图论专题

whx

October 7, 2017

欧拉回路

- 定义

欧拉回路

- 定义
- 判定条件：度为偶数（入度等于出度）+ 联通

欧拉回路

- 定义
- 判定条件：度为偶数（入度等于出度）+ 联通
- 欧拉通路

欧拉回路

- 定义
- 判定条件：度为偶数（入度等于出度）+ 联通
- 欧拉通路
- 圈套圈算法（常见错误写法）

欧拉回路

```
void dfs(int x){
  for(int&i=g[x];i;){
    if(vis[i]){i=nxt[i];continue;}
    vis[i]=vis[i^1]=1;
    int j=w[i];
    dfs(v[i]);
    ans[++cnt]=j;
  }
}
```

cf788 B

- $n \leq 10^6$ 个点 $m \leq 10^6$ 条边的无向图

cf788 B

- $n \leq 10^6$ 个点 $m \leq 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次

cf788 B

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同

cf788 B

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同
- 转为欧拉通路

cf788 B

- $n \le 10^6$ 个点 $m \le 10^6$ 条边的无向图
- 路径是好的当且仅当它经过 $m-2$ 条边两次，剩下两条边一次
- 求有多少个这样的好路径，两个路径不同当且仅当经过路径的 multiset 不同
- 转为欧拉通路
- 除了特殊的两个边剩下的边对点度数的贡献都是偶数，所以特殊的两个边必须共一个点

差分约束

- 最短路和最长路的方程移项

差分约束

- 最短路和最长路的方程移项
- 其实就是推不等式的过程

网络流和费用流

- 定义

网络流和费用流

- 定义
- 割的定义

网络流和费用流

- 定义
- 割的定义
- 最大流最小割定理

网络流和费用流

- 定义
- 割的定义
- 最大流最小割定理
- 上下界网络流的建模（后面会用到）

网络流和费用流

- 定义
- 割的定义
- 最大流最小割定理
- 上下界网络流的建模（后面会用到）
- dinic 与 unit graph

二分图匹配和霍尔定理

- 霍尔定理

正则二分图

- 每个点的度均为 k 的二分图

正则二分图

- 每个点的度均为 k 的二分图
- 一定可以拆成 k 个匹配的并!

codechef BCYCLES

- 每个点度数都为 3 的二分图，分割成若干个简单环使得每个边恰好在两个简单环中。

codechef BCYCLES

- 每个点度数都为 3 的二分图，分割成若干个简单环使得每个边恰好在两个简单环中。
- $n \leq 10^5$

codechef BCYCLES

- 每个点度数都为 3 的二分图，分割成若干个简单环使得每个边恰好在两个简单环中。
- $n \leq 10^5$
- 先拆成三个匹配，然后两两拼一起求欧拉回路。

Turán's theorem and Ramsey's theorem

- 图论里有很多有意思的制衡量，可以成为新的出题点。

Turán's theorem and Ramsey's theorem

- 图论里有很多有意思的制衡量，可以成为新的出题点。
- 比如 Turán's theorem：图的最大团限制了图的边数

Turán's theorem and Ramsey's theorem

- 图论里有很多有意思的制衡量，可以成为新的出题点。
- 比如 Turán's theorem：图的最大团限制了图的边数
- 比如 Ramsey's theorem：图的最大团和最大独立集大小限制了图的点数

Turán’s theorem and Ramsey’s theorem

- 图论里有很多有意思的制衡量，可以成为新的出题点。
- 比如 Turán’s theorem：图的最大团限制了图的边数
- 比如 Ramsey’s theorem：图的最大团和最大独立集大小限制了图的点数
- 因为是 npc 问题相关，所以非常有趣

Turán's theorem

- 最大团为 k 的图最多能有多少条边呢?

Turán's theorem

- 最大团为 k 的图最多能有多少条边呢?
- 等于一个完全 k 部图的能有的最大边数

Turán's theorem

- 最大团为 k 的图最多能有多少条边呢?
- 等于一个完全 k 部图的能有的最大边数
- 每个最大团为 k 的图度弱于一个完全 k 部图!

Turán's theorem

- 最大团为 k 的图最多能有多少条边呢?
- 等于一个完全 k 部图的能有的最大边数
- 每个最大团为 k 的图度弱于一个完全 k 部图!
- 证明? 取度数最大的点

Turán's theorem

- 最大团为 k 的图最多能有多少条边呢?
- 等于一个完全 k 部图的能有的最大边数
- 每个最大团为 k 的图度弱于一个完全 k 部图!
- 证明? 取度数最大的点
- 他连到的点中最大团最大为 $k-1$,根据数学归纳法变成一个完全 $k-1$ 部图

Turán's theorem

- 最大团为 k 的图最多能有多少条边呢？
- 等于一个完全 k 部图的能有的最大边数
- 每个最大团为 k 的图度弱于一个完全 k 部图！
- 证明？取度数最大的点
- 他连到的点中最大团最大为 $k-1$，根据数学归纳法变成一个完全 $k-1$ 部图
- 把他和他没连到的点放到新的集合里，因为它是度数最大的点，所以一定满足度弱的限制

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?
- 考虑最大团不超过 r，最大独立集不超过 s 的图，假设最多能有 $R(r,s)$ 个点

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?
- 考虑最大团不超过 r，最大独立集不超过 s 的图，假设最多能有 $R(r,s)$ 个点
- 显然归纳基础是 $R(0,i)=R(i,0)=0$

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?
- 考虑最大团不超过 r，最大独立集不超过 s 的图，假设最多能有 $R(r,s)$ 个点
- 显然归纳基础是 $R(0,i)=R(i,0)=0$
- 那么考虑我们把 $R(r,s-1)+R(r-1,s)+2$ 个点拼一起

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?
- 考虑最大团不超过 r，最大独立集不超过 s 的图，假设最多能有 $R(r,s)$ 个点
- 显然归纳基础是 $R(0,i)=R(i,0)=0$
- 那么考虑我们把 $R(r,s-1)+R(r-1,s)+2$ 个点拼一起
- 选一个点出来，和它有边的集合不能超过 $R(r-1,s)$ 和它没边的集合不能超过 $R(r,s-1)$

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?
- 考虑最大团不超过 r，最大独立集不超过 s 的图，假设最多能有 $R(r,s)$ 个点
- 显然归纳基础是 $R(0,i)=R(i,0)=0$
- 那么考虑我们把 $R(r,s-1)+R(r-1,s)+2$ 个点拼一起
- 选一个点出来，和它有边的集合不能超过 $R(r-1,s)$ 和它没边的集合不能超过 $R(r,s-1)$
- 轻易地推出矛盾了，所以 $R(r,s) \leq R(r-1,s)+R(r,s-1)+1$

Ramsey's theorem

- 最大团和最大独立集都小于等于 k 的图最多能有多少个点是否有界呢?
- 考虑最大团不超过 r，最大独立集不超过 s 的图，假设最多能有 $R(r,s)$ 个点
- 显然归纳基础是 $R(0,i)=R(i,0)=0$
- 那么考虑我们把 $R(r,s-1)+R(r-1,s)+2$ 个点拼一起
- 选一个点出来，和它有边的集合不能超过 $R(r-1,s)$ 和它没边的集合不能超过 $R(r,s-1)$
- 轻易地推出矛盾了，所以 $R(r,s)\le R(r-1,s)+R(r,s-1)+1$
- 两个定理里透露出来的共同技巧? 找一个特殊点出来分和它有边和无边的集合讨论。

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值
- $n \le 5 * 10^5$

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值
- $n \le 5 * 10^5$
- 两点间颜色不同，那么任何一个路径上都一定会有不同

USACO OPEN17 grass

- 动态修改点的颜色，求不同色点间边权的最小值
- $n \leq 5 * 10^5$
- 两点间颜色不同，那么任何一个路径上都一定会有不同
- 取最小生成树，每个点维护下孩子的所有颜色

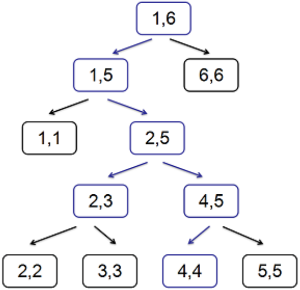
UNR 奇怪的线段树

- 按照任意顺序分治形成的线段树

UNR 奇怪的线段树

- 按照任意顺序分治形成的线段树
- 定位一个区间会经过若干区间把他们全部染黑

UNR 奇怪的线段树

- 按照任意顺序分治形成的线段树
- 定位一个区间会经过若干区间把他们全部染黑
- 

UNR 奇怪的线段树

- 现在定位了一些区间，给你染黑的情况，请你求出至少要定位多少个区间才能变成这样。

UNR 奇怪的线段树

- 现在定位了一些区间，给你染黑的情况，请你求出至少要定位多少个区间才能变成这样。
- $n \leq 4000$

UNR 奇怪的线段树

- 显然把所有染黑部分的叶子覆盖了即可

UNR 奇怪的线段树

- 显然把所有染黑部分的叶子覆盖了即可
- 做一些观察，一个合法的染黑区间一定是不能同时选某个点的左儿子和右儿子并且连续的路径

UNR 奇怪的线段树

- 显然把所有染黑部分的叶子覆盖了即可
- 做一些观察，一个合法的染黑区间一定是不能同时选某个点的左儿子和右儿子并且连续的路径
- 每个左孩子的后继可以连到和他连续并且深度大于它的所有节点（还会是一个左孩子）

UNR 奇怪的线段树

- 显然把所有染黑部分的叶子覆盖了即可
- 做一些观察，一个合法的染黑区间一定是不能同时选某个点的左儿子和右儿子并且连续的路径
- 每个左孩子的后继可以连到和他连续并且深度大于它的所有节点（还会是一个左孩子）
- 每个右孩子的后继可以连到任意一个和他连续的节点

UNR 奇怪的线段树

- 显然把所有染黑部分的叶子覆盖了即可
- 做一些观察，一个合法的染黑区间一定是不能同时选某个点的左儿子和右儿子并且连续的路径
- 每个左孩子的后继可以连到和他连续并且深度大于它的所有节点（还会是一个左孩子）
- 每个右孩子的后继可以连到任意一个和他连续的节点
- 所以路径一定是一段右儿子一段左儿子

UNR 奇怪的线段树

- 建图的时候把左孩子和自己的左孩子串起来，并且把每个点串到左端点上即可

UNR 奇怪的线段树

- 建图的时候把左孩子和自己的左孩子串起来，并且把每个点串到左端点上即可
- 然后变成了用最少的路径覆盖一个 DAG 的问题

UNR 奇怪的线段树

- 建图的时候把左孩子和自己的左孩子串起来，并且把每个点串到左端点上即可
- 然后变成了用最少的路径覆盖一个 DAG 的问题
- 上下界网络流即可

差分约束的解是否唯一

- 判断差分约束的解是不是唯一的

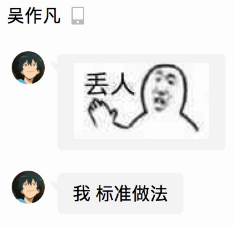
差分约束的解是否唯一

- 判断差分约束的解是不是唯一的
- 标准做法：拆点对应为割，随机权值看割是否唯一

差分约束的解是否唯一

- 判断差分约束的解是不是唯一的
- 标准做法：拆点对应为割，随机权值看割是否唯一
- 逗比做法：最长路最短路两边差分约束求出上下界

差分约束的解是否唯一

- 判断差分约束的解是不是唯一的
- 标准做法：拆点对应为割，随机权值看割是否唯一
- 逗比做法：最长路最短路两边差分约束求出上下界
- 

过每一点的最小环

- 无向图中，求经过某一点的最小环，保证边权大于 0

过每一点的最小环

- 无向图中，求经过某一点的最小环，保证边权大于 0
- 标准做法：分治 floyd

过每一点的最小环

- 无向图中，求经过某一点的最小环，保证边权大于 0
- 标准做法：分治 floyd
- 逗比做法：二进制分组最短路

欧拉回路的与匹配问题

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$

欧拉回路的与匹配问题

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$

欧拉回路的与匹配问题

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?

欧拉回路的与匹配问题

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?
- 行列连边连出一个二分图，求欧拉回路黑白染色

欧拉回路的与匹配问题

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?
- 行列连边连出一个二分图，求欧拉回路黑白染色
- 那么差小于等于 1 我们可以每个奇数行列加一个边使得它存在欧拉回路

欧拉回路的与匹配问题

- 有一些点 (x, y)，请你对点黑白染色，使得每行每列都满足 $|blackpoint - whitepoint| <= 1$
- $n \leq 2 * 10^5$
- 如果白色点个数等于黑色点个数怎么做呢?
- 行列连边连出一个二分图，求欧拉回路黑白染色
- 那么差小于等于 1 我们可以每个奇数行列加一个边使得它存在欧拉回路
- 二分图两边的奇数点的个数不一定一样多，所以应该两边建两个虚点，然后连到虚点

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0
- 那么我们差分一下这个 s_i, 那么每个区间的贡献就是 a_l++, $a_{r+1}--$，或者 a_l--,$a_{r+1}++$

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0
- 那么我们差分一下这个 s_i, 那么每个区间的贡献就是 a_l++, $a_{r+1}--$，或者 a_l--,$a_{r+1}++$
- 连一条 l 和 $r+1$ 之间的边，求欧拉回路黑白染色

cf429 E

- 有一些区间 $[li, ri]$，请你对这些区间黑白染色，使得每个点覆盖它的 $|blacksegment - whitesegment| \leq 1$
- $n \leq 10^5$
- 考虑如果是等于，那么就是每个点的被覆盖次数 s_i 等于 0
- 那么我们差分一下这个 s_i, 那么每个区间的贡献就是 a_l++, $a_{r+1}--$，或者 a_l--,$a_{r+1}++$
- 连一条 l 和 $r+1$ 之间的边，求欧拉回路黑白染色
- 大于等于 1 怎么做呢？这里可以把奇数点两两配对了

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配
- 如何用 OI 中的 flow technique 达到 km 的时间复杂度呢?

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配
- 如何用 OI 中的 flow technique 达到 km 的时间复杂度呢?
- 先取反变成变成最小权，然后为了把负权变成正权，我们使用退流建图

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配
- 如何用 OI 中的 flow technique 达到 km 的时间复杂度呢?
- 先取反变成变成最小权，然后为了把负权变成正权，我们使用退流建图
- 接下来用初始对偶的办法 dijkstra，注意由于 $m = O(n^2)$，所以不用用堆，暴力找最小即可

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配
- 如何用 OI 中的 flow technique 达到 km 的时间复杂度呢?
- 先取反变成变成最小权，然后为了把负权变成正权，我们使用退流建图
- 接下来用初始对偶的办法 dijkstra，注意由于 $m = O(n^2)$，所以不用用堆，暴力找最小即可
- 实际效果如何呢?

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配
- 如何用 OI 中的 flow technique 达到 km 的时间复杂度呢?
- 先取反变成变成最小权，然后为了把负权变成正权，我们使用退流建图
- 接下来用初始对偶的办法 dijkstra，注意由于 $m = O(n^2)$，所以不用用堆，暴力找最小即可
- 实际效果如何呢?
- 我自己实现了一遍之后发现常数实在很大，和 zzt 说过了之后，zzt 使劲一卡常

用网络流做到 km 的时间复杂度

- $O(n^3)$ 的二分图最大权匹配
- 如何用 OI 中的 flow technique 达到 km 的时间复杂度呢?
- 先取反变成变成最小权，然后为了把负权变成正权，我们使用退流建图
- 接下来用初始对偶的办法 dijkstra，注意由于 $m = O(n^2)$，所以不用用堆，暴力找最小即可
- 实际效果如何呢?
- 我自己实现了一遍之后发现常数实在很大，和 zzt 说过了之后，zzt 使劲一卡常
- 卡常技术技不如人，甘拜下风

用网络流做到 km 的时间复杂度

#180068	#80. 二分图最大权匹配	ez_zjt	100	5215ms	1824kb	C++	1.6kb
#81123	#80. 二分图最大权匹配	CCGV2	100	5750ms	8148kb	C++	3.0kb
#174924	#80. 二分图最大权匹配	whzzt	100	16179ms	6152kb	C++	2.9kb

14 15 16 17 18 19