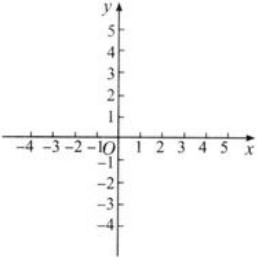
计算几何

叶芃

2018年2月10日

直角坐标系



点

用一个二元组(x, y)表示平面上的点.

向量

具有大小和方向的量.

向量的坐标表示

把向量的起点移到原点,用这时的终点坐标表示向量.

向量的坐标表示

把向量的起点移到原点,用这时的终点坐标表示向量.

设$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

向量的长度

向量(x,y)的长度为$\sqrt{x^2+y^2}$.

这也是点(x,y)到原点的欧几里得距离.

向量的基本运算

设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2), \lambda \in \mathbb{R}$.

向量的基本运算

设$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2), \lambda \in \mathbb{R}$.

加法：$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

减法：$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

数乘：$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$.

向量的基本性质

非零向量$\vec{e_1}$与$\vec{e_2}$不共线,则对于任意向量$\vec{a}$,存在唯一实数λ,μ,使得$\vec{a}=\lambda\vec{e_1}+\mu\vec{e_2}$.

向量的基本性质

非零向量$\vec{e_1}$与$\vec{e_2}$不共线,则对于任意向量$\vec{a}$,存在唯一实数λ, μ,使得$\vec{a} = \lambda\vec{e_1} + \mu\vec{e_2}$.

设A, B, C三点共线且不重合,则存在$\lambda \in \mathbb{R}$,使得$\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OC}$.

向量的点积

点积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

点积的几何意义：$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$.

点积的应用：计算夹角

点积的性质

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

$$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}).$$

向量的叉积

叉积：$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

叉积的几何意义：$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta$.

叉积的应用：计算面积

叉积的性质

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$
$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}).$$

向量的旋转

$$(x, y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

误差

由于浮点运算会带来精度误差,很多情况下我们不能像通常那样判断两个数相等.

误差

由于浮点运算会带来精度误差,很多情况下我们不能像通常那样判断两个数相等.

通常我们取一个很小的ε,如果$|a-b|<\varepsilon$,我们就认为$a=b$.

直线

用$P+\lambda\vec{v}$表示一条直线.

点到直线的距离

点Q到直线$P+\lambda\vec{v}$的距离：$\frac{\vec{v}\times\overrightarrow{PQ}}{|\vec{v}|}$.

判断点在直线上

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = 0.$$

直线求交

求直线$P+\lambda\vec{u}$和$Q+\lambda\vec{v}$的交点.

设$P+k\vec{u}$为交点.

则$(P+k\vec{u}-Q)\times\vec{v}=0$,由此解出$k$.

线段判交

判断线段AB和CD是否有交.

线段判交

判断线段AB和CD是否有交.

判断A, B是否位于直线CD两侧,C, D是否位于直线AB两侧.

求多边形面积

利用有向面积.

判断点在多边形内

射线法,转角法.

快速判断点在凸多边形内

将凸多边形切成若干三角形.

快速判断点在凸多边形内

将凸多边形切成若干三角形.

然后按极角排序,只需判断点是否在三角形内.

凸包

S为$\mathbb{R}^n$中的点集,如果$\forall a, b \in S, \forall \lambda \in [0,1]$,均有$\lambda a + (1-\lambda) b \in S$,则称$S$是凸集.

凸包

S为$\mathbb{R}^n$中的点集,如果$\forall a, b \in S, \forall \lambda \in [0,1]$,均有$\lambda a + (1-\lambda) b \in S$,则称$S$是凸集.

称包含点集X的凸集之交为X的凸包.

凸包

S为$\mathbb{R}^n$中的点集,如果$\forall a, b \in S, \forall \lambda \in [0,1]$,均有$\lambda a + (1-\lambda)b \in S$,则称$S$是凸集.

称包含点集X的凸集之交为X的凸包.

对于n个点$a_1, \ldots, a_n$,求凸包就是求包含它们的一个最小的凸多边形.

Graham扫描法

极角序:

- 取出y坐标最小的点中,x最小的点.

Graham扫描法

极角序:

- 取出y坐标最小的点中,x最小的点.
- 以该点为原点,将其余点按极角排序.

Graham扫描法

极角序:

- 取出y坐标最小的点中,x最小的点.
- 以该点为原点,将其余点按极角排序.
- 在扫描的过程中,用栈维护当前凸包.

Graham扫描法

水平序：

- 以x坐标为第一关键字,y坐标为第二关键字排序.

Graham扫描法

水平序：

- 以x坐标为第一关键字,y坐标为第二关键字排序.
- 同样用栈维护,先从头到尾求一遍下凸壳,再从尾到头求一边上凸壳.

例题

给定n条平行于y轴的线段,确定一条将其全部穿过的直线,不考虑不存在的情况.

$n \leq 1000$.

例题

给定n条平行于y轴的线段,确定一条将其全部穿过的直线,不考虑不存在的情况.

$n \leq 1000$.

求出上端点的下凸包和下端点的上凸包,它们不会有交.

枚举凸包边所在的直线检验.

例题

如果n更大呢?

例题

如果n更大呢?

考虑将下凸包往上平移,直到相交.

例题

如果n更大呢?

考虑将下凸包往上平移,直到相交.

如果是线与线或点与线相交,该线就是答案.

例题

如果n更大呢?

考虑将下凸包往上平移,直到相交.

如果是线与线或点与线相交,该线就是答案.

否则,答案一定在与交点相连的边中.

旋转卡壳

对踵点：如果过凸多边形上的两个点,能够做出两条平行直线将凸多边形夹在中间,则称这两个点是一对对踵点.

旋转卡壳

对踵点：如果过凸多边形上的两个点,能够做出两条平行直线将凸多边形夹在中间,则称这两个点是一对对踵点.

旋转直线,总可以使其中一条直线与某条边平行.

旋转卡壳

对踵点：如果过凸多边形上的两个点,能够做出两条平行直线将凸多边形夹在中间,则称这两个点是一对对踵点.

旋转直线,总可以使其中一条直线与某条边平行.

为求对踵点,只需要枚举边,对踵点一定是离该边距离最远的点.

旋转卡壳

对踵点：如果过凸多边形上的两个点,能够做出两条平行直线将凸多边形夹在中间,则称这两个点是一对对踵点.

旋转直线,总可以使其中一条直线与某条边平行.

为求对踵点,只需要枚举边,对踵点一定是离该边距离最远的点.

相对于边,该点的位置是单调的.

最远点对

求一堆点中最远的两个点.

最远点对

求一堆点中最远的两个点.

最远点对一定在凸包上,并且是对踵点.

最近点对

求一堆点中最近的两个点.

最近点对

求一堆点中最近的两个点.

用一条平行于y轴的直线将点分为两部分,递归下去求出每部分的最小值.

最近点对

求一堆点中最近的两个点.

用一条平行于y轴的直线将点分为两部分,递归下去求出每部分的最小值.

设最小值为d,只需考虑中间线距离不超过d的点.

最近点对

求一堆点中最近的两个点.

用一条平行于y轴的直线将点分为两部分,递归下去求出每部分的最小值.

设最小值为d,只需考虑中间线距离不超过d的点.

对于其中的每个点,只需考虑上下与其y坐标之差不超过d的点.

最近点对

求一堆点中最近的两个点.

用一条平行于y轴的直线将点分为两部分,递归下去求出每部分的最小值.

设最小值为d,只需考虑中间线距离不超过d的点.

对于其中的每个点,只需考虑上下与其y坐标之差不超过d的点.

根据抽屉原理,可以证明这样的点不会超过6个.

动态凸包

支持插入点,询问点是否在凸包内.

动态凸包

支持插入点,询问点是否在凸包内.

用平衡树分别维护上下凸壳,插入时先找到相应的位置,判断点是否在凸包内(是否产生新凸包).

动态凸包

支持插入点,询问点是否在凸包内.

用平衡树分别维护上下凸壳,插入时先找到相应的位置,判断点是否在凸包内(是否产生新凸包).

插入后向左右查找,删去不在凸包上的点.

半平面

半平面：一条直线将平面分成两部分,每部分称作一个半平面.

半平面交

分治求半平面交：

- 将半平面分成两部分.

半平面交

分治求半平面交:

- 将半平面分成两部分.
- 先递归下去,得到两个凸多边形.

半平面交

分治求半平面交：

- 将半平面分成两部分.
- 先递归下去,得到两个凸多边形.
- 只需要在线性时间内求出两个凸多边形的交即可做到$O(n\log n)$.

半平面交

极角排序求半平面交：

- 将半平面按极角排序.

半平面交

极角排序求半平面交：

- 将半平面按极角排序.
- 用双端队列维护半平面交.

半平面交

极角排序求半平面交：

- 将半平面按极角排序.
- 用双端队列维护半平面交.
- 每次插入删去队头和队尾的某些半平面.

半平面交

极角排序求半平面交：

- 将半平面按极角排序.
- 用双端队列维护半平面交.
- 每次插入删去队头和队尾的某些半平面.
- 需要注意最初加入的半平面可能会删掉最后加入的点

圆

用圆心C和半径r来描述.

圆

用圆心C和半径r来描述.

圆上的一点可以被表示为$C + (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

圆

已知不共线的三点,求过三点的圆.

圆

已知不共线的三点,求过三点的圆.

垂直平分线.

圆与直线交点

$$(P + k\vec{v} - C)^2 = r^2.$$

圆与圆交点

先求出公共弦的方程.

点到圆的切线

先求出切线长,然后转化成圆与圆的焦点.

圆与圆的公切线

最多有两条内公切线与两条外公切线.

圆与圆的公切线

最多有两条内公切线与两条外公切线.

外公切线:以大圆圆心为圆心,两圆的半径之差为半径作一个圆.再从小圆的圆心向该圆作切线,最后将切线向垂直方向平移.

圆与圆的公切线

最多有两条内公切线与两条外公切线.

外公切线:以大圆圆心为圆心,两圆的半径之差为半径作一个圆.再从小圆的圆心向该圆作切线,最后将切线向垂直方向平移.

内公切线:利用半径之比,求出内公切线与圆心连线的交点,从该点向圆作切线.

例题

有n个圆盘从天而降,后面落下的可以盖住前面的,求最后形成的封闭区域的周长.

$n \leq 1000.$

例题

有n个圆盘从天而降,后面落下的可以盖住前面的,求最后形成的封闭区域的周长.

$n \leq 1000.$

对于每个圆,其它圆会覆盖它的一段圆弧.

做贪心线段覆盖,将未被覆盖的计入答案.

积分与面积

积分是求面积的一种重要手段.

积分与面积

积分是求面积的一种重要手段.

设$f \in \mathscr{C}[a,b]$,满足$f(x) \geq 0$,则由曲线$y = f(x), x = a, x = b$与x轴所围平面区域的面积S等于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

积分与面积

参数方程:$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$

积分与面积

参数方程:$S=\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$

极坐标:$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\rho(\theta))^2\mathrm{d}\theta.$

积分与弧长

参数方程:$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t.$

积分与弧长

参数方程:$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t.$

极坐标:$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}\theta.$

积分的其他应用

绕x轴旋转生成的旋转体体积:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x.$$

绕y轴旋转生成的旋转体体积:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x.$$

绕x轴旋转生成的旋转体侧面积:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x.$$

绕y轴旋转生成的旋转体侧面积:

$$S = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x.$$

Simpson积分

利用二次曲线拟合被积函数.

Simpson积分

利用二次曲线拟合被积函数.

设$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$,$c = \frac{a+b}{2}$.

Simpson积分

利用二次曲线拟合被积函数.

设$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$,$c = \frac{a+b}{2}$.

则$g(x) =$

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b) + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}f(c).$$

Simpson积分

利用二次曲线拟合被积函数.

设$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$,$c = \frac{a+b}{2}$.

则$g(x) =$
$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)} f(c)$.

于是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b g(x)\mathrm{d}x =$
$\frac{1}{6}(b-a)(f(a)+f(b)+4f(c))$.

Simpson积分

利用二次曲线拟合被积函数.

设$f(x) \in \mathscr{R}[a,b]$,$c = \frac{a+b}{2}$.

则$g(x) =$

$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b) + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-b)(c-a)}f(c)$.

于是$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b g(x)\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{6}(b-a)(f(a)+f(b)+4f(c))$.

可以证明误差项为$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$.

End

祝大家在省选中取得好成绩.