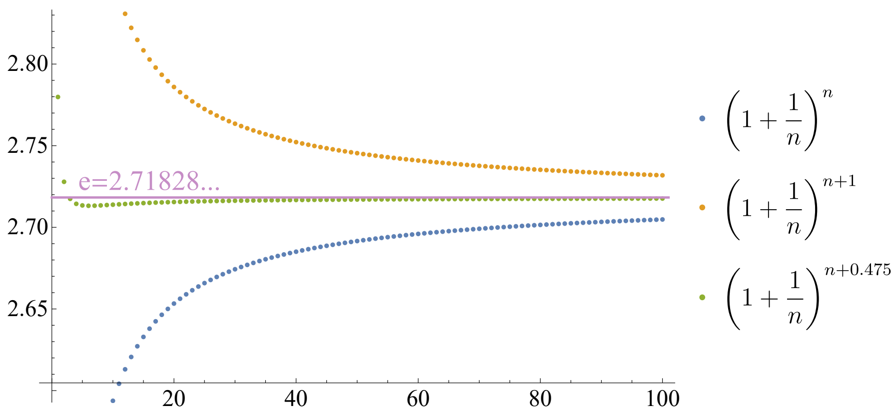

Figure 1.11: e 的数列逼近

37: 自然常数 e 的定义式：

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

故本题分析了 e 的下界和上界逼近数列的指数可取范围。

CEE 高考题目 TAG 取值范围 误差分析 DIF 易

1.5 引出不等式证明的综合题目

关于此类题目一些常用不等式的统一证明：

[IEQ 1] $e^x\geqslant 1+x$

证明 该式截取自 e^x 的麦克劳林展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

前两项，截取更多项时证明相仿，只需多求几次导数，不赘述。

令 $g(x)=e^x-(1+x)$，则 $g'(x)=e^x-1$，$g''(x)=e^x>0$，因此 $g'(x)$ 单调增，又 $g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\forall x\in\mathbb{R}$，

$$g(x)\geqslant g(0)=0 \ \Leftrightarrow\ e^x\geqslant 1+x$$

当仅当 $x=0$ 时取等。

> [IEQ 2] $\ln(1+x)\leqslant x\ (x>-1)$，$\ln(1+x)\geqslant x-\dfrac{x^2}{2}\ (x\geqslant 0)$

证明 该式截取自 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

前两项，截取更多项时证明相仿，只需多求几次导数，不赘述，这里我们证第二式。

令 $g(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2!}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x$，$g''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}+1\geqslant 0$，$g'(0)=0$，因此 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增，$\forall x\geqslant 0$，

$$g(x)\geqslant 0\ \Rightarrow\ \ln(1+x)\geqslant x-\frac{x^2}{2}$$

当仅当 $x=0$ 时取等。

> [IEQ 3] $\ln x\leqslant 1-\dfrac{1}{x}$

证明 令 $g(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$，可证 $g(x)\geqslant g(1)=0$，因此 $\forall x\in\mathbb{R}^+$，$\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$。

> [IEQ 4] $(1+x)^a\geqslant 1+ax\ (a>1,\ x\geqslant 0)$，$(1+x)^a\leqslant 1+ax\ (a\neq 0,\ a\leqslant 1,\ x\geqslant 0)$
>
> [IEQ 5] $\ln x\geqslant\dfrac{2(x-1)}{(x+1)}\ (x\geqslant 1)$

证明 证法同上，略。（逐渐敷衍 (*/ω ＼ *)……然而确实很简单）

> 题目 037 已知函数 $f(x)=\dfrac{a(1-x)}{x}\ln(1-x), a\in\mathbb{R}$，$e$ 为自然常数。
>
> 1. 求 $f(x)$ 在区间 $[1-e^2,1-e]$ 上的最值。
> 2. 比较 $\left(1+\dfrac{1}{2!}\right)\left(1+\dfrac{1}{3!}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n!}\right)$ 与 e 的大小。

解答

1. 导数 $f'(x)=-\dfrac{a(x+\ln(1-x))}{x^2}$。由 [IEQ 2]，$\ln(1-x)\leqslant -x$，因此

   a) 若 $a=0$，则 $f(x)\equiv 0$，所求最值 $\max f(x)=0$。

   b) 若 $a>0$，则 $x+\ln(1-x)\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调增，所求最值

   $$\max_{[1-e^2,1-e]} f(x)=f(1-e)=\frac{ae}{1-e}\qquad \min_{[1-e^2,1-e]} f(x)=f(1-e^2)=\frac{2ae^2}{1-e^2}$$

   c) 若 $a<0$，则 $f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 单调减，所求最值

   $$\min_{[1-e^2,1-e]} f(x)=f(1-e)=\frac{ae}{1-e}\qquad \max_{[1-e^2,1-e]} f(x)=f(1-e^2)=\frac{2ae^2}{1-e^2}$$

2. 由 [IEQ 2] ，$\ln(1+x) \leqslant x$，因此

$$\begin{aligned}&\ln\left[\left(1+\frac{1}{2!}\right)\left(1+\frac{1}{3!}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n!}\right)\right]\\ =&\ln\left(1+\frac{1}{2!}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n!}\right)\\ \leqslant&\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ \leqslant&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\ =&1-\frac{1}{n}<1=\ln e\\ \Rightarrow&\left(1+\frac{1}{2!}\right)\left(1+\frac{1}{3!}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n!}\right)<e\end{aligned}$$

TAG 不等式 DIF 易

题目 038 已知函数 $f(x)=\ln ax-\dfrac{x-1}{x}$。

1. 求此函数的单调区间与最值。
2. 求证：对于任意正整数 n，均有：
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\frac{e^n}{n!}$$
3. 当 $a=1$ 时，过点 $(1,-1)$ 是否存在 $y=f(x)$ 图像的切线？若存在，有多少条？若不存在，阐明理由。

解答

1. $f'(x)=\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=0\Rightarrow x=1$。若 $a>0$，则 $x>0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。最小值 $\min f(x)=f(1)=\ln a$，无最大值；若 $a<0$，则 $x<0$，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}^-$ 上单调递减，无最值。
2. 由上小题结论（也即 [IEQ 3]），若取 $a>0$，则 $\ln ax-1+\dfrac{1}{x}\geqslant\ln a\Rightarrow\dfrac{1}{x}\geqslant 1-\ln x$，当仅当 $x=1$ 时取等，因此
$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>n-\ln\frac{1}{n!}=\ln\frac{e^n}{n!}$$
3. $a=1$ 条件下，$x>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处切线方程可写为：$y-f(x_0)=\dfrac{x_0-1}{x_0^2}(x-x_0)$。假使该切线过点 $(1,-1)$，则
$$-1-f(x_0)=\frac{x_0-1}{x_0^2}(1-x_0)\quad\Rightarrow\quad 1-\frac{3}{x_0}+\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0=g(x_0)=0$$
由于 $g'(x)=-\dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=1,x_2=2$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调减，在 $(1,2)$ 上单调增，在 $(2,+\infty)$ 上单调减，$g(1)=-1<0$，$g(0)=+\infty$，$g(2)=-\ln 2-\dfrac{1}{4}<0$，$g(+\infty)=-\infty$，因此 $g(x)$ 有且仅有一个零点，这意味着所求切线存在且仅存在 1 条。

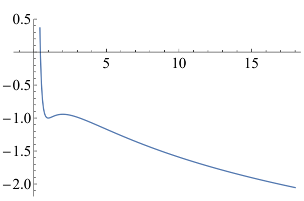

Figure 1.12: $g(x)$ 的图像

TAG 不等式 切线方程 DIF 易

题目 039 设函数 $f(x)=1-e^{-x}$，函数 $g(x)=\dfrac{x}{ax+1}$，其中 $a\in\mathbb{R}$，e 为自然常数。

1. 当 $a=0$ 时，求函数 $h(x)=f'(x)g(x)$ 的极值。
2. 若 $f(x)\leqslant g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围。

3. 设 $n \in \mathbb{N}^+$，求证：($\exp x = e^x$)

$$\exp\left(2n - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+1}\right) \leqslant n! \leqslant \exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

vb

解答

1. $f'(x) = e^{-x}$。$a = 0$ 时，$h(x) = \dfrac{x}{x+1}e^{-x}$，

$$h'(x) = \frac{1 - x - x^2}{(1+x)^2}e^{-x} = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$f''(x_1) > 0$，$f''(x_2) < 0$，因此极小值 $f(x_1) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$，极大值 $f(x_2) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

2. 显然首先 $a \geqslant 0$。我们来说明 $f(x) \leqslant g(x)$ 的必要条件为 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$。记 $h_a(x) = g(x) - f(x) = \dfrac{x}{ax+1} + e^{-x} - 1$，那末

$$h_a'(x) = \frac{1}{(1+ax)^2} - e^{-x} \quad h_a''(x) = e^{-x} - \frac{2a}{(1+ax)^3}$$

若 $a > \dfrac{1}{2}$，则 $h_a''(0) = 1 - 2a < 0$，因此 $h_a'(x)$ 在 $x = 0$ 处单调减[38]，$\exists \varepsilon > 0$ 使得 $h_a'(\epsilon) < 0 \Rightarrow f(\varepsilon) > g(\varepsilon)$，这与题设矛盾，因此 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$。

我们再来说明 $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 的充分性。设 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$，注意到

$$h_a(x) \geqslant \frac{2}{x+2} + e^{-x} - 1 = m(x) \quad m'(x) = \frac{4e^{-x}\left[\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2\right]}{(2+x)^2}$$

由［IEQ 1］知 $\forall x \geqslant 0$，$e^{\frac{x}{2}} \geqslant 1 + \dfrac{x}{2}$，故

$$m'(x) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ m(x) \geqslant m(0) = 0 \ \Rightarrow\ h_a(x) \geqslant m(x) \geqslant 0$$

因此 $\forall\ 0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$，$g(x) \geqslant f(x)$，充分性得证。综上，$a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$。

38: 「在某点处单调减」似乎听起来很奇怪，其实并不然，这是一种题目 diff，也是数学分析中非常初等和常用的分析方法，常被放到高中题目中，但不要求滴水不漏的叙述。对于性质良好的函数 f（至少连续），在某点，譬如 x_0，周围的一个小邻域内是有保号性的，若 $f(x_0) > 0$，那末 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall |\varepsilon| < \delta$，$f(x_0 + \varepsilon) > 0$。在本题中 $h_a(x)$ 无穷连续可导，$h_a''(0) < 0$ 意味着 $\exists \delta > 0$，$h_a'(x)$ 至少在 $[0, \delta]$ 上单调减。这就是（连续）函数在某点处单调性的意义。解答中这一手法非常常用。

3. （方法一）定义 $h(x) = \ln x + \dfrac{4}{k+1} - 2$，则 $\forall x > 0$，$h'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geqslant 0$，$\forall x \geqslant 1$，$h(x) \geqslant h(1) = 0$ 再结合［IEQ 2］有

$$\begin{aligned}
& 2 - \frac{4}{x+1} \leqslant \ln n \leqslant \ln(x-1) \\
\Leftrightarrow\ & 2n - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \leqslant \ln(n!) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n(n-1)}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \exp\left(2n - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k+1}\right) \leqslant n! \leqslant \exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)
\end{aligned}$$

（方法二）由上一小题知，$a = \dfrac{1}{2}$，$x \in [0, 2)$ 时时，

$$1 - e^{-x} \leqslant \frac{x}{\frac{1}{2}x + a} \ \Leftrightarrow\ x \leqslant \ln\frac{2+x}{2-x} \in \mathbb{R}^+$$

故可令

$$n = \frac{2+x}{2-x} \ \Leftrightarrow\ x = 2 - \frac{4}{n+1} \ \Rightarrow\ \ln n \geqslant 2 - \frac{4}{n+1}$$

由第一小题知

$$h(x) \leqslant h(1) \Rightarrow xe^{-x} \leqslant \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x \leqslant x - 1,\ \forall\ x \geqslant 1$$

，因此 $2-\dfrac{4}{k+1}\leqslant \ln k\leqslant k-1$ 以下同方法一[39]。

39: 对于以证明不等式为目的的题目来说，虽然不等式的证明依赖于前行的小题，但对于简单的题目来说，可以不必拘泥于题目内容，独立证明也常常可以证出。

TAG 取值范围 不等式 分析 DIF 中

题目 040 已知函数 $f(x)=e^x-ax-a$。

1. 若 $a>0$，$f(x)\geqslant 0$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，求 a 的最大值。
2. 设 $g(x)=f(x)+\dfrac{a}{e^x}$，且 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 是曲线 $y=g(x)$ 上任意两点。若对于任意 $a\leqslant -1$，直线 AB 的斜率恒大于常数 m，求 m 的取值范围。
3. 求证：$1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\dfrac{\sqrt{e}}{e-1}(2n)^n$，$n\in\mathbb{N}^+$。
4. 求证：$1^n+2^n+\cdots+(n-1)^n<\dfrac{e}{e-1}n^n$，$n\in\mathbb{N}^+$。

解答

1. [40] $f(0)=1-a\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant 1$，由 [IEQ 1]，

$$f(x)=e^x-x-1+(1-a)x+(1-a)\geqslant(x+1)-x-1=0,\ \forall x\in[0,+\infty)$$

因此 $a\in(0,1]$。

40: 求取值范围与求最大值是不同的，严格的取值范围要求可取到范围内任意值，最大值只要求小于它并可取到这一最大值。

2. 由 柯西中值定理 [41]，原命题等价于 $\forall\, a\leqslant -1$，$\forall\, x\in\mathbb{R}$，$g'(x)>m$，而

$$g'(x)=e^x-a-ae^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot(-a)e^{-x}}-a=2\sqrt{-a}-a=(\sqrt{-a}+1)^2-1\geqslant 3$$

当仅当 $a=-1,x=\dfrac{1}{2}\ln(-a)=0$ 时取等。因此 $m<3$。

41: 可如此叙述：不妨设 $x_2>x_1$，由题意，

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>m$$

$$\Leftrightarrow g(x_2)-mx_2>g(x_1)-mx_1$$

故 $F(x)=g(x)-mx$ 单调增，$F'(x)>0, g'(x)>m$，同时 $g'(x)>m$ 时 $F(x)$ 单调增。故原命题等价于……

3. 由 [IEQ 1]，取 $x=-\dfrac{k}{2n}$，$k\in\mathbb{N}$，得 $e^{-\frac{k}{2n}}\geqslant 1-\dfrac{k}{2n}=\dfrac{2n-k}{2n}$，因此

$$\frac{2n-k}{2n}<e^{-\frac{k}{2n}}\Leftrightarrow\left(\frac{2n-k}{2n}\right)^n<(\sqrt{e})^{-k}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2n}\right)^n+\left(\frac{3}{2n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n<(\sqrt{e})^{-1}+(\sqrt{e})^{-3}+\cdots+(\sqrt{e})^{-(2n-1)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2n}\right)^n+\left(\frac{3}{2n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n<\frac{(\sqrt{e})^{-1}(1-(\sqrt{e})^{-n})}{1-e^{-1}}<\frac{\sqrt{e}}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow 1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\frac{\sqrt{e}}{e-1}(2n)^n$$

4. 与上一小题方法相同，从略。

TAG 取值范围 不等式 割线斜率 DIF 中

题目 041 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-ax-x^2$。

1. 若 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值。
2. 讨论 $f(x)$ 在定义域上的单调性。
3. 证明：$\forall\, n\in\mathbb{N}^+$，$\ln(n+1)<2+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{3^2}+\cdots+\dfrac{n+1}{n^2}$。

解答

1. $f'(x)=\dfrac{a}{x+1}-a-2x$，$f'(1)=\dfrac{a}{2}-a-2=0\Rightarrow a=\dfrac{4}{3}$。
2. $f'(x)=0\Rightarrow 2x^2+(2+a)x=0\Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=-\dfrac{2+a}{2}$，

   a) 若 $-2<a<0$，$0>x_2>-1$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{2+a}{2},0\right)$ 上单调增，在 $\left(-1,-\dfrac{2+a}{2}\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调减。

b) 若 $a \geqslant 0$，$x_2 \leqslant -1$，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调增，在 $(0,+\infty)$ 上单调减。

c) 若 $a < -2$，$x_2 > 0$，则 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{2+a}{2}\right)$ 上单调增，在 $\left(-\frac{2+a}{2},+\infty\right)$ 和 $(-1,0)$ 上单调减。

d) 若 $a = -2$，$x_2 = 0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调减。

42: 这个不等式的精细程度很差，不如［IEQ 2］。因此本小题的放缩非常疏松，甚至可以舍弃掉所有二次项。

3. 令 $a = 1$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减，又 $f(0) = 0$，故[42] $\forall\, x > 0$，$f(x) < 0 \Rightarrow \ln(x+1) < x + x^2$，因此

$$\begin{aligned}&2+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}\\>&\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\=&\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\=&\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\end{aligned}$$

TAG 不等式 DIF 易

事实上，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$，这是更常见的一个不错的不等式。我们可以用定积分重新解释它：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \int_{x=1}^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

这一点在42中提及过。

题目 042 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$。

1. 求 $f(x)$ 的单调区间。
2. 记 $f(x)$ 在区间 $[0,n]$，$n \in \mathbb{N}^+$ 上的最小值为 b_n，令 $a_n = \ln(1+n) - b_n$。

 a) 若对一切 n，不等式 $\sqrt{a_n} < \sqrt{a_{n+2}} - \frac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$ 恒成立，求实数 c 的取值范围。

 b) 求证：$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1a_3}{a_2a_4} + \cdots + \frac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}} < \sqrt{2a_n+1} - 1$。

CEE 高考题目 TAG 不等式 数列 取值范围 DIF 易

题目 043 已知函数 $f(x) = 2t^2 - 2(e^x + x)t + e^{2x} + x^2 + 1$，$g(x) = \frac{1}{2}f'(x)$。

1. 证明当 $t < 2\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数。
2. 对于给定的闭区间 $[a,b]$，试说明 $\exists\, k \in \mathbb{R}$，当 $t > k$ 时，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是减函数。
3. 证明：$f(x) \geqslant \frac{3}{2}$。

解答

1. $f'(x) = -2(e^x+1)t + 2e^{2x} + 2x, g(x) = e^{2x} + x - (e^x+1)t, g'(x) = 2e^{2x} + 1 - te^x = 2\left[\left(e^x - \frac{t}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{16}\right]$，当 $t < 2\sqrt{2}$ 时，$g'(x) > 0$ 恒成立，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数。
2. （方法一）按照题设要求，给定 $[a,b]$，应有其上 $g'(x) \leqslant 0$，取定未知 k，应有 $\forall\, t > k$，$g'(a)$，$g'(b) < 0$，则

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \ln\frac{2}{t+\sqrt{t^2-8}} \searrow,\ x_2 = \ln\frac{t+\sqrt{t^2-8}}{4} \nearrow,\ x_2 > x_1$$

由这一变化趋势，可知 $\max x_1 = \min x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\min x_1 = -\infty$，$\max x_2 = +\infty$，那末

$$\forall\,[a,b],\ \exists\, t_1(a),\ \text{s.t. } t > t_1\text{时},\ x_1(t) < a;\ \exists\, t_2(b),\ \text{s.t. } t > t_2\text{时},\ x_2(t) > b$$

若记 $k = \max\{t_1(a), t_2(b)\}$，则 k 满足 $\forall\, t > k$，$x_1(t) < a$，$x_2(t) > b$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减，若此我们证明了 k 的存在性。

（方法二）由 $g'(x) = 2e^{2x} - te^x + 1$，我们只需找到 k，使得 $[a,b]$ 上

$$\forall\, t > k,\ g'(x) < 0 \Leftrightarrow t > 2e^x + e^{-x} = h(x)$$

由于 $h(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，故必能取得最大值[43] M，取 $k = M$ 即可。

43: 关于单变量函数的定理：闭区间上的连续函数存在最值，且必可取到最值。此处闭区间可延伸为闭集。

3. 结合［IEQ 1］可得：
$$f(x) = 2\left(t - \frac{e^x + x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(e^x - x)^2 + 1 \geqslant \frac{1}{2}(e^x - x)^2 + 1 \geqslant \frac{2}{2}(1 + x - x)^2 + 1 \geqslant \frac{3}{2}$$
当 $x = 0$ 时取等。

CEE 高考题目 TAG 不等式 DIF 易

题目 044 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{\dfrac{ax}{ax+8}}$。

1. 当 $a = 8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间。
2. 对于任意正数 a，证明 $1 < f(x) < 2$。

解答

1. $a = 8$ 时，$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{3} + \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$，$f'(x) = \dfrac{1}{2(1+x)^{3/2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$，故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调增，在 $(0,+\infty)$ 上单调减。
2. 记 $x = c$，$\dfrac{8}{ax} = b$，原函数可化为 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+a}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+c}}$，其中 $abc = 8$。

   a) 由 $x > 0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{1+x}$ 得，
   $$\begin{aligned} f(x) &> \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3 + 2(a+b+c) + (ac+ab+bc)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &\geqslant \frac{3 + (a+b+c) + 3\sqrt[3]{abc} + (ab+bc+ac)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{1 + (a+b+c) + (ab+bc+ac) + abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} = 1 \end{aligned}$$

   b) 解法详见此链接。

CEE 高考题目 TAG 不等式 DIF 难

题目 045 已知函数 $f(x) = ax^2 + \ln(x+1)$。

1. 当 $a = -\dfrac{1}{4}$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间。
2. 当 $x \in [0,+\infty)$ 时，函数 $y = f(x)$ 图像上的点都在 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y - x \leqslant 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域内，求实数 a 的取值范围。
3. 求证：
$$\left(1 + \frac{2}{2\times 3}\right)\left(1 + \frac{4}{3\times 5}\right)\left(1 + \frac{8}{5\times 9}\right)\cdots\left[1 + \frac{2^n}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}\right] < e$$

解答

1. $f'(x)=2ax+\dfrac{1}{x+1}$。$a=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-x^2+2}{2(x+1)}$，因此 $f(x)$ 在 $(-1,\sqrt{2})$ 上单调减，在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上单调增。
2. 题意即 $\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\leqslant x\Rightarrow f(x)-x=g(x)\leqslant 0$。首先 $a\leqslant 0$，否则任给 $a>0$，都可取 $x=\dfrac{2}{a}$，使得 $g\left(\dfrac{2}{a}\right)>a\left(\dfrac{2}{a}\right)^2>\dfrac{2}{a}$，不合题意。其次，由于 $g'(x)=2ax+\dfrac{1}{x+1}$，$g''(x)=2a-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，
$$\forall\, x\in[0,+\infty),\ g''(x)<0,\ g'(0)=g(0)=0\ \Rightarrow\ \forall\, x\in[0,+\infty),\ g'(x)\leqslant 0$$
因此 $\forall\, x\in[0,+\infty)$，$g(x)\leqslant 0$ 符合题意。故最终 $a\leqslant 0$ 。
3. 取 $a=0$ 或由 [IEQ 2] 知 $\ln(1+x)\leqslant x$，待求证式两侧取对数后
$$\begin{aligned}\text{左}&=\ln\left(1+\frac{2}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{2^n}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}\right)\\&<\frac{2}{2\times 3}+\frac{4}{3\times 5}+\cdots+\frac{2^n}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}\\&=2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)\right]\\&=1-\frac{2}{2^n+1}<1\\&\Leftrightarrow\ \text{左}<e\end{aligned}$$

TAG 取值范围 不等式 DIF 易

题目 046 证明一些不等式：

1. $\dfrac{\ln 2}{3}+\dfrac{\ln 3}{4}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n+1}<\dfrac{n(n-1)}{4}$
2. $\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}+\cdots+\dfrac{\ln 3^n}{3^n}<3^n-\dfrac{5n+6}{6}$
3. $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<e$

解答

1. 根据 $g(x)=\ln x-\dfrac{x^2-1}{2}$ 单调性易证 $\forall\, x\geqslant 1$，$g(x)\leqslant 0$，那末 $\forall\, n\geqslant 1$，$\dfrac{\ln n}{n+1}\leqslant\dfrac{n-1}{2}$，当仅当 $n=1$ 时取等。故
$$\text{原式左}<\frac{2-1}{2}+\frac{3-1}{2}+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)}{4}=\text{原式右}$$
2. 根据 $g(x)=\ln x-\left(2x^2-\dfrac{5}{6}x\right)$ 单调性易证 $g(x)>0$，那末 $\dfrac{\ln 3^k}{3^k}<2\cdot 3^{k-1}-\dfrac{5}{6}$，$k$ 自 2 累加至 n 即得所求不等式。
3. 原式等价于证 $\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<1$，由 [IEQ 2] ，
$$\text{原式左}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$$

TAG 不等式 DIF 易

1.6 与割线斜率和函数凸性相关的综合题目

柯西中值定理 若函数 $f(x), g(x)$ 满足以下条件：① 在 $[a,b]$ 上连续；② 在 (a,b)；③ $\forall x \in (a,b)$，$g'(x) \neq 0$。那末有以下结论：

$$\exists \xi \in (a,b),\ \text{s.t. } \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

特别地，取 $g(x)=x$，我们得到**拉格朗日中值定理**：

$$\exists \xi \in (a,b),\ \text{s.t. } \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(\xi)$$

证明 设

$$F(x) = [f(a)-f(b)][g(x)-g(b)] - [g(a)-g(b)][f(x)-f(b)]$$

易知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$，那末由罗尔 (Rolle) 定理[44]可知，$\exists\, \xi \in (a,b)$，s.t. $F'(\xi)$，稍作整理即得原式。

44: 这要从柯西列开始写了，能写三四页 (˚ Д˚)。因为都是非常初等的定理，请自行翻阅链接材料吧。

这一定理的特殊形式曾常被作为高中考题，基本是上述证明过程的特化，因此了解它是有益的。在答题中不可直接食用，但不妨作为引理简单证一下后使用。

题目 047 已知函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{a(x-1)}{(x+1)}$，$a \in \mathbb{R}$。

1. 若 $x=2$ 是函数的极值点，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程。
2. 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调增函数，求 a 的取值范围。
3. 设 m,n 为正实数，$m>n$，求证：$\dfrac{m-n}{\ln m - \ln n} < \dfrac{m+n}{2}$。

解答

1. $f'(x) = \dfrac{x^2+1-2(a-1)x}{x(1+x)^2}$，若 $x=2$ 是极值点，则 $f'(2) = \dfrac{9-4a}{18} = 0 \Rightarrow$ $a = \dfrac{9}{4}$。
2. 首先 $f'(1) = 1 - \dfrac{a}{2} \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant 2$，这是一个必要条件。当 $a \leqslant 2$ 时，$f'(x) = \dfrac{(x-1)^2+(2-a)x}{x(1+x)^2} > 1$，恰有 $f(x)$ 单调增，这说明了充分性，因此 $a \leqslant 2$。
3. 这一不等式来源于 $\ln x$ 的上凸性。我们取 $a=2$，$f(1)=0$，由单调性，有不等式 $\forall\, x>1$，$\ln x > \dfrac{2(x-1)}{(x+1)}$，因 $m>n$，代 $x = \dfrac{m}{n}$ 得

$$\ln m - \ln n > \frac{2(m-n)}{m+n} \Leftrightarrow \frac{m-n}{\ln m - \ln n} < \frac{m+n}{2}$$

TAG 取值范围 不等式 DIF 易

题目 048 已知函数 $f(x) = \ln\sqrt{1+2x} + mx$。

1. $f(x)$ 为定义域上的单调函数，求实数 m 的取值范围。
2. 给定 $m>0$，求最大的实数 $\lambda(m)$ 和最小的实数 $\mu(m)$ 使得

$$\forall\, 1 \geqslant a > b \geqslant 0,\ \lambda < \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < \mu$$

解答

1. $f'(x)=\underbrace{\frac{1}{1+2x}}_{\in(0,+\infty)}+m$，故 $m\geqslant 0$ 。
2. 由拉格朗日中值定理，显然 $\lambda(m)=\frac{1}{3}+m$，$\mu(m)=1+m$。我们来稍微写一下。一方面，设 $h_1(x)=f(x)-\mu x$，所给不等式右侧可化为 $h(a)<h(b)\Leftrightarrow h(x)$ 单调减。$h'(x)=\frac{1}{1+2x}+m-\mu<1+m-\mu\leqslant 0\ \Rightarrow\ \mu\geqslant m+1$ 。同理可得，$\lambda\leqslant m+\frac{1}{3}$ 。

TAG 取值范围 拉格朗日中值定理 DIF 易

题目 049 已知函数 $f(x)=\ln x$。

1. 求证：当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{2(x-1)}{(x+1)}$。
2. 求证：当 $x>a>0$ 时，恒有 $\sqrt{ax}<\frac{x-a}{f(x)-f(a)}<\frac{x+a}{2}$。

解答

1. 本式为［IEQ 4］，证明过程略。
2. 现证左边。取 $g(x)=(x-a)-[f(x)-f(a)]\sqrt{ax}$，则
$$g'(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]\sqrt{a}}{\sqrt{x}}>0\quad\Rightarrow\quad g(x)\text{在}(a,+\infty)\text{上单调增}$$
进而 $g(x)>g(a)=0\Rightarrow\sqrt{ax}<\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$。对于右边，令 $g(x)=2x-2a-(x+a)[f(x)-f(a)]$，易证 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调减，$g(x)<g(a)=0$，整理即得右侧。

TAG 拉格朗日中值定理 DIF 易

题目 050 设函数 $f(x)=x\ln x+(a-x)\ln(a-x)$，其中 $a>0$，e 为自然常数，$e\approx 2.71828$。

1. 当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值。
2. 证明：$\forall\, x_1,x_2>0$, 都有 $x_1\ln x_1+x_2\ln x_2\geqslant(x_1+x_2)[\ln(x_1+x_2)-\ln 2]$。
3. 若 $x_1+x_2+\cdots+x_{2^n}=0$，$n\in\mathbb{N}^+$，证明：
$$x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+\cdots+x_{2^n}\ln x_{2^n}\geqslant -\ln 2^n$$

题目 051 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{2}a\ln x$，$a\in\mathbb{R}$。

1. 当 $f(x)$ 存在最小值时，求其最小值 $\varphi(a)$ 的解析式。
2. 对上一小题中的 $\varphi(a)$，
   a) 当 $a\in(0,+\infty)$ 时，证明：$\varphi(a)\leqslant 1$。
   b) 当 $a>0,b>0$ 时，证明：
$$\varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{\varphi'(a)+\varphi'(b)}{2}\leqslant\varphi'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

1.7 非独立变量相关题目

这类问题基本思路即是把不独立的多元变量消元。

题目 052 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\dfrac{a}{x^2}+bx-1$，$a,b\in\mathbb{R}$。

1. 当 $a=-1$，$b=0$ 时，求曲线 $y=f(x)-g(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程。
2. 当 $b=0$ 时，若对任意的 $x\in[1,2]$，$f(x)+g(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。
3. 当 $a=0$ 时，若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2，求证：$x_1+x_2>2$。

解答

1. $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=-\dfrac{2a}{x^3}+bx-1$, $a=-1$, $b=0$ 时, $y'=f'(x)-g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$,
$y'|_{x=1}=3$，$y|_{x=3}=0$，切线方程：$y=3(x-1)$ 。
2. $b=0$ 时，$h(x)=f(x)+g(x)=\ln x+\dfrac{a}{x^2}-1$，$h(1)=a-1\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant 1$，。
$a\geqslant 1$ 时，在 $[1,2]$ 上，
$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^2}=\frac{x-2a}{x^2}\leqslant 0\ \Rightarrow\ h(2)=\ln 2+\frac{a}{4}-1\geqslant 0\ \Rightarrow\ a\geqslant 4-4\ln 2$$
3. $a=0$ 时，再记 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-bx+1$，那末「有两个不同的实数解」[45]意味着 $0<b<1$。进而由于易知 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$ 上单调增，在 $\left(\dfrac{1}{b},+\infty\right)$ 上单调减，必有 $x_1\in\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$, $x_2\in\left(\dfrac{1}{b},+\infty\right)$。我们在 $\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$ 定义一个这样的函数：
$$m(t)=h\left(\frac{2}{b}-t\right)-h(t)\quad\Rightarrow\quad m'(t)=\frac{2(bt-1)^2}{t(bt-2)}<0$$
由1.13，这一函数的几何意义非常明显[46]，根据 $m(t)$ 单调性和 $h(x_1)=h(x_2)=0$ 可以得到
$$m(x_1)=h\underbrace{\left(\frac{2}{b}-x_1\right)}_{>1/b}-\underbrace{h(x_1)}_{=h(x_2)}>m\left(\frac{2}{b}\right)=0\ \Rightarrow\ h\left(\frac{2}{b}\right)>h(x_2)$$
因此由 $h(x)$ 单调性必有 $x_2>\dfrac{2}{b}-x_1\Rightarrow$ $x_1+x_2>\dfrac{2}{b}>2$ 。

TAG 取值范围 相关变量 DIF 中

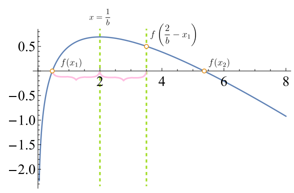

Figure 1.13: $b=\dfrac{1}{2}$ 时，$h(x)$ 的图像

45: 这一结论可以结合图像得到（不严谨)、可以由 [IEQ 2] 得到, 也可以由 $h\left(\dfrac{1}{b}\right)>0$ 得到,不赘述。此时 x_1,x_2 并不是相互独立的，并且都是依赖于 b 的函数，$x_1=x_1(b)$, $x_2=x_2(b)$

46: 本题来源于这一事实：$h(x)$ 在最高点左侧变化得比最高点右侧快。

题目 053 已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\dfrac{1}{2}ax^2+bx$，$a\neq 0$。

1. 若 $b=2$，且 $h(x)=f(x)-g(x)$ 存在单调递减区间，求 a 的取值范围。
2. 设函数 $f(x)$ 的图像 C_1 与函数 $g(x)$ 的图像 C_2 交于点 P,Q，过线段 PQ 的中点作 x 轴的垂线分别交 C_1,C_2 于点 M,N。证明：C_1 在点 M 处的切线与 C_1 在点 N 处的切线不平行。

TAG 相关变量 DIF 中

题目 054 已知函数 $f(x)=\dfrac{9x}{1+ax^2}$ $(a>0)$。

1. 求 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最大值。
2. 若直线 $y=-x+2a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的切线，求实数 a 的值。

3. 当 $a=2$ 时，设 $x_1,x_2,\cdots,x_{14}\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{14}$，若不等式 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{14})\leqslant\lambda$ 恒成立，求实数 λ 的最小值。

TAG 取值范围 相关变量 DIF 易

题目 055 已知函数 $f(x)=a\left(\ln x+\frac{2}{x}\right)-\frac{e^{x-1}}{x^2}$，$a$ 为常数，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 内有两个极值点 x_1,x_2，$x_1<x_2$，求证：$x_1+x_2<2(1+\ln a)$。

TAG 相关变量 easy

题目 056 已知函数 $f(x)=e^x+x-e-1$。

1. 若 $\forall\, x\in\mathbb{R}$，$f(x)\geqslant ax-e$，求 a 的取值范围。
2. 若存在相异的 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=0$，证明：$x_1+x_2<2$

TAG 相关变量 DIF 易

题目 057 已知函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$。

1. 求 $f(x)$ 的零点 x_0，以及曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线。
2. 设方程 $f(x)=m\ (m>0)$ 有两个实数根 x_1,x_2，证明：$|x_1-x_2|<2-m\left(1+\frac{1}{2e}\right)$。

TAG 相关变量 DIF 易

题目 058 已知函数 $f(x)=x^2-x+k\ln x$ 有两个极值点 x_1,x_2，求证：$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{4}-2k$。

TAG 相关变量 DIF 易

题目 059 已知函数 $f(x)=e^x(x-2)-\frac{1}{3}kx^3+\frac{1}{2}kx^2$ 有三个极值点 $x_1<x_2<x_3$，求 k 的取值范围，并证明：$x_1+x_3>2x_2$。

TAG 相关变量 DIF 易

1.8 其他综合性题目

题目 060 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$。

1. 讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点。
2. 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线。

解答

1. $f'(x)=\dfrac{1+x^2}{x(x-1)^2}>0$，因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ **和** $(1,+\infty)$ 上单调增。由于 $f(e^{-2})=\dfrac{3-e^2}{e^2-1}<0$，$f(e^{-1})=\dfrac{2}{e-1}>0$，$f(e)=\dfrac{2}{1-e}<0$，$f(e^2)=\dfrac{e^2-3}{e^2-1}$，结合单调性知，$f(x)$ 在定义域上有且仅有两个零点，分别位于 (e^{-2},e^{-1})，(e,e^2) 上。
2. 已知 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0$ 为 $f(x)$ 零点。曲线 $y=\ln x$ 在 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线方程为 $y=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0$，令
$$g(x)=e^x-\left[\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0\right]\ \Rightarrow\ g'(x)=e^x-\frac{1}{x_0}=0\ \Rightarrow\ x=\ln x_0$$
若 $x_0\in(0,1)$，则 $g(x)$ 在 $(\ln x_0,+\infty)$ 上单调增，在 $(-\infty,\ln x_0)$ 上单调减。最小值
$$g(\ln x_0)=e^{\ln x_0}-\left[\frac{1}{x_0}(\ln x_0-x_0)+\ln x_0\right]=0$$
因此上述切线与 $y=e^x$ 图像有且仅有一个交点，这是相切关系。

CEE 高考题目 TAG 切线 DIF 易

题目 061 已知函数 $f(x)$ 的导数 $0<f'(x)<1$，常数 α 为方程 $f(x)=x$ 的实数根。

1. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 I，求证：对任意 $[a,b]\subseteq I$，存在 $x_0\in[a,b]$，使等式 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$ 成立。
2. 求证: 方程 $f(x)=x$ 不存在异于 α 的实数根, 当 $x>\alpha$ 时, 总有 $f(x)<x$ 成立。
3. 对任意 x_1,x_2, 若满足 $|x_1-\alpha|<1,|x_2-\alpha|<1$, 求证: $|f(x_1)-f(x_2)|<2$。

解答

1. 仿照 柯西中值定理 的证明方法，设 $h(x)=(f(b)-f(a))(x-a)-(f(x)-f(a))(b-a)$，则 $h'(x)=(f(b)-f(a))-f'(x)(b-a)$，$h(a)=h(b)=0$，由于 $f(x)$ 连续，故在 $[a,b]$ 上必可（在 $x_0\in[a,b]$ 处）取得最大值 $\Rightarrow\exists\, x_0\in[a,b]$ 使得 $h'(x_0)=0\Leftrightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$。
2. 设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g'(x)=f'(x)-1<0$, 故 $g(x)$ 在 I 上严格单调递减, 其零点至多有一个, 即 $f(x)=x$ 至多有一个根 α, 当 $x>\alpha$ 时, $g(x)<0\Leftrightarrow f(x)<x$。
3. 由于 $f(x)$ 单调增，不妨设 $x_2>x_1$。由上题结论，取 $c>\alpha$，则 $|f(c)-\alpha|=f(c)-\alpha<c-\alpha=|c-\alpha|$；取 $c<\alpha$，则 $|f(c)-\alpha|=\alpha-f(c)<\alpha-c=|\alpha-c|$，因此 $\forall\, x$ 始终有 $|f(x)-\alpha|\leqslant|x-\alpha|$，当仅当 $x=\alpha$ 时取等。因此
$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|f(x_1)-\alpha+\alpha-f(x_2)|\leqslant|f(x_2)-\alpha|+|f(x_1)-\alpha|\\&\leqslant|x_2-\alpha|+|x_1-\alpha|<2\end{aligned}$$

TAG 不等式 拉格朗日中值定理 DIF 易

题目 062 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}+a\ln x(x>0)$，$f(x)$ 得到函数为 $f'(x)$，对任意两个不相等的正数 x_1,x_2，证明:

1. 当 $a\leqslant 0$ 时，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$。
2. 当 $a\leqslant 4$ 时，$|f'(x_1)-f'(x_2)|>|x_1-x_2|$。

DIF 易

A

在 $x = 0$ 处展开的泰勒级数多项式与被展开的函数图像比对

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

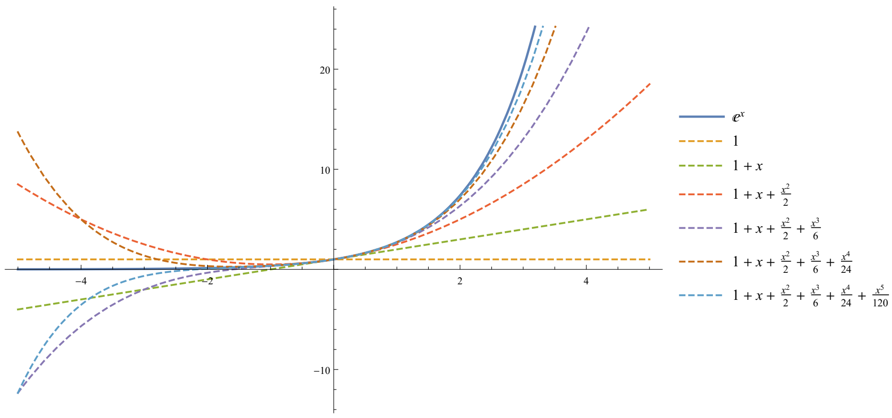

Figure A.1: $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处展开后的截断多项式的图像和原函数图像。

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

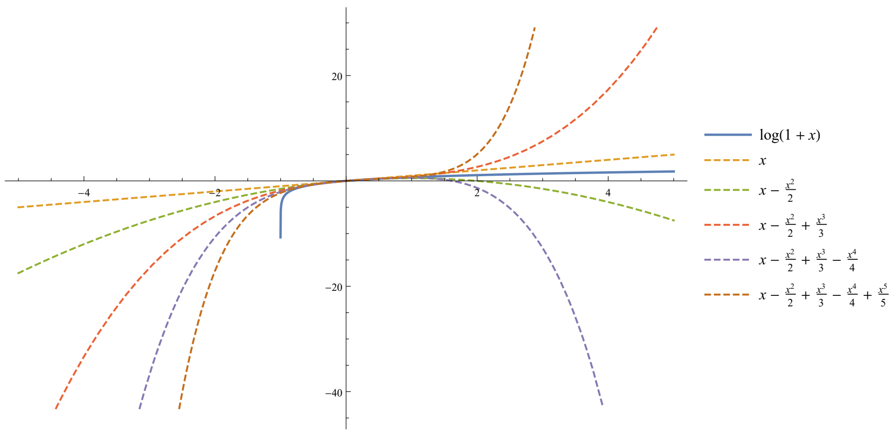

Figure A.2: $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处展开后的截断多项式的图像和原函数图像。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

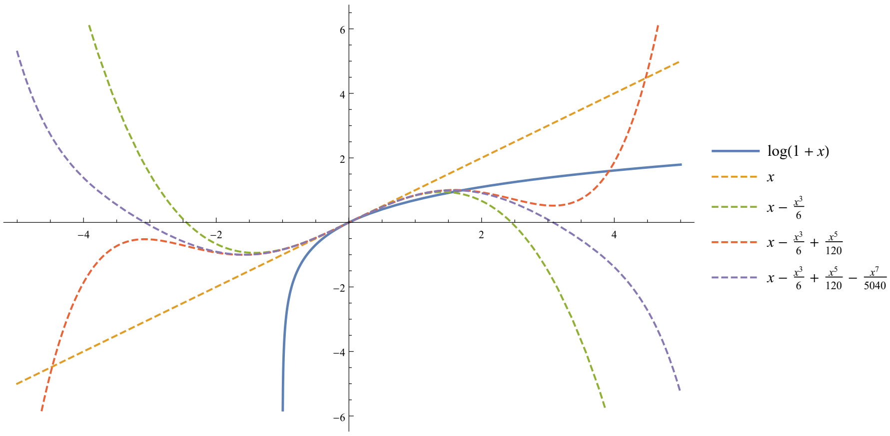

Figure A.3: $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处展开后的截断多项式的图像和原函数图像。

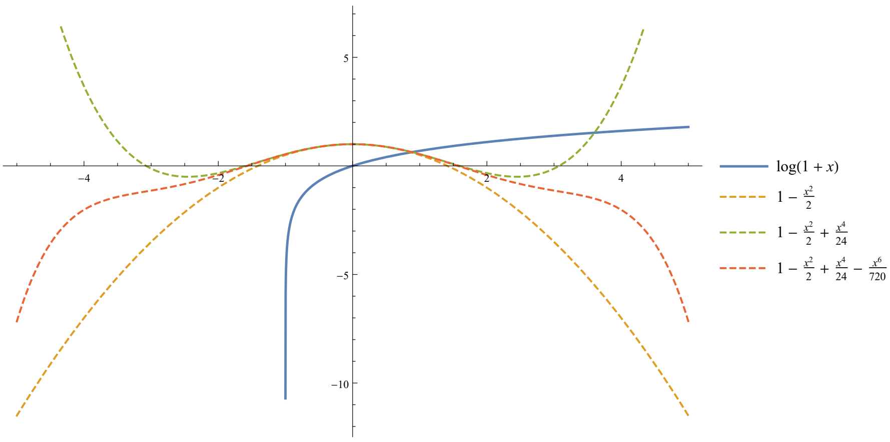

Figure A.4: $f(x) = \cos x$ 在 $x = 0$ 处展开后的截断多项式的图像和原函数图像。